基于两组谱恢复图上的全局时滞 Sturm–Liouville 型算子

Sergey Buterin[1]

摘要。本文为具有全局时滞的星形图上的二阶泛函微分算子的逆谱问题提出了一种新的表述。所谓全局时滞，是指沿指向某个特定边界顶点（称为根顶点）的方向测量的时滞，经由内部顶点传播到其他边。本文旨在根据图上两个边值问题的谱恢复势函数，这两个问题在除根顶点外的所有边界顶点处具有一组共同的边界条件。我们证明了唯一性定理，并在共同边界条件为 Robin 型且两两线性无关的假设下，给出了求解该逆问题的构造性方法。尽管本文重点研究边长相等且时滞参数也等于边长的图，但所提出的表述有望适用于更一般的情形，包括边长不等的非星形树以及全局时滞参数取值范围较广的情况。

关键词：泛函微分方程、常延迟、全局时滞、全局非局部算子、度量图、量子图、谱反问题

2010年数学主题分类：34A55 34K29 34B45

arXiv:2304.14266v1 [math.SP] 27 Apr 2023

1. 引言

本文检验了带有全局时滞的星形图上 Sturm– Liouville 型算子的一种逆谱问题的新表述，这类算子是在 [1] 中引入的。与用于恢复树上经典 Sturm–Liouville 算子的数据相比，这种表述显著减少了输入数据。此外，新表述只需改变一个边界顶点处的边界条件，即可收集全部必要的谱信息，这成为图上逆谱理论的一项新特点。

几何图上的纯微分（局部）算子通常称为量子图算子，可用于建立有机化学、介观物理、量子力学、纳米技术、流体力学、波导理论以及其他应用领域 [2–11] 中网络和分支结构所出现的各种过程的模型。量子图理论包括大量关于从谱特征恢复算子的反问题研究（见 [12–20] 及其中的参考文献）。特别地， [15] 中已证明，要唯一确定具有 m 个边界顶点的任意紧树上所有边上的 Sturm–Liouville势函数，只需给出恰好 m 个特别选取的边值问题的谱。收集这些谱的方式推广了 Borg [21–23] 提出的经典逆 Sturm– Liouville 问题。此外，在树上纯微分算子的谱反问题的其他表述中，这类输入数据仍然是最少的。

关于图上的泛函微分算子以及其他类别的非局部算子，相关研究大多集中于局部非局部情形，即每条边上的相应非局部方程都可以独立于其他边进行处理 [24–30]。这一限制使得非局部性如何与图的内部顶点共存仍不明确。

然而，在 [1], 中，我们引入了定义在几何图上的带有全局时滞的Sturm–Liouville型算子，该时滞自然地延伸通过内部顶点。在由 m 条相等边组成的星形图上，这一思想可通过边值问题加以说明

$$-y_j''(x)+q_j(x)y_j(x-a)=\lambda y_j(x),\quad 0<x<1,\quad j=\overline{1,m}, \tag{1}$$

[1]数学系，萨拉托夫国立大学，俄罗斯，电子邮箱：buterinsa@sgu.ru

$$y_j(x-a) = y_1(x-a+1), \quad \max\{0, a-1\} < x < \min\{a, 1\}, \quad j = \overline{2,m}, \tag{2}$$

$$y_1(1) = y_j(0), \quad j = \overline{2,m}, \qquad y_1'(1) = \sum_{j=2}^{m} y_j'(0), \tag{3}$$

$$y_1^{(\nu_1)}(0) + \nu_1 H_1 y_1(0) = 0, \quad V_j(y_j) := y_j^{(\nu_j)}(1) + \nu_j H_j y_j(1) = 0, \quad j = \overline{2,m}, \tag{4}$$

其中 $a \in (0, 2)$，而 $\nu_j \in \{0, 1\}$ 和 $H_j \in \mathbb{C}$ 对于 $j = 1, \ m.$。此外，还假设所有势函数 $q_j(x)$均属于 $L_2(0, 1)$，并满足条件

$$q_1(x) = 0, \ \ x \in (0, \min\{a, 1\}), \qquad q_j(x) = 0, \ \ x \in (0, \max\{0, a-1\}), \ \ j = \overline{2,m}, \tag{5}$$

这些条件使 (1) 中的方程有明确的定义。假设 (1) 中第 j 个方程定义在图 Γ_m 的边 e_j 上（如图1所示），可以看出，关系式 (3) 给出了内部顶点 v_1 处的标准匹配条件，而 (4) 则在边界顶点 v_0 和 v_j 处成为 Dirichlet 边界条件和/或 Robin 边界条件，分别对应 $j = 2, \ m.$

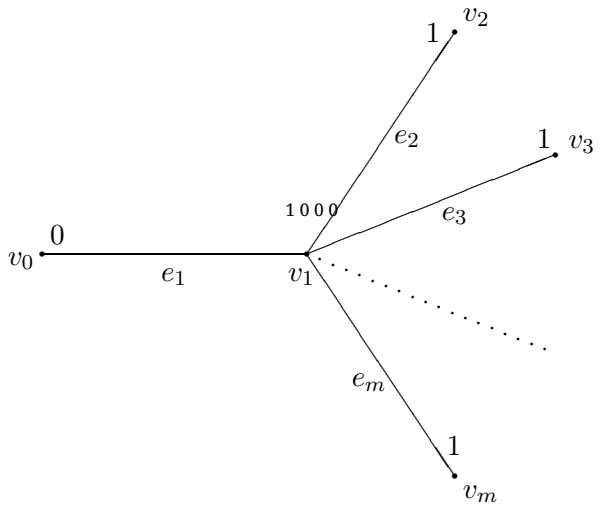


图1. 图 Γ_m

关系式 (1)–(5) 生成一个具有全局时滞 $a.$ 的非局部算子。后者沿朝向边界顶点 v_0 的方向测量，我们将其称为根顶点。条件 (2) 为 (1) 中除第一个方程外的所有方程指定了一个初始函数。换言之，这些方程总是涉及边 $e_1.$ 上的未知函数 $y_1(x)$。这意味着，时滞会“延伸”或“传播”经过内部顶点 $v_1.$。在 [1], 中，这一新特性也以自然的方式推广到了边长可变的任意树上的算子。

此外，在 [1], 中，研究了这样一种特殊情形下的 $m = 3$：$a = 1$，其内容是根据对应于两组参数 $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 - 1 = 0$ 和 $\nu_1 = \nu_2 - 1 = \nu_3 = 0$的谱，恢复其余函数 q_2（x）和 q_3（x），而 $H_2 = H_3 = 0.$。该表述类似于 [15] 中针对树上的经典 Sturm–Liouville 算子（$a = 0$）提出的反问题，即通过改变除根顶点外所有边界顶点处的边界条件来获取输入谱数据。

在本文中，我们提出了反问题的另一种表述：该问题始终只涉及通过改变根顶点处的边界条件而获得的两组谱，而其余边界顶点处的相应条件保持不变。下文将针对任意 m 和 $a \in [1, 2)$ 检验这一新的表述。

对于 $\nu = 0, \ 1$，记由关系 (1)–(5) 在以下设置下构成的特征值问题 $\mathcal{B}_\nu := \mathcal{B}_\nu(q, H)$ 的谱为 $\{\lambda_{n,\nu}\}_{n\in\mathbb{N}}$：

$$a \in [1, 2), \quad \nu_1 = \nu, \quad H_1 = 0, \quad \nu_j = 1, \ \ j = \overline{2,m},$$

并且取决于 $q := [q_2, \dots, q_m]$ 和 $H := [H_2, \dots, H_m]$. 事实上，根据 (5)， a 的允许取值自动意味着 $q_1 = 0$，而其余的 $q_j(x)$ 在 $(0, a-1)$ 上几乎处处为零。

考虑以下反问题。

逆问题 1. 已知 $\{\lambda_{n,0}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 以及 a的值，求 $j = 2, m$ 对应的 $q_j(x)$，其中 H_j, $j = 2, m$已先验已知且互不相同。

显然，系数 H_j 的互异性及其已知这一点至关重要，因为我们的目标是针对相应的边 e_j.恢复每个 $q_j(x)$。

以下唯一性定理成立。

定理 1. 设系数 H_j, $j = 2, m$已知且互不相同。那么，给定 $\{\lambda_{n,0}\}_{n\in\mathbb{N}}$和 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\in\mathbb{N}}$以及 a，便可唯一确定所有 $j = 2, m$.对应的 $q_j(x)$。

a 取较小值时，问题更为困难，需要单独研究。不过，对于一定范围内的 $a < 1$，甚至对于采用适当选取的公共边界条件的非星形树，预计也存在类似的唯一性结果。

此外，对于在 [1], 中研究的反问题，可以预期，在将输入数据缩减为问题 $\mathcal{B}_0$ 和 $\mathcal{B}_1$ 的适当子谱后，类似的断言也将成立，但任何此类细化都超出了本文的目标。

注意，在 $m = 2$ 的情形下，问题 $\mathcal{B}_\nu$ 变为区间上带常延迟的通常 Sturm–Liouville 型问题:

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 2, \qquad y^{(\nu)}(0) = y'(2) + H_2 y(2) = 0, \tag{6}$$

其中

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & 0 \le x \le 1, \\ y_2(x-1), & 1 < x \le 2, \end{cases} \qquad q(x) = \begin{cases} q_1(x), & 0 < x < 1, \\ q_2(x-1), & 1 < x < 2, \end{cases}$$

而如果关于 a 的假设仍然成立，则 $q_1(x)$ 实际上将为零。

尽管区间上带常延迟的泛函微分算子的反问题已经得到相当广泛的研究（例如参见 [31–49]），但在 $m = 2$ 的情形下，逆问题 1 在文献中没有任何直接对应物。事实上，关于恢复方程（6）中的 $q(x)$ 的所有研究，讨论的都是区间左端点处的公共边界条件，而不是像（6）中那样的右端点处的公共边界条件。换言之，通常用于恢复 $q(x)$ 的谱实际上对应于边界条件

$$y^{(\nu_1)}(0) + \nu_1 H_1 y(0) = y^{(\nu)}(2) = 0, \quad \nu = 0, 1,$$

其中 $\nu_1 \in \{0, 1\}$ 已固定。尽管当 $a \in [4/5, 2)$ 时， $q(x)$ 可由这些谱唯一确定（见 $[35, 37]$），但近期的一系列论文 [42–44] 证明，对于任意 $a \in (0, 4/5)$，它也可能不具有唯一性（另见 [45] 中的简要综述）。特别是，本文还针对边界条件为 (6) 的情形，提出了关于 $a < 1$ 的类似问题。

本文组织如下。下一节将构造问题 $\mathcal{B}_\nu$. 的特征行列式。定理 1 的证明以及求解逆问题 1 的构造性方法见第 3 节。

2. 特征行列式

记作

$$S_0(x, \lambda) := \frac{\sin \rho x}{\rho}, \quad S_1(x, \lambda) := \cos \rho x. \tag{7}$$

对于 $\nu = 0$、1 和 $j = \overline{2、} m$，我们还引入以下记号

$$v_{\nu,j}(\lambda) := V_j(S_\nu(\cdot\,,\lambda)), \quad Q_{\nu,j}(x,\lambda) = \int_{a-1}^{x} \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} q_j(t) S_\nu(t-a+1,\lambda)\,dt, \quad \rho^2 = \lambda, \quad (8)$$

其中，$V_j(\cdot)$ 是式（4）中定义的线性形式。考虑整函数

$$\Delta_\nu^0(\lambda) = S'_\nu(1,\lambda)\prod_{j=2}^{m} v_{0,j}(\lambda) + S_\nu(1,\lambda)\sum_{j=2}^{m} v_{1,j}(\lambda)\prod_{\substack{l\neq j\\ l=2}}^{m} v_{0,l}(\lambda), \quad \nu = 0,1, \quad (9)$$

and

$$\Delta_\nu(\lambda) = \Delta_\nu^0(\lambda) + \sum_{j=2}^{m} V_j(Q_{\nu,j}(\cdot\,,\lambda))\prod_{\substack{l\neq j\\ l=2}}^{m} v_{0,l}(\lambda), \quad \nu = 0,1. \quad (10)$$

在下文中 , 撇号始终表示关于第一个自变量的微分
。函数 $\Delta_\nu(\lambda)$ 称为问题 $\mathcal{B}_\nu$. 的特征行列式或特征函数。下面的引理成立。

引理 1. 对于 $\nu = 0$，问题 $\mathcal{B}_\nu$ 的特征值 1 与 $\Delta_\nu(\lambda)$ 的零点重合。

证明。根据 [1], ，函数

$$y_1(x) = \sum_{l=0}^{1} C_{l,1} S_l(x,\lambda), \quad y_j(x) = \sum_{l=0}^{1} C_{l,j} S_l(x,\lambda) + \sum_{l=0}^{1} C_{l,1} Q_{l,j}(x,\lambda), \quad j = \overline{2,m}, \quad (11)$$

其中 $C_{l,\ j}$ 为任意常数，构成满足初始函数条件 (2) 的方程组 (1) 的所谓全局通解。将 (11) 代入匹配条件 (3) 以及 $\mathcal{B}_\nu$的边界条件后，我们得到关于向量 $[C_{\nu,1}, C_{0,2}, C_{1,2}, \ldots, C_{0,m}, C_{1,m}]^T$ 的线性代数方程组，其行列式为

$$D_\nu(\lambda) := \begin{vmatrix} S_\nu(1,\lambda) & 0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ S_\nu(1,\lambda) & 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_\nu(1,\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ S'_\nu(1,\lambda) & -1 & 0 & -1 & 0 & \ldots & -1 & 0 \\ V_2(Q_{\nu,2}(\cdot\,,\lambda)) & v_{0,2}(\lambda) & v_{1,2}(\lambda) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ V_3(Q_{\nu,3}(\cdot\,,\lambda)) & 0 & 0 & v_{0,3}(\lambda) & v_{1,3}(\lambda) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ V_m(Q_{\nu,m}(\cdot\,,\lambda)) & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & v_{0,m}(\lambda) & v_{1,m}(\lambda) \end{vmatrix}$$

其阶数为 $2m-1$（第一列的第 m 个元素为 $S'_\nu(1,\lambda)$）。

记 $D_\nu^0(\lambda)$ 为将 $D_\nu(\lambda)$ 中的所有 $q_j(x)$ 取为零后得到的行列式，即将第一列的最后 $m-1$ 个元素置零。于是有

$$D_\nu(\lambda) = D_\nu^0(\lambda) + \sum_{j=m+1}^{2m-1} V_{j-m+1}(Q_{\nu,j-m+1}(\cdot\,,\lambda))A_j(\lambda), \quad \nu = 0,1, \quad (12)$$

其中， $A_j(\lambda)$ 是第一列第 j 个元素的余子式。特别地，有

$$A_m(\lambda)=(-1)^{m+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ v_{0,2}(\lambda) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{0,3}(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & v_{0,m}(\lambda) & 0 \end{vmatrix}=\sigma_m\prod_{l=2}^{m}v_{0,l}(\lambda), \tag{13}$$

其中 $\sigma_m=(-1)^{\frac{(m-1)(m+2)}{2}}$. 对于 $j=\overline{m+1,\ 2m-1}$，我们有

$$A_j(\lambda)=(-1)^{j+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ v_{0,2}(\lambda) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{0,3}(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & v_{0,m}(\lambda) & 0 \end{vmatrix},$$

其中不包含具有 $v_{0,\ j-m+1}(\lambda)$ 的行。因此，我们得到表示

$$A_j(\lambda)=\sigma_m\prod_{\substack{l\neq j-m+1\\ l=2}}^{m}v_{0,l}(\lambda),\quad j=\overline{m+1,2m-1}, \tag{14}$$

这也符合（13）。对于 $j=m.$，将（14）代入（12）可得

$$D_\nu(\lambda)=D_\nu^0(\lambda)+\sigma_m\sum_{j=m+1}^{2m-1}V_{j-m+1}(Q_{\nu,j-m+1}(\,\cdot\,,\lambda))\prod_{\substack{l\neq j-m+1\\ l=2}}^{m}v_{0,l}(\lambda),\quad \nu=0,1. \tag{15}$$

为计算 D_ν^0（λ），将其写成如下形式较为方便:

$$D_\nu^0(\lambda)=\begin{vmatrix} S_\nu(1,\lambda) & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ S_\nu(1,\lambda) & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ S_\nu(1,\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1\\ S'_\nu(1,\lambda) & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0\\ v_{1,2}(\lambda)S_\nu(1,\lambda) & v_{0,2}(\lambda) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ v_{1,3}(\lambda)S_\nu(1,\lambda) & 0 & 0 & v_{0,3}(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ v_{1,m}(\lambda)S_\nu(1,\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & v_{0,m}(\lambda) & 0 \end{vmatrix},$$

这立即意味着

$$D_\nu^0(\lambda)=S'_\nu(1,\lambda)A_m(\lambda)+S_\nu(1,\lambda)\sum_{j=m+1}^{2m-1}v_{1,j-m+1}(\lambda)A_j(\lambda).$$

将（13）和（14）代入最后一个公式，我们得到

$$D_\nu^0(\lambda)=\sigma_m S'_\nu(1,\lambda)\prod_{l=2}^{m}v_{0,l}(\lambda)+\sigma_m S_\nu(1,\lambda)\sum_{j=2}^{m}v_{1,j}(\lambda)\prod_{\substack{l\neq j\\ l=2}}^{m}v_{0,l}(\lambda),\quad \nu=0,1. \tag{16}$$

将（16）和（15）分别与（9）和（10）进行比较，我们注意到，函数 $D_\nu^0(\lambda)$ 与 $\Delta_\nu^0(\lambda)$，以及 $D_\nu(\lambda)$ 与 $\Delta_\nu(\lambda)$，仅相差同一个符号 σ_m，证明完毕。□

特别地，该引理意味着，由公式（9）确定的函数 $\Delta_\nu^0(\lambda)$ 是问题 $\mathcal{B}_\nu(0,H)$ 的特征行列式，而函数

$$\Delta_\nu^{00}(\lambda)=S'_\nu(1,\lambda)(\cos\rho)^{m-1}+(1-m)S_\nu(1,\lambda)(\cos\rho)^{m-2}\rho\sin\rho$$

is t $\mathcal{B}_\nu(0,0)$ 的特征行列式。此外，我们有渐近式

$$\Delta_\nu(\lambda)=\Delta_\nu^{00}(\lambda)+O\left(\rho^{\nu-1}e^{m|\operatorname{Im}\rho|}\right),\quad \lambda\to\infty,\quad \nu=0,1,$$

而 $\rho^{-\nu}\Delta_\nu^{00}(\rho^2)$ 是在 ρ-平面上指数型为 m 的正弦型函数。因此，利用鲁歇定理（例如，参见 [50], 中定理 4 的证明），可以立即得出，$\Delta_\nu^{00}(\lambda)$ 的零点构成数列 $\lambda_{n,\,\nu}$ 的主部，其中 $n\to\infty$.

因此，类似于 [22], 中的定理 1.1.4，可以证明以下断言。

引理 2. 函数 $\Delta_0(\lambda)$ 和 $\Delta_1(\lambda)$ 可由其零点唯一确定。具体而言，其表示为

$$\Delta_0(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n,0}-\lambda}{\lambda_{n,0}^0},\quad \Delta_1(\lambda)=m(\lambda_{1,1}-\lambda)\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda_{n,1}-\lambda}{\lambda_{n,1}^0} \tag{17}$$

发生，其中 $\{\lambda^0_{n,\nu}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是函数 $\Delta^{00}_\nu(\lambda)$ 的零点。

3. 反问题的解

在直接证明定理 1 之前，我们先完成一些准备工作。利用 Rouch´e 定理，可以证明以下断言。

引理 3. 对于 $j=\overline{2,m}$，函数 $v_{0,j}(\lambda)$ 的零点 $\{\xi_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 具有如下渐近式

$$\xi_{n,j}=\eta^2_{n,j},\quad \eta_{n,j}=\pi\Big(n-\frac{1}{2}\Big)+\frac{H_j}{\pi n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\quad n\to\infty. \tag{18}$$

不失一般性，假设所有重零点 $\xi_{n,j}$ 彼此相邻，即

$$\xi_{n,j}=\xi_{n+1,j}=\ldots=\xi_{n+m_{n,j}-1,j},$$

其中 $m_{n,j}$ 是 $\xi_{n,j}$. 的重数。因此，集合

$$\mathcal{S}_j:=\{n:\xi_{n,j}\neq\xi_{n-1,j},\,n-1\in\mathbb{N}\}\cup\{1\}$$

对零点 $\xi_{n,j}$ 进行编号而忽略其重数。

与 [23], 中的命题1类似，可以证明以下断言；对于任意形如$\xi_{n,\ j}=\pi^2(n-1/2+\varkappa_n)^2$ 且满足 $\{\varkappa_n\}\in l_2$.的序列 $\{\xi_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N}}$，该断言仍然成立。

引理4. 对任意固定的 $\nu\in\{0,1\}$ 和 $j=\overline{2,m}$，函数系 $\{s_{n,j,\nu}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$构成 L_2(0,1)中的Riesz基，其中

$$s_{k+s,j,\nu}(x)=k^{1-\nu}\frac{d^s}{d\lambda^s}S_\nu(x,\lambda)\Big|_{\lambda=\xi_{k,j}},\quad k\in\mathcal{S}_j,\quad s=\overline{0,m_{k,j}-1}, \tag{19}$$

而 $S_\nu(x,\lambda)$由式(7)确定。

对于每个$j=\overline{2,m}$和 $k\in\mathcal{S}_j$，对表示式(10) $p=\overline{0,m_{k,\ j}-1}$求$j=2$阶导数，并将$\lambda=\xi_{k,\ j}$ 代入所得关系式，可得到线性方程组

$$\gamma_{k+p,j,\nu}=\sum_{s=0}^{p}\binom{p}{s}\alpha_{k+p-s,j,\nu}\beta_{k+s,j,\nu},\quad p=\overline{0,m_{k,j}-1},\qquad k\in\mathcal{S}_j,\quad \nu=0,1, \tag{20}$$

其中

$$\gamma_{k+s,j,\nu}:=k^{1-\nu}(\Delta_\nu-\Delta^0_\nu)^{(s)}(\xi_{k,j}),\quad \alpha_{k+s,j,\nu}:=\frac{d^s}{d\lambda^s}\prod_{\substack{l\neq j\\ l=2}}^{m}v_{0,l}(\lambda)\Big|_{\lambda=\xi_{k,j}}, \tag{21}$$

$$\beta_{k+s,j,\nu}:=k^{1-\nu}\frac{d^s}{d\lambda^s}V_j(Q_{\nu,j}(\,\cdot\,,\lambda))\Big|_{\lambda=\xi_{k,j}},\quad k\in\mathcal{S}_j,\quad s=\overline{0,m_{k,j}-1}. \tag{22}$$

引理 5. 对于 $j=\overline{2,m}$，以下表示成立：

$$V_j(Q_{0,j}(\,\cdot\,,\lambda))=\frac{\omega_j}{2\rho}\sin\rho(2-a)+\int_0^{2-a}u_{0,j}(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}\,dx, \tag{23}$$

$$V_j(Q_{1,j}(\,\cdot\,,\lambda))=\frac{\omega_j}{2}\cos\rho(2-a)+H_j\omega_j\frac{\sin\rho(2-a)}{\rho}+\int_0^{2-a}u_{1,j}(x)\cos\rho x\,dx, \tag{24}$$

其中

$$\omega_j = \int_{a-1}^{1} q_j(x)\,dx, \quad j = \overline{2,m}, \tag{25}$$

and

$$u_{\nu,j}(x) = \frac{1}{4}\Big(p_j\Big(\frac{a+x}{2}\Big) - (-1)^{\nu} p_j\Big(\frac{a-x}{2}\Big)\Big), \quad 0 < x < 2-a, \quad \nu = 0,1, \tag{26}$$

而

$$p_j(x) = q_j(x) - 2H_j \int_x^1 q_j(t)\,dt, \quad a-1 < x < 1. \tag{27}$$

证明。根据 (7) 和 (8)，我们有

$$\begin{aligned} Q_{0,j}(x,\lambda) &= \int_{a-1}^{x} \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} q_j(t) \frac{\sin\rho(t-a+1)}{\rho}\,dt \\ &= \frac{1}{2\rho^2}\int_{a-1}^{x} q_j(t)\Big(\cos\rho(x-2t+a-1) - \cos\rho(x-a+1)\Big)\,dt, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} Q_{1,j}(x,\lambda) &= \int_{a-1}^{x} \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} q_j(t)\cos\rho(t-a+1)\,dt \\ &= \frac{1}{2\rho}\int_{a-1}^{x} q_j(t)\Big(\sin\rho(x-2t+a-1) + \sin\rho(x-a+1)\Big)\,dt. \end{aligned} \tag{29}$$

通过求导，我们得到

$$Q'_{0,j}(x,\lambda) = \frac{1}{2\rho}\int_{a-1}^{x} q_j(t)\Big(\sin\rho(x-a+1) - \sin\rho(x-2t+a-1)\Big)\,dt,$$

$$Q'_{1,j}(x,\lambda) = \frac{1}{2}\int_{a-1}^{x} q_j(t)\Big(\cos\rho(x-a+1) + \cos\rho(x-2t+a-1)\Big)\,dt.$$

对 (28) 和 (29) 分部积分后，得到

$$Q_{0,j}(x,\lambda) = \frac{1}{\rho}\int_{a-1}^{x} \sin\rho(x-2t+a-1)\,dt \int_t^x q_j(\tau)\,d\tau,$$

$$Q_{1,j}(x,\lambda) = \frac{\sin\rho(x-a+1)}{\rho}\int_{a-1}^{x} q_j(t)\,dt - \int_{a-1}^{x} \cos\rho(x-2t+a-1)\,dt \int_t^x q_j(\tau)\,d\tau.$$

代入 将 $x=1$ 代入最后四个公式，并使用记号（25），我们得到 et

$$Q'_{0,j}(1,\lambda) = \frac{\omega_j}{2\rho}\sin\rho(2-a) - \frac{1}{2\rho}\int_{a-1}^{1} q_j(x)\sin\rho(a-2x)\,dx,$$

$$Q'_{1,j}(1,\lambda) = \frac{\omega_j}{2}\cos\rho(2-a) + \frac{1}{2}\int_{a-1}^{1} q_j(x)\cos\rho(a-2x)\,dx,$$

$$Q_{0,j}(1,\lambda) = \frac{1}{\rho}\int_{a-1}^{1} \sin\rho(a-2x)\,dx \int_x^1 q_j(t)\,dt,$$

$$Q_{1,j}(1,\lambda) = \frac{\omega_j}{\rho}\sin\rho(2-a) - \int_{a-1}^{1} \cos\rho(a-2x)\,dx \int_x^1 q_j(t)\,dt,$$

结合 $\nu_j = 1$ 的（4）式和（27）式，得到表示

$$V_j(Q_{0,j}(\,\cdot\,,\lambda)) = \frac{\omega_j}{2\rho}\sin\rho(2-a) - \frac{1}{2\rho}\int_{a-1}^{1} p_j(x)\sin\rho(a-2x)\,dx,$$

$$V_j(Q_{1,j}(\,\cdot\,,\lambda)) = \frac{\omega_j}{2}\cos\rho(2-a) + H_j\omega_j\frac{\sin\rho(2-a)}{\rho} + \frac{1}{2}\int_{a-1}^{1} p_j(x)\cos\rho(a-2x)\,dx.$$

改变积分变量并考虑到（26），可得（23）和（24）。 □

由（23）、（24）以及（7）和（19），公式（22）可写为

$$\beta_{n,j,\nu} = \frac{\omega_j}{2}s_{n,j,\nu}(2-a) + \delta_{\nu,1}H_j\omega_j\tilde{s}_{n,j,0}(2-a) + \int_0^{2-a} u_{\nu,j}(x)s_{n,j,\nu}(x)\,dx, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{30}$$

其中 $\delta_{\nu,\,1}$ 是克罗内克δ函数，并且

$$\tilde{s}_{k+s,j,0}(x) = \frac{1}{k}s_{k+s,j,0}(x), \quad k\in\mathcal{S}_0, \quad s=\overline{0,m_{k,0}-1}.$$

定理 1 的证明。根据引理 2，给定谱以及系数 H_j，可以唯一确定（21）中定义的数 α_{n}、$_{j}$、$_{\nu}$ 和 γ_{n}、$_{j}$、$_{\nu}$。进一步地，由于所有 H_j 彼此不同，对于 j、$l=2$、m，在（8）中定义的任意两个函数 v_{0}、$_{j}$（λ）和 v_{0}、$_{l}$（λ）在 $j\neq l$ 时没有公共零点，即 $\{\xi_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N}}\cap\{\xi_{n,l}\}_{n\in\mathbb{N}}=\emptyset$.。因此，对于所有 $k\in\mathcal{S}_j$ $j=2$、m 以及 $\nu=0$，1，有 α_{k}、$_{j}$、$_{\nu}\neq 0$。所以，线性代数方程组（20）中的每个三角形方程组始终具有唯一解 β_{k+s}、$_{j}$、$_{\nu}$、 $s=0$、m_{k}、$_{j}-1$.。由此，通过指定问题 $\mathcal{B}_0$ 和 $\mathcal{B}_1$. 的谱，所有序列 $\{\beta_{n,j,\nu}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都能被唯一确定。

此外，根据（7）、（18）和（19），公式（30）推出

$$\frac{2\eta_{n,j}\beta_{n,j,0}}{n} = \omega_j\sin\eta_{n,j}(2-a) + 2\int_0^{2-a} u_{0,j}(x)\sin\eta_{n,j}x\,dx, \quad n\gg 1.$$

因此，数列 ω_j 也由以下公式唯一确定

$$\omega_j = \lim_{k\to\infty}\frac{2\eta_{n_k,j}\beta_{n,j,0}}{n_k\sin\eta_{n_k,j}(2-a)}, \quad j=\overline{2,m}, \tag{31}$$

其中，$\{n_k\}$ 是一个递增的自然数序列，其选取满足

$$|a_{n_k}|\geq c>0, \quad a_n := \sin\pi\Big(n-\frac{1}{2}\Big)(2-a),$$

而其存在性又源于数列 $\{a_n\}$不收敛，这一点可参照 [39]中的引理3.3以类似方式证明。

因此，根据引理4，所有函数$u_{\nu,j}(x)$均由关系（30）唯一确定。因此，根据（26），函数 $p_j(x)$由以下公式唯一确定

$$p_j(x) = \begin{cases} 2(u_{1,j}-u_{0,j})(a-2x), & x\in\Big(a-1,\dfrac{a}{2}\Big), \\ 2(u_{1,j}+u_{0,j})(2x-a), & x\in\Big(\dfrac{a}{2},1\Big), \end{cases} \quad j=\overline{2,m}. \tag{32}$$

最后，所有的 $q_j(x)$ 都是沃尔泰拉积分方程（27）的唯一解，即

$$q_j(x) = p_j(x) + 2H_j\int_x^1 e^{2H_j(t-x)}p_j(t)\,dt, \quad a-1<x<1, \quad j=\overline{2,m}, \tag{33}$$

从而完成证明。 □

该证明是 该方法具有构造性，并给出了求解反问题的以下算法。

算法1。给定谱 $\{\lambda_{n,0}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\in\mathbb{N}}$。则：

(i) 根据公式（17）计算特征函数 $\Delta_0(\lambda)$ 和 $\Delta_1(\lambda)$；(ii) 根据公式（21）并利用（7）–（9）为 $j=2,\ m$ 和 $\nu=0,1$ 构造序列 $\{\alpha_{n,j,\nu}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\gamma_{n,j,\nu}\}_{n\in\mathbb{N}}$；(iii) 通过关系式（20）为 $j=2,\ m$ 和 $\nu=0,1$ 求出序列 $\{\beta_{n,j,\nu}\}_{n\in\mathbb{N}}$；(iv) 利用（31）计算数值 ω_j、$j=2,\ m$；(v) 根据（30）和引理4，按照公式构造函数 $u_{\nu,\,j}(x)\in L_2(0,2-a)$

$$u_{\nu,j}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\beta_{n,j,\nu}-\frac{\omega_j}{2}s_{n,j,\nu}(2-a)-\delta_{\nu,1}H_j\omega_j\tilde{s}_{n,j,0}(2-a)\Big)s^*_{n,j,\nu}(x),\ \ \nu=0,1,\ \ j=\overline{2,m},$$

其中，$\{s^*_{n,j,\nu}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是与基 $\{s_{n,j,\nu}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$双正交的基；(vi) 最后，通过（32）求出函数 $p_j(x)$，并通过（33）计算 $q_j(x)$。

资助。本研究得到俄罗斯科学基金会资助，项目编号：22-21-00509，https://rscf.ru/project/22-21-00509/

致谢。作者感谢 Maria Kuznetsova 审阅稿件并提出宝贵意见。

参考文献

[1] Buterin S. 具有全局时滞的几何图上的泛函微分算子与谱反问题，Results Math.（2023）78:79。

[2] Montrol E. 网络上的量子理论，《数学物理杂志》11（1970）第2期，635–648。[3] Nicaise S. 关于网络上谱理论的一些结果，应用于神经冲动传递，《数学讲义》第1771卷，施普林格，柏林，1985，532–541。[4] von Below J. 网络上的斯图姆–刘维尔特征值问题，《数学方法与应用科学》10（1988）383–395。[5] Langese J.、Leugering G.、Schmidt J. 动态弹性多连杆结构的建模、分析与控制，Birkh¨auser，波士顿，1994。[6] Kuchment P. 薄结构中波的图模型，《随机介质中的波》12（2002）第4期，R1–R24。[7] Berkolaiko G.、Carlson R.、Fulling S. 和 Kuchment P.《量子图及其应用》，《当代数学》415，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006。[8] Berkolaiko G. 和 Kuchment P.《量子图引论》，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2013。[9] Pokornyi Yu.V.、Penkin O.M.、Pryadiev V.L.、Borovskikh A.V.、Lazarev K.P. 和 Shabrov S.A.《几何图上的微分方程》，Fizmatlit，莫斯科，2005。

[10] Kuznetsova M.A. 星形图的斯图姆–刘维尔边值问题的权数渐近公式，《萨拉托夫大学学报》（新系列），数学、力学与信息学辑18（2018年）第1期，40–48。[11] Borisov B. 小边量子图上椭圆算子的预解式：全纯性与泰勒级数，《数学进展》397（2022年）108125。[12] Gerasimenko N.I. 非紧图上的反散射问题，《理论与数学物理》74（1988）第2期，187–200；英文译文见《理论与数学物理》75（1988）460–470。[13] Belishev M.I. 通过BC方法研究一类图（树）上的边界谱反问题，《反问题》20（2004）647–672。[14] Brown B.M. 和 Weikard R. 树上的博格–列文森定理，《伦敦皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》461（2005）第2062期，3231–3243。[15] Yurko V.A. 图上斯图姆–刘维尔算子的谱反问题，《反问题》21（2005）1075–1086。[16] Pivovarchik V. 星形图上的斯图姆–刘维尔方程反问题，《数学新闻》280（2007）第13–14期，1595–1619。[17] Ignatyev M. 非紧A-图上的斯图姆–刘维尔算子反散射问题。唯一性结果，《淡江数学杂志》46（2015）第4期，401–422[18] Yurko V.A. 空间网络上微分算子的谱反问题，《数学科学进展》71（2016）149–196；英文译文见《俄罗斯数学调查》71（2016）539–584。[19] Bondarenko N.P. 星形图上斯图姆–刘维尔算子的谱数据刻画，Anal. Math. Phys.（2020）10:83。[20] Avdonin S.A. 和 Kravchenko V.V. 量子星形图上谱反问题的求解方法，《反问题与不适定问题杂志》31（2023年）第1期，31–42。[21]Borg G. 斯图姆–刘维尔特征值问题的一个逆命题，《数学学报》78（1946）1–96。[22] Freiling G. 和 Yurko V.A.《斯图姆–刘维尔反问题及其应用》，NOVA科学出版社，纽约，2001。[23] Buterin S.A. 和 Kuznetsova M.A. 关于非自伴斯图姆–刘维尔算子的博格方法，Anal. Math. Phys. 9（2019）2133–2150。[24] Nizhnik L.P. 星形图上非局部斯图姆–刘维尔算子的反特征值问题，《泛函分析与拓扑方法》18（2012年）68–78。[25] Bondarenko N.P. 星形图上积分微分算子的一个反问题，《数学方法与应用科学》41（2018年）第4期，1697–1702。[26] Hu Y.-T.、Bondarenko N.P.、Shieh C.-T. 和 Yang C.-F. 图上狄拉克型积分微分算子的迹与反节点问题，《应用数学与计算》363（2019）124606。[27] Hu Y.-T.、Huang Z.-Y. 和 Yang C.-F. 带冻结变量的星形图上斯图姆–刘维尔算子的迹，Results Math.（2020年）75:37。

[28] Wang F. 和 Yang C.-F. 星形图上具有常数时滞的 Sturm–Liouville 算子的迹，Results Math. (2021) 76:220。[29] Wang F. 和 Yang C.-F. 星形图上具有常数时滞的 Sturm–Liouville 算子的一个部分逆问题，Results Math. (2022) 77:192。[30] Bondarenko N.P. 具有非局部匹配条件的星形图上微分算子的逆问题，Bol. Soc. Mat. Mex. (2023) 29:2。[31] Pikula M. 根据两组谱确定带偏移自变量的 Sturm–Liouville 型微分算子，Mat. Vestnik 43 (1991年) no.3-4, 159–171。[32] Freiling G. 和 Yurko V.A. 带常数时滞的 Sturm–Liouville 微分算子的逆问题，Appl. Math. Lett. 25 (2012年) no.11, 1999–2004。[33] Yang C.-F. 带常数时滞的 Sturm–Liouville 算子的反节点问题，J. Diff. Eqns. 257 (2014年) no.4, 1288–1306。[34] Ignatiev M.Yu. 关于带偏移自变量的 Sturm–Liouville 算子的一个 Regge 逆问题，J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 22 (2018年) no.2, 203–211。[35] Bondarenko N. 和 Yurko V. 带偏移自变量的 Sturm–Liouville 微分算子的一个逆问题，Appl. Math. Lett. 83 (2018年) 140–144。[36] Buterin S.A. 和 Yurko V.A. 带大时滞的 Sturm–Liouville 算子的一个逆谱问题，Anal. Math. Phys. 9 (2019年) no.1, 17–27。[37] Pikula M., Vladiˇci´c V. 和 Vojvodi´c B. 当常数时滞小于区间长度的一半且具有 Robin 边界条件时 Sturm–Liouville 算子的逆谱问题，Results Math. (2019年) 74:45。[38] Djuri´c N. 和 Vladiˇci´c V. 带常数时滞的 Sturm–Liouville 型微分方程的不完整逆问题，Results Math. (2019年) 74:161。[39] Sat M. 和 Shieh C.-T. 带常数时滞的积分微分算子的反节点问题，J. Inverse Ill-Posed Probl. 27 (2019年) no.4, 501–509。[40] Wang Y.P., Shieh C.T. 和 Miao H.Y. 利用双稠密节点子集重构带常数时滞的 Sturm–Liouville 方程，Inv. Probl. Sci. Eng. 27 (2019年) no.5, 608–617。[41] Djuri´c N. 带时滞的 Sturm–Liouville 型算子的逆问题：对称情形，Appl. Math. Sci. 14 (2020年) no.11, 505–510。[42] Djuri´c N. 和 Buterin S. 关于恢复带时滞的 Sturm–Liouville 型算子的一个开放问题，Appl. Math. Lett. 113 (2021年) 106862。[43] Djuri´c N. 和 Buterin S. 关于恢复带时滞的 Sturm–Liouville 算子的非唯一性，Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 102 (2021年) 105900。´Djuri´c N. 和 Buterin S. 带小时滞的 Sturm–Liouville 型算子的等双谱势，Nonlin. Anal.: Real World Appl. 63 (2020年) Art. No. 103390。[44] Buterin S.A., Malyugina M.A. 和 Shieh C.-T. 带两个时滞的二阶泛函微分算子铅笔的一个逆谱问题，Appl. Math. Comput. 411 (2021年) 126475。

[46] Buterin S. 和 Djuri´c N. 带常数时滞的 Dirac算子的逆问题：唯一性、刻画、一致稳定性，Lobachevskii J. Math. 43 (2022年) no.6, 1492–1501。[47] Wang Yu.P., Keskin B. 和 Shieh C.-T. 带常数时滞的非自伴Sturm–Liouville算子的一个部分逆问题，J. Inverse Ill-Posed Probl. (2023) https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0058。[48] Buterin S. 和 Vasilev S. 带常数时滞和非零初始函数的一个逆Sturm–Liouville型问题，arXiv:2304.05487 [math.SP], 2023。[49]Djuri´c N. 和 Vojvodi´c B. 当常数时滞小于区间长度的一半时 Dirac算子的逆问题，Appl. Anal. Discrete Math. (2023) https://doi.org/10.2298/AADM221211009D。[50] Buterin S.A. 关于恢复具有渐近分离零点的正弦型函数的一致稳定性，Matem. Zametki 111 (2022年) no.3, 339–353；英文译文载于 Math. Notes 111 (2022年) no.3, 343–355。