arXiv:2304.14457v2 [math.AT] 5 Jun 2023

在大素数处，色谱同伦是幺半代数的

Shaul Barkan

摘要

固定一个素数 p和一个色谱高度 h。我们证明，当 $p > O(h^2+kh)$ 时， L_h-局部谱的同伦 $(k, 1)$-范畴 $\mathrm{h}_k(\mathrm{Sp}_{p,\ h})$作为对称幺半范畴是代数的。为此，我们基于 Goerss-Hopkins 障碍理论的一个拟运算变体，发展了一种用于研究此类代数性问题的一般工具。其他应用包括：当 $p > O(kh)$ 时，Lubin-Tate谱上的模的幺半代数性 $\mathrm{h}_k(\mathrm{Mod}_{E_{p,\ h}})$；由此我们推导出，$\mathrm{h}_1(\mathrm{Mod}_{KU_{(p)}})$和 $\mathrm{h}_1(\mathrm{Mod}_{KO_{(p)}})$作为 tt-范畴是代数的，当且仅当 p为奇数。

目录

1 引言 **1**

1.1 主要结果 .21.2 致谢 .4

2 滤过稳定同伦论的一个框架 5

2.1 概述与定义 .52.2 构造变形 .11

3 障碍理论与代数性 **15**

3.1 Goerss-Hopkins 塔.153.2 代数性定理.23

A ∞-拟运算子的元数限制 **27**

参考文献29

1 引言

Quillen 的一个重要定理给出了复配边界环与 Lazard 环之间的典范同构，从而对一维形式群律进行分类。在 Quillen 得出这一结果的几年前，Novikov 构造了 Adams 谱序列的一个类似物，其中以复配边界取代模 p 同调。结合这些思想，便得到一个具有如下特征的谱序列

$$^{AN}E_2^{s,t}(\mathbb{S}) \simeq \mathrm{H}^s(\mathscr{M}_{\mathrm{fg}}; \omega^{\otimes t}) \implies \pi_{2t-s}\mathbb{S},$$

其中 $\mathscr{M}_{\mathrm{fg}}$ 表示形式群模栈，而 ω 表示不变微分层。对于固定的素数 p，$\mathscr{M}_{\mathrm{fg},(p)}$ 中的点由高度 $h \in \{0,1,\dots\} \cup \{\infty\}$分类，并且存在如下分层：

$$\mathscr{M}_{\mathrm{fg},(p)} \supset \cdots \supset \mathscr{M}^{\leq 1}_{\mathrm{fg},(p)} \supset \mathscr{M}^{\leq 0}_{\mathrm{fg},(p)}$$

在球面上，这体现为色层塔：

$$\mathbb{S}_{(p)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1\mathbb{S}_{(p)} \longrightarrow L_0\mathbb{S}_{(p)} \simeq H\mathbb{Q}.$$

Hopkins-Ravenel 的色层收敛定理[RR95] 告诉我们 $\mathbb{S}_{(p)} \simeq \lim_h L_h\mathbb{S}_{(p)}$，因此，至少原则上，了解 $\pi_* L_h\mathbb{S}_{(p)}$ 应有助于更好地理解 $\pi_*\mathbb{S}_{(p)}$。Adams-Novikov 谱序列 $L_h\mathbb{S}_{(p)}$ 具有如下特征

$$^{AN}E_2^{s,t}(L_h\mathbb{S}_{(p)}) \simeq \mathrm{H}^s(\mathscr{M}_{\mathrm{fg},(p)}^{\leq h}; \omega^{\otimes t}) \implies \pi_{2t-s}L_h\mathbb{S}_{(p)}.$$

Hopkins-Ravenel [RR95] 的 smash积定理的证明为该谱序列给出了有限页水平消失线。换言之，距离 $L_h\mathbb{S}_{(p)}$ 的同伦群仅有有限多个微分（及扩张）的（完全代数的）上同调群 $\mathrm{H}^s(\mathscr{M}^{\leq h}\mathrm{fg}_{,(p)}; \omega^{\otimes t})$。通常，素数相对于高度越大，该谱序列就越简单。例如，当 $p > h+1$ 时，水平消失线已出现在 E_2 页；而一旦到达 $p > \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}h + 1$，便不再有微分的空间。

1.1 主要结果

令$E_{p,\,h}$ 表示高度 h、素数 p 处的 Morava E-理论，并令 谱范畴$_{p,\,h} \subseteq \mathrm{Sp}$ 表示$E_{p,\,h}$-局部谱的满子范畴。Adams-Noikov 谱序列范畴化为一个对称幺半等价：

$$\mathrm{Sp}_{p,h} \simeq \mathrm{Tot}\left(\mathrm{Mod}_{E_{p,h}^{\otimes[\bullet]}}(\mathrm{Sp})\right). \tag{I}$$

类似于 Adams-Novikov 谱序列，当 ∞范畴 $\mathrm{Sp}_{p,\,h}$ 随着 p 增大，会变得越来越具有代数性。为使这一点更加精确，我们使用形式性的概念。回顾一下，若存在一个等价 $X \in$，则称谱Sp 是形式的。$X \simeq H\pi_*X := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n \mathrm{H}\pi_n X$。赋值 $X \longmapsto H\pi_*X$自然地扩展为一个松对称幺半函子 $H\pi_*\colon \mathrm{Sp} \to \mathrm{Sp}$，因此我们可以讨论环谱的形式性。现在，我们将*Franke*范畴定义为(I)右侧的形式类比：

$$\mathrm{Fr}_{p,h} := \mathrm{Tot}\big(\mathrm{Mod}_{H\pi_*\left(E_{p,h}^{\otimes[\bullet]}\right)}(\mathrm{Sp})\big)$$

（当 $p > h+1$ 这与 Franke 的定义一致时 [Fra96] - 参见引理 3.40。）Franke 范畴也可以描述为某些定义在 ∞ 上的微分分次拟凝聚层的导出 $\mathscr{M}^{\leq h}{}_{\mathrm{fg},(p)}$（参见[Pst21, §3]）。给定一个 ∞-范畴 $\mathscr{C} \in \mathrm{Cat}_\infty$，我们用 $\mathrm{h}_k\mathscr{C}$表示其同伦 k-范畴，其映射空间是 $\mathscr{C}$的映射空间的 $(k-1)$-截断。现在陈述本文的主要结果。

定理 A (3.41)。 每当 $p > \frac{1}{2}h^2 + \frac{k+3}{2}h + \frac{k+1}{2}$ 都存在一个对称幺半等价：

$$\mathrm{h}_k\mathrm{Sp}_{p,h} \simeq \mathrm{h}_k\mathrm{Fr}_{p,h}.$$

我们不认为定理 A 中的界是最优的。事实上，[Bar22a，定理 A] 的一个预期加强版本已经可以带来小幅改进（见备注 3.34）。例如，在定理 A 中取 $k=1$，我们得到一个 sm 等价 h_1谱范畴$_{p,\,h} \simeq \mathrm{h}_1\mathrm{Fr}_{p,\,h}$ 对于 $p > \frac{1}{2}h^2 + 2h + 1$，但事实上我们可以做得更好。

定理 1.1 (3.42)。 每当 $p > \frac{1}{2}h^2 + \frac{3}{2}h + 1$ 都存在一个张量三角等价：

$$\mathrm{h}_1\mathrm{Sp}_{p,h} \simeq \mathrm{h}_1\mathrm{Fr}_{p,h}.$$

推论 B。 存在一个张量三角等价 h_1谱范畴$_{p,\,1} \simeq \mathrm{h}_1\mathrm{Fr}_{p,\,1}$ 当且仅当 $p \geq 5$。

证明。根据定理 1.1，使得存在 tt-等价 $\mathrm{h}_1\mathrm{Sp}_{p,1} \simeq \mathrm{h}_1\mathrm{Fr}_{p,1}$ 的最小 p 只能是 2、3 或 5。$p=2$ 的情形可由 [BRW23，例 2.4] 排除，该例利用 [Roi07] 证明，任何 tt-等价 $\mathrm{h}_1\mathrm{Sp}_{2,1} \simeq \mathrm{h}_1\mathrm{C}$，其中 $\mathrm{C} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}})$，都能提升为对称幺半等价 $\mathrm{Sp}_{2,1} \simeq \mathrm{C}$。为了排除$p=3$，我们论证 $M := L_1\mathbb{S}_{(3)}/3 \in \mathrm{h}_1\mathrm{Sp}^{3,1}$ 不是结合代数。（感谢 Constanze Roitzheim 提出这一思路。）令 $m\colon M^{\otimes 2} \to M$表示唯一的含单位乘法，令 $q\colon \Sigma^{-1}M \to L_1\mathbb{S}_{(3)}$表示到顶胞腔的投影。Hoffman [Hof68] 证明了 $m(m\otimes\mathrm{id}_M) - m(\mathrm{id}_M \otimes m) = \pm\alpha\cdot q\otimes q\otimes q \neq 0$。□

由此引出了以下自然问题。

问题 第 1.2 节 对于固定的 h 和 k，使得存在一个 sm 等价 h_k谱范畴$_{p,\ h} \simeq \mathrm{h}_k\mathrm{Fr}_{p,\ h}$的最小 p 是什么？

这与 tt-几何中的“增强的唯一性”有关——Balchin-Roitzheim-Williamson 最近在一般背景下研究了这个问题 [BRW23]。

注 1.3（历史概述）。定理 A 有着漫长而复杂的历史。在 [Bou85] Bousfield 证明，作为普通范畴（不考虑幺半结构），h_1谱范畴$_{p,1}$ 是代数的。Franke [Fra96]引入了范畴 $\mathrm{Fr}_{p,h}$，并猜想当 $2(p-1) > h^2+h$ 时，h_1谱范畴$_{p,h}$ 与 $\mathrm{h}_1\mathrm{Fr}_{p,h}$ 作为普通范畴等价；该猜想在 $h=1$ 时便归结为 Bousfield 的结果。Franke 对其猜想的证明存在一个漏洞，后来由 Patchkoria [Pat13, Remark 6.3.1] 发现。（另见 [PP21，第 9–11] 页。）下一步进展由 Barthel-Schlank-Stapelton [BSS21] 取得，他们利用范畴超积证明了 Franke 猜想的渐近形式。Pstragowski [Pst21] 给出了一个明确的界，并证明当 $p > h^2+h+1$ 时，范畴 h_1谱范畴$_{p,h} \simeq \mathrm{h}_1\mathrm{Fr}_{p,h}$ 等价（非幺半）。最近，Patchkoria-Pstragowski [PP21] 将这个界改进到了 Franke 猜想所预言的界 $p > \frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}h+1$（仍为非幺半情形）。定理 A 是 Franke 猜想的首个幺半扩展。

注记 1.4（与 Franke 函子的关系）。 我们不知道 *Franke* 函子 [Fra96] 是否在定理1.1所建议的范围内诱导出 tt-等价。Ganter [Gan07] 研究了 Franke 函子的单幺性问题，并证明尽管它通常不是单幺的，但确实保留了张量积。Nikandros-Roitzheim [NR23]最近推广了 Ganter 的结果。

我们还证明了关于模范畴的代数性结果，特别是以下关于 $\mathbb{E}_\infty$-环的定理的 $\mathbb{E}_1$-变体。该定理由 Patchkoria-Pstragowski [PP21，定理 82]提出。（推论 3.39中我们也重新得到了后者。）

定理 C（3.37）。 设 R 是一个 $\mathbb{E}_\infty$-环谱，其同伦环 π_*R

1. 集中在可被 w整除的次数中，并且
2. 具有分次全局维数$d < \frac{w}{4}$。

那么存在一个典范对称幺半等价：

$$\mathrm{h}_{\lfloor \frac{w+4}{d+1} \rfloor -4}\mathrm{Mod}_R \simeq \mathrm{h}_{\lfloor \frac{w+4}{d+1} \rfloor -4}\mathcal{D}(\pi_*R).$$

原则上，我们所发展的形式体系可用于获得关于任意 ∞-拟运算子的$\mathcal{O}$幺半代数性结果。由于缺乏具体动机，本文仅对此作简要讨论。为展示拟运算子选择的灵活性，我们提及一个此类结果。

推论 D (3.38)。 设 R 是一个 $\mathbb{E}_4$-代数谱，其同伦环 π_*R

1. 具有分次全局维数 $d < \infty$，且 2. 集中于可被 w 整除的次数上，其中某个 $w >$ 最大$(d+1, d+2e)$。

那么存在一个张量三角等价：

$$\mathrm{h}_1\mathrm{Mod}_R \simeq \mathrm{h}_1\mathcal{D}(\pi_*R).$$

现在我们给出几个适用这些定理的例子。

例1.5。 回顾一下，Morava 稳定子群通过 $\mathbb{E}_\infty$-环自同构作用于$E_{p,\ h}$。 $\mathbb{F}_p^\times$-不动点 $R_{p,\ h} \coloneqq E_{p\,h}^{h\mathbb{F}_p^\times}$. 是一个 $\mathbb{E}_\infty$-环谱，其同伦环 $\pi_*R_{p,\ h} = \pi_0(E_{p,\ h})\ [u^{\pm(p-1)}]$具有分次全局维数 h，并且集中在可被 $2p-2$整除的次数上。将定理 C 应用于 $R_{p,\ h}$，我们推导出，只要 $p > \left(\frac{k}{2}+2\right)\cdot h+\frac{k}{2}+1$，就存在一个对称幺半等价：

$$\mathrm{h}_k\mathrm{Mod}_{R_{p,h}} \simeq \mathrm{h}_k\mathcal{D}\big(\pi_0(E_{p,h})[u^{\pm(p-1)}]\big).$$

为了得到关于 $\mathrm{Mod}_{E_{p,h}}$ 的陈述，我们需要多做一些工作。

观察1.6。皮卡德元素 $[\Sigma^2 R_{p,h}] \in \mathrm{Pic}(R_{p,h})$ 提升为连通谱的态射 $\rho\colon \mathbb{Z}/(p-1) \to \mathfrak{pic}(R_{p,h})$，其Thom谱恢复了2-周期Lubin-Tate理论 $\mathrm{colim}_{\mathbb{Z}/(p-1)}\rho \simeq E_{p,h} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp})$。因此，我们有典范对称幺半等价 $\mathrm{Mod}_{E_{p,h}} \simeq \mathrm{colim}^{B\mathbb{Z}/(p-1)} \mathrm{Mod}_{R_{p,h}}$，其中余极限可以在 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}}$ 中取（见引理 3.9）。由于 h_k 保持余极限，我们得到典范对称幺半等价：

$$\mathrm{h}_k\mathrm{Mod}_{E_{p,h}} \simeq \operatorname*{colim}_{B\mathbb{Z}/(p-1)} \mathrm{h}_k\mathrm{Mod}_{R_{p,h}}, \quad \mathrm{h}_k\mathcal{D}\big(\pi_0(E_{p,h})[u^{\pm}]\big) \simeq \operatorname*{colim}_{B\mathbb{Z}/(p-1)} \mathrm{h}_k\mathcal{D}\big(\pi_0(E_{p,h})[u^{\pm(p-1)}]\big).$$

结合观察结果 1.6 和例 1.5 可得出以下推论。

推论 E。 只要 $p > \left(\frac{k}{2}+2\right)\cdot h + \frac{k}{2} + 1$，就存在一个典范对称等价：

$$\mathrm{h}_k\mathrm{Mod}_{E_{p,h}} \simeq \mathrm{h}_k\mathcal{D}(\pi_0 E_{p,h}[u^{\pm}]).^{1}$$

最后，我们研究 KO 和 KU-模的代数性问题。这一问题可以追溯到 Bous- field [Bou85]，其研究成果后来由 Wolbert 用现代语言重新阐述 [Wol98]。Bousfield 的研究成果得到了 Patchkoria 的改进 [Pat13]，他特别证明了当 $_1\mathrm{Mod}^{KU_{(p)}}$ 是一个三角范畴时，它是代数的 $p > 2$。在这里，我们对这一问题的张量三角表述给出了完整的解答。

推论F。 对于 $p > 2$，存在张量三角等价：

$$\mathrm{h}_1\mathrm{Mod}_{KO_{(p)}} \simeq \mathrm{h}_1\mathcal{D}(\mathbb{Z}_{(p)}[w_1^{\pm}]) \quad |w_1| = 4, \qquad \mathrm{h}_1\mathrm{Mod}_{KU_{(p)}} \simeq \mathrm{h}_1\mathcal{D}(\mathbb{Z}_{(p)}[v_1^{\pm}]) \quad |v_1| = 2.$$

此外，这个界是锐的，也就是说，在 $p = 2$ 处，这两个 tt 范畴都不是代数的：

$$\mathrm{h}_1\mathrm{Mod}_{KO_{(2)}} \not\simeq \mathrm{h}_1\mathcal{D}(\pi_* KO_{(2)}), \qquad \mathrm{h}_1\mathrm{Mod}_{KU_{(2)}} \not\simeq \mathrm{h}_1\mathcal{D}(\pi_* KU_{(2)}).$$

证明。 对于奇素数，例 1.5 中的论证使我们处于推论D 所述的情形，其中 $w = 4$和 $d = 1$，结论随即得出。剩下要证明的是 $p = 2$处的代数性不成立。令$E \coloneqq KU_{(2)}$和 $K \coloneqq E/2$。我们将证明，$K_* \coloneqq \pi_*(K \otimes_E (-))\colon \mathrm{h}_1\mathrm{Mod}_E \to \mathrm{grMod}^{\heartsuit}_{K_*}$可通过一个对称幺半函子 $\mathrm{h}_1\mathrm{Mod}_E \to \mathcal{W}$ 分解，其中 $\mathcal{W}$ 是某个奇异对称幺半范畴，它不存在到 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{L}^2}$的正合 sm 函子。这将同时处理两种情形，因为我们可以预合成 $E \otimes_{KO_{(2)}} (-)\colon \mathrm{h}_1\mathrm{Mod}^{KO_{(2)}} \to \mathrm{h}_1\mathrm{Mod}_E$，从而得到一个类似的函子，其定义域为 $KO(2)$-模。

令 $m\colon K \otimes_E K \to K$ 和 $\sigma\colon K \otimes_E K \simeq K \otimes_E K$ 分别表示乘法和交换映射，并令 $\delta v_0\colon K \to \Sigma K$ 表示模 p Bockstein。[2]在 [Wür86], 中，Wurgler 证明了 $m \circ \sigma \simeq m + v_1(m \circ \delta v_0 \otimes \delta v_0)$。特别地，$K_*\colon \mathrm{h}_1\mathrm{Mod}_E \to \mathrm{grMod}^{\heartsuit}_{K_*}$ 不能赋予对称幺半结构，而是经由一个“奇异”的 sm 范畴 $\mathcal{W}$ 分解；其底层范畴是 $\mathbb{Z}/2$-分次的 $\Lambda\mathrm{F2}(q)$-模，其中 $|q| = 1$；其幺半结构是通常的 $\mathbb{Z}/2$-分次向量空间张量积，编织由 $x \otimes y \longmapsto y \otimes x + q(y) \otimes q(x)$ 给出（参见 [KL20, §3.3]）。要说明为何不存在正合对称幺半函子 $\Phi\colon \mathcal{W} \to \mathrm{Vect}\ \mathrm{F2}$，我们注意到 C_2-范数 $\Lambda\mathrm{F2}(q)^{\otimes 2} C_2 \to \left(\Lambda\mathrm{F2}(q)^{\otimes 2}\right)^{C_2}$ 在 $\mathcal{W}$ 中是一个同构，这迫使 $\Phi(\Lambda\mathrm{F2}(q)) = 0$，因此 $\Phi(\mathbb{L}^2) = 0$，与单位性矛盾。□

1.2 致谢

我谨向我的导师 Tomer Schlank 教授致以深切谢意，感谢他在本项目的每个阶段分享他的智慧与专长，并持续支持我的学术成长。感谢 Robert Burklund 对这项工作的宝贵反馈，以及他乐于交流想法。感谢 Jan Steinebrunner、Christian Carrick 和 Shay Ben-Moshe 与我进行有益的讨论。感谢 Irakli Patchkoria 、 Piotr Pstragowski 对这项工作表现出的兴趣，并提出了富有见地的

[1]右侧可以识别为微分 $\mathbb{Z}/2$-分次的 $\pi_0(E_{p,h})$-模的导出范畴。[2]即，δv_0 是余纤维序列 $E \xrightarrow{2} E \to K$中的边缘映射与商映射 $E \to K$的复合。

意见，针对早期草稿提出了建议。特别感谢 Jordan Williamson 和 Constanze Roitzheim 为我指引文献中的一些有用成果。本工作部分内容是在秋季举办的“代数、几何与拓扑中的谱方法”季度项目期间撰写的2022[3]，地点为豪斯多夫数学研究所。

2 滤稳定同理论的一个框架

2.1 概览与定义

引言中提到的应用都源于“滤稳定同理论”框架下的（各种变体的）抽象代数性定理。要对该定理进行恰当的表述，需要进行相当多的准备工作。本节旨在给出一个非技术性的概览。

我们的框架深受 Pstragowski 的合成谱 [Pst18] 及其在其中对 Goerss-Hopkins [GH05]障碍理论的诠释 [Pst21]的启发。我们发展的理论有相当一部分实际上与 Pstragowski-VanKoughnett “抽象 *Goerss-Hopkins*”形式体系 [PV22]平行。我们对这一主题的观点也深受 Burklund-Hahn-Senger [BHS19]工作的影响。不过，我们的方法是自洽完备的，并且不要求读者熟悉上述论文的内容。

滤谱与分次谱

一个 滤谱 是一个函子 $X\colon\ \mathbb{Z}^{\downarrow} \to$ 谱范畴，其中 $\mathbb{Z}^{\downarrow}$ 表示按递减顺序排列的整数偏序集：

$$\cdots \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^{-1} \longrightarrow \cdots$$

我们将 $\mathscr{F} \coloneqq \mathrm{Fun}(\mathbb{Z}^{\downarrow},\text{谱范畴})$ 记为滤过谱的 ∞-范畴。整数加法唯一地扩展为 $\mathscr{F}$ 上一个可呈示的对称幺半结构，其底层双函子为：

$$\otimes\colon \mathscr{F}\times\mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}, \qquad (X,Y) \longmapsto \left(s \longmapsto \operatorname*{colim}_{i+j\geq s} X^i \otimes Y^j\right).$$

谱 Yoneda 嵌入 $\Sigma^\infty_+ y(-)\colon \mathbb{Z}^{\uparrow} \coloneqq \left(\mathbb{Z}^{\downarrow}\right)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}(\mathbb{Z}^{\downarrow},\text{谱范畴})$ 给出一个 $\mathbb{E}_\infty$-空间的等价：

$$\mathrm{Pic}(\mathrm{Sp}) \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathscr{F}), \qquad (\Sigma^m\mathbb{S}, n) \longmapsto \Sigma^{\infty+m}_+ \mathrm{Map}_{\mathbb{Z}^{\downarrow}}(n,-).$$

我们令 $\mathbb{I}[n] \coloneqq \Sigma^{\infty+n}_+ \mathrm{Map}_{\mathbb{Z}^{\downarrow}}(n,-)$，更一般地，对于 $X\in\mathscr{F}$，记作 $X[n] \coloneqq \mathbb{I}[n]\otimes X \in \mathscr{F}$。我们将 $(0<1)\in\mathbb{Z}^{\uparrow}$ 在 Yoneda 嵌入下的像记为 $\tau \coloneqq \Sigma^\infty_+ y(0<1)\colon \Sigma\mathbb{I}[-1] \to \mathbb{I}$；更一般地，对于 $X\in\mathscr{F}$，记作 $\tau_X \coloneqq \tau\otimes X\colon \Sigma X[-1] \to X$。在 $s\in\mathbb{Z}$ 处计算 τ_X 可还原映射 $X^{s+1}\to X^s$，因此：

$$X[\tau^{-1}] \simeq \mathrm{const}(X^{-\infty}) \coloneqq \left(\cdots \xrightarrow{=} X^{-\infty} \xrightarrow{=} X^{-\infty} \xrightarrow{=} \cdots\right) \in \mathscr{F},$$

其中 $X^{-\infty} \coloneqq \mathrm{colim}_{s\in\mathbb{Z}^{\downarrow}} X^s$。换言之，将 τ 取逆会把一个滤谱变为其收敛对象上的常值滤。另一方面，我们有

$$\mathrm{cof}\left(\tau_X\colon \Sigma X[-1]\to X\right) \simeq \left(\cdots \xrightarrow{0} \mathrm{gr}_{s+1}X \xrightarrow{0} \mathrm{gr}_s X \xrightarrow{0} \cdots\right) \in \mathscr{F},$$

其中 $\mathrm{gr}_s X \coloneqq \mathrm{cof}(X^{s+1}\to X^s) \in$ 谱范畴，因此将 τ 锥化会把一个滤谱变为其伴随分次对象。在一个 $\mathbb{E}_\infty$-代数中锥化一个元素，通常不会得到一个 $\mathbb{E}_\infty$-代数。尽管如此，$C(\tau) \coloneqq \mathrm{cof}(\tau\colon \Sigma\mathbb{I}[-1]\to\mathbb{I})$ 具有自然的 $\mathbb{E}_\infty$- 代数结构 [Lur15，命题 3.2。5] 其模恰好是分次谱，下面将对此作出说明。

令 $\mathbb{Z}$ 表示视为离散阿贝尔群的整数，并将 $\mathscr{G} \coloneqq \mathrm{Fun}(\mathbb{Z},\mathrm{Sp})$ 记作 ∞-范畴的分次谱。沿包含映射 $\iota\colon \mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Z}^{\downarrow}$ 作限制，定义了一个松弛对称幺半函子 $\iota^*\colon \mathscr{F}\to\mathscr{G}$，而复合映射

$$\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{F}) \xrightarrow{\text{forget}} \mathscr{F} \xrightarrow{\iota^*} \mathscr{G},$$

[3]本项目由德国研究联合会（DFG）资助，资助依据为德国卓越战略 – EXC-2047/1 – 390685813。

是一个对称幺半等价 [Lur15，命题 3.2.7]。这将如下想法形式化：分次谱与滤谱相同，且 τ以 0 作用于其上。反过来，滤谱等价于配备一个次数为 -1 的自映射的分次谱。这可以通过考虑左 Kan 延拓 $\iota_!\colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}$来说明，它可以分解为

$$\iota_!\colon \mathcal{G} \xrightarrow{\mathbb{S}[[\tau]]\otimes(-)} \mathrm{Mod}_{\mathbb{S}[[\tau]]}(\mathcal{G}) \simeq \mathcal{F},$$

其中 $\mathbb{S}[[\tau]]$[4] $\coloneqq \iota^*\iota_!\mathbb{S}(0) \in$ 交换代数对象$(\mathcal{G})$[Lur15，命题 3.1.6]。这些互补的观察有时会令人困惑，因为它们将 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{G}$置于同等地位——两者都可以视为以对方为富化对象。为避免混淆，本文将坚持采用以$\mathcal{F}$为富化对象的视角。

τ-进塔

任意 τ-次幂 $C(\tau^k)$ $\coloneqq$余纤维 $(\tau^k\colon \Sigma^k \mathbb{I}[-k] \to \mathbb{I})$也属于一个 $\mathbb{E}_\infty$-代数，它们共同组成一座平方零扩张塔[5]，我们称之为 τ-进塔：

$$\mathbb{I} \simeq \lim_k C(\tau^k) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C(\tau^2) \longrightarrow C(\tau) \quad \in \mathrm{Fun}\left((\mathbb{Z}^{\downarrow}_{\geq 0})^{\triangleleft}, \mathrm{CAlg}(\mathcal{F})\right).$$

转到模便得到一座在分次谱与滤过谱之间插值的塔：

$$\mathcal{F} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Mod}_{C(\tau^2)}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{G}, \tag{II}$$

平方零障碍理论 [Bar22b] 使我们能够识别这座塔的连续纤维。例如，给定 $X \in \mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathcal{F})$，在适当的连通性假设下，我们有一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \{\theta_k(X) \simeq 0\} & \longrightarrow & \mathrm{Mod}_{C(\tau^{k+1})}(\mathcal{F}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \{X\} & \longrightarrow & \mathrm{Mod}_{C(\tau^k)}(\mathcal{F}), \end{array}$$

其左上角是 $\mathrm{Map}_{C(\tau)}(\mathrm{cof}(\tau_X)\ \Sigma^{k+2}\mathrm{cof}(\tau_X)[-k])$ 中从 0 到某个典范障碍映射 $\theta_k(X)\colon \mathrm{cof}(\tau_X) \to \Sigma^{k+2}\mathrm{cof}(\tau_X)[-k]$ 的路径空间。从启发式的角度来看，$C(\tau^n)$-模可以被视为滤谱的一个近似版本，它保留了相关谱序列前 $(n-1)$ 页的信息。

注 2.1. Ariotta-Krause [Ari21]以另一种形式探讨了上述障碍理论的一个变体。在上述文献中，我们所称的 $\theta_n(X)$ 被（在适当假设下）认定为 $n \geq 2$ 的 $(n+1)$ 重 Toda 括号，其中 Toda 括号是利用先前选择所提供的零同伦构造的 d_1-微分 $\mathrm{h}d_1, \ldots, d_1\mathrm{i}$。以这种方式呈现滤谱，与谱序列的运作机制颇为相似。这并非巧合。事实上，一种标准构造将 X 与一个谱序列相关联，其收敛项为 $\pi_* X^{-\infty}$，而其 E_1 页是双分次阿贝尔群 $\mathrm{É}_{t,s}\,\pi_t \mathrm{gr}_s X$。追溯这一构造可知，$d_k$-微分实际上是从第 k 个障碍映射的零同伦选择中提取出来的。更多详情请参阅 [Ari21] 。

变形

定义 2.2。一个 (1-参数)变形 (稳定 ∞-范畴的)是$\mathcal{F}$-模中的$\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}}$.[6] 注意，由于$\mathcal{F} \in$ 交换代数对象$(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}})$ 其模范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{F}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}})$ 是对称幺半的。给定一个 ∞-拟运算子 $\mathcal{O}$我们将 $\mathcal{O}$-幺半变形 定义为 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{F}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}})$ 中的一个$\mathcal{O}$-代数。

[4]作为一个 $\mathbb{E}_1$-代数，$\mathbb{S}[[\tau]]$ 由一个置于次数 -1 的球面的单个副本自由生成。 [5]我们将在第 3.1 节证明这一点。[6]稳定可呈现 ∞-范畴 $\mathcal{E}$ 上的一个 $\mathcal{F}$-模结构，等价于一个幺半函子 $(\mathbb{Z}^{\downarrow}, +) \to (\mathrm{End}^{\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}}}(\mathcal{E}), \circ)$。

为了说明术语“变形”，我们展示如何从 $\mathscr{E} \in \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}})$ 中提取一对稳定的 ∞-范畴，我们将其视为一般纤维和特殊纤维。二者都将通过沿一个对称幺半函子 $\mathscr{F} \to$ 谱范畴进行基变换来定义。为避免混淆，我们根据将谱范畴视为 $\mathscr{F}$-代数的方式，为它引入不同的记号。

定义 G. 我们令 $\mathscr{F}[\tau^{-1}] \in$ 交换代数对象$(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}})_{\mathscr{F}}$ 表示谱范畴，并通过 *sm* 函子将其视为一个 $\mathbb{E}_\infty$-$\mathscr{F}$-代数：

$$(-)^{-\infty} := \operatorname*{colim}_{\mathbb{Z}^{\downarrow}}(-) : \mathscr{F} \longrightarrow \mathrm{Sp}, \qquad X \longmapsto X^{-\infty}.$$

我们令 $\mathscr{F}[\tau{\sim}0] \in$交换代数对象$(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}})_{\mathscr{F}/}$ 表示通过 *sm* 函子视为 $\mathbb{E}_\infty$-$\mathscr{F}$-代数的 谱范畴</*style*)：

$$\mathrm{gr}_{\oplus}(-) : \mathscr{F} \xrightarrow{C(\tau)\otimes(-)} \mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{F}) \simeq \mathscr{G} \xrightarrow{\mathrm{colim}_{\mathbb{Z}}(-)} \mathrm{Sp}, \qquad X \longmapsto \mathrm{gr}_{\oplus}X := \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}_s X.$$

定义 2.3。 令 $\mathscr{E} \in \mathrm{Mod}_{\mathscr{A}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}})$ 为一个滤过变形。

1. E 的一般纤维是稳定的 ∞-范畴$\mathscr{E}[\tau^{-1}] := \mathscr{A}[\tau^{-1}] \otimes_{\mathscr{F}} \mathscr{E} \in \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}}$。 2. 特殊纤维[7]的$\mathscr{E}$是稳定的 ∞-范畴$\mathscr{E}[\tau{\sim}0] := \mathscr{A}[\tau{\sim}0] \otimes_{\mathscr{F}} \mathscr{E} \in \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}}$

.

例 2.4. 设 $A \in \mathrm{Alg}(\mathscr{F})$ 是一个滤过的 $\mathbb{E}_1$-代数。(左或右) A-模的 ∞-范畴 $\mathrm{Mod}_A(\mathscr{F})$ 是一个可呈现的 $\mathscr{F}$-模。其一般纤维和特殊纤维分别由下式给出：

$$\mathrm{Mod}_A(\mathscr{F})[\tau^{-1}] \simeq \mathrm{Mod}_{A^{-\infty}}, \qquad \mathrm{Mod}_A(\mathscr{F})[\tau{\sim}0] \simeq \mathrm{Mod}_{\mathrm{gr}_{\oplus}A}.$$

τ 进塔　可推广到任意变形$\mathscr{E} \in \mathrm{Mod}_{\mathscr{A}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}})$，只需与
(II)：

$$\mathscr{E} \longrightarrow \lim_{n} \mathrm{Mod}_{C(\tau^n)}(\mathscr{E}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Mod}_{C(\tau^2)}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E}).$$

这为$\mathscr{E}$的对象和映射空间提供了一种障碍理论，其中的障碍位于在 $\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E})$ 中计算得到的 Ext 群中。实际运用这种障碍理论至少面临两项困难。首先，不太容易看出如何用它来研究一般纤维$\mathscr{E}[\tau^{-1}]$（通常这才是我们主要感兴趣的对象）。（最简单的做法是使用 $\mathrm{Mod}_{C(\tau^n)}(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{F}} \mathscr{E}[\tau^{-1}] \simeq 0$。）其次（而且更严重的是），只有当我们能够说明障碍群的性质时，障碍理论才有用。理想情况下，我们希望障碍群是代数的，即某个阿贝尔范畴中的 Ext 群。这两个问题都将通过为$\mathscr{E}$赋予一种 t-结构来解决。为了确定这种 t-结构应满足哪些性质，我们借鉴了怀特海德塔的思路。

对角 t-结构

该怀特海德塔谱的 $Y \in$ 谱范畴是滤谱：

$$Y_{\geq\star} := (\cdots \longrightarrow Y_{\geq s+1} \longrightarrow Y_{\geq s} \longrightarrow Y_{\geq s-1} \longrightarrow \cdots) \in \mathscr{F}.$$

由怀特海德塔张成的 $\mathscr{F}$ 的全子范畴与 Sp 等价，但也具有一种内在描述：滤谱 $X \in \mathscr{F}$ 等价于一个怀特海德塔，当且仅当对于每个 $s \in \mathbb{Z}$，X^s 是 s-连通的，且 $X^{s+1} \to X^s$ 是一个 s-连通覆盖。我们将后者作为定义。

定义2.5。一个滤过（分次的）谱 X 被称为 对角（余）连通，如果 X^s 是 s-（余）连通的，对于所有 $s \in \mathbb{Z}$。对角连通对象的全子范畴 $\mathscr{F}^{\geq 0} \subseteq \mathscr{F}(\mathscr{G}^{\geq 0} \subseteq \mathscr{G})$ 是一个幺半 t-结构的连通部分，我们称之为对角 t-结构。

根据这个定义，$X \in \mathscr{F}$等价于一个怀特海德塔，当且仅当 $X \in \mathscr{F}^{\geq 0}$ 且 $\mathrm{cof}(\tau_X) \in \mathscr{F}_{\heartsuit}$。函子 $\iota^* : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$限制为等价 $\mathscr{F}_{\heartsuit} \simeq \mathscr{G}_{\heartsuit}$，将对角 t-结构的心识别为配备 sm 结构的分次阿贝尔群范畴，其编织遵循 Koszul 符号规则。为使读者熟悉对角 t-结构，我们用它来表达一些熟悉的构造。

[7]我们对术语特殊纤维 的使用与部分现有文献中的用法有所冲突；在那些文献中，该术语通常指 $\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E})$。这种歧义并不严重，因为$\mathscr{E}[\tau{\sim}0]$不过是后者的“周期化”，具体而言，$\mathscr{E}[\tau{\sim}0] \simeq \mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E})^{h\mathbb{Z}}$，其中 $\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E})$ 上的 $\mathbb{Z}$-作用来自如下识别：$\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{F}) \simeq \mathscr{G}$。

例 2.6. 一个谱的怀特海德塔可以表示为以下复合：

$$(-)_{\geq\star}\colon \mathrm{Sp} \xrightarrow{\mathrm{const}(-)} \mathscr{F} \xrightarrow{(-)_{\geq 0}} \mathscr{F}^{\geq 0} \subseteq \mathscr{F}.$$

例 2.7. 谱的分次同伦群可以表示为以下复合：

$$\pi_\star\colon \mathrm{Sp} \xrightarrow{(-)_{\geq\star}} \mathscr{F} \xrightarrow{\pi_0^\heartsuit} \mathscr{F}^\heartsuit \simeq \mathscr{C}^\heartsuit.$$

例 2.8. 分次阿贝尔群的埃伦伯格–麦克莱恩谱可以表示为以下复合：

$$H\colon \mathscr{C}^\heartsuit \simeq \mathscr{F}^\heartsuit \hookrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{(-)^{-\infty}} \mathrm{Sp}, \qquad A_\star \longmapsto H(A_\star) \simeq \bigoplus_{\infty > s > -\infty} \Sigma^s H A_s.$$

Goerss–Hopkins 变形

以下概念是本文正文部分的主要研究对象。

De定义 2.9. 一个*Goerss-Hopkins 变形* 是一个配备了 t-结构的变形$\mathscr{E}$，满足 is

1. 右完备： $\mathscr{E}^{\leq -\infty} := \tilde{\mathrm{N}}_n \mathscr{E}^{\leq n} = \{0\}$；2. 格罗滕迪克： 函子 $(-)_{\geq 0}\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}^{\geq 0}$ 保留滤过余极限；3. 对角： 对于每个 $X \in \mathscr{F}^{\geq 0}$ 和 $E \in \mathscr{E}^{\geq 0}$，都有 $X \otimes E \in \mathscr{E}^{\geq 0}$。

更一般地，给定一个 ∞-拟运算子 $\mathscr{O} \in \mathrm{Op}$，我们将 *$\mathscr{O}$幺半 Goerss-Hopkins 变形* 定义为一个$\mathscr{O}$幺半变形 $\mathscr{E}$，它配备了相容的 t-结构 [Lura，例 2.2.1。3] 并满足上述条件。

若 $\mathscr{E}$是一个 Goerss-Hopkins 变形，则连通对象 $\mathscr{E}^{\geq 0} \subseteq \mathscr{E}$构成一个格罗滕迪克预稳定 $\mathscr{F}^{\geq 0}$-模。反过来，格罗滕迪克预稳定 $\mathscr{F}^{\geq 0}$-模的稳定化自然是一个 Goerss-Hopkins 变形。这些运算建立了如下等价关系：

$$(-)^{\geq 0}\colon \left\{\text{Goerss-Hopkins deformations}\right\} \simeq \left\{\text{Grothendieck prestable } \mathscr{F}^{\geq 0}\text{-modules}\right\}\colon \mathrm{Sp}(-).$$

更一般地，$\mathscr{O}$幺半 Goerss–Hopkins 变形等价于 $\mathrm{Mod}_{\mathscr{F}^{\geq 0}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}})$ 中的 $\mathscr{O}$代数，其底层 ∞-范畴是格罗滕迪克预稳定的。此后我们将在这两种观点之间自由切换。我们常常滥用记号，将 $\mathscr{E}$写作 Goerss-Hopkins 变形，而省略 t-结构。

定义 2.10. 令 $\mathscr{E}$为一个 Goerss-Hopkins 变形。其合成类比是以下复合伴随中的右伴随：

$$\mathscr{E}^{\geq 0} \underset{(-)_{\geq 0}}{\hookrightarrow} \mathscr{E} \underset{}{\overset{\tau^{-1}}{\rightleftarrows}} \mathscr{E}[\tau^{-1}] : \nu.$$

与怀特海德塔一样，合成类比将$\mathscr{E}[\tau^{-1}]$嵌入为$\mathscr{E}^{\geq 0}$的一个全子范畴，并具有简单的刻画： $X \in \mathscr{E}^{\geq 0}$属于 ν的本质像： $\mathscr{E}[\tau^{-1}] \to \mathscr{E}^{\geq 0}$当且仅当 $\mathrm{cof}(\tau_X) \in \mathscr{E}^{\heartsuit}$。

例 2.11. 令 $R \in \mathrm{Alg}(\mathrm{Sp})$ 为一个 $\mathbb{E}_1$-代数谱，其怀特海德塔为 $R_{\geq\star} \in \mathrm{Alg}(\mathscr{F})$，并定义：

$$\mathscr{E}_R := \mathrm{Mod}_{R_{\geq\star}}(\mathscr{F})$$

令 $\mathscr{E}_R^{\geq 0} :=$ 模$_{R_{\geq\star}}(\mathscr{F}^{\geq 0})$赋予 t-结构于$\mathscr{E}_R$，使其成为一个 Goerss-Hopkins 变形，其心为阿贝尔范畴 $\mathscr{E}_R^\heartsuit \simeq$ 分次模$^\heartsuit_{\pi_\star R}$，即分次的 $\pi_\star R$-模。由于 $(R_{\geq\star})^{-\infty} \simeq R$ 和 $\mathrm{gr}_\oplus R_{\geq\star} \simeq H(\pi_* R)$，由例 2.4 可得等价：

$$\mathscr{E}_R[\tau^{-1}] \simeq \mathrm{Mod}_R(\mathrm{Sp}), \qquad \mathscr{E}_R[\tau{\sim}0] \simeq \mathrm{Mod}_{H(\pi_* R)}.$$

如果 R 是一个 $\mathbb{E}_\infty$-环，$\mathscr{E}_R$ 是对称幺半的，因此上述各个同一也都是对称幺半的。

本文中使用的 Goerss-Hopkins 变形的主要例子如下。

定义 2.12。令 $E(p,\ h)$ 表示素数 p 处、高度为 h 的 Morava E 理论，并考虑 Amitzur 复形：

$$\left([k] \longmapsto E(p,h)_{\geq\star}^{\otimes[k]}\right) \in \mathrm{Fun}(\Delta, \mathrm{CAlg}(\mathscr{F}))$$

逐层转到模范畴并取极限，我们定义：

$$\mathscr{E}_{p,h} \coloneqq \lim_{[k]\in\Delta} \mathrm{Mod}_{E(p,h)_{\geq\star}^{\otimes[k]}}(\mathscr{F}) \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Mod}_{\mathscr{F}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}})).$$

这是一个对称幺半 Goerss-Hopkins 变形，其 $\mathscr{E}_{p,h}^{\heartsuit} \simeq$ 分次余模$E(p,h)_\star E(p,h)^{\heartsuit}$ 的泛纤维和特殊纤维分别为：

$$\mathscr{E}_{p,h}[\tau^{-1}] \simeq \mathrm{Sp}_{p,h}, \qquad \mathscr{E}_{p,h}[\tau\sim 0] \simeq \mathrm{Fr}_{p,h}.$$

注 2.13。$\mathscr{E}_{p,\ h}$事实上作为对称幺半 ∞-范畴等价于超完备 $E(p,\ h)$-基合成谱，如 [Pst18] 中的定义。我们既不会证明，也不会以任何方式使用这种比较。

注记 2.14。令$\mathscr{C}$为一个稳定的、可呈现的 ∞-范畴，$\mathcal{A}$ 为一个格罗滕迪克阿贝尔范畴，且 $H\colon \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ 为一个与直和交换的同调函子。给定这些数据，Patchkoria-Pstragowski [PP21，定理 6.40] 定义了一个导出 ∞-范畴 $\mathcal{D}(\mathscr{C})$。有趣的是，[PP21，§4.4]中关于 $\mathcal{D}(\mathscr{C})$ 的线程结构可以扩展为一个$\mathscr{F}^{\geq 0}$-模结构，使其成为一个 Goerss-Hopkins 变形。我们预期情况确实如此，但不在此处继续讨论。

抽象代数性定理

本文的主要技术结果是关于 Goerss–Hopkins 变形的一个抽象代数性定理。粗略地说，我们给出一些条件，保证 Goerss-Hopkins 变形 $\mathscr{E}$在某种意义下“近似常值”：对于某个 k，有 $\mathrm{h}_k \mathscr{E}[\tau^{-1}] \simeq \mathrm{h}_k \mathscr{E}[\tau\sim 0]$。这些条件将借助另一种“近似常值”的概念来表述；尽管这个概念的定义颇为微妙，但在实践中更容易验证。

定义 2.15。我们定义 退化类比 函子 $\delta\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}$为以下对称幺半复合：

$$\delta\colon \mathscr{F} \xrightarrow{C(\tau)\otimes(-)} \mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{F}) \simeq \mathscr{G} \xrightarrow{\iota_!} \mathscr{F}.$$

在对象上的定义如下：

$$\delta\colon \left(\cdots \longrightarrow X^{s+1} \longrightarrow X^s \longrightarrow \cdots\right) \longmapsto \left(\cdots \longrightarrow \bigoplus_{k\geq s+1} \mathrm{gr}_k X \longrightarrow \bigoplus_{k\geq s} \mathrm{gr}_k X \longrightarrow \cdots\right).$$

我们将 $\mathscr{F}^{\delta} \in \mathrm{CAlg}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}})_{\mathscr{F}}$ 记作 $\mathscr{F}$，并将其视为通过 δ作用于自身之上的一个 $\mathbb{E}_\infty$-代数，然后定义：

$$(-)^{\delta} \coloneqq \mathscr{F}^{\delta} \otimes_{\mathscr{F}} (-)\colon \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}}) \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}}).$$

警告 2.16. δ的一个令人困惑之处在于，它在 Picard 上的限制与恒等映射有典范等价：$\mathrm{id}_{\mathrm{Pic}(\mathscr{F})} \simeq \delta|_{\mathrm{Pic}(\mathscr{F})} \coloneqq \mathrm{Pic}(\mathscr{F}) \to \mathrm{Pic}(\mathscr{F})$。不过请注意，尽管$\mathscr{F}$由 Picard 生成，这并不意味着 δ是恒等函子。例如，我们有 $\delta(Y_{\geq\star}) \simeq H(\pi_* Y)_{\geq\star}$，因此在怀特海德塔上，$\delta$的作用是消去所有 k-不变量。

例 2.17. 设 $\mathscr{E}_R$ 是例 2.11 中讨论的 Goerss-Hopkins 变形。那么存在典范等价 $\mathscr{E}_R^{\delta} \simeq \mathscr{E}_{H(\pi_* R)}$。

定义 2.18。设 $\mathscr{E}$是一个对称幺半 Goerss-Hopkins 变形。一个 $(\mathbb{E}_\infty,\ m)$-退化结构 在$\mathscr{E}$上是一个 t-正合、$\mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{F})$-线性的对称幺半等价的选择：

$$\gamma\colon \mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{E}) \simeq \mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{E}^{\delta}).$$

识别 $\delta(C(\tau)) \simeq C(\tau)$ 为任意 Goerss-Hopkins 变形给出了一个典范的 0-退化结构。此外请注意，任何 $(m+1)$-退化结构都特别确定了一个 m-退化结构。

注 2.19. m-退化变形在非正式意义上，是谱序列的一种范畴化实例，其第一个非零微分出现在 E_{m+1} 页。事实上，若 $X \in \mathscr{F}$ 满足存在一个 $C(\tau^{m+1})$-模之间的等价 $C(\tau^{m+1}) \otimes X \simeq C(\tau^{m+1}) \otimes \delta(X)$，那么谱序列 $\pi_t \mathrm{gr}_s(X) \Rightarrow \pi_{t-s} X^{-\infty}$ 中的第一个 m-微分便会消失。

例 2.20. 设 R 是一个 $\mathbb{E}_\infty$-环谱。在 $\mathscr{E}_R$ 上赋予 $(\mathbb{E}_\infty, m)$-退化结构的空间，等价于 $C(\tau^{m+1})$-$\mathbb{E}_\infty$-代数 $R_{[\star,\star+m]} \simeq H(\pi_* R)_{[\star,\star+m]}$ 交换代数对象 $(\mathscr{F})_{C(\tau^{m+1})/}$ 的等价空间。

回顾一下，若每个对象都存在一个由平坦对象组成的分解，则称对称幺半阿贝尔范畴 A 有足够多的平坦对象。我们将 A 的 Ext 维数定义为满足 $\mathrm{Ext}^k \mathrm{A}(-,-) = 0$ 对 $k > d$ 成立的最小值 d，并将 Tor 维数定义为满足 $\mathrm{Tor}^k \mathrm{A}(-,-)$ 对 $k > e$ 成立的最小值 e。回顾一下，Grothendieck 预稳定 ∞-范畴 $\mathrm{C}^{\geq 0}$ 称为 Postnikov 完备的，如果自然映射 $\mathrm{C}^{\geq 0} \to \lim_n \mathrm{C}^{[0,n]}$ 是等价；若它由离散对象生成，则称为 0-复合（见 [Lurb, §C]）。现在我们可以陈述抽象代数性定理。

定理 H. 设 $\mathscr{E}$ 是一个对称幺半 *Goerss-Hopkins* 变形，满足：

1. $\mathscr{E}^{\geq 0}$ 是 *Postnikov* 完备的，即自然映射 $\mathscr{E}^{\geq 0} \to \lim_n \mathscr{E}^{[0,n]}$ 是等价。 *2.* $\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E})$ 是0-复合的，即由离散对象在余极限下生成。 *3.* $\mathscr{E}^\heartsuit$ 有足够多的平坦对象，*Ext* 维数为 $d < \infty$，*Tor* 维数为 $e < \infty$。

那么，$(\mathbb{E}_\infty, m)$-退化结构 γ 在 $\mathscr{E}$ 上确定了一个对称幺半等价：

$$\mathrm{h}_{\lfloor \frac{m-d+4}{e+1} \rfloor - 3} \mathscr{E}[\tau^{-1}] \overset{(\gamma)}{\simeq} \mathrm{h}_{\lfloor \frac{m-d+4}{e+1} \rfloor - 3} \mathscr{E}[\tau \sim 0].$$

我们在第 H 节 3.2 证明了定理。证明可分为两个截然不同的部分：运算子 Goerss-Hopkins 塔的一个连通性结果，以及一个关于 ∞-拟运算子的元数逼近定理。后者在 [Bar22a] 中有详尽阐述，而本文大量依赖该结果。现在我们简要概述前者。

回忆一下，对称幺半 ∞-范畴 $\mathrm{C} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty) \simeq \mathrm{Seg}\, \mathrm{F}_*(\mathrm{Cat}_\infty)$ ∞具有底层 ∞-拟运算子，其由去直化 $\mathrm{C}^\otimes := \mathrm{Un}\, \mathrm{F}_*(\mathrm{C} : \mathrm{F}_* \to \mathrm{Cat}_\infty) \in \mathrm{Op}_\infty$ 给出。包含映射 $\nu : \mathrm{E}[\tau^{-1}] \hookrightarrow \mathrm{E}^{\geq 0}$ 是松弛对称幺半的，即定义了一个 ∞-拟运算子态射 $\nu : \mathrm{E}[\tau^{-1}]^\otimes \hookrightarrow (\mathrm{E}^{\geq 0})^\otimes$。现在，对 ν 本质像的刻画给出了一个 ∞-拟运算子的拉回方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}[\tau^{-1}]^\otimes & \xhookrightarrow{\nu} & (\mathscr{E}^{\geq 0})^\otimes \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle C(\tau)\otimes(-)} \\ (\mathscr{E}^\heartsuit)^\otimes & \hookrightarrow & \mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E})^\otimes. \end{array}$$

沿包含映射拉回整个 τ-adic 塔 $\mathrm{Mod}_{C(\tau^{\bullet+1})}(\mathscr{E})^\otimes$ 会产生一个由 $(\mathscr{E}^\heartsuit)^\otimes \hookrightarrow \mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E})^\otimes$-拟运算子构成的塔，我们称之为 $\infty\mathrm{E}$ 的运算子 Goerss-Hopkins 塔：

$$\mathscr{E}[\tau^{-1}]^\otimes \longrightarrow \lim_k \mathscr{M}_k^\otimes(\mathscr{E}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{M}_1^\otimes(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathscr{M}_0^\otimes(\mathscr{E}) \simeq (\mathscr{E}^\heartsuit)^\otimes$$

E 上的 $(\mathbb{E}_\infty, m)$-退化结构限制为 ∞-拟运算子的一个等价 $\mathrm{M}_m^\otimes(\mathrm{E}) \simeq \mathrm{M}_m^\otimes(\mathrm{E}^\delta)$。结合 $\mathrm{E}^\delta[\tau^{-1}] \simeq \mathrm{E}[\tau \sim 0]$ 这一识别，我们看到，要证明定理 H，只需证明 $C(\tau^{m+1}) \otimes (-) : \mathrm{E}[\tau^{-1}]^\otimes \to \mathrm{M}_m^\otimes(\mathrm{E})$ 在应用 $\mathrm{h}_\alpha(-)$ 后成为一个等价。不幸的是，仅凭障碍理论无法保证这样的结论。[8] 这时我们依赖 [Bar22a]，它将问题转化为断言 $C(\tau^{m+1}) \otimes (-) : \mathrm{h}_\alpha \mathrm{E}[\tau^{-1}]^\otimes \to \mathrm{h}_\alpha \mathrm{M}_m^\otimes(\mathrm{E})$ 在元数 $\leq \alpha + 3$ 中看起来像一个等价。然后我们验证，对于给定的 α，所有相关的障碍群都消失。

[8] 事实上，我们怀疑，在足够有趣的例子中，这一结论并不成立。

2.2 构造变形

本节的目的是开发构造 Goerss-Hopkins 变形的基本工具。我们从研究极限开始。

变形的极限

广义而言，我们构造 Goerss-Hopkins 变形的极限的能力，受到构造格罗滕迪克预稳定 ∞-范畴的极限的能力所制约。除非所涉及的所有函子都是左正合函子，否则后者遗憾地相当微妙（参见 [Lurb，备注 C.3.1 附近的讨论。7]）。下面的引理表明，正如预期的那样，Goerss-Hopkins 变形沿左正合函子取极限后仍然属于 Goerss-Hopkins 变形。

引理 2.21. 设 J 是一个 ∞-范畴，且 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-拟运算子。假设我们有一个由 J 索引的 $\mathscr{F}^{\geq 0}$-线性 $\mathcal{O}$-幺半 *dal* ∞-范畴

$$\mathscr{C}^{\geq 0}_{(-)} : J \longrightarrow \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}\left(\mathrm{Mod}_{\mathscr{F}^{\geq 0}}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right)\right),$$

使得

1. 对每个 $\alpha \in J$， ∞-范畴 $\mathscr{C}^{\geq 0}_{\alpha}$ 都是格罗滕迪克预稳定的。
2. *for each* $f : \alpha \to \beta \in J$ *the functor* $f_! : \mathscr{C}^{\geq 0}_{\alpha} \to \mathscr{C}^{\geq 0}_{\beta}$ *is left exact.*

那么，极限 $\mathscr{C}_{\infty} := \lim_{\alpha \in J} \mathscr{C}_{\alpha}$ 是一个带有 $\mathscr{C}^{\geq 0}_{\infty} \simeq \lim_{\alpha \in J} \mathscr{C}^{\geq 0}_{\alpha}$ 的 $\mathcal{O}$-幺半 *Goerss-Hopkins* 变形。此外，若对所有 $\alpha \in J$，$\mathscr{C}^{\geq 0}_{\alpha}$ 都是分离的（分别地，*Postnikov* 完备的），那么 $\mathscr{C}_{\infty}$ 也如此。

证明。由 [Lurb，命题 C.3.2.4]，极限 $\lim_{\alpha \in J} \mathrm{E}^{\geq 0}_{\alpha}$ 是格罗滕迪克预稳定的。自然的 F-线性、O-幺半比较映射 $\mathrm{E}_{\infty} \simeq \lim_{\alpha \in J} \mathrm{Sp}(\mathrm{E}^{\geq 0}_{\alpha}) \to \mathrm{Sp}(\lim_{\alpha} \mathrm{E}^{\geq 0}_{\alpha})$ 根据 [Lurb，推论 C.3.2.5] 是一个等价。由此可知，E_{∞} 确实是一个带有 $\mathrm{E}^{\geq 0}_{\infty} \simeq \lim_{\alpha \in J} \mathrm{E}^{\geq 0}_{\alpha}$ 的 O-幺半 Goerss-Hopkins 变形。由 [Lurb，推论 C.3.6.2 & C.3.6.4] 可知，分离性和完备性在取极限下保持不变。□

注记 2.22. 在引理 2.21 的背景下，$\mathscr{C}_{\infty}$ 上的对角 t-结构也可以等价地通过以下方式刻画：称对象 $\{X_{\alpha}\} \in \mathscr{C}_{\infty}$ 为连通，当且仅当对于每个 $\alpha \in J$， $X_{\alpha} \in \mathscr{C}_{\alpha}$ 都是连通的。

现在我们 来描述 Goerss-Hopkins 变形上的各种运算如何与极限相容。

引理 2.23. 存在典范的对称幺半函子：

$$[\tau^{-1}] : \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right) \to \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}} \qquad \mathscr{C} \longmapsto \mathscr{C}[\tau^{-1}] \tag{1}$$

$$[\tau \sim 0] : \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right) \to \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}} \qquad \mathscr{C} \longmapsto \mathscr{C}[\tau \sim 0] \tag{2}$$

$$\mathrm{Mod}_{C(\tau^k)}(-) : \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}^{\geq 0}}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right) \to \mathrm{Mod}_{\mathrm{Mod}_{C(\tau^k)}\left(\mathscr{F}^{\geq 0}\right)}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right) \qquad \mathscr{C}^{\geq 0} \longmapsto \mathrm{Mod}_{C(\tau^k)}(\mathscr{C}^{\geq 0}) \tag{3}$$

$$(-)^{\delta} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}^{\geq 0}}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right) \to \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}^{\geq 0}}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right) \qquad \mathscr{C}^{\geq 0} \longmapsto \mathscr{C}^{\delta} \tag{4}$$

$$(-)^{\heartsuit} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}^{\geq 0}}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right) \to \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}^{\heartsuit}}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right) \qquad \mathscr{C}^{\geq 0} \longmapsto \mathscr{C}^{\heartsuit} \tag{5}$$

函子 $(1-4)$ 保任意极限。函子 (5) 保沿左正合函子的极限。

证明。我们首先汇总关于退化类比函子 $\delta : \mathrm{F} \to \mathrm{F}$ 的一个事实（可由 [Bar+22，命题 2.5 和 2.12] 轻易推出）：其右伴随 δ^R 是单子性的，并且还给出一个（t-正合的）对称幺半等价 $\mathrm{Mod}_{\delta^R(\mathbb{I})}(\mathrm{F}) \simeq \mathrm{F}^{\delta}$。现在开始证明。在情形 $(1-2)$ 中，所讨论的函子可写为 $\mathrm{Mod}_A(-) : \mathrm{ModF}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right) \to \mathrm{Mod}_{\mathrm{Mod}_A(\mathrm{F})}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right) \simeq \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}}$，其中对于 (1)，我们取 $A = \mathbb{I}[\tau^{-1}]$；对于 (2)，我们取 $A = \delta^R\left(\mathbb{I}\right)[\tau^{-1}]$，二者都是 $\mathbb{E}_{\infty}$-代数。由于 $\mathrm{Mod}_A(-) \simeq \mathrm{Mod}_A(\mathrm{F}) \otimes \mathrm{F}(-)$，且 $\mathrm{Mod}_A(\mathrm{F}) \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{ModF}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right))$ 是可对偶化的（参见 [Lura，注 4.8.4.8]），结论成立。情形 $(3-4)$ 可由同样的论证得出，因为在这些情形中，我们可以将函子写为 $\mathrm{Mod}_A(-) : \mathrm{ModF}^{\geq 0}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right) \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{Mod}_A(\mathrm{F}^{\geq 0})}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right)$，其中对于 (3)，我们取 $A = C(\tau^k)$；对于 (4)，我们取 $A = \delta^R(1)$。最后，对于 (5)，我们可以将函子写为 $(-)^{\heartsuit} \simeq \mathrm{F}^{\heartsuit} \otimes \mathrm{F}^{\geq 0}(-) : \mathrm{ModF}^{\geq 0}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right) \to \mathrm{ModF}^{\heartsuit}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right)$，这显然是对称幺半的。关于极限的结论，注意到对于任意 $\mathrm{V} \in \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}$，$\mathrm{ModV}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right)^{\mathrm{lex}} \to \mathrm{ModV}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right)$ 和 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{V}}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right) \to \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}$ 都创建并保持极限，因此只需证明 $(-)^{\mathrm{disc}} : \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}, \mathrm{lex}} \to \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}, \mathrm{lex}}_{\leq 0}$ 保持极限，这可由 [Lur09，推论 5.5.6.22.] 得出。□

观察 2.24。 注意， $\delta(\mathbb{I}) \otimes C(\tau) \simeq C(\tau) \in \mathrm{CAlg}(\mathscr{F})$，因此我们有一个对称幺半函子之间的典范等价：

$$\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(-) \simeq \mathrm{Mod}_{C(\tau)}((-)^{\delta}) : \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}^{\geq 0}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}) \to \mathrm{Mod}_{\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{F}^{\geq 0})}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}) \simeq \mathrm{Mod}_{\mathscr{C}^{\geq 0}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}})$$

典范变形

现在我们介绍最简单的 Goerss–Hopkins 变形示例。

定义 2.25. 设 R 是一个 $\mathbb{E}_1$-环谱。我们将 *(左)典范变形* 定义为： R

$$\mathscr{C}_R := \mathrm{LMod}_{R_{\geq \star}}(\mathscr{F}) \in \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}}).$$

这是一个 Goerss-Hopkins 变形，其连通子范畴为 $\mathscr{C}_R^{\geq 0} := \mathrm{LMod}^{R_{\geq \star}}(\mathscr{F}^{\geq 0})$。

命题 2.26. 赋值 $R \longmapsto \mathscr{C}_R^{\geq 0}$ 定义了一个松弛对称幺半函子：

$$\mathscr{C}^{\geq 0}_{(-)} : \mathrm{Alg} := \mathrm{Alg}(\mathrm{Sp}) \xrightarrow{(-)_{\geq \star}} \mathrm{Alg}(\mathscr{F}^{\geq 0}) \xrightarrow{\mathrm{Mod}_{(-)}(\mathscr{F}^{\geq 0})} \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}^{\geq 0}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}).$$

并且存在松弛对称幺半函子之间的等价：

$$\mathscr{C}_{(-)}[\tau^{-1}] \simeq \mathrm{LMod}_{(-)} : \mathrm{Alg} \to \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}}, \qquad R \longmapsto \mathrm{LMod}_R, \tag{6}$$

$$\mathscr{C}_{(-)}[\tau \sim 0] \simeq \mathrm{LMod}_{H(\pi_\star(-))} : \mathrm{Alg} \to \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}}, \qquad R \longmapsto \mathrm{LMod}_{H(\pi_\star R)}, \tag{7}$$

$$\mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}\left(\mathscr{C}^{\geq 0}_{(-)}\right) \simeq \mathrm{LMod}_{(-)_{[\star,\star+m]}}\left(\mathscr{F}^{\geq 0}\right) : \mathrm{Alg} \to \mathrm{Mod}_{\mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{F}^{\geq 0})}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right), \quad R \longmapsto \mathrm{LMod}_{R_{[\star,\star+m]}}\left(\mathscr{F}^{\geq 0}\right), \tag{8}$$

$$\left(\mathscr{C}^{\geq 0}_{(-)}\right)^{\delta} \simeq \mathscr{C}^{\geq 0}_{H(\pi_\star(-))} : \mathrm{Alg} \to \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}^{\geq 0}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}), \qquad R \longmapsto \mathrm{LMod}_{H(\pi_* R)_{\geq \star}}\left(\mathscr{F}^{\geq 0}\right), \tag{9}$$

$$\mathscr{C}^{\heartsuit}_{(-)} \simeq \mathrm{grLMod}^{\heartsuit}_{\pi_\star(-)} : \mathrm{Alg} \to \mathrm{Mod}_{\mathscr{G}^{\heartsuit}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}), \qquad R \longmapsto \mathrm{grLMod}^{\heartsuit}_{\pi_\star R}. \tag{10}$$

我们将其总结在一张表中：

	$[\tau^{-1}]$	$[\tau \sim 0]$	$\mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(-)$	$(-)^{\delta}$	$(-)^{\heartsuit}$
$\mathscr{C}_R$	LMod_R	$\mathrm{LMod}_{H(\pi_\star R)}$	$\mathrm{LMod}_{R_{[\star,\star+m]}}(\mathscr{F})$	$\mathrm{LMod}_{H(\pi_* R)_{\geq \star}}(\mathscr{F})$	$\mathrm{grLMod}^{\heartsuit}_{\pi_\star R}$

证明。 在证明中，我们多次使用模块范畴的以下自然性性质，该性质由 [Lura 定理 4.8.5 得出16]：对于任意态射 $\Phi\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V} \in$ 交换代数对象$(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}})$，存在一个由对称幺半函子构成的典范交换方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alg}(\mathscr{U}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathrm{Alg}(\mathscr{V}) \\ {\scriptstyle \mathrm{LMod}_{(-)}(\mathscr{U})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{LMod}_{(-)}(\mathscr{V})} \\ \mathrm{Mod}_{\mathscr{U}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}) & \xrightarrow{(-)\otimes_{\mathscr{U}}\mathscr{V}} & \mathrm{Mod}_{\mathscr{V}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}). \end{array}$$

我们继续证明。(1 – 5) 中的函子均具有以下形式

$$\mathrm{Alg} \xrightarrow{(-)_{\geq \star}} \mathrm{Alg}(\mathscr{F}^{\geq 0}) \xrightarrow{\mathrm{LMod}_{(-)}(\mathscr{F}^{\geq 0})} \mathrm{Mod}_{\mathscr{F}^{\geq 0}}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right) \xrightarrow{\mathscr{V}\otimes_{\mathscr{F}^{\geq 0}}(-)} \mathrm{Mod}_{\mathscr{V}}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right),$$

对于某个态射 $\Phi\colon \mathscr{F}^{\geq 0} \to \mathscr{V} \in$ 交换代数对象$(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}})$。我们可以将这样的函子改写为

$$\mathrm{Alg} \xrightarrow{(-)_{\geq \star}} \mathrm{Alg}(\mathscr{F}^{\geq 0}) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Alg}(\mathscr{V}) \xrightarrow{\mathrm{LMod}_{(-)}(\mathscr{V})} \mathrm{Mod}_{\mathscr{V}}\left(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}\right).$$

此时，根据 Φ，通过将复合映射 $\Phi \circ (-)_{\geq\star}$：谱范畴 $\to \mathscr{V}$改写为更熟悉的构造，即可得到该断言。接下来，需要明确 Φ，并分别描述 5种情形下的复合映射 $\Phi \circ (-)_{\geq\star}$。

$$\Phi\colon \mathscr{F}^{\geq 0} \hookrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{(-)^{-\infty}} \mathrm{Sp}, \qquad \Phi \circ (-)_{\geq\star} \simeq \mathrm{Id}_{\mathrm{Sp}}\colon \mathrm{Sp} \to \mathrm{Sp}, \tag{11}$$

$$\Phi\colon \mathscr{F}^{\geq 0} \hookrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\mathrm{gr}_{\oplus}} \mathrm{Sp}, \qquad \Phi \circ (-)_{\geq\star} \simeq H(\pi_\star(-))\colon \mathrm{Sp} \to \mathrm{Sp}, \tag{12}$$

$$\Phi = C(\tau^{m+1}) \otimes\colon \mathscr{F}^{\geq 0} \to \text{模}_{C(\tau^{m+1})}\left(\mathscr{F}^{\geq 0}\right), \qquad \Phi \circ (-)_{\geq\star} \simeq (-)[\star, \star+m]\colon \text{谱范畴} \to \text{模}_{C(\tau^{m+1})}\left(\mathscr{F}^{\geq 0}\right), \tag{13}$$

$$\Phi = \delta|_{\mathrm{F}^{\geq 0}}\colon \mathrm{F}^{\geq 0} \to \mathrm{F}^{\geq 0}, \qquad \Phi \circ (-)_{\geq\star} \simeq (-)_{\geq\star} \circ H(\pi_\star(-))\colon \mathrm{Sp} \to \mathscr{F}^{\geq 0}, \tag{14}$$

$$\Phi = \pi_0^{\heartsuit}\colon \mathrm{F}^{\geq 0} \to \mathrm{F}^{\heartsuit}, \qquad \Phi \circ (-)_{\geq\star} \simeq \pi_\star(-)\colon \mathrm{Sp} \to \mathscr{F}^{\heartsuit}. \qquad \square$$

下面的推论直接由命题 2.26 得出。

推论 2.27。对于一个 $\mathbb{E}_\infty$-环谱 $R \in$ 交换代数对象(谱范畴)，我们有典范对称幺半等价：

$$\mathscr{C}_R[\tau^{-1}] \simeq \mathrm{Mod}_R, \quad \textit{and} \quad \mathscr{C}_R[\tau \sim 0] \simeq \mathrm{Mod}_{H(\pi_\star R)}.$$

平坦性

为获得 典范变形之间的左正合函子，我们引入一种恰当的平坦性概念。 s.

定义 2.28。令 $\mathscr{C}^{\geq 0}$ 为一个对称幺半格罗滕迪克预稳定 ∞-范畴，并令 $f\colon R \to S$为 $\mathscr{C} = \mathrm{Sp}(\mathscr{C}^{\geq 0})$ 中 $\mathbb{E}_1$- 代数的一个态射。我们称 f 是

1. （右）平坦 它满足：
   (a) The functor $\pi_0 S \otimes_{\pi_0 R} (-)\colon \mathrm{LMod}_{\pi_0 R}(\mathscr{C}^{\heartsuit}) \to \mathrm{LMod}_{\pi_0 S}(\mathscr{C}^{\heartsuit})$ is exact.
   (b) The natural map $\pi_0 S \otimes_{\pi_0 S} \pi_n R \xrightarrow{\sim} \pi_n S$ is an isomorphism for all n.
2. （右） π_*-平坦，当函子 $\pi_* S \otimes_{\pi_* R} (-)\colon \mathrm{LMod}_{\pi_* R}(\mathrm{gr}(\mathscr{C}^{\heartsuit})) \to \mathrm{LMod}_{\pi_* S}(\mathrm{gr}(\mathscr{C}^{\heartsuit}))$ 是正合函子时。

我们令$\mathrm{Alg}^{\flat}(\mathscr{C})$和$\mathrm{Alg}^{\pi_*\text{-}\flat}(\mathscr{C})$分别表示 $\mathrm{Alg}(\mathscr{C})$ 中由平坦态射和 π_*-平坦态射张成的宽子范畴。注意，每个平坦态射特别也是 π_*-平坦的。

注 2.29. 在两种概念都有定义时，我们这里的平坦性与 [Lura，定义 7.2.2 一致。10]无论何时这两种概念都有定义。

引理 2.30。设$\mathscr{C}^{\geq 0}$ 是一个对称幺半、分离的格罗滕迪克预稳定 ∞-范畴，并设 $f\colon R \to S \in \mathrm{Alg}^{\pi_*\text{-}\flat}(\mathscr{C}^{\geq 0})$是一个 π_*-平坦态射。那么函子 $S \otimes_R (-)\colon \mathrm{Mod}_R(\mathscr{C}^{\geq 0}) \to \mathrm{Mod}_S(\mathscr{C}^{\geq 0})$是左正合的。

证明。对于任意 $M \in \mathrm{Mod}_R(\mathscr{C}^{\geq 0})$，Künneth 谱序列 $\mathrm{Tor}_{\pi_* R}(\pi_* S, \pi_* M) \Rightarrow \pi_*(S \otimes_R M)$ 在零线上坍缩，从而得到 $\pi_*(S \otimes_R M) \simeq \pi_* S \otimes_{\pi_* R} \pi_* M$。正合性可通过考察同伦群得出。$\square$

例 2.31. </style}态射 $f\colon R \to S$ in $\mathrm{Alg}(\mathrm{Sp})$ 是 π_*-平坦的，当且仅当诱导的 Whitehead 塔 $f_{\geq\star}\colon R_{\geq\star} \to S_{\geq\star}$ in $\mathrm{Alg}(\mathscr{F}^{\geq 0})$ 是平坦的。因此我们有一个函子

$$(-)_{\geq\star}\colon \mathrm{Alg}^{\pi_*\text{-}\flat}(\mathrm{Sp}) \longrightarrow \mathrm{Alg}^{\flat}(\mathscr{F}^{\geq 0}).$$

命题 2.32. 设 J是一个 ∞-范畴，且设 $R^{(-)}\colon J \to$交换代数对象$^{\pi_*\text{-}\flat}$(谱范畴)是一个由 J索引的 $\mathbb{E}_\infty$-环谱图表，其态射为 π_*-平坦的。那么 $\mathscr{E}_\infty := \lim_{\alpha \in J} \mathscr{E}_{R^\alpha}$是一个完备的对称幺半 *Goerss-Hopkins* 变形，并具有以下性质：

1. 存在一个规范的分次的、对称幺半阿贝尔范畴等价：

$$\mathscr{E}_\infty^{\heartsuit} \simeq \lim_{\alpha \in J} \mathrm{grMod}^{\heartsuit}_{\pi_\star R^\alpha}.$$

2. 存在规范的对称幺半等价

$$\mathscr{E}_\infty[\tau^{-1}] \simeq \lim_\alpha \mathrm{Mod}_{R^\alpha}, \qquad \mathscr{E}_\infty[\tau\sim 0] \simeq \lim_\alpha \mathrm{Mod}_{H(\pi_\star R^\alpha)}.$$

3. 存在一个典范的 t-正合、$\mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{F})$-线性对称幺半等价：

$$\mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{E}_\infty) \simeq \lim_{\alpha\in J} \mathrm{Mod}_{R^\alpha_{[\star,\star+m]}}(\mathscr{F}).$$

4. 存在一个典范的 t-正合、$\mathscr{F}$线性对称幺半等价：

$$\mathscr{E}_\infty^\delta \simeq \lim_{\alpha\in J} \mathscr{E}_{H(\pi_\star R^\alpha)}.$$

证明。 例 2.31 与引理 2.30 结合起来表明，函子 $f_!\colon \mathscr{E}_{R^\alpha} \to \mathscr{E}_{R^\beta}$ 对每个 $f\colon \alpha\to\beta\in J$ 都是左正合的。引理 2.21 进而表明 $\mathscr{E}_\infty$ 是一个对称幺半、Postnikov 完备的格罗滕迪克预稳定 ∞-范畴。断言 $(1-4)$ 由引理 2.23 与命题2.26结合起来即可得出。 □

退化结构

现在我们研究典范变形及其极限上的退化结构。

定义 2.33。 设 $\mathcal{O}$是一个 ∞-拟运算子，并设 $\mathscr{E}$是一个 $\mathcal{O}$幺半 Goerss-Hopkins 变形。一个 $(\mathcal{O}\ m)$-退化结构 在$\mathscr{E}$上是一个 t-正合、$\mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{E})$-线性、$\mathcal{O}$幺半等价：

$$\gamma\colon \mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{E}^\delta) \simeq \mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{E}).$$

引理 2.34。 设 J 是一个 ∞-范畴，$\mathcal{O}$是一个 ∞-拟运算子，且 $R^{(-)}\colon J\to \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}$(谱范畴) 是一个由 J 索引的$\mathcal{O}$代数图表。存在一个典范等价：

$$\mathrm{Equiv}_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{F}))^J}\left(H(\pi_* R^{(-)})_{[\star,\star+m]}, R^{(-)}_{[\star,\star+m]}\right) \simeq \mathrm{Sect}_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathscr{G})^J}\left(\iota^* R^{(-)}_{[\star,\star+m]} \to \pi_\star(R)^{(-)}\right).$$

证明。 经过将 $\mathcal{O}$替换为 Boardman-Vogt 张量积 $J\otimes_{\mathrm{BV}}\mathcal{O}$ [Lura, §2.2.5] 我们可以假设$J=\mathrm{pt}$。利用对称幺半伴随式 $\iota_!\colon \mathscr{G}\rightleftarrows\mathscr{F}\colon \iota^*$ 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Map}_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{F}))}\left(H(\pi_* R^{(-)})_{[\star,\star+m]}, R^{(-)}_{[\star,\star+m]}\right) &\simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{F}))}\left(C(\tau^{m+1})\otimes \iota_!\pi_\star R, R_{[\star,\star+m]}\right)\\ &\simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathscr{F})}\left(\iota_!\pi_\star R, R_{[\star,\star+m]}\right)\\ &\simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathscr{G})}\left(\pi_\star R, \iota^* R_{[\star,\star+m]}\right).\end{aligned}$$

还需指出，映射 $\pi_\star R\to \iota^* R_{[\star,\star+m]}$ 诱导 $\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^{m+1}$-模 $\pi_\star R[[\tau]]/\tau^{m+1}\simeq R_{[\star,\star+m]}$ 的一个等价，当且仅当它在同伦群层面定义了 $\iota^* R_{[\star,\star+m]}\to\pi_\star R$ 的一个截面（参见观察3.13）。（注意， $\pi_\star R$ 是离散的，因此 $\iota^* R_{[\star,\star+m]}\to\pi_\star R$ 的一个 $\mathcal{O}$-代数截面，等同于一个$\mathcal{O}$代数映射 $\pi_\star R\to\iota^* R_{[\star,\star+m]}$，而该映射恰好在同伦群层面是一个截面。） □

推论 2.35. 设 J 是一个 ∞-范畴，$\mathcal{O}$是一个 ∞-拟运算子，并且 $R^{(-)}\colon J\to\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}\otimes_{\mathrm{BV}}\mathbb{E}_1}$(谱范畴) 是一个以 J 为指标的 $\mathcal{O}\otimes_{\mathrm{BV}}\mathbb{E}_1$-代数图表。那么存在一个典范映射：

$$\mathrm{Sect}_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}\otimes_{\mathrm{BV}}\mathbb{E}_1}(\mathscr{G})^J}\left(\iota^* R_{[\star,\star+m]}\to\pi_\star R\right) \longrightarrow \left\{(\mathcal{O},m)\text{-}\textit{degeneracy structures}^{9}\ \textit{on}\ \lim_{\alpha\in J}\mathscr{E}^{\geq 0}_{R^\alpha}\right\}.$$

此外，当 $\mathcal{O}=\mathbb{E}_\infty$ 且 $J=$点 时，此映射是一个等价。

[9]这里我们对术语稍作宽泛使用，因为 $\lim_{\alpha\in J}\mathscr{E}^{\geq 0}_{R^\alpha}\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_{\mathscr{F}^{\geq 0}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}))$ 可能并不是 Goerss-Hopkins 变形。尽管如此，退化结构对 $\mathrm{Mod}_{\mathscr{F}^{\geq 0}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}})$ 中的任意 $\mathcal{O}$-代数都有意义。

证明。 我们先处理 $J=$ 点的情形。引理 2.34随后给出一个映射（参见 [Lura，推论 4.8.5。20]）

$$\mathrm{Sect}_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}\otimes_{\mathrm{BV}}\mathbb{E}_1}(\mathcal{G})}\left(\iota^* R_{[\star,\star+m]}\to\pi_\star R\right)\to\mathrm{Equiv}_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}\left(\mathrm{Mod}_{\mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{F}^{\geq 0})}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}})\right)}\left(\mathrm{Mod}_{H(\pi_*R)[\star,\star+m]}(\mathscr{F}^{\geq 0}),\mathrm{Mod}_{R_{[\star,\star+m]}}(\mathscr{F}^{\geq 0})\right).$$

根据命题 $\mathcal{O}$ m 退化结构的空间恰好就是后者。对于 2.26。对于 $\mathcal{O}=\mathbb{E}_\infty$，此映射是一个同构 [Lura，推论 4.8.5。21]。为了证明一般情形，我们将 $\mathcal{O}$替换为 $J\otimes_{\mathrm{BV}}\mathcal{O}$（并将 J 替换为 pt）。于是，上述论证给出一个映射，其定义域具有所需形式，而陪域具有如下形式：

$$\mathrm{Equiv}_{\mathrm{Fun}\left(J,\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}\left(\mathrm{Mod}_{\mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{F}^{\geq 0})}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}})\right)\right)}\left(\mathrm{Mod}_{H(\pi_*R^{(-)})[\star,\star+m]}(\mathscr{F}^{\geq 0}),\mathrm{Mod}_{R^{(-)}_{[\star,\star+m]}}(\mathscr{F}^{\geq 0})\right).$$

取关于 J 的极限，便得到一个映射到退化结构空间。 □

命题 2.36。 设 $R^{(-)}\colon J\to\mathrm{Alg}^{\mathbb{E}_n}$(谱范畴) 是一个 J-指标化的 $\mathbb{E}_n$-环谱图表，并满足

1. 对每个 $\alpha\in J$，同伦群 π_*R^α 集中在可被 $m+1$ 整除的次数上；并且
2. 对每个 $\alpha\to\beta\in J$，映射 $R^\alpha\to R^\beta$ 都是 π_*-平坦的。

那么，$\lim_\alpha\mathscr{C}_{R^\alpha}$ 是一个 $\mathbb{E}_n$-幺半 *Goerss-Hopkins* 变形，并带有一个 $(\mathbb{E}_n,m)$-退化结构。

证明。 根据命题 2.32，极限是一个 Goerss-Hopkins 变形，因此根据推论 2.35，只需证明 $\mathrm{Sect}_{\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{G})^J}\left(\iota^* R^{(-)}_{[\,,\star\star+m]}\to\pi_\star R_{(-)}\right)$的可缩性，我们通过对 $0\leq j\leq m$ 归纳来证明这一点。 $j=0$ 的情形显然。对于归纳步骤，注意到根据观察 3.25，映射 $\iota^* R^{(-)}_{[\,,\star\star+j+1]}\to\iota^* R^{(-)}_{[\,,\star\star+j]}$是由某个导子 $\iota^* R_{[\star,\star+j]}\to\pi_\star R\rtimes\Sigma^{j+2}\pi_{\star+j+1}R$ 分类的平方零扩张，因此我们有一个纤维序列

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Sect}_{\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{G})}\left(\iota^* R^{(-)}_{[\star,\star+j+1]}\to\pi_\star R^{(-)}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Sect}_{\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{G})}\left(\iota^* R^{(-)}_{[\star,\star+j]}\to\pi_\star R^{(-)}\right)\\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow\\ \mathrm{pt} & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Mod}^{\mathbb{E}_n}_{\pi_\star R^{(-)}}(\mathcal{G})}\left(\mathbf{L}^{\mathbb{E}_n}_{\pi_\star R^{(-)}},\Sigma^{j+2}\pi_{\star+j+1}R^{(-)}\right).\end{array}$$

还需注意，由于次数的原因，只要 $j+1\not\equiv 0 \bmod m+1$，基底就是可缩的。 □

下面的推论可由命题 2.36 在 $n=\infty$ 和 $J=$ 点。的特殊情形下的证明推出。

推论 2.37。 设 $R\in$ 交换代数对象是一个 $\mathbb{E}_\infty$-环谱，其同伦群 π_*R 集中在可被 $m+1$ 整除的次数上。那么，$(\mathbb{E}_\infty,m)$-退化结构在 $\mathscr{C}_R$上的空间是可缩的。

3 障碍理论与代数性

本节中，我们将证明抽象代数性定理（定理 H），然后由此推出引言中提到的结果。我们的主要工具是 Goerss-Hopkins 塔。

3.1 Goerss-Hopkins 塔

在本小节中，我们将为一个（$\mathcal{O}$单子）Goerss-Hopkins 变形 $\mathscr{C}$关联一座 ∞-范畴（∞-拟运算子）塔，该塔试图收敛到一般纤维 $\mathscr{C}[\tau^{-1}]$。

观察 3.1. 将对象 $X \in \mathscr{E}^{\geq 0}$ 与 $\mathscr{F}^{\geq 0}$ 中的余纤维序列 $\mathbb{I} \to C(\tau^n) \to \Sigma^{n+1}C(\tau)[-n]$ 张量化，可得到一个余纤维序列

$$X \to C(\tau^n) \otimes X \to \Sigma^{n+1}X[-n],$$

其中，第一个映射是自由-遗忘伴随 $\mathscr{E}^{\geq 0} \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{C(\tau^n)}(\mathscr{E}^{\geq 0})$ 的单位映射。类似地，对于$X \in \mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})$，我们有一个由 $C(\tau^{n+1})$-模构成的余纤维序列：

$$X \to C(\tau^n) \otimes_{C(\tau^{n+1})} X \to \Sigma^{n+1}\left(C(\tau) \otimes_{C(\tau^{n+1})} X[-n]\right),$$

其中第一个映射是自由-遗忘伴随 Mod 的单位$C(\tau^{n+1})(\mathrm{E}^{\geq 0}) \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{C(\tau^n)}(\mathrm{E}^{\geq 0})$).

Usi观察 3.1 很容易推导出 [PV22，命题 2.16].

引理 3.2 (Pstragowski-VanKoughnett)。 设 $\mathscr{E}$为一个 *Goerss-Hopkins* 变形。对于 $X \in \mathscr{E}^{\geq 0}$，以下条件等价：

(1) 映射 $\tau : \Sigma X[-1] \longrightarrow X$ 是一个1-连通覆盖。*(2)* 对所有 $k \geq 0$，映射 $\tau^k : \Sigma^k X[-k] \longrightarrow X$ 都是一个 k-连通覆盖。*(3)* 对所有 $k \geq 0$，典范映射 $C(\tau^{k+1}) \otimes X \longrightarrow X_{\leq k}$ 是一个等价。*(4)* 典范映射 $C(\tau) \otimes X \longrightarrow X_{\leq 0}$ 是一个等价。

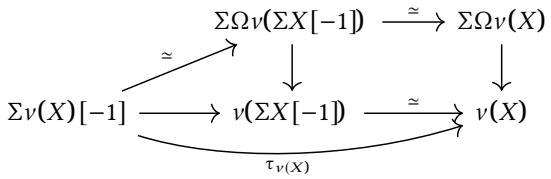
根据 [Pst21，定义 4。3] 我们将引理 3.2 改作定义。

定义 3.3。 满足引理 $X \in \mathscr{E}^{\geq 0}$ 3.2 的等价条件的对象 称为周期的。

备注 3.4。 如果 $\mathscr{E}$ 上的 Goerss-Hopkins 结构是分离的，则可以通过同伦群检验一个对象是否为周期对象： $X \in \mathscr{E}^{\geq 0}$ 是周期的，当且仅当自然映射 $\mathbb{Z}[\tau] \otimes_{\mathbb{Z}} \pi_0^{\heartsuit} X \to \pi_*^{\heartsuit} X$ 是同构。

命题 3.5。 合成类比函子 ν： $\mathscr{E}[\tau^{-1}] \to \mathscr{E}^{\geq 0}$ 是全忠实的，其本质像恰好由周期对象构成。

证明。 首先我们证明，对于所有 $X \in \mathscr{E}[\tau^{-1}]$，合成类比 $\nu(X)$ 都是周期的。在 τ_X 上对自然变换 $\Sigma\Omega\nu(-) \longrightarrow \nu(-)$ 求值： $\Sigma X[-1] \longrightarrow X$，得到下图中的右侧方块：



其中左下方的水平映射来自 $\mathscr{F}^{\geq 0}$-lax-linear 结构，该结构作用于 ν [Hau+22、推论 C]，；左侧的对角映射是等价，因为 ν 保留极限。由于 $\mathscr{E}^{\geq 0}$ 是预稳定的，右侧的垂直映射正是所需的 1-连通覆盖映射。

剩下要证明余单位 $\tau^{-1}\nu(X) \to X$是等价。由于 $\nu(X) \to X$是一个连通覆盖，复合映射 $\Sigma^{-k}\nu(X)[k] \to \Sigma^{-k}X[k] \xrightarrow{\simeq} X$（这里使用了 τ_X^k的逆）是一个 $(-k)$-连通覆盖。因此我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{fib}(\tau^{-1}\nu(X) \to X) &\simeq \mathrm{fib}\left(\operatorname*{colim}_k \Sigma^{-k}\nu(X)[k] \to X\right) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_k \mathrm{fib}\left(\Sigma^{-k}\nu(X)[k] \to X\right) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_k X_{\leq -k-1} \simeq 0.
\end{aligned}$$

□

下面的推论可视为例 2.11的一般化。

推论 3.6。 设 $\mathscr{C}$是一个幺半 *Goerss-Hopkins* 变形，且 $R \in \mathrm{Alg}(\mathscr{C}^{\geq 0})$。那么 $\mathrm{LMod}_R(\mathscr{C})$ 按典范方式构成一个 *Goerss-Hopkins* 变形。

证明。 沿着幺半函子 $\mathscr{F} \to \mathscr{C}$限制 $\mathrm{LMod}_R(\mathscr{C})$ 上的规范右 $\mathscr{C}$作用，即可得到一个 $\mathscr{F}$-模结构。由于 R是连通的，$\mathrm{LMod}_R(\mathscr{C})$ 继承自 $\mathscr{C}$的规范 t-结构。容易验证，这实际上是一个 Goerss-Hopkins t-结构。□

例 3.7. 推论 3.6 的一个具体例子由 $R = \nu(E)$ 给出，其中 $E \in \mathrm{Alg}(\mathscr{C}[\tau^{-1}])$。这说明，对于任意 $E \in \mathrm{Alg}(\mathscr{C}[\tau^{-1}])$，$\mathrm{LMod}_{\nu(E)}(\mathscr{C})$ 都是一个 Goerss-Hopkins 变形；展开定义后，我们可以确定其一般纤维和特殊纤维：

$$\mathrm{Mod}_{\nu(E)}(\mathscr{C})[\tau^{-1}] \simeq \mathrm{Mod}_E(\mathscr{C}[\tau^{-1}]), \qquad \mathrm{Mod}_{\nu(E)}(\mathscr{C})[\tau{\sim}0] \simeq \mathrm{Mod}_{H\pi_*^{\heartsuit}(E)}(\mathscr{C}[\tau{\sim}0])$$

关于分次扩张的补充说明

在 [Law20], Lawson 在对称幺半 ∞-范畴的 Picard 群中引入了一种构造，该构造向其中的元素添加“形式根式”。本小节将这一构造调整到 Goerss-Hopkins 变形的情形中。我们先回顾相关构造。

定义 3.8. 设 $\mathscr{C}$为一个可呈示的对称幺半 ∞-范畴，并分别将其 Picard 谱和 Brauer 谱记为 $\mathfrak{pic}(\mathscr{C})$ 和 $\mathfrak{br}(\mathscr{C})$。对于连通谱 $\rho\colon A \to \mathfrak{pic}(\mathscr{C})$ 的一个态射，我们定义

$$\mathbb{I}[\rho] \coloneqq \mathrm{colim}\left(\Omega^\infty A \xrightarrow{\Omega^\infty \rho} \Omega^\infty \mathfrak{pic}(\mathscr{C}) \hookrightarrow \mathscr{C}\right).$$

类似地，给定一个连通谱的态射 $\mu\colon B \to \mathfrak{br}(\mathscr{C})$，我们定义

$$\mathscr{C}[\mu] \coloneqq \mathrm{colim}\left(\Omega^\infty B \xrightarrow{\Omega^\infty \mu} \Omega^\infty \mathfrak{br}(\mathscr{C}) \hookrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathscr{C}}(\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}})\right).$$

引理 3.9 (Lawson)。 设 $\mathscr{C} \in$ 交换代数对象$(\mathscr{C})$，并设 $\rho\colon A \to \mathfrak{pic}(\mathscr{C})$ 是连通谱的一个态射。那么存在一个典范的 $\mathscr{C}$线性对称幺半等价：

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{I}[\rho]}(\mathscr{C}) \simeq \mathscr{C}[\Sigma(\rho)].$$

证明。 对于任意 $\mathscr{D} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Mod}_{\mathscr{C}})$，我们都有一个自然的（不一定交换的）图表

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma A & \longrightarrow & \Sigma\mathfrak{pic}(\mathscr{C}) & \hookrightarrow & \mathfrak{br}(\mathscr{C}) \\ \downarrow & ? & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma\mathfrak{pic}(\mathscr{D}) & \hookrightarrow & \mathfrak{br}(\mathscr{D}). \end{array}$$

注意到右侧方形中的水平映射都是单态射，因此左侧方形的填充空间等价于复合矩形的填充空间。作为一个 Thom 构造，$\mathrm{Mod}_{\mathbb{I}[\rho]}(\mathscr{C}) \in$交换代数对象$(\mathrm{Mod}_{\mathscr{C}})$在左侧方形交换的条件下是始对象，因此在复合矩形交换的条件下也同样是始对象。后者恰好是 $\mathscr{C}[\Sigma\rho]$ [Law20命题44]的泛性质。□

引理 3.10. 设 $\mathscr{C}$是一个对称幺半 *Goerss-Hopkins* 变形，并设 $\rho\colon A \to \mathfrak{pic}(\mathscr{C}[\tau^{-1}])$ 是一个连通谱之间的态射。假设松弛对称幺半复合

$$\nu \circ \Omega^\infty(\rho)\colon \Omega^\infty A \xrightarrow{\Omega^\infty(\rho)} \mathrm{Pic}(\mathscr{C}[\tau^{-1}]) \hookrightarrow \mathscr{C}[\tau^{-1}] \xrightarrow{\nu} \mathscr{C},$$

是强幺半的，因此对应于唯一映射 $\nu\circ\rho\colon A \to \mathfrak{pic}(\mathscr{C})$。于是 $\mathscr{C}[\Sigma(\nu\circ\rho)]$ 是一个对称幺半 *Goerss-Hopkins* 变形。以这种方式构造分次扩张与引理 (1 – 5) *2.23* 中的构造相容。特别地，我们有典范等价：

$$\mathscr{C}^\delta[\Sigma(\nu\circ\rho)] \simeq \mathscr{C}[\Sigma(\nu\circ\rho)]^\delta, \qquad \mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{C}[\Sigma(\nu\circ\rho)]) \simeq \mathrm{Mod}_{C(\tau^{m+1})}(\mathscr{C})[\Sigma(\nu\circ\rho)/\tau^{m+1}]$$

证明。 由推论 3.6、命题 3.5和引理 3.9可知，只需验证 $\mathbb{I}[\rho]$是周期的。为此，注意到 $C(\tau)$ $\otimes \mathbb{I}[\rho] \simeq C(\tau) \otimes \operatorname{colim}_A \rho(a) \simeq \operatorname{colim}_A C(\tau) \otimes \rho(a)$，它是离散的，因为每个 $\rho(a)$ 都是周期的，且 A是离散的。该断言的第二部分由识别式 $\mathscr{E}[\Sigma\rho] \simeq \operatorname{Mod}_{\mathbb{I}^{[\rho]}}(\mathscr{E})$ 立即得到。□

潜在阶段

以下推论是对引理 3.2 的直接修改。（参见 [PV22，引理 4。5]。）

推论 3.11 (Pstragowski-VanKoughnett)。 设 $\mathscr{E}$为一个 *Goerss-Hopkins* 变形。对于 $X \in \operatorname{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})$，以下各项等价：

1. 对所有 $0 \leq k \leq n$，自然映射 $C(\tau^{k+1}) \otimes_{C(\tau^{n+1})} X \to X_{\leq k}$ 都是等价。
2. 自然映射 $C(\tau) \otimes_{C(\tau^{n+1})} X \to X_{\leq 0}$是一个等价。

定义 3.12. 一个 *n*-阶段 在 $\mathscr{E}^{\geq 0}$中是一个 $C(\tau^{n+1})$-模 $X \in \operatorname{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})$，它满足推论3.11的等价条件。

观察 3.13. 与注记 3.4类似，可以通过同伦群[10]检查一个 $C(\tau^{n+1})$-模是否为潜在的 n-阶段。事实上，$X \in \operatorname{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})$ 是潜在的 n-阶段，当且仅当自然映射诱导同构 $\pi_0^{\heartsuit}(X)[\tau]/(\tau^{n+1}) \simeq \pi_*^{\heartsuit}(X)$。

观察 3.1 中的余纤维序列 X 在 n为周期的或潜在的 n-阶段时，形式尤其简单。我们记录下来以备后用。

观察 3.14. 当 $X \in \mathscr{E}^{\geq 0}$ 是周期的时，存在一个典范余纤维序列：

$$X \longrightarrow X_{\leq n-1} \longrightarrow \Sigma^{n+1} X_{\leq 0}[-n].$$

类似地，当 $X \in \operatorname{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})$ 是潜在的 n-阶段时，存在一个典范余纤维序列：

$$X \longrightarrow X_{\leq n-1} \longrightarrow \Sigma^{n+1} X_{\leq 0}[-n].$$

推论 3.15. 设 $\mathscr{E}$是一个 $\mathcal{O}$幺半 *Goerss-Hopkins* 变形。那么存在一个典范的 ∞-拟运算子拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}[\tau^{-1}]^{\otimes} & \xhookrightarrow{\nu} & (\mathscr{E}^{\geq 0})^{\otimes} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle C(\tau)\otimes(-)} \\ (\mathscr{E}^{\heartsuit})^{\otimes} & \hookrightarrow & \operatorname{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})^{\otimes}. \end{array}$$

证明。 由命题 3.5 伴随 τ^{-1}: $\mathscr{E}^{\geq 0} \rightleftarrows \mathscr{E}$: ν是一个反射局部化。由于 τ^{-1} 是对称幺半的，因此它在 [Lura，定义 2.2.1 的意义下是“相容的”。6] 因此 [Lura，命题 2.2.19]蕴含顶端的映射是全忠实的。到拉回的比较映射由命题 3.5 可知本质满，因此是等价。□

定义 3.16。 设 $\mathcal{O}$是一个 ∞-拟运算子，且 $\mathscr{E}$是一个 $\mathcal{O}$幺半 Goerss-Hopkins 变形。其运算子 Goerss-Hopkins 塔 是 $\mathscr{E}$的如下 ∞-拟运算子塔，定义在 $\mathcal{O}$上：

$$\mathscr{E}[\tau^{-1}]^{\otimes} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{M}_1^{\otimes}(\mathscr{E}) \xrightarrow{C(\tau)\otimes_{C(\tau^2)}(-)} \mathscr{M}_0^{\otimes}(\mathscr{E}) \simeq (\mathscr{E}^{\heartsuit})^{\otimes} \in \operatorname{Op}_{\infty/\mathcal{O}},$$

其中 $\mathscr{M}_n^{\otimes}(\mathscr{E})$ 定义为以下拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n^{\otimes}(\mathscr{E}) & \hookrightarrow & \operatorname{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})^{\otimes} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle C(\tau)\otimes_{C(\tau^{n+1})}(-)} \\ (\mathscr{E}^{\heartsuit})^{\otimes} & \hookrightarrow & \operatorname{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})^{\otimes}. \end{array}$$

等价地，$\mathscr{M}_n^{\otimes}(\mathscr{E}) \subseteq \operatorname{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E})^{\otimes}$是由潜在的 n-阶段张成的满子运算子。

[10]与注记 3.4不同，此处不需要分离性，因为所有对象都有上界。

注记 3.17。 定义 3.16 自然地恢复了 Pstragowski-VanKoughnett [PV22 中定义的塔，定义 5.1]。事实上，假设$\mathscr{E}$是对称幺半的，并注意到对于任意 ∞-拟运算子$\mathcal{O} \in \mathrm{Op}$，函子 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(-) : \mathrm{Op} \to \mathrm{Cat}_\infty$ 保极限，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathscr{M}_n^{\otimes}(\mathscr{E})) &\simeq \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathscr{E}^{\heartsuit}) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0}))} \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})) \\ &\simeq \mathscr{E}^{\heartsuit} \times_{\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})} \mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0}) \times_{\mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})} \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})) \\ &\simeq \mathscr{M}_n(\mathscr{E}) \times_{\mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})} \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})).\end{aligned}$$

这将 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathscr{M}_n^{\otimes}(\mathscr{E}^{\geq 0}))$ 与 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0}))$ 中由底层对象为 potential n-stage 的$\mathcal{O}$-代数所张成的全子范畴相对应。

收敛

现在我们研究 Goerss-Hopkins 塔的收敛性。若 Goerss-Hopkins 变形 $\mathscr{E}$ 满足完备条件，$\mathscr{E}^{\geq 0}$ 按照 [Lurb 的定义 A.7.2 的意义是 Postnikov 完备的，1], 也就是说，若 $\mathscr{E}^{\geq 0} \to \lim_n \mathscr{E}^{[0,n]}$ 是等价。我们将看到，$\mathscr{E}$ 的完备性意味着其 τ-进塔收敛，进而也意味着其 Goerss-Hopkins 塔 $\mathscr{M}_\bullet^{\otimes}(\mathscr{E})$ 收敛。

引理 3.18. 设 $\mathscr{E}$表示一个 *Goerss-Hopkins* 变形。这些函子

$$C(\tau^n) \otimes (-) : \mathscr{E}^{\geq 0} \to \mathrm{Mod}_{C(\tau^n)}(\mathscr{E}^{\geq 0}), \quad \textit{and} \quad C(\tau^n) \otimes_{C(\tau^{n+1})} (-) : \mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0}) \longrightarrow \mathrm{Mod}_{C(\tau^n)}(\mathscr{E}^{\geq 0}),$$

在 $(n-1)$-截断对象上诱导等价。

证明。在两种情况下，证明都相同，因此我们只讨论左函子。由于遗忘函子 $\mathrm{E}^{[0,n-1]} \to \mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathrm{E}^{[0,n-1]})$ 是保守的，只需证明其左伴随 $\mathrm{E}^{[0,n-1]} \xrightarrow{C(\tau^n)\otimes(-)} \mathrm{Mod}_{C(\tau^n)}(\mathrm{E}^{\geq 0}) \xrightarrow{(-)_{\leq n-1}} \mathrm{Mod}_{C(\tau^n)}(\mathrm{E}^{[0,n-1]})$ 是全忠实的。当且仅当对于所有 $X \in \mathrm{E}^{\geq 0}$，单位映射 $X \longrightarrow C(\tau^n) \otimes_{C(\tau^{n+1})} X$ is $(n-1)$-连通时，结论成立；这由观察 3.1 得出。□

引理 3.19. 设 $\mathscr{E}$是一个完备的 *Goerss-Hopkins* 变形。则自然函子诱导一个等价：

$$\mathscr{E}^{\geq 0} \xrightarrow{\sim} \lim_n \mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})$$

证明。 由于$\mathscr{E}^{\geq 0}$是完备的，我们有：

$$\begin{aligned}\mathscr{E}^{\geq 0} &\simeq \lim_k \mathscr{E}^{[0,k]} \\ &\simeq \lim_k \mathrm{Mod}_{C(\tau^{k+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})^{\leq k} && \text{(Lemma 3.18)} \\ &\simeq \lim_k \lim_n \mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})^{\leq k} && \text{(Lemma 3.18)} \\ &\simeq \lim_n \lim_k \mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})^{\leq k} \\ &\simeq \lim_n \mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0}).\end{aligned}$$

□

推论 3.20。 设$\mathscr{E}$是一个完备的$\mathcal{O}$-幺半 *Goerss-Hopkins* 变形。那么，自然映射诱导出一个 ∞-拟运算子之间的等价：

$$\mathscr{E}[\tau^{-1}]^{\otimes} \xrightarrow{\sim} \lim_n \mathscr{M}_n^{\otimes}(\mathscr{E})$$

证明。 τ-进塔 $\mathrm{Mod}_{C(\tau^{\bullet+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})$ 是一个由 $\mathcal{O}$-幺半范畴组成的塔。由于遗忘函子 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Cat}_\infty) \to \mathrm{Cat}_\infty$ 保持极限，引理 3.19 给出一个 $\mathcal{O}$-幺半等价 $\mathscr{E}^{\geq 0} \xrightarrow{\sim} \lim_n \mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})$。由于 $(-)^{\otimes} : \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Cat}_\infty) \longrightarrow \mathrm{Op}_{\infty/\mathcal{O}}$是一个右伴随，我们有 $(\mathscr{E}^{\geq 0})^{\otimes} \simeq \lim_n \mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})^{\otimes}$。将左侧限制到周期对象，并将右侧限制到潜在阶段，即可证明这一结论。□

τ-进塔的平方零性质

在解释 Goerss-Hopkins 塔的障碍理论之前，我们必须先论证先前的主张，即 τ-进塔确实是一个平方零扩张塔。

构造 3.21。 整数乘法定义了一个函子：

$$\mathbb{Z}_{\geq 1}^{\downarrow} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat})}(\mathbb{Z}_{\leq 0}^{\uparrow}, \mathbb{Z}_{\leq 0}^{\uparrow}), \qquad k \longmapsto \left(k \cdot (-) : \mathbb{Z}_{\leq 0}^{\uparrow} \to \mathbb{Z}_{\leq 0}^{\uparrow}\right),$$

由此得到一列对称幺半左伴随：

$$(\cdots \longrightarrow \Gamma_{k+1} \longrightarrow \Gamma_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma_1 \simeq \mathrm{Id}) \quad \in \mathrm{End}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})}(\mathrm{Fun}(\mathbb{Z}_{\leq 0}^{\downarrow}, \mathrm{Sp})).$$

展开定义可知 $\Gamma_k(\tau : \Sigma_{\mathbb{I}}[-1] \to \mathbb{I}) \simeq (\tau^k : \Sigma^k \mathbb{I}[-k] \to \mathbb{I})$，因此将上述塔作用于 $C(\tau) \in$交换代数对象$(\mathrm{Fun}(\mathbb{Z}_{\leq 0}^{\uparrow},$ 谱范畴$))$，会在交换代数对象 $\left(\mathrm{Fun}(\mathbb{Z}_{\leq 0}^{\downarrow},\right.$ 谱范畴$)\Big)$中得到一列塔；沿包含映射 $\mathbb{Z}_{\leq 0}^{\uparrow} \hookrightarrow \mathbb{Z}^{\uparrow}$ 推前后，便得到 τ-进塔：

$$\left(\cdots \longrightarrow C(\tau^{k+1}) \longrightarrow C(\tau^k) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C(\tau)\right) \in \mathrm{Fun}\left(\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\downarrow}, \mathrm{CAlg}(\mathscr{F})\right)$$

要证明 $C(\tau^{k+1}) \to C(\tau^k)$ 是一个平方零扩张，我们使用 Lurie 的余切复形形式体系[Lura, §7.3]。设 C 是一个稳定、可呈示的对称幺半 ∞-范畴，且 $\mathsf{C} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}})$；给定一个 $\mathbb{E}_\infty$-代数 $A \in \mathrm{CAlg}(\mathsf{C})$，我们用 $\mathrm{L}_A^{\mathbb{E}_\infty} \in \mathrm{Mod}_A(\mathsf{C})$ 表示 A [Lura, §7.3.2] 的绝对余切复形。给定一个态射 $\varphi : A \to B \in \mathrm{CAlg}(\mathsf{C})$，我们用 $\mathrm{L}^{\mathbb{E}_\infty}(\varphi : A \to B) \in \mathrm{Mod}_B(\mathsf{C})$ 表示相对余切复形 [Lura, §7.3.3]，其定义为以下余纤维：

$$\mathrm{L}^{\mathbb{E}_\infty}_{(\varphi : A \to B)} \coloneqq \mathrm{cof}\left(B \otimes_A \mathrm{L}_A^{\mathbb{E}_\infty} \to \mathrm{L}_B^{\mathbb{E}_\infty}\right) \in \mathrm{Mod}_B(\mathscr{C})$$

$C(\tau^{k+1}) \to C(\tau^k)$ 的平方零性质将由以下引理推出。

引理 3.22. 对于任意 $k \geq 1$，自然映射

$$\mathrm{cof}\left(C(\tau^{k+1}) \to C(\tau^k)\right) \to \mathrm{L}^{\mathbb{E}_\infty}_{C(\tau^{k+1}) \to C(\tau^k)} \in \mathrm{Mod}_{C(\tau^k)}(\mathscr{F})$$

在度数 $\geq -k$ 上诱导一个等价。

证明. 令 Σ_{CAlg}: 交换代数对象$^{\mathrm{aug}}(\mathscr{G}) \to$交换代数对象$^{\mathrm{aug}}(\mathscr{G})$：$\Omega_{\mathrm{CAlg}}$ 表示（基点）悬挂-环伴随。由于 $\Sigma_{\mathrm{CAlg}}(-) \simeq \mathrm{Bar}(-)$，由 [Bur22，引理 A.11] 可知，对于所有 $s \geq -k$：

$$\begin{aligned}
\mathrm{fib}\left(\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^{k+1} \to \mathbb{S}[[\tau]]/\tau^k\right)^s &\simeq \operatorname*{colim}_n \mathrm{fib}\left(\Omega^n_{\mathrm{CAlg}}\Sigma^n_{\mathrm{CAlg}}\left(\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^{k+1}\right) \to \Omega^n_{\mathrm{CAlg}}\Sigma^n_{\mathrm{CAlg}}\left(\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^k\right)\right)^s \\
&\simeq \mathrm{fib}\left(\Omega^\infty_{\mathrm{CAlg}}\Sigma^\infty_{\mathrm{CAlg}}\left(\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^{k+1}\right) \to \Omega^\infty_{\mathrm{CAlg}}\Sigma^\infty_{\mathrm{CAlg}}\left(\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^k\right)\right)^s \\
&\simeq \mathrm{fib}\left(\mathbb{S}(0) \otimes_{\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^{k+1}} \mathrm{L}^{\mathbb{E}_\infty}_{\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^{k+1}} \to \mathbb{S}(0) \otimes_{\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^k} \mathrm{L}^{\mathbb{E}_\infty}_{\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^k}\right)^s \\
&\simeq \left(\mathbb{S}(0) \otimes_{\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^k} \mathrm{fib}\left(\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^k \otimes_{\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^{k+1}} \mathrm{L}^{\mathbb{E}_\infty}_{\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^{k+1}} \to \mathrm{L}^{\mathbb{E}_\infty}_{\mathbb{S}[[\tau]]/\tau^k}\right)\right)^s
\end{aligned}$$

将其通过对称幺半等价 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{S}[[\tau]]}(\mathscr{G}) \simeq \mathscr{F}$传递后，我们可以得出复合映射

$$\mathrm{cof}\left(C(\tau^{k+1}) \to C(\tau^k)\right) \to \mathrm{L}^{\mathbb{E}_\infty}_{C(\tau^{k+1}) \to C(\tau^k)} \to C(\tau) \otimes_{C(\tau^k)} \mathrm{L}^{\mathbb{E}_\infty}_{C(\tau^{k+1}) \longrightarrow C(\tau^k)},$$

在度数 $\geq -k$ 上是一个等价。由于 $\mathrm{L}^{\mathbb{E}_\infty}_{C(\tau^{k+1}) \to C(\tau^k)}$ 集中于非负度，且 $\mathrm{cof}\ (C(\tau^{k+1}) \to C(\tau^k))$ 在度数 $> -k$ 上消失，因此命题成立。□

定义 3.23. 我们定义

$$\beta_k : C(\tau^k) \longrightarrow C(\tau^k) \rtimes \mathrm{L}^{\mathbb{E}_\infty}_{C(\tau^k)} \longrightarrow C(\tau^k) \rtimes \mathrm{L}^{\mathbb{E}_\infty}_{C(\tau^{k+1}) \to C(\tau^k)} \longrightarrow C(\tau^k) \rtimes \Sigma^{k+1} C(\tau)[-k],$$

其中最后一个映射由投影到次数 $-k$ 诱导（见引理 3.22）。

推论 3.24。 在 CAlg($\mathscr{F}$) 中存在一个典范的拉回方块

$$\begin{array}{ccc} C(\tau^{k+1}) & \longrightarrow & C(\tau^k) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \eta_0} \\ C(\tau^k) & \xrightarrow{\beta_k} & C(\tau^k) \rtimes \Sigma^{k+1} C(\tau)[-k], \end{array}$$

其中 η_0 表示平凡导子。

证明。 所讨论的交换方形根据 β_k 的定义存在。由于 $\mathscr{F}$是稳定的，它是一个拉回方形，并且由引理 3.22 可知，余纤维上的诱导映射是一个等价。 □

观察 3.25。 在推论 3.24中，模 $\Sigma^{k+1} C(\tau)[-k] \in \mathrm{Mod}_{C(\tau^k)}$是一个 $C(\tau)$-模的标量限制。利用这一点和水平粘贴，我们可以从推论 3.24 推出另一个拉回方块：

$$\begin{array}{ccc} C(\tau^{k+1}) & \longrightarrow & C(\tau) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \eta_0} \\ C(\tau^k) & \longrightarrow & C(\tau) \rtimes \Sigma^{k+1} C(\tau)[-k]. \end{array}$$

障碍理论

控制 Goerss-Hopkins 塔的障碍理论是平方零障碍理论的一个实例。沿用 [Bar22b，定义 3。9]中的术语，我们记 θ_n： $C(\tau^n) \to \Sigma^{n+2} C(\tau)[-n]$为与由 底层 $\mathbb{E}_1$-导子相关的（左）障碍映射，该导子由 β_n 确定（见定义 3.23）。下述推论是 [Bar22b，定理 D]的一个实例。

推论 3.26. 设$\mathscr{E}$是一个分离的 *Goerss-Hopkins* 变形。那么对于每个有下界的 $C(\tau^n)$- 模 $X \in \mathrm{Mod}_{C(\tau^n)}(\mathscr{E}^{>-\infty})$，都有一个典范拉回方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Null}(\theta_n \otimes_{C(\tau^n)} X) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle C(\tau^n) \otimes_{C(\tau^{n+1})} (-)} \\ \{X\} & \longrightarrow & \mathrm{Mod}_{C(\tau^n)}(\mathscr{E}) \end{array}$$

其中Nu ll$(\theta_n \otimes_{C(\tau^n)} X)$ 表示 $\theta_n \otimes_{C(\tau^n)} X$: $X \to \Sigma^{n+3} C(\tau) \otimes_{C(\tau^{n+1})} X[-n-1]$ 的零同伦空间。

命题 3.27 (对象的障碍). 设$\mathscr{E}$是一个 *Goerss-Hopkins* 变形。那么对于每个潜在的n阶段 X，都存在一个典范障碍 $\mathfrak{o}(X) \in \mathrm{Ext}^{n+3,n+1}_{\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E})}(\pi_0(X)\ \pi_0(X))$使得：

1. 存在一个潜在的 $(n+1)$ 阶段 eX，满足 $C(\tau^{n+1}) \otimes_{C(\tau^{n+2})} eX \simeq X$，当且仅当 $\mathfrak{o}(X) = 0$。*2.* 如 *(1)* 所示，提升 eX 的等价类构成一个在 $Ext^{n+2,n+1}_{Mod_{C(\tau)}(E)}(\pi_0(X)\ \pi_0(X))$ 作用下的主齐性空间。

证明。 为简化记号，我们将 $\mathrm{Mod}_{C(\tau^k)}(\mathscr{E}^{\geq 0})$ 中的映射空间记作 $\mathrm{Map}_{C(\tau^k)}(-,-)$。由于 X 是一个 potential n-stage，我们有：

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}_{C(\tau^{n+1})}\left(X, \Sigma^{n+3} C(\tau) \otimes_{C(\tau^{n+1})} X[-n-1]\right) &\simeq \mathrm{Map}_{C(\tau)}\left(C(\tau) \otimes_{C(\tau^{n+1})} X, \Sigma^{n+3} C(\tau) \otimes_{C(\tau^{n+1})} X[-n-1]\right) \\ &\simeq \mathrm{Map}_{C(\tau)}(X_{\leq 0}, \Sigma^{n+3} X_{\leq 0}[-n-1]). \end{aligned}$$

该断言现在由推论 3.26 得出。 □

多 $\mathscr{O}$-幺半 Goerss-Hopkins 变形的映射空间也满足类似的障碍理论。

命题3.28 （多重映射空间的障碍）。 设$\mathcal{O}$是一个 ∞-拟运算子，且$\mathcal{C}$是一个$\mathcal{O}$-幺半 *Goerss-Hopkins* 变形。那么，对于每一组潜在的$(n+1)$-阶段$\{X^1,\dots,X^s,Y\}$，都存在一个典范纤维序列：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Mul}_{\mathscr{M}^{\otimes}_{n+1}(\mathcal{C})}(X^1,\dots,X^s;Y) & \xrightarrow{C(\tau^{n+1})\otimes_{C(\tau^{n+2})}(-)} & \mathrm{Mul}_{\mathscr{M}^{\otimes}_{n}(\mathcal{C})}(X^1_{\le n},\dots,X^s_{\le n};Y_{\le n}) \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
\mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}(\langle X^1\rangle,\dots,\langle X^s\rangle;\langle Y\rangle) & \longrightarrow & \mathrm{Mul}_{\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathcal{C})^{\otimes}}(X^1_{\le 0},\dots,X^s_{\le 0};\Sigma^{n+2}Y_{\le 0}[-n-1])
\end{array}$$

证明。 我们首先处理情形 $\mathcal{O}=\mathbb{E}_\infty$。为简化记号，我们将 $\mathrm{Mod}_{C(\tau^k)}(\mathcal{C})$ 中的映射空间记为 $\mathrm{Map}_{C(\tau^k)}(-,-)$。将 $\mathscr{M}^{\otimes}_{n+1}(\mathcal{C})$ 和 $\mathscr{M}^{\otimes}_{n}(\mathcal{C})$ 分别识别为 $\mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+2})}(\mathcal{C})^{\otimes}$ 和 $\mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathcal{C})^{\otimes}$ 中的满子幺半群后，方块中的上方映射对应于映射

$$\begin{aligned}
\mathrm{Map}_{C(\tau^{n+2})}\left(X^1\otimes\cdots\otimes X^s,Y\right) &\longrightarrow \mathrm{Map}_{C(\tau^{n+1})}\left(C(\tau^{n+1})\otimes_{C(\tau^{n+2})}\left(X^1\otimes\cdots\otimes X^s\right),C(\tau^{n+1})\otimes_{C(\tau^{n+2})}Y\right)\\
&\simeq \mathrm{Map}_{C(\tau^{n+1})}\left(C(\tau^{n+1})\otimes_{C(\tau^{n+2})}\left(X^1\otimes\cdots\otimes X^s\right),Y_{\le n}\right)\\
&\simeq \mathrm{Map}_{C(\tau^{n+2})}\left(\left(X^1\otimes\cdots\otimes X^s\right),Y_{\le n}\right)
\end{aligned}$$

只需为复合映射构造拉回方块；显然，该映射由截断映射诱导而来 $Y\to Y_{\le n}$在 $\mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+2})}(\mathcal{C}^{\ge 0})$。由于 Y是一个潜在的 $(n+1)$ 阶段，根据观察 3.14，我们得到 3.14一个由 $C(\tau^{n+2})$-模组成的纤维序列：

$$Y\longrightarrow Y_{\le n}\longrightarrow \Sigma^{n+2}Y_{\le 0}[-n-1]$$

将 $\mathrm{Map}_{C(\tau^{n+2})}(X^1\otimes\cdots\otimes X^s,-)$ 作用于这个纤维序列，得到一个拉回方块：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Map}_{C(\tau^{n+2})}\left(X^1\otimes\cdots\otimes X^s,Y\right) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{C(\tau^{n+2})}\left(X^1\otimes\cdots\otimes X^s,Y_{\le n}\right)\\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow\\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{C(\tau^{n+2})}\left(X^1\otimes\cdots\otimes X^s,\Sigma^{n+2}Y_{\le 0}[-n-1]\right).
\end{array}$$

为了确定 右下角，我们利用 $\Sigma^{n+2}Y_{\le 0}[-n-1]$ 自然地是一个 $C(\tau)$-模，因此 e

$$\begin{aligned}
\mathrm{Map}_{C(\tau^{n+2})}\left(X^1\otimes\cdots\otimes X^s,\Sigma^{n+2}Y_{\le 0}[-n-1]\right) &\simeq \mathrm{Map}_{C(\tau)}\left(C(\tau)\otimes_{C(\tau^{n+2})}(X^1\otimes\cdots\otimes X^s),\Sigma^{n+2}Y_{\le 0}[-n-1]\right)\\
&\simeq \mathrm{Map}_{C(\tau)}\left((C(\tau)\otimes_{C(\tau^{n+2})}X^1)\otimes\cdots\otimes(C(\tau)\otimes_{C(\tau^{n+2})}X^s),\Sigma^{n+2}Y_{\le 0}[-n-1]\right)\\
&\simeq \mathrm{Map}_{C(\tau)}\left(X^1_{\le 0}\otimes\cdots\otimes X^s_{\le 0},\Sigma^{n+2}Y_{\le 0}[-n-1]\right).
\end{aligned}$$

这就完成了 $\mathcal{O}=\mathbb{E}_\infty$ 情形的证明。为了将证明推广到任意的 ∞-拟运算子，我们写作

$$\mu_!:\prod_{j=1}^{s}\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathcal{C})^{\otimes}_{\langle X^j\rangle}\longrightarrow \mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathcal{C})^{\otimes}_{\langle Y\rangle}$$

对于由 $\mu\in\mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}(\mathrm{h}X^1\mathrm{i}\dots,\mathrm{h}X^s\mathrm{i},\mathrm{h}Y\mathrm{i})$ 的余笛卡尔提升所给出的函子，并定义

$$\mathrm{Mul}^{(\mu)}_{\mathscr{M}^{\otimes}_{n}(\mathcal{C})}(X^1,\dots,X^s;Y):=\mathrm{fib}_{\mu}\left(\mathrm{Mul}_{\mathscr{M}^{\otimes}_{n}(\mathcal{C})}(X^1,\dots,X^s;Y)\longrightarrow \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}(\langle X_1\rangle,\dots,\langle X^s\rangle;\langle Y\rangle)\right).$$

上面对 $\mathcal{O}=\mathbb{E}_\infty$ 情形给出的论证随后可原样进行，从而得到一个纤维序列

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Mul}^{(\mu)}_{\mathscr{M}^{\otimes}_{n+1}(\mathcal{C})}(X^1,\dots,X^s;Y) & \longrightarrow & \mathrm{Mul}^{(\mu)}_{\mathscr{M}^{\otimes}_{n}(\mathcal{C})}(X^1_{\le n},\dots,X^s_{\le n};Y_{\le n})\\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow\\
\{0\} & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathcal{C})}(\mu_!(X^1_{\le 0},\dots,X^s_{\le 0}),\Sigma^{n+2}Y_{\le 0}[-n-1]).
\end{array}$$

将这个纤维序列视为 $\mu\in\mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}(\mathrm{h}X^1\mathrm{i}\dots,\mathrm{h}X^s\mathrm{i};\mathrm{h}Y\mathrm{i})$ 中的一个函子，再将其反直化，即可得到所需的拉回方块。□

3.2 代数性定理

抽象代数性定理及其各种变体都基于以下关键结果：该结果根据变形$\mathscr{E}$的心$\mathscr{E}^{\heartsuit}$的同调性质，给出了 Goerss-Hopkins 塔的连通性界限。

命题 3.29。 设 $\mathscr{E}$是一个完备的、0-复形的对称幺半 *Goerss-Hopkins* 变形，其心 $\mathscr{E}^{\heartsuit}$ 的 *Ext* 维数为 $d<\infty$、*Tor* 维数为 $e<\infty$，且有足够的平坦对象。那么 ∞-拟运算子的映射

$$C(\tau^{m+1})\otimes(-)\colon \mathscr{E}[\tau^{-1}]^{\otimes}\to \mathscr{M}_m^{\otimes}(\mathscr{E}),$$

1. 当 $m\geq d$时是本质满的。
2. 在元数 r 范围内，在多重映射空间上诱导出一个 $(m-d-(r-1)e)$-连通映射。

证明。 所讨论的映射经由 Goerss-Hopkins 塔的极限分解。

$$\mathscr{E}[\tau^{-1}]^{\otimes}\longrightarrow \lim_k \mathscr{M}_k^{\otimes}(\mathscr{E})\longrightarrow \mathscr{M}_m^{\otimes}(\mathscr{E}).$$

由于 $\mathrm{E}^{\geq 0}$ 是完备的，推论 3.20 表明第一个映射是等价。由 m 上的归纳法可知，因此只需证明映射 $C(\tau^{m+1})\otimes_{C(\tau^{n+2})}(-)\colon \mathrm{M}_{m+1}^{\otimes}(\mathrm{E})\to \mathrm{M}_m^{\otimes}(\mathrm{E})$ 的结论。对于 (1)，我们使用命题 3.27，它告诉我们，将 $X\in \mathrm{M}_m^{\otimes}(\mathrm{E})$ 提升到一个潜在的 $(m+1)$ 阶段 $X\in \mathrm{M}_{m+1}^{\otimes}(\mathrm{E})$ 的障碍属于 $\mathrm{Ext}^{m+3,m+1}\mathrm{E}^{\heartsuit}(\pi_0 X,\pi_0 X)$，而当 $m\geq d$ 时该群消失。对于 (2)，注意到根据命题 3.28，该映射的连通性

$$C(\tau^{m+1})\otimes_{C(\tau^{m+2})}(-)\colon \mathrm{Mul}_{\mathscr{M}_{m+1}^{\otimes}(\mathscr{E})}(X^1,\dots,X^r;Y)\longrightarrow \mathrm{Mul}_{\mathscr{M}_m^{\otimes}(\mathscr{E})}(X^1_{\leq m},\dots,X^r_{\leq m};Y_{\leq m}),$$

恰好比该空间的连通度低一

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E})}\left(X^1_{\leq 0}\otimes\cdots\otimes X^r_{\leq 0},\Sigma^{m+2}Y_{\leq 0}[-m-1]\right),$$

因此，只需证明它是至少 $(m+1-d-(r-1)e)$-连通的。要对此证明 $r\geq 1$，只需证明 $\mathrm{Mod}^{C(\tau)}(\mathscr{E})$ 和 $\mathcal{D}_{\geq 0}(\mathscr{E}^{\heartsuit})$ 的 Ext 维数和 Tor 维数相同。要处理 $r=0$，只需证明 $\mathrm{Mod}^{C(\tau)}(\mathscr{E})$ 的单位是离散的（即 $\mathscr{E}$的单位是周期的）。现在我们将证明所有这些断言。

由于 $\mathscr{E}^{\geq 0}$是 Postnikov 完备的，因此 $\mathrm{Mod}^{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})$也如此，因此根据 [Lurb，命题 C.5.4.5]我们有 $\mathrm{Mod}^{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})\simeq \mathcal{D}_{\geq 0}(\mathscr{E}^{\heartsuit})$，特别是 $\mathscr{E}^{\heartsuit}$ 与 $\mathrm{Mod}^{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})$ 的 Ext 维数相同。遗憾的是，文中构造的等价并非幺半的。尽管如此，由于 $\mathscr{E}^{\heartsuit}$ 有足够多的平坦对象，$\mathrm{Mod}^{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})$ 中的每个对象都等价于一个由平坦对象组成的链复形，因此双函子

$$\otimes\colon \mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})\times \mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})\to \mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0}),$$

由其在心上的限制决定。特别是，$\mathscr{E}^{\heartsuit}$与 $\mathrm{Mod}^{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})$ 的 Tor 维数相同。最后，由于 $\pi_0\mathbb{I}_{\mathscr{E}}$是 $\mathscr{E}^{\heartsuit}$中的单位，同样的论证表明它也是 $\mathrm{Mod}^{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})$ 中的单位，因此我们有 $C(\tau)\otimes\mathbb{I}_{\mathscr{E}}\simeq \pi_0\mathbb{I}$，从而 $\mathbb{I}_{\mathscr{E}}$是周期的。□

警告 3.30。$\mathrm{Mod}^{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})$可能是 0-复合的，且 $\mathscr{E}^{\heartsuit}$具有足够多的平坦对象，但尽管如此，$\mathrm{Mod}^{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})$与 $\mathcal{D}_{\geq 0}(\mathscr{E}^{\heartsuit})$作为对称幺半 ∞-范畴并不等价。命题 3.29 的证明只用到了该幺半结构的元数 2 部分。

注 3.31。命题 3.29 的证明可原样应用，只需将“对称幺半”替换为“$\mathcal{O}$-幺半”，前提是 $\mathrm{h}_1\mathcal{O}\simeq \mathbb{E}_\infty$。

观察 3.32. 设 $\mathscr{E}$是一个 $\mathcal{O}$-幺半 Goerss-Hopkins 变形，并回顾一下，$\mathscr{M}_n^{\otimes}(\mathscr{E}^{\geq 0})$ 的定义使得我们有一个 ∞-拟运算子的拉回方块：

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n^{\otimes}(\mathscr{E}) & \hookrightarrow & \mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})^{\otimes}\\ \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \downarrow{\scriptstyle C(\tau)\otimes_{C(\tau^{n+1})}(-)}\\ (\mathscr{E}^{\heartsuit})^{\otimes} & \hookrightarrow & \mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})^{\otimes}.\end{array}$$

这表明，$\mathscr{M}_n^{\otimes}(\mathscr{E})$ 仅取决于 $\mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}^{\geq 0})$ 作为一个 $\mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{F}^{\geq 0})$-线性对称幺半$\infty$-范畴。特别地，若 $\mathscr{D}$是另一个对称幺半 Goerss-Hopkins 变形，则任意t-正合的交换 $\mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{F})$-代数之间的等价 $\mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{E}) \simeq \mathrm{Mod}_{C(\tau^{n+1})}(\mathscr{D})$ 都会诱导一个 ∞-拟运算子之间的等价 $\mathscr{M}_n^{\otimes}(\mathscr{E}) \simeq \mathscr{M}_n^{\otimes}(\mathscr{D})$。

现在我们可以证明抽象代数性定理（定理 H）。

定理 H 的证明。我们会自由使用附录 A 中的记号和术语。由观察 3.32，退化结构给出了 ∞-拟运算子 $\mathrm{M}_m^{\otimes}(\mathrm{E}) \simeq \mathrm{M}_m^{\otimes}(\mathrm{E}^{\delta})$ 之间的等价。此外，由观察 2.24，若 E 满足该定理的假设，则 E^{δ} 也满足，且 d 和 e 的取值相同。因此，只需证明 ∞-拟运算子映射 $\mathrm{E}[\tau^{-1}]^{\otimes} \to \mathrm{M}_m^{\otimes}(\mathrm{E})$ 在对 $\alpha = \lfloor \frac{m-d+4}{e+1} \rfloor - 3$ 应用 $\mathrm{h}_\alpha(-)$ 后成为等价。应用命题 3.29（取 $r = \alpha + 4$）并使用命题 A.7，我们得到：

$$\mathrm{h}_\alpha^{(\otimes \leq \alpha+3)} \mathscr{E}[\tau^{-1}]^{\otimes} \simeq \mathrm{h}_\alpha^{(\otimes \leq \alpha+3)} \mathscr{M}_m^{\otimes}(\mathscr{E}) \quad \in \mathrm{Op}_\alpha^{\leq \alpha+3}. \tag{$\star$}$$

由引理A.8 可知，我们有一个典范交换方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cat}_\alpha^{\otimes} & \longrightarrow & \mathrm{Cat}_\alpha^{\otimes \leq \alpha+3} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Op}_\alpha & \longrightarrow & \mathrm{Op}_\alpha^{\leq \alpha+3}. \end{array}$$

其中竖直箭头是满子范畴包含 [BHS22，注 4.2。7] 并且上方的水平函子是等价 [Bar22a，推论 A]，因此，($\star$) 唯一地提升为等价 $\mathrm{h}_\alpha \mathscr{E}[\tau^{-1}]^{\otimes} \simeq \mathrm{h}_\alpha \mathscr{M}_m^{\otimes}(\mathscr{E})$。 □

命题 3.33。 设 $\mathscr{E}$为一个完备的 $\mathcal{O}$-幺半 *Goerss-Hopkins* 变形，使得

1. $\mathrm{h}_2\mathcal{O} \simeq \mathbb{E}_\infty$。 *2.* $\mathscr{E}^{\geq 0}$ 具有最大$(d+1, d+2e)$-退化结构 *3.* $\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E}^{\geq 0})$ 是 0-*complicial*，即由离散对象在余极限下生成。 *4.* $\mathscr{E}^{\heartsuit}$ 的 *Ext* 维数为 $d < \infty$，*Tor* 维数为 $e < \infty$，且有足够的平坦对象。

于是存在一个张量三角等价：

$$\mathrm{h}_1 \mathscr{E}[\tau^{-1}] \simeq \mathrm{h}_1 \mathscr{E}[\tau \sim 0].$$

证明。 Maclane 的相干性定理 [Mac13] 以 [Bar22a]，的语言表述，指出限制元数会产生一个全忠实函子 $\mathrm{Cat}_1^{\otimes} \hookrightarrow \mathrm{Cat}_1^{\otimes \leq 3}$。然后，命题 3.29 中的相同论证给出一个对称幺半等价等价 $\mathrm{h}_1 \mathscr{E}[\tau^{-1}] \simeq \mathrm{h}_1 \mathscr{E}[\tau \sim 0]$。要证明该等价是三角的，只需将其扩展为一个可能非幺半的同伦 2-范畴等价。这同样由命题 3.29得出。 □

注 3.34. 将定理 H 视为黑箱，可以得到一个与命题 3.33 有些类似的结果，但其上界更差，为 $\max(d+1, d+3e)$。我们预期，[Bar22a, 定理 C] 存在一个扩展，能够处理元数限制是全忠实但并非等价的情形。更确切地说，采用 loc.cit. 中的记号，我们预期，对于任意完备的 $(\sigma \mathrm{O}(k)+1, 1)$-范畴 C 以及任意 ∞-拟运算子 O，元数限制定义了一个全忠实函子 $\mathrm{MonO}(\mathrm{C}) \hookrightarrow \mathrm{Mon}^{\leq k-1}\mathrm{O}(\mathrm{C})$。这样一个假设的扩展将（略微）改善定理 H 中的上界，使命题 3.33 成为一个严格推论。在 $\mathrm{C} = \mathrm{Cat}_1$ 且 $\mathrm{O} = \mathbb{E}_\infty$ 的特殊情形下，Maclance 的相干定理给出了这样的扩展，我们在命题 3.33 中依赖了该定理。

定理H 如果愿意忽略幺半结构，情形会大为简化。由此得到以下非幺半变体。

定理 3.35。 设$\mathscr{E}$是一个完备的 *Goerss-Hopkins* 变形，满足：

1. 模$C(\tau)(\mathscr{E})$是0-复杂的，即由离散对象在余极限下生成。
2. $\mathscr{E}^{\heartsuit}$ 的 *Ext* 维数为 $d < \infty$。

那么，$\mathscr{E}$上的一个（非幺半） m退化结构 γ决定了一个 ∞-范畴之间的等价：

$$\mathrm{h}_{m-d+1}\mathscr{E}[\tau^{-1}] \overset{(\gamma)}{\simeq} \mathrm{h}_{m-d+1}\mathscr{E}[\tau\sim 0]$$

注 3.36. 经过适当修改，我们预计定理 H 可以推广到 O-幺半 Goerss-Hopkins 变形，其中 O 是任意的 ∞-拟运算子。为此，应将对 $(\mathbb{E}_\infty, m)$-退化结构的要求替换为 (O m)-退化结构。于是，该定理的结论将是一个 O-幺半等价 $\mathrm{h}_\alpha \mathrm{E}\ [\tau^{-1}] \simeq \mathrm{h}_\alpha \mathrm{E}\ [\tau\sim 0]$，其中 α是取决于 O 的某个整数。命题 3.29 与 [Bar22a, 定理 C] 的结合应能给出 α 的一个合适取值。（当 O 不是 0-截断时应格外谨慎，因为此时 Op_{O} 中的 k-截断并不对应于 O-幺半范畴上的 $\mathrm{h}_k(-)$。）一个适当的 α 大致应是 $\alpha + \sigma^{-1}\mathrm{O}(\alpha)$ $e \approx m-d$ 的解，其中 $\sigma^{-1}\mathrm{O}(\alpha)$ 表示分割连通度函数 [Bar22a, 定义 1.22] 的反函数。例如，在 O $= \mathbb{E}_n$ 的情形下，分割连通度由 $\sigma_{\mathbb{E}_n}(\alpha) = \alpha - 3$ [Bar22a, 推论 E] 给出。特别地，定理 H 的这一 $\mathbb{E}_n$- 幺半变体应具有相同的界，至多相差一个常数因子。

模范畴的代数性

现在，我们应用本文中发展的工具，得出引言中承诺的代数性结果。我们可以立即处理 $\mathbb{E}_\infty$-环的情形。

定理 3.37。 设 R 是一个 $\mathbb{E}_\infty$-环谱，其同伦环 $\pi_* R$

1. 集中在 w的倍数次幂上；2. 分次全局维数为 $d < \frac{w}{4}$。

那么存在一个典范对称幺半等价：

$$\mathrm{h}_{\lfloor \frac{w+4}{d+1} \rfloor - 4}\mathrm{Mod}_R \simeq \mathrm{h}_{\lfloor \frac{w+4}{d+1} \rfloor - 4}\mathrm{Mod}_{H\pi_* R}.$$

证明。 由推论 2.37 可知 $(\mathbb{E}_\infty, m)$-退化结构在 $\mathscr{E}_R$ 上的空间是可缩的，因而特别是非空的。由于分次投射模尤其是分次平坦的，$\mathscr{E}_R^{\heartsuit} \simeq$分次模$^{\heartsuit}_{\pi_\star R}$ 的 Tor 维数不超过 Ext 维数，而后者恰好是 $\pi_\star R$的分次全局维数。结合推论 2.27 和定理 H (其中 $m = w - 1$)。 □

利用命题 3.33，在上述证明中用它代替定理H ，即可得到以下张量三角变体。

推论 3.38。 设 R 是一个 $\mathbb{E}_4$-环谱，其同伦环 $\pi_* R$

1. 分次全局维数为 $d < \infty$，且
2. 集中在可被 w 整除的次数上，其中 $w >$ 最大值$(d+1, d+2e)$。

那么存在一个张量三角等价：

$$\mathrm{h}_1\mathrm{Mod}_R \simeq \mathrm{h}_1\mathrm{Mod}_{H\pi_* R}.$$

Comb定理 3.35 与命题 2.36 得出了 Piotr-Irakli 的一个结果 [PP21，定理 8。2] .

推论 3.39。 设 R 是一个 $\mathbb{E}_1$-环谱，其同伦环 π_*R

1. 具有分次全局维数 $d < \infty$，并且
2. 集中在可被 w整除的次数上。

那么存在一个 ∞-范畴的等价：

$$\mathrm{h}_{w-d}\mathrm{Mod}_R \simeq \mathrm{h}_{w-d}\mathcal{D}(\pi_*R).$$

色同伦中的代数性

固定一个素数 p、一个色谱高度 h，并令 E 表示与高度 E相关联的 Morava h 理论，该理论由定义在 $\mathbb{F}_{p^n}$上的 Honda 形式群确定。令 $A := E^{h\mathbb{F}_p^\times}$，[11]并注意到 A_*A是 A_*-平坦的。这使我们能够定义 $\mathscr{E}_{p,\,h} := \lim^{[k]\in\Delta_{\mathrm{inj}}} \mathscr{E}_{A^{\otimes[k]}}$；根据命题 2.32，它是一个完备的 Goerss-Hopkins 变形。

引理 3.40。 1. 存在一个典范对称幺半等价：

$$\mathscr{E}_{p,h}[\tau^{-1}] \simeq \mathrm{Sp}_{p,h}$$

2. 如果 $p > h+1$，则存在典范对称幺半等价：

$$\mathscr{E}_{p,h}[\tau\sim 0] \simeq \mathrm{Fr}_{p,h}$$

3. 如果 $p > h+1$，则存在典范的 t-正合、分次、对称幺半等价：

$$\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E}_{p,h}) \simeq \mathcal{D}\big(\mathrm{grComod}^{\heartsuit}_{E(p,h)_*E(p,h)}\big)$$

证明。 我们将自由地运用 [Mat16，推论 3.42。] 在整个证明中。对于 (1) 由命题 2.32可得典范对称幺半等价

$$\mathscr{E}_{p,h}[\tau^{-1}] \simeq \lim_{[k]\in\Delta_{\mathrm{inj}}} \mathrm{Mod}_{A^{\otimes[k]}} \simeq \mathrm{Sp}_{p,h}$$

其中，第二个等价成立是因为 $A \in$ 交换代数对象(谱范畴$_{p,\,h}$) 是可下降的。（事实上，smashing 定理给出 $L_h\mathbb{S}_{(p)} \in \mathrm{Thick}^{\otimes}(E)$但 E 是若干移位的直和，因此 A 于是 $L_h\mathbb{S}_{(p)} \in \mathrm{Thick}^{\otimes}(A)$。）对于 (2)同理，由命题 2.32 可得典范对称幺半等价：

$$\mathscr{E}_{p,h}[\tau\sim 0] \simeq \lim_{[k]\in\Delta_{\mathrm{inj}}} \mathrm{Mod}_{H\left(A_*A^{\otimes E_*[k]}\right)} \simeq \lim_{[k]\in\Delta} \mathrm{Mod}_{H\left(A_*A^{\otimes E_*[k]}\right)},$$

（这里我们用到了包含映射 $\Delta_{\mathrm{inj}} \hookrightarrow \Delta$ 是初始的。）注意，我们有 Hopf 代双代数的一个同构

$$(E_*, E_*E) \simeq (A, A_*A) \otimes_{A_*} (E_*, E_* \otimes_{A_*} E_*).^{12}$$

利用 $H(E_*) \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Mod}_{H(A_*)})$ 是可下降的，且 Δ 是余滤的，我们得到对称幺半等价：

$$\begin{aligned}\lim_{[k]\in\Delta} \mathrm{Mod}_{H\left(A_*A^{\otimes_{A_*}[k]}\right)} &\simeq \lim_{[k]\in\Delta}\lim_{[n]\in\Delta} \mathrm{Mod}_{H\left(A_*A^{\otimes_{A_*}[k]}\otimes_{A_*}(E_*\otimes_{A_*}E_*)^{\otimes_{E_*}[n]}\right)} \\ &\simeq \lim_{[k]\in\Delta} \mathrm{Mod}_{H\left(E_*E^{\otimes_{E_*}[k]}\right)} \\ &\simeq \mathrm{Fr}_{p,h}\end{aligned}$$

[11]任何 $(2p-2)$-周期版本的 Lubin-Tate 理论都可以完成这项工作。[12]事实上 $(E_*,\ E_*\otimes_{A_*}E_*) \simeq (E_*,\ C(\mathbb{F}_p^\times;\ E_*))$，其中 $C(E_*;\ \mathbb{F}_p^\times)$ 表示 $\mathbb{F}_p^\times$ 上的 E_* 值函数，其在 E_* 上的余作用由对 E_* 上的 $\mathbb{F}_p^\times$ 作用取对偶给出。

其中，最后一个等价由 [BSS21，推论 5.35] 得出。最后，对于 (3) 再次根据命题 2.32，我们有一个分次的 t-正合对称幺半等价

$$\mathrm{Mod}_{C(\tau)}(\mathscr{E}_{p,h}) \simeq \lim_{[k]\in\Delta_{\mathrm{inj}}} \mathcal{D}(\mathrm{grMod}^{\heartsuit}_{E_*E^{\otimes E_*[k]}}) \simeq \lim_{[k]\in\Delta_{\mathrm{inj}}} \mathrm{Mod}_{E_*E^{\otimes E_*[k]}}\left(\mathcal{D}(\mathrm{grMod}^{\heartsuit}_{E_*})\right) \simeq \mathcal{D}(\mathrm{grComod}^{\heartsuit}_{E_*E})$$

其中最后一个等价成立，是因为 $E_*E \in$ 交换代数对象($\mathcal{D}$(分次余模$^{\heartsuit}_{E_*E}$)) 只要满足 $p > h+1$ 就是可下降的。（这里我们用到，对于 $p > h+1$，导出范畴 $\mathcal{D}$(分次余模$^{\heartsuit}_{E_*E}$) 是单生成的，且具有有限的上同调维数，见 [Hov04，推论 6.7] 以及 [BH18，定理 4.11]。）□

定理 3.41。 只要存在 $p > \frac{1}{2}h^2 + \frac{k+3}{2}h + \frac{k+1}{2}$ 一个对称幺半等价：

$$\mathrm{h}_k\mathrm{Sp}_{p,h} \simeq \mathrm{h}_k\mathrm{Fr}_{p,h}.$$

证明。 阿贝尔范畴 $\mathrm{grMod}^{\heartsuit}_{E(p,h)_*E(p,h)}$ 由可对偶对象 [Hov04，命题 1.44] 生成，因此有足够多的平坦对象。为完成证明，我们注意到命题 2.36 和引理 3.40 共同推出 $\mathscr{E}_{p,h}$ 满足定理 H 的假设，其中 $m = 2p-3$，$d = h^2+h$ 以及 $e = h$。 □

我们以定理A的张量三角变体作结。

推论 3.42。 每当存在 $p > \frac{1}{2}h^2 + \frac{3}{2}h + 1$ 张量三角等价：

$$\mathrm{h}_1(\mathrm{Sp}_{p,h}) \simeq \mathrm{h}_1(\mathrm{Fr}_{p,h}).$$

证明。 命题 3.33 的 $\mathscr{E}_{p,h}$ 已在定理 H 的证明中得到验证，并且所需的退化结构存在，因为 $p > \frac{1}{2}h^2 + \frac{3}{2}h + 1$ 蕴含 $2p-3 \geq h^2+3h =$ 最大值$(h^2+h,\ h^2+3h)$。 □

A ∞-拟运算子的元数限制

在这个简短的附录中，我们证明关于 ∞-拟运算子的元数限制的一些基本事实。我们将使用纤维模式这一语言，它由 [BHS22] 引入。纤维模式是 Lurie 对 ∞-拟运算子的模型的推广，其中 $\mathbb{L}_*$ 被任意代数模式所取代。事实上，如果 $\mathcal{O} \to \mathbb{L}_*$ 是一个 ∞-拟运算子，那么纤维 $\mathcal{O}$-模式就是 ∞ 上的 $\mathcal{O}$-拟运算子，即存在一个典范等价 $\mathrm{Fbrs}(\mathcal{O}) \simeq \mathrm{Op}_{\infty/\mathcal{O}}$[BHS22，例 4.1.18。]。

定义 A.1. 我们定义 ∞-范畴元数 k-受限对称幺半 ∞-范畴的

$$\mathrm{Cat}^{\otimes\leq k}_{\infty} := \mathrm{Seg}_{\mathbb{L}_*^{\leq k}}(\mathrm{Cat}_{\infty}).$$

我们定义 ∞-范畴元数 k-受限 ∞-拟运算子为

$$\mathrm{Op}^{\leq k}_{\infty} := \mathrm{Fbrs}(\mathbb{L}_*^{\leq k}).$$

令$\mathrm{Cat}^{\otimes\leq k}_{n} \subseteq \mathrm{Cat}^{\otimes\leq k}_{\infty}$表示由以下对象张成的全子范畴：∞-范畴，其$(n-1)$-截断映射空间。类似地，记$\mathrm{Op}^{\leq k}_{n} \subseteq \mathrm{Op}^{\leq k}$ 为以下对象构成的全子范畴：k-受限 ∞-拟运算子，其中所有多重映射空间均为$(n-1)$-截断。

备注 A.2. Heuts 在 ∞中使用了元数受限 [Heu15]拟运算子的非幺变体。

定义 A.3. 我们将元数 k-限制定义为函子 $\mathrm{res}^{\leq k} := \mathbb{L}_*^{\leq k} \times_{\mathbb{L}} (-) : \mathrm{Op}_{\infty} \to \mathrm{Op}^{\leq k}_{\infty}$。

备注 A.4. 注意， $\mathrm{res}^{\leq k}$ 保极限和滤过余极限。由于其源和目标均为可呈现的 [BHS22，推论 4.2.2],它实际上是一个右伴随。

引理 A.5. 以下图表自然交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Op}_{\infty} & \xrightarrow{\mathrm{res}^{\leq k}} & \mathrm{Op}^{\leq k} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{h}_n} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{h}_n} \\ \mathrm{Op}_n & \xrightarrow{\mathrm{res}^{\leq k}} & \mathrm{Op}^{\leq k}_n \end{array}$$

证明. 首先注意，若 $\mathcal{P} \in \mathrm{Op}_n$，则 $\mathrm{res}^{\leq k}(\mathcal{P}) \in \mathrm{Op}_n^{\leq k}$。这由以下右伴随的交换方形表示：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Op}_n & \xrightarrow{\mathrm{res}^{\leq k}} & \mathrm{Op}_n^{\leq k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Op} & \xrightarrow{\mathrm{res}^{\leq k}} & \mathrm{Op}^{\leq k} \end{array}$$

取垂直方向上的左伴随，得到一个松弛交换方形，其贝克-切瓦利自然变换在 $\mathcal{P} \in \mathrm{Op}$ 上取值为以下等价：

$$\mathbb{E}_*^{\leq k} \times_{\mathbb{E}^*} \mathrm{h}_n(\mathcal{P}) \simeq \mathrm{h}_n(\mathbb{E}_*^{\leq k} \times_{\mathbb{E}^*} \mathcal{P}) \simeq \mathrm{h}_n(\mathcal{P}^{\leq k}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{h}_n(\mathcal{P})^{\leq k} \simeq \mathbb{E}_*^{\leq k} \times_{\mathbb{E}^*} \mathrm{h}_n(\mathcal{P})$$

□

定义 A.6. 我们将 $\mathrm{h}_n^{(\otimes \leq k)} \colon \mathrm{Op}_\infty \to \mathrm{Op}_n^{\leq k}$记为引理 A.5中的对角复合。

命题 A.7. 设 $f \colon \mathcal{O} \to \mathcal{P}$ 是一个 ∞-拟运算子态射。以下条件等价：

1. f在元数不超过 k的多重映射空间的$(n-1)$-截断上诱导一个等价。
2. $\mathrm{h}_n^{(\otimes \leq k)}(f) \colon \mathrm{h}_n^{(\otimes \leq k)}(\mathcal{O}) \to \mathrm{h}_n^{(\otimes \leq k)}(\mathcal{P})$ *is fully faithful.*

证明。 设 $X, Y \in \mathcal{O}^{\leq k}$ 是一些对象，它们在 $\mathbb{E}_*^{\leq k}$中的像分别由 A_+ 和 B_+给出。我们有典范分解

$$X \simeq \bigoplus_{a \in A} X_a \qquad Y \simeq \bigoplus_{b \in B} Y_b$$

其中 X_a和 Y_b位于 $\mathbf{h1i} \in \mathbb{E}_*$之上，对所有 $a \in A$和 $b \in B$均如此；É 表示相对于投影 $\mathcal{O}^{\leq k} \to \mathbb{E}_*^{\leq k}$的相对积。与对象的这一分解相对应，映射空间也有一个分解。对于 $\mathcal{O}^{\leq k}$，它具有以下形式：

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\leq k}}\left(\bigoplus_{a \in A} X_a, \bigoplus_{b \in B} Y_b\right) &\simeq \coprod_{\mu \colon A_+ \to B_+} \prod_{b \in B} \mathrm{Map}^{\mathrm{act}}_{\mathcal{O}^{\leq k}}\left(\bigoplus_{a \in \mu^{-1}(b)} X_a, Y_b\right) \\ &\simeq \coprod_{\mu \colon A_+ \to B_+} \prod_{b \in B} \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\left(\left\{X_a : a \in \mu^{-1}(b)\right\}; Y_b\right) \end{aligned}$$

其中第二个等价由 $|\mu^{-1}(b)| \leq |B| \leq k$ 得出，因为$\mathcal{O}^{\leq k} \subseteq \mathcal{O}$是一个全子范畴。要得出结论，还需注意到 $\mathcal{P}$ 也存在相同的分解，且 f保持这些分解不变。□

引理 A.8. 以下图表自然地交换：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cat}_\infty^{\otimes} & \xrightarrow{\mathrm{h}_n} & \mathrm{Cat}_n^{\otimes} & \xrightarrow{(-)|_{\mathbb{E}_*}^{\leq k}} & \mathrm{Cat}_n^{\otimes \leq k} \\ {\scriptstyle (-)^{\otimes}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle (-)^{\otimes}} \\ \mathrm{Op}_\infty & & \xrightarrow{\mathrm{h}_n^{(\otimes \leq k)}} & & \mathrm{Op}_n^{\leq k}. \end{array}$$

证明。 展开定义，我们必须证明以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Seg}_{\mathbb{E}^*}(\mathrm{Cat}_\infty) & \xrightarrow{\mathrm{h}_n} & \mathrm{Seg}_{\mathbb{E}^*}(\mathrm{Cat}_n) & \xrightarrow{(-)|_{\mathbb{E}_*}^{\leq k}} & \mathrm{Seg}_{\mathbb{E}_*^{\leq k}}(\mathrm{Cat}_n) \\ {\scriptstyle \mathrm{Un}_{\mathbb{E}^*}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Un}_{\mathbb{E}^*}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Un}_{\mathbb{E}_*^{\leq k}}} \\ \mathrm{Op}_\infty & \xrightarrow{\mathrm{h}_n} & \mathrm{Op}^{\leq k} & \xrightarrow{\mathrm{res}^{\leq k}} & \mathrm{Op}_n^{\leq k}. \end{array}$$

左边和右边的方块按照与引理 A.5 中相同的论证自然交换，其中 Beck-Chevalley 同构分别如下给出：

$$\mathrm{h}_n\left(\mathrm{Un}_{\mathbb{E}^*}(\mathscr{C})\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Un}_{\mathbb{E}^*}(\mathrm{h}_n(\mathscr{C})), \qquad \mathrm{Un}_{\mathbb{E}_*^{\leq k}}(\mathscr{C}|_{\mathbb{E}_*^{\leq k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}_*^{\leq k} \times_{\mathbb{E}^*} \mathrm{Un}_{\mathbb{E}^*}(\mathscr{C}).$$

□

参考文献

[Ari21] Stefano Ariotta。《相容余链复形与 Beilinson t-结构》，附录由 Achim Krause 撰写。载于：arXiv 预印本 arXiv:2109.01017（2021）。[Bar+22] Tobias Barthel 等。《色彩傅里叶变换》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2210.12822（2022）。[Bar22a] Shaul Barkan。《∞-拟运算子的元数近似》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2207.07200（2022）。[Bar22b] Shaul Barkan。《显式平方零阻碍理论》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2211.07034（2022）。[BH18] Tobias Barthel 和 Drew Heard。《BP_*BP-余模的代数色彩同伦论》。载于：《伦敦数学学会会刊》117.6（2018），第1135–1180页。[BHS19] Robert Burklund、Jeremy Hahn 和 Andrew Senger。《关于高度连通的几乎闭流形的边界》。载于：arXiv 预印本 arXiv:1910.14116（2019）。[BHS22] Shaul Barkan、Rune Haugseng 和 Jan Steinebrunner。《代数模式的包络》。2022年。[Bou85] Aldridge K Bousfield。《奇素数处 K-局部谱的同伦论》。载于：《美国数学杂志》107.4（1985），第895–932页。[BRW23] Scott Balchin、Constanze Roitzheim 和 Jordan Williamson。《色同伦论中的张量三角刚性》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2302.12134（2023）。[BSS21] Tobias Barthel、Tomer M Schlank 和 Nathaniel Stapleton。《单色同伦论渐近地是代数的》。载于：《数学进展》393（2021），第107999页。[Bur22] Robert Burklund。《Moore谱上的乘法结构》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2203.14787（2022）。[Fra96] Jens Franke。《具有 Adams 谱序列的某些三角范畴的唯一性定理》。载于：《K理论预印本档案》139（1996）。[Gan07] Nora Ganter。《奇素数处 $E(1)$-局部谱的楔积》。载于：《范畴拓扑学与微分几何笔记》48.1（2007），第3–54页。[GH05] Paul Goerss 和 Michael Hopkins。《交换环谱的模空间》。载于：《伦敦数学学会讲义系列》315（2005），第151页。[Hau+22] Rune Haugseng 等。《松单oidal伴随、二变量纤维化与伴随映射演算》。载于：（2022年）。[Heu15] Gijs Heuts。《高阶范畴的 Goodwillie近似，ProQuest LLC》。载于：美国密歇根州安娜堡（2015年）。[Hof68] P Hoffman。《Moore空间稳定同伦环中的关系》。载于：《伦敦数学学会会刊》3.4（1968），第621–634页。[Hov04] Mark Hovey。《Hopf余模的同伦论》。载于《同伦论：与代数几何、群上同调和代数 K理论的关系：2002年3月24日至28日，美国西北大学代数拓扑国际会议》，第346卷。美国数学学会，2004年，第261页。 KKL[Nicholas J Kuhn 和 Christopher JR Lloyd。《特异2-群的色彩不动点理论与 Balmer 谱》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2008.00330（2020）。20] Law[Tyler Lawson。《在同伦论中添加根》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2002.01997（2020）。20] Lura[Jacob Lurie。《高等代数》。网址：https://www.math.ias.edu/] lurie/papers/HA

.pdf。

[Lurb] Jacob Lurie. 谱代数几何.[Lur09] Jacob Lurie. 高阶拓扑斯理论. 普林斯顿大学出版社，2009年。[Lur15] JacobLurie. “代数K理论中的旋转不变性”。载于：预印本 （2015年）。

[Mac13] Saunders Mac Lane。《工作数学家的范畴论》。第 5 卷。Springer Science & Business Media，2013年。[Mat16] Akhil Mathew。“稳定同伦论的伽罗瓦群”。载于：《数学进展》291（2016），第 403–541 页。[NR23] Nikitas Nikandros 和 Constanze Roitzheim。“Franke 奇异等价的幺半性质”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2301.09432*（2023年）。[Pat13] Irakli Patchkoria。“模谱的代数分类”。载于：《代数与几何拓扑》12.4（2013），第 2329–2388 页。[PP21] Irakli Patchkoria 和 Piotr Pstrągowski。“Adams 谱序列与 Franke 代数化猜想”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2110.03669*（2021年）。[Pst18] Piotr Pstrągowski。“合成谱与胞腔动机范畴”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:1803.01804*（2018年）。[Pst21] Piotr Pstrągowski。“当 $p > n^2 + n + 1$ 时，色同伦论是代数的”。载于：《数学进展》391（2021），第 107958 页。[PV22] Piotr Pstrągowski 和 Paul VanKoughnett。“抽象 Goerss–Hopkins 理论”。载于：《数学进展》395（2022），第 108098 页。[Roi07] Constanze Roitzheim。“K 局部稳定同伦范畴的刚性与奇异模型”。载于：《几何与拓扑》11.4（2007），第 1855–1886 页。[RR95] Douglas C Ravenel 和 EG Rees。“稳定同伦论中的幂零性与周期性”。载于：《伦敦数学会通报》27.129（1995），第 622 页。[Wol98] Jerome J Wolbert。“K理论谱上的模的分类”。载于：《纯粹与应用代数杂志》124.1-3（1998），第 289–323 页。[Wür86] Urs Würgler。“特征 2 的交换环谱”。载于：《*Commentarii Mathematici Helvetici*》61.1（1986），第 33–45 页。