arXiv:2304.14468v1 [math.FA] 27 Apr 2023

自伴算子的对角线 II：非紧算子

MARCIN BOWNIK 和 JOHN JASPER

Abstract. 给定一个作用于可分无限维希尔伯特空间上的自伴算子 T，我们研究刻画其所有可能对角线集合 $\mathcal{D}(T)$ 的问题。对于本质谱 $\sigma_{ess}(T)$ 至少有两个点的算子 T，我们完整刻画了与 T 具有相同谱测度的自伴算子类的 $\mathcal{D}(T)$；但在 $\sigma_{ess}(T)$ 的极端点处，特征值的重数可能例外。我们还更精确地描述了固定自伴算子 $\mathcal{D}(T)$ 的 T，不过对于某些特殊算子类，这一描述仍取决于核问题。这些算子类由满足以下条件的算子 T 构成：本质谱 $\sigma_{ess}(T)$ 的一个极端点同时也是谱 $\sigma(T)$ 的极端点。

我们的结果推广了 Kadison 对正交投影对角线的刻画[38, 39], 、M¨uller 和 Tomilov [51] 以及 Loreaux 和 Weiss [48], 的 Blaschke 型结果，以及作者对有限谱算子对角线的刻画 [15]。

1. Introduction

在无限维希尔伯特空间上作用的有界线性算子的对角线研究历史悠久。Herrero [34] 率先系统研究了算子的对角线集合。特别是，他根据算子的本质数值域 $W_e(T)$ 给出了序列成为对角线的充分条件，参见 [29]。更早之前，Fan [26] 与 Fong 和 Herrero [27, 28] 共同研究了有界线性算子存在零对角线的问题。近期，沿着这一思路，Loreaux 和 Weiss [47]证明，无限秩幂等算子存在零对角线，当且仅当它不是正交投影的希尔伯特-施密特扰动。

M¨uller 和 Tomilov [51] 证明了 Herrero 结果 [34]的一个重大推广。任何包含在 $W_e(T)$ 内部且满足非布拉施克条件的序列 $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{dist}(d_i, \mathbb{R}\setminus W_e(T)) = \infty \tag{1.1}$$

是自伴算子 T 的对角线。此外，他们的结果还推广到了自伴算子组。M¨uller 和 Tomilov [52] 还证明，有界希尔伯特空间算子的所有可能常对角线构成的集合总是凸集。在一篇相关论文 [53] 中，他们研究了具有特定代数结构或渐近结构的 T 的矩阵表示。

2020年数学主题分类。主要分类：47B15，次要分类：46C05。关键词和短语：自伴算子的对角线、Schur-Horn 定理、勾股定理、木匠定理、谱理论。第一作者部分获得了美国国家科学基金会 DMS-1956395 项目资助。本文所表达的观点仅代表作者个人，不反映美国空军、国防部或美国政府的官方政策或立场。

关于算子的对角线，还有其他一些结果。Fong [30] 证明，任意有界复数序列都是某个幂零算子的对角线。Jasper、Loreaux 和 Weiss [37] 证明了 Thompson 定理 [57] 关于紧算子的一个无限维推广，并刻画了酉算子的对角。复值序列 $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上某个酉算子的对角线，当且仅当 $\sup|d_i| \le 1$ 且

$$2(1-\inf_{i\in\mathbb{N}}|d_i|) \le \sum_{i\in\mathbb{N}}(1-|d_i|).$$

Bourin 和 Lee [10, 11] 研究了算子值对角线的一般情形，这类对角线定义为算子 T 相对于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的一组两两正交子空间 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的压缩 $(P_{M_n}TP_{M_n})_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $\bigoplus_{n\in N} M_n = \mathcal{H}$，$P_{M_n}$ 表示到 M_n上的正交投影。当所有子空间 M_n 均为一维时，这类压缩对应于 T的一个对角线。

对于有限维空间，经典的 Schur-Horn 定理 [35, 49, 56] 根据厄米矩阵的特征值刻画其对角线。当且仅当序列 $(d_1,\dots,d_N)$ 是特征值为 $(\lambda_1,\dots,\lambda_N)$ 的厄米矩阵的对角线时，才成立。

$$(d_1,\dots,d_N) \in \operatorname{conv}\{(\lambda_{\sigma(1)},\dots,\lambda_{\sigma(N)}) : \sigma \in S_N\}. \tag{1.2}$$

这一刻画引起了广泛关注，并以许多引人注目的方式得到了推广。其中一些重要成果包括 Kostant 凸性定理 [45] 以及辛几何中动量映射的凸性 [8, 31, 32]。

近年来，Schur-Horn 定理的一个无限维推广一直受到深入研究。特别是，我们关注以下这一概括 Schur-Horn 定理的问题。

问题 1.1. 给定可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子 T，刻画所有对角线的集合

$$\mathcal{D}(T) = \{(\langle Te_i, e_i\rangle)_{i\in\mathbb{N}} : (e_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ is an orthonormal basis of } \mathcal{H}\} \subset \ell^\infty(\mathbb{N}). \tag{1.3}$$

Neumann [54] 通过将 $\mathcal{D}(T)$ 的 ℓ^∞-闭包与一个概括条件 (1.2) 的凸集等同起来，为自伴算子 T 的这一问题提供了初步但近似的解答。Antezana、Massey、Ruiz 和 Stojanoff [1]改进了 Neumann[54]的结果。不过，该方向上首个完全令人满意的结果由 Kadison 在其颇具影响力的著作 [38, 39]中给出。Kadison 刻画了可分希尔伯特空间上正交投影的对角线。序列 $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,1]$ 中是某个正交投影的对角线，当且仅当这些和

$$a := \sum_{d_i<1/2} d_i \qquad \text{and} \qquad b := \sum_{d_i\ge 1/2}(1-d_i) \tag{1.4}$$

满足 $a+b=\infty$，或满足 $a+b<\infty$ 和 $a-b\in\mathbb{Z}$中的任一项。Kadison 定理（也称为 Carpenter 定理）的充分性部分的构造性证明由作者[13] 和 Argerami [2]给出。Kaftal 和 Loreaux [40] 通过将整数 $a-b$ 确定为投影对的所谓本质余维，给出了 Kadison 定理必要性部分的深刻证明。Bownik 和 Szyszkowski [20] 证明了 Kadison 定理的一个可测扩展。

将这一问题自然地推广到刻画正规算子的 $\mathcal{D}(T)$，仍然大多难以处理。在无限维情形下，Arveson [6]给出了一个必要

条件，用于描述有限谱算子的对角线。在有限维情形下，Williams [58], 完全刻画了 3×3 正规矩阵的对角线 > 3，但该问题在维数 > 3中仍未解决。多位作者 [3, 4, 5, 9, 24, 43, 50, 55]研究了冯·诺依曼代数中 Schur-Horn 问题的一种推广，这一问题最初由 Arveson 和 Kadison [7]提出。

Arveson 和 Kadison [7] 以及 Kaftal 和 Weiss [41] 分别将 Schur-Horn 定理推广到正迹类算子和紧正算子。这些结果以主序不等式表述。Kaftal 和 Weiss [41] 证明，趋于 0 的非递增正数序列 $d_1 \geq d_2 \geq \ldots > 0$ 是某个核平凡、正特征值按重数列出的正紧算子的对角线，当且仅当

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \qquad \text{and} \qquad \sum_{i=1}^{n} d_i \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Loreaux 和 Weiss [46] 给出了关于具有非平凡核的紧正算子 T 的 $\mathcal{D}(T)$ 的必要条件和充分条件。

除了正紧算子之外，作者 [12] 还刻画了一类局部可逆正算子 T的集合 $\mathcal{D}(T)$。这一结果被用于刻画具有指定框架下界和上界的框架范数序列，从而推广了 Kadison 定理；该定理刻画了帕塞瓦尔框架的范数序列。Antezana、Massey、Ruiz 和 Stojanoff [1]研究了框架理论 [21, 33]与对角线研究之间的联系。关于这一方向的更多结果，参见 [14, 17, 25, 44]。

除正交投影外，第二作者 [36] 扩展了 Kadison 的结果 [38, 39]，刻画了谱中有三个点的自伴算子 T 的对角线集合 $\mathcal{D}(T)$。随后，作者们通过引入勒贝格型主序，刻画了具有有限谱 [15, 16] 的自伴算子的对角线集合 $\mathcal{D}(T)$，从而扩展了黎曼型主序 (1.5)。

Siudeja 和作者们 [19] 证明了一个适用于具有离散谱的无界自伴算子的 Schur-Horn 定理版本。此前的所有结果都只考虑了有界算子。本文的另一项重要进展是一类新的结果，我们称之为“对角线到对角线”结果。例如，命题 2.16 是上述 Kaftal 和 Weiss [41] 结果的推广，就是这类对角线到对角线结果的一个例子。也就是说，给定满足 (1.5) 且收敛于零的正非增序列 $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$，如果 $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是某个（不一定有界的）对称算子 T 的对角线，那么 $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 也是 T 的对角线。

问题 1.1 最近的进展由 Loreaux 和 Weiss [48]取得。他们解决了由 M¨uller 和 Tomilov [51], 提出的 Blaschke 谜题，该谜题针对的是本质谱至少包含三个点（包括谱的极端点）的自伴算子。若 T 是一个自伴算子，其本质谱满足 $\#|\sigma_{ess}(T)| \geq 3$，且 T 的谱包含于其本质数值域 $\sigma(T) \subset W_e(T)$ 中，那么充分条件 (1.1) 同样是必要条件，参见 [48, 定理 4.6]。总而言之，此前只有在以下情形下，问题 1.1 才有完整答案：对于核为平凡核或无限维核的紧正算子 [41, 46], 、具有有限谱的算子 [15, 38, 39],，或对于上述本质谱中含有 ≥ 3 个点的算子类 [48]。

本文旨在刻画任意自伴算子 T的对角线 $\mathcal{D}(T)$。在我们的先前论文 [18] 中，我们给出了紧自伴算子的 $\mathcal{D}(T)$ 的刻画，从而推广了 [41, 46]中关于正紧算子的早期结果。在本文中，我们刻画本质谱中至少含有 2 个点的自伴算子的对角线集合 $\mathcal{D}(T)$，从而推广了作者此前关于具有有限谱的算子的结果 [15] 。

当 T 的本质谱 $\sigma_{ess}(T)$ 至少含有两个点时，经缩放后可假设 $\sigma_{ess}(T)$ 中最小和最大的点分别为 0 和 1。我们的主要结果是定理 1.4，它给出了 $\mathcal{D}(T)$ 的一个刻画，适用于与 T 具有相同谱测度的自伴算子类，但允许特征值 0 和 1 的重数不同。

对于固定的自伴算子 T，我们还对 $\mathcal{D}(T)$ 给出了更精确的描述，不过对于三类算子而言，这一描述仍受核问题的限制；在这三类算子中， T 的本质谱的一个端点也是 T 的谱的端点。第一类是正紧算子，核问题在此首次出现，见定理 2.20。第二类是可对角化算子，其谱包含于 $[0,1]$ ，且其特征值序列 (λ_i) 满足布拉施克条件： $\sum\min(\lambda_i, 1-\lambda_i) < \infty$。第三类是第二类的扩展，允许谱包含于 $(-\infty, 1]$ 或 $[0,\infty)$，并要求 $(0,1)$ 中的特征值满足类似的布拉施克条件。

我们的描述由一系列算法构成，这些算法按照 $\sigma_{ess}(T)$ 的基数分类，用于判定一个数值序列是否为 T 的对角线。对于本质谱中有 ≥ 5 个点的算子，其算法采用递归剪枝过程；除非问题被化归为四点算法，否则总能得出结论。对于本质谱有 4 个点的算子 T，其算法总能得出结论；除非 T 解耦为一对紧算子和一个本质谱有 3 个点的算子，此时问题便化归为（针对正紧算子的）核问题和三点算法。对于本质谱有 3 个点的算子 T，也会出现类似的情形。对于本质谱有 2 个点的算子 T，最有趣、也最复杂的算法总能得出结论；除非问题被化归为上述三类核问题之一，或归结为应用一点算法[18, 第 11] 节。反过来，用于确定对角线的一点算法只有在问题化归为正紧算子的核问题时才可能无法得出结论。总之，只有当我们将这些算法综合起来后，问题仍化归为前一段所述三类特定算子的核问题时，算法才无法得出结论。

此外，我们刻画了具有不可数谱的自伴算子的对角线，其中包括所有不可对角化的自伴算子，见定理 1.5。这一刻画并非以有限条件列表的形式呈现；相反，我们证明，对于具有 ≥ 5 点本质谱的算子，该算法总能得出结论，只不过有时需要经过无限多步。

即使对于 c_0 中的非负非增序列，无穷序列的主序概念也可能相当微妙，见 [41, 42, 46]。由于本文中的序列通常无法重新排列为非增序列，我们需要建立一种更一般的主序概念，它采用以下主序函数。这不同于

冯·诺依曼代数中 Schur-Horn 问题所用的函数的 Hardy-Littlewood-P´olya 主序 L^1 [3, 9, 23, 24, 50, 55]。

定义 1.2. 给定一个序列 $\boldsymbol{d}=(d_i)_{i\in I}$，对每个 $\alpha\in\mathbb{R}$，定义

$$C_{\boldsymbol{d}}(\alpha)=\sum_{0\le d_i<\alpha} d_i \quad \text{and} \quad D_{\boldsymbol{d}}(\alpha)=\sum_{\alpha\le d_i\le 1}(1-d_i).$$

定义主序函数 $f_{\boldsymbol{d}}:\ \mathbb{R}\to[0,\infty]$ 如下

$$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha)=\begin{cases}\sum_{d_i\le\alpha}(\alpha-d_i) & \alpha\le 0\\ (1-\alpha)C_{\boldsymbol{d}}(\alpha)+\alpha D_{\boldsymbol{d}}(\alpha) & \alpha\in(0,1)\\ \sum_{d_i\ge\alpha}(d_i-\alpha) & \alpha\ge 1.\end{cases}$$

我们称 x 是序列 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_i)_{i\in I}$ 的聚点，如果对任意 $\varepsilon>0$，都存在无穷多个 $i\in I$ 使得 $|x-\lambda_i|<\varepsilon$。注意，点 x 是 $\boldsymbol{\lambda}$ 的聚点，当且仅当它是 $\boldsymbol{\lambda}$ 所取值集合的极限点，或者说：$\lambda_i=x\}$ 是无限的。

定义 1.3. 如果 $T\oplus P$ 和 $T'\oplus P$ 酉等价，我们就称两个算子 T 和 T' 模 $\{0,1\}$ 酉等价，其中 P 表示希尔伯特空间上的一个正交投影，其核和值域均为无限维。

注意，在 T和 T'模 $\{0,1\}$ 酉等价且 T可对角化的情况下，T'可对角化，并且 T 的所有特征值 $\lambda\neq 0$（1 的）的重数都相同。一般而言，T和 T'模 $\{0,1\}$ 酉等价，当且仅当 T和 T'的谱测度在 $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ 上的限制酉等价。我们刻画非紧算子对角线的主要结果（模本质谱的两个极端点）如下。

定理 1.4. 设 T 是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，且 0 和 1 是 T的本质谱 $\sigma_{ess}(T)$ 的两个极端点，即

$$\{0,1\}\subset\sigma_{ess}(T)\subset[0,1].$$

设 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_j)_{j\in J}$ 为 T 所有特征值按重数排列的列表（该列表可能为空）。设 $\boldsymbol{d}=(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$。定义

$$\delta^L=\liminf_{\beta\nearrow 0}(f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta)-f_{\boldsymbol{d}}(\beta)) \quad and \quad \delta^U=\liminf_{\beta\searrow 1}(f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta)-f_{\boldsymbol{d}}(\beta)).$$

那么，$\boldsymbol{d}$ 是一个算子的对角线，该算子模去 $\{0,1\}$ 后与 T 酉等价，当且仅当

$$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha)\le f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \qquad for\ all\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus[0,1], \tag{1.6}$$

并且以下五个条件之一成立：

(i) $\delta^L=\delta^U=\infty$,
(ii) $\delta^L<\infty$, $\delta^U=\infty$, *and* $\sum_{d_i>0} d_i=\infty$,
(iii) $\delta^U<\infty$, $\delta^L=\infty$, *and* $\sum_{d_i<1}(1-d_i)=\infty$,
(iv) $\delta^L+\delta^U<\infty$ *and* $f_{\boldsymbol{d}}(1/2)=\infty$, *or*

(v) $\delta^L + \delta^U < \infty$, $f_{\boldsymbol{\lambda}}(1/2) < \infty$, $f_{\boldsymbol{d}}(1/2) < \infty$, $\boldsymbol{d}$ 在 0 和 1 处有聚点，并且存在 $\delta_0 \in [0, \delta^L]$ 和 $\delta_1 \in [0, \delta^U]$ 使得

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_1 \qquad \text{对所有 } \alpha \in (0,1), \tag{1.7}$$

$$f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) - f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \equiv \delta_1 - \delta_0 \mod 1 \qquad \textit{for some } \alpha \in (0,1), \tag{1.8}$$

$$\sum_{\lambda_i<0} |\lambda_i| < \infty \implies \delta^L - \delta_0 \le \delta^U - \delta_1, \tag{1.9}$$

$$\sum_{\lambda_i>1} (\lambda_i - 1) < \infty \implies \delta^U - \delta_1 \le \delta^L - \delta_0. \tag{1.10}$$

条件 (i)–(iv) 具有定性特征：当至少一个超额 δ^L 或 δ^U（在特征值列表 $\boldsymbol{\lambda}$ 与对角线 $\boldsymbol{d}$ 之间、且超出本质谱的极端点处计算）为无穷大时，这些条件不包含任何定量要求。如果 δ^L 和 δ^U 均为有限值，那么我们要么有一个关于 (0,1) 之间对角项的定性非布拉施克条件，

$$\sum_{i:0<d_i<1} \min(d_i, 1-d_i) = \infty,$$

要么有 (v) 中极为繁复的定量条件。

事实证明，任何具有对角线 $\boldsymbol{d}$ 且满足 $\delta^L + \delta^U < \infty$ 和布拉施克条件的算子 E

$$\sum_{i:0<d_i<1} \min(d_i, 1-d_i) < \infty, \tag{1.11}$$

实际上都是可对角化的，见定理 4.1。E 的特征值列表 $\boldsymbol{\lambda}$ 必须满足布拉施克条件

$$\sum_{i:0<\lambda_i<1} \min(\lambda_i, 1-\lambda_i) < \infty, \tag{1.12}$$

还必须满足以主序函数 $f_{\boldsymbol{\lambda}}$ 和 $f_{\boldsymbol{d}}$表示的勒贝格主序不等式 (1.7)。这是对有限谱算子已有的勒贝格内部主序不等式的推广 [15, 定理 1.3]。条件 (1.8) 是 Kadison 定理中有限和 (1.4) 的迹条件 $a - b \in \mathbb{Z}$ 的一个类似形式。相比之下，最后两个条件 (1.9) 和 (1.10) 对于有限谱算子没有明显的类似形式，因为它们会归结为等式 $\delta^L - \delta_0 = \delta^U - \delta_1 = 0$。事实上，量 δ_0 和 δ_1 衡量了在产生对角线 $\boldsymbol{d}$的过程中，特征值序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 中有多少质量越过了本质谱的极端点，即 0 和 1。换言之，量 $\delta^L - \delta_0$ 和 $\delta^U - \delta_1$ 表示在外部主序不等式 (1.6) 中，$\boldsymbol{\lambda}$ 有多少质量消失了。这类似于非迹类紧正算子的情形，在那里超额 σ_+可能为正。根据 (1.6)，我们可以分别将 (1.9) 和 (1.10) 中 $\boldsymbol{\lambda}_-$ 和 $(\lambda_i - 1)_{\lambda_i>1}$的可求和性，替换为 $\boldsymbol{d}_-$ 和 $(d_i - 1)_{d_i>1}$的可求和性。因此，(1.8)、(1.9) 和 (1.10) 合起来可以看作是本质谱有两个点的自伴算子对角线上的迹条件。

为证明定理 1.4 中的充分性部分，我们证明以整数为指标、满足布拉施克条件 (1.11) 和 (1.12) 的 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 在 $[0,1]$，中的黎曼内部主序与勒贝格内部主序等价，这些序列

还满足布拉施克条件 (1.11) 和 (1.12)。由此，我们为满足主序条件 (1.7) 和迹条件 (1.8) 的 (0, 1) 中的序列建立了对角线到对角线结果。随后，我们利用这一结果证明了满足 (v) 的序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 的主要对角线到对角线结果，见定理 7.2。此外，我们还需要对不等式 (1.7) 施加严格性条件，这是由解耦现象所要求的，见定理 4.1。简言之，在点 $\alpha \in [0,1]$ 处解耦会将算子 E 分成两部分，其谱分别位于 $(-\infty、\ \alpha]$ 和 $[\alpha, \infty)$ 中，并将对角序列 $\boldsymbol{d}$ 在同一点 α 处分成两个子序列，它们分别成为 E 两部分的对角线。一旦发生解耦，就会产生更多必要条件，从而限制充分性结果的普遍性。

定理 1.4 中剩余条件 (i)–(iv) 的充分性证明极其简洁，考虑到它涵盖了如此广泛的一类自伴算子，更是如此。这反映了一条普遍规律：对于投影、紧算子以及满足布拉施克条件 (1.12) 的可对角化算子这类简单算子，充分性证明最为困难且最为繁复；而对于更复杂的算子，例如不可对角化算子，证明则会简单一些。这是由于 M¨uller 和 Tomilov [51], 的一个定理保证，任何位于本质数值域 $W_e(E)$ 内部且满足 (1.1) 的序列，都是 E 的一个对角线。因此，充分性证明大多归结为涉及外部主序 (1.6) 的考察，见定理 8.3。与论文其余部分相比，这一结果颇为特别，因为此前所有充分性定理都是对角线到对角线的。定理 1.4 的证明在第 9 节结束，该节结合了前面的必要性与充分性结果。此外，我们还得到定理 1.4 的一个更强变体，它描述了单个自伴算子 T 的对角线集合 $\mathcal{D}(T)$，尽管必要条件与充分条件之间仍存在差距。

本文其余部分致力于研究用于确定给定序列是否为自伴算子的对角线的算法。特别地，我们对所有不可对角化的自伴算子回答了问题 1.1，见注 10.9。

定理 1.5。设 E 是一个自伴算子，其谱 $\sigma(E)$ 不可数。设 $\boldsymbol{d}$ 是一个实数有界序列。那么，第 10 节中用于确定具有 ≥ 5 点本质谱的自伴算子对角线的算法，对这一对 $(E, \boldsymbol{d})$ 是有效的。

最后，我们讨论两类非紧算子的核问题；对于这两类算子，我们的算法无法得出结论。我们证明，这些类中的算子除了必须满足由定理 4.1 得出的必要条件外，还必须满足额外的必要条件。这些条件类似于 Kaftal 和 Loreaux [40] 所证明的、针对核非平凡的紧正算子的必要条件。由于必要条件与充分条件之间仍有差距，问题 1.1 仅对这些非常特殊的算子类尚未解决。

2. Preliminaries

本节陈述关于算子的对角线的已有结果，这些结果将在后续各节中使用。为了详细描述我们的结果，我们需要先引入一些记号。设 I 为一个可数无限集。设 $c_0(I)$ 为以集合 I 为指标集且收敛于 0 的实值序列的全体。也就是说，对每个 $\varepsilon > 0$，集合 $\{i \in I : |d_i| > \varepsilon\}$ 都是有限集。设 $c_0^+(I)$ 为 $c_0(I)$ 中非负值序列的集合。当序列的指标集显而易见时，我们将写作 c_0 和c_0^+。

定义 2.1. 设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in I}$ 为一个实值序列。定义其正部 $\boldsymbol{\lambda}_+ = (\lambda_i^+)_{i\in I}$ 为 $\lambda_i^+ = \max(\lambda_i, 0)$。负部定义为 $\boldsymbol{\lambda}_- = (-\boldsymbol{\lambda})_+$。若 $\boldsymbol{\lambda} \in c_0^+$，则将其递减重排 $\boldsymbol{\lambda}^\downarrow = (\lambda_i^\downarrow)_{i\in\mathbb{N}}$ 定义为令 $\lambda_i^\downarrow$ 等于$\boldsymbol{\lambda}$中第 i 大的项。为简洁起见，我们将 $(\boldsymbol{\lambda}_+)^\downarrow$ 的第 i 项记为 $\lambda_i^{+\downarrow}$，对于 $(\boldsymbol{\lambda}_-)^\downarrow$ 也类似。

定义 2.2. 给定两个序列 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j\in J}$和 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in I}$，$\boldsymbol{\lambda}$和 $\boldsymbol{d}$的拼接记作 $\boldsymbol{\lambda}\oplus\boldsymbol{d}$，它是序列 $(c_k)_{k\in I\sqcup J}$，其中 $I\sqcup J$是 I和 J的不交并，并且

$$c_k = \begin{cases} \lambda_k & k\in J, \\ d_k & k\in I. \end{cases}$$

注意，若 $I\cap J = \varnothing$，则 $I\sqcup J := I\cup J$；若 $I\cap J\neq\varnothing$，则 $I\sqcup J = (I\times\{1\})\cup(J\times\{2\})$。在后一种情况下，$k\in I$解释为 $(k,1)\in I\times\{1\}$，$k\in J$也同理。

2.1. 序列的主序。定义序列的主序有两种方式。

定义 2.3. 设 I, J 为可数无限集，并设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in I}$ 和 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in J}$ 为 c_0^+中的序列。若 $\boldsymbol{\lambda}$ 主序于 $\boldsymbol{d}$，记作 $\boldsymbol{d}\prec\boldsymbol{\lambda}$，则

$$\sum_{i=1}^n d_i^\downarrow \le \sum_{i=1}^n \lambda_i^\downarrow \quad \text{for all } n\in\mathbb{N}. \tag{2.1}$$

此外，若有

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n(\lambda_i^\downarrow - d_i^\downarrow) = 0$$

则称 $\boldsymbol{\lambda}$ 强调序于 $\boldsymbol{d}$，记作 $\boldsymbol{d}\preccurlyeq\boldsymbol{\lambda}$。

定义 2.4. 给定两个序列 $\boldsymbol{d}\in c_0(I)$ 和 $\boldsymbol{\lambda}\in c_0(J)$，对于 $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，我们定义函数

$$\delta(\alpha,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{d}) = \begin{cases} \sum_{\lambda_i\ge\alpha}(\lambda_i-\alpha) - \sum_{d_i\ge\alpha}(d_i-\alpha) & \alpha>0, \\ \sum_{\lambda_i\le\alpha}(\alpha-\lambda_i) - \sum_{d_i\le\alpha}(\alpha-d_i) & \alpha<0. \end{cases} \tag{2.2}$$

若对所有 $\alpha\neq 0$，都有 $\delta(\alpha,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{d})\ge 0$，则称 $\boldsymbol{\lambda}$ 主序于 $\boldsymbol{d}$。

下述引理可见于 [18, 引理 2.5]。

引理 2.5. 若 $\mathbf{c}\in c_0^+(I)$，则

$$g(\alpha) = \sum_{i:\, c_i\ge\alpha}(c_i-\alpha).$$

在 $(0,\infty)$ 上分段线性、连续且递减，并且

$$\lim_{\alpha\searrow 0} g(\alpha) = \sum_{i\in I} c_i.$$

此外，如果 $\boldsymbol{d},\boldsymbol{\lambda}\in c_0(I)$，那么 $\delta(\alpha,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{d})$ 在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上是分段线性且连续的。

以下结果表明，主序的两个概念是等价的 [18, 命题 2.7]。

命题 2.6。设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i=1}^{\infty}, \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ 是 c_0^+ 中的序列。那么，以下两个条件等价：

(i) $\boldsymbol{d} \prec \boldsymbol{\lambda}$,
(ii) $\delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) \geq 0$ *for all* $\alpha > 0$.
在这种情况下

$$\liminf_{\alpha \searrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) = \liminf_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i^{\downarrow} - d_i^{\downarrow}). \tag{2.3}$$

在 $\boldsymbol{\lambda}$ 可求和的情况下，我们得到恒等式 (2.3) 的一个更强版本，见 [18,命题 2.8]。

命题 2.7。设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i \in I}$ 和 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i \in J}$ 为非负序列。若 $\boldsymbol{\lambda}$ 可求和，且对所有 $\alpha > 0$ 都有 $\delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) \geq 0$，则 $\boldsymbol{d}$ 可求和，并且

$$\liminf_{\alpha \searrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) = \sum_{j \in J} \lambda_j - \sum_{i \in I} d_i.$$

2.2. 单侧紧算子的必要条件。在我们先前的论文 [18] 中，我们证明了关于对角线的以下必要条件，这些条件只要求算子的正部或负部是紧的。因此，它们对非紧算子也有用。

The 以下结果是舒尔定理 [18, 定理 3 的推广。 2].

定理 2.8. 设 E 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上具有紧负部的自伴算子，且 $(e_i)_{i \in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基。令 $\boldsymbol{d} = (\langle Ee_i, e_i \rangle)_{i \in I}$，并设 $\boldsymbol{\lambda}$ 是 E 的严格负特征值序列，按重数计。则对所有 $\alpha < 0$, $\delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) \geq 0$。

定义 2.9. 设 E 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一个自伴算子。设 (d_i) 是 E 关于 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基 (e_i) 所对应的对角线。如果算子 E 在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 处相对于 (d_i) 解耦，则称算子 E 在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 处相对于 (d_i) 解耦，当且仅当

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : d_i < \alpha\} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{H}_1 = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : d_i \geq \alpha\},$$

是 E 的不变子空间和

$$\sigma(E|_{\mathcal{H}_0}) \subset (-\infty, \alpha] \qquad \text{and} \qquad \sigma(E|_{\mathcal{H}_1}) \subset [\alpha, \infty).$$

以下结果表明，当超额 \(\liminf\{v1\}(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d})\) 为零时，该算子会解耦。 [18,命题 3.5]。

命题 2.10. 设 E 是作用在 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，其特征值列表（计入重数）为 $\boldsymbol{\lambda}$，该列表可能为空。设 $\boldsymbol{d}$ 是 E 相对于某个标准正交基 $(e_i)_{i \in I}$的对角线。假设以下条件之一成立：

- 正部 E_+ 是紧的，且 $\liminf_{\alpha \searrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) = 0$，或者
- 负部 E_- 是紧的，且 $\liminf_{\alpha \nearrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) = 0$。

那么，算子 E 在点 0 处解耦。

下面的定理，其证明依赖于两个技术引理，是将迹类算子对角线上的迹条件推广到单侧紧算子。这三项结果在先前论文 [18, 第 3] 节中得到证明，其一般性远超紧算子所需的范围。但我们将在本文中利用这种一般性。

引理 2.11. 设 E 是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，其正部是一个紧非迹类算子，其正特征值为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots > 0$，按重数列出。设 $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是相应的特征向量正交归一序列，即 $Ef_j = \lambda_j f_j, j \in \mathbb{N}$。设 $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的正交归一序列，并设 $d_i = \langle Ee_i, e_i\rangle$, $i \in \mathbb{N}$。则，

$$\liminf_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} (\lambda_i - d_i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left(1 - \sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle e_i, f_j\rangle|^2\right) - \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle EPe_i, e_i\rangle, \tag{2.4}$$

其中， P 是将 $\mathcal{H}$ 正交投影到（$\operatorname{span}\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$）$^{\perp}$ 上的正交投影。

引理 2.12. 设 E 是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，其正部是一个紧迹类算子，其正特征值为 $(\lambda_j)_{j=1}^{M}$，其中 $M \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$。设 $(f_j)_{j=1}^{M}$ 是相应的特征向量正交归一序列，即 $Ef_j = \lambda_j f_j$。设 $(e_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的标准正交基，并设 $d_i = \langle Ee_i, e_i\rangle$, $i \in I$。则，

$$\sum_{i=1}^{M} \lambda_i - \sum_{i:d_i>0} d_i = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \left(1 - \sum_{i:d_i>0} |\langle e_i, f_j\rangle|^2\right) - \sum_{i:d_i>0} \langle EPe_i, e_i\rangle, \tag{2.5}$$

其中， P 是将 $\mathcal{H}$ 正交投影到$(\operatorname{span}(f_j)_{j=1}^{M})^{\perp}$上的正交投影。

定理 2.13. 设 E 是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，其正部 E_+ 是紧算子，特征值列表（计重数）为 $\boldsymbol{\lambda}$。设 $\boldsymbol{d} \in c_0$ 是E 的一个对角线，满足

$$\sum_{d_i<0} |d_i| < \infty,$$

如果正超额 $\sigma_+ = \liminf_{\alpha\searrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) < \infty$，那么 E的负部是迹类。此外，

$$\operatorname{tr}(E_-) \leq \sum_{d_i<0} |d_i| + \sigma_+, \tag{2.6}$$

等号在$\sum_{\lambda_i>0} \lambda_i < \infty$时成立。

我们还需要由解耦 [18,引理 3.11]所蕴含的基数不等式。

引理 2.14. 设 E 是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，其特征值列表（计重数）为 $\boldsymbol{\lambda}$，该列表可能为空。设 $\boldsymbol{d}$ 是相对于某个标准正交基 $(e_i)_{i\in I}$的 E 的一个对角线。假设 E 在 0 处解耦。如果正部 E_+ 是紧算子，则

$$\#|\{i : \lambda_i = 0\}| \geq \#|\{i : d_i = 0\}| \ \text{ and } \ \#|\{i : \lambda_i \geq 0\}| \geq \#|\{i : d_i \geq 0\}|. \tag{2.7}$$

如果负部 E_- 是紧的，那么

$$\#|\{i : \lambda_i = 0\}| \geq \#|\{i : d_i = 0\}| \ \text{ and } \ \#|\{i : \lambda_i \leq 0\}| \geq \#|\{i : d_i \leq 0\}|. \tag{2.8}$$

2.3. 对角线到对角线结果。Siudeja 和作者们证明了以下对角线到对角线结果 [19, 定理 3.6]。

命题 2.15. 设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ 和 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i=1}^{\infty}$ 为非增序列，并定义

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - d_i).$$

*I*若 $\boldsymbol{\lambda}$ 是自伴算子 E的对角线，且对所有 $n \in \mathbb{N}$， $\delta_n \geq 0$ ，并且

$$\liminf_{n\to\infty} \delta_n = 0,$$

那么 $\boldsymbol{d}$ 也是 E的对角线。

以下结果是 Kaftal-Weiss 定理[41, 推论 6.1],的对角线到对角线推广，该结果见于 [18, 命题 8.3]。

命题 2.16. 设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ 和 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i=1}^{\infty}$ 是 c_0 中的正序列，使得$\boldsymbol{d} \prec \boldsymbol{\lambda}$ 并且

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \sum_{i=1}^{\infty} d_i.$$

若 $\boldsymbol{\lambda}$ 是自伴算子 E的对角线，则 $\boldsymbol{d}$ 也是 E的对角线。

下面的初等引理 [18, 引理 4.5] 表明，从对角子序列得到的对角线到对角线结果可以推广。

引理 2.1　　7. 设 $(\lambda_i)_{i\in I}$ 和 $(d_i)_{i\in J}$ 是两个实数序列。假设 :

(i) 存在一个集合 K 以及 I 和 J的划分 $(I_k)_{k\in K}$ 和 $(J_k)_{k\in K}$ ，分别如此；(ii) 对每个 $k \in K$，如果 E_k 是一个对角线为 $(\lambda_i)_{i\in I_k}$的自伴算子，那么 $(d_i)_{i\in J_k}$也是 E_k的一个对角线,

那么，如果 E 是一个对角线为 $(\lambda_i)_{i\in I}$的自伴算子，则 $(d_i)_{i\in J}$ 也是 E的一个对角线。

作者曾证明以下关于紧算子对角线的结果 [18,定理 10.1 和 10.2]。

定理 2.18。设 $\boldsymbol{\lambda}$、$\boldsymbol{d} \in c_0$。定义

$$\sigma_+ = \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^{+\downarrow} - d_i^{+\downarrow}) \quad and \quad \sigma_- = \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^{-\downarrow} - d_i^{-\downarrow}).$$

（必要性）设 E 是一个特征值列表为 $\boldsymbol{\lambda}$ 的紧算子。若 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线，则

(2.9) $\sigma_+ = 0 \implies \#|\{i : \lambda_i = 0\}| \geq \#|\{i : d_i = 0\}|$ 和 $\#|\{i : \lambda_i \geq 0\}| \geq \#|\{i : d_i \geq 0\}|$,

(2.10)
$\sigma_- = 0 \implies \#|\{i : \lambda_i = 0\}| \geq \#|\{i : d_i = 0\}|$ 和 $\#|\{i : \lambda_i \leq 0\}| \geq \#|\{i : d_i \leq 0\}|$,

(2.11)
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{+\downarrow} \geq \sum_{i=1}^{n} d_i^{+\downarrow} \qquad for\ all\ n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-\downarrow} \geq \sum_{i=1}^{n} d_i^{-\downarrow} \qquad \textit{for all } n \in \mathbb{N}, \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{d}_+ \in \ell^1 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_- \geq \sigma_+, \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{d}_- \in \ell^1 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_+ \geq \sigma_-. \tag{2.14}$$

（充分性）反之，假设（2.9）–（2.14）成立，且

$$\sigma_+ + \sigma_- > 0. \tag{2.15}$$

如果自伴算子 E 的对角线为 $\boldsymbol{\lambda}$，那么 $\boldsymbol{d}$ 也是 E的对角线 .

利用命题 2.6，我们得到定理 2.18 中充分性部分的一个特例，其中超额相等 $\sigma_- = \sigma_+ > 0$。

定理 2.19. 设 $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d} \in c_0$。若存在一个自伴算子 E，其对角线为 $\boldsymbol{\lambda}$,

$$\delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) \geq 0 \quad \textit{for all } \alpha \neq 0, \tag{2.16}$$

and

$$\liminf_{\alpha \searrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) = \liminf_{\alpha \nearrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) > 0, \tag{2.17}$$

那么 $\boldsymbol{d}$ 也是 E的对角线。

2.4. 算子的对角线。Loreaux 和 Weiss [46] 给出了关于紧正算子 T 的 $\mathcal{D}(T)$ 的必要条件和充分条件，这些算子具有非平凡核。当 $\ker(T)$ 是无限维时，必要条件与充分条件一致，从而得到完整的刻画。然而，当 $\ker T$ 非平凡且有限维时， $\mathcal{D}(T)$ 的完整刻画仍未明了。这称为核问题。以下定理是对他们两个结果的一种便捷改述。定理 2.20 的充分性部分是 [46, 定理 2.4]„ 而必要性部分是 [46, 定理 3.4]。

定理 2.20. 设 E 是作用于 $\mathcal{H}$ 的紧算子，其特征值列表为 $\boldsymbol{\lambda} \in c_0^+$。设 $\boldsymbol{d} \in c_0^+$。若 $\#|\{i : d_i = 0\}| < \infty$，则令 $z = \#|\{i : \lambda_i = 0\}| - \#|\{i : d_i = 0\}|$；否则令 $z = 0$。

（必要性）若 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线，则

$$\#|\{i : \lambda_i = 0\}| \geq \#|\{i : d_i = 0\}|, \tag{2.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{+\downarrow} \geq \sum_{i=1}^{n} d_i^{+\downarrow} \qquad \textit{for all } n \in \mathbb{N}, \tag{2.19}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \sum_{i=1}^{\infty} d_i, \tag{2.20}$$

并且对于任意 $p \in \mathbb{N}$、 $p \leq z$，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在 $N = N_{p,\,\epsilon} > 0$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{+\downarrow} + \epsilon \lambda_{n+1}^{+\downarrow} \geq \sum_{i=1}^{n+p} d_i^{+\downarrow} \qquad \textit{for all } n \geq N. \tag{2.21}$$

（充分性）反之，若（2.18）–（2.20）成立，且对于任意 $p \in \mathbb{N}$、 $p \leq z$，都存在 $N = N_p$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{+\downarrow} \geq \sum_{i=1}^{n+p} d_i^{+\downarrow} \qquad for\ all\ n \geq N, \tag{2.22}$$

那么， $\boldsymbol{d}$ 是 E的对角线。

为了描述用于确定自伴算子对角线的算法，我们将使用算子分裂的概念。

定义 2.21. 设 E 是一个自伴算子。令 $\alpha \in \mathbb{R}$。如果存在 z_0、 z_1、 $z_2 \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ 使得：我们称算子对 E_1 和 E_2 是 E 在 α 处的分裂。

(i) E_1 是一个自伴算子，使得 $\sigma(E_1) \subset (-\infty, \alpha]$ 和 $z_1 = \dim \ker(E_1 - \alpha \mathbf{I})$，(ii) E_2 是一个自伴算子，使得 $\sigma(E_2) \subset [\alpha, \infty)$且 $z_2 = \dim \ker(E_2 - \alpha \mathbf{I})$，以及(iii) E与 $\alpha \mathbf{I}_{z_0} \oplus E_1 \oplus E_2$酉等价，因此 $z_0 + z_1 + z_2 = \dim \ker(E - \alpha \mathbf{I})$。

下面的初等事实 [18, 定理 11.4]连接了解耦与分裂这两个概念。

定理 2.22. 设 E 是一个自伴算子。设 $\boldsymbol{d}$ 是一个有界序列。假设$\boldsymbol{d}$ 是 E 的一个对角线，且算子 E 在 $\alpha \in \mathbb{R}$处解耦。那么，存在 E 在 α 处的一个分裂E_1 和 E_2，使得：

(i) 序列 $(d_i)_{d_i < \alpha}$ 是 E_1的一个对角线，(ii) 序列 $(d_i)_{d_i > \alpha}$ 是 E_2的一个对角线，并且 (iii) $\boldsymbol{d}$ 中 α的数量满足

$$\dim \ker(\alpha \mathbf{I} - E) = \dim \ker(\alpha \mathbf{I} - E_1) + \dim \ker(\alpha \mathbf{I} - E_2) + \#|\{i : d_i = \alpha\}|. \tag{2.23}$$

反过来，如果存在 E 的一个分裂，使得 (i)–(iii)成立，那么 $\boldsymbol{d}$ 是 E的一个对角线，且算子 E 在 α 处解耦。

最后，我们还需要紧自伴算子的对角线模掉核的维数后的刻画 [18,定理 1.3]。

定理 2.23。设 $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d} \in c_0$。令

$$\sigma_+ = \liminf_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^{+\downarrow} - d_i^{+\downarrow}) \quad and \quad \sigma_- = \liminf_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^{-\downarrow} - d_i^{-\downarrow})$$

设 T 是一个特征值列表为 $\boldsymbol{\lambda}$的紧自伴算子。则以下条件等价：

(i) $\boldsymbol{d} \in \mathcal{D}(T')$ 对于算子范数闭包中酉轨道的某个算子 T' 而言

$$T' \in \overline{\{UTU^* : U\ is\ unitary\}}^{||\cdot||},$$

(ii) $\boldsymbol{d}$是算子 T'的对角线，且 $T \oplus \mathbf{0}$与 $T' \oplus \mathbf{0}$酉等价，其中 $\mathbf{0}$ 表示无限维希尔伯特空间上的零算子，

(iii) $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 满足以下四个条件

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{+\downarrow} \geq \sum_{i=1}^{n} d_i^{+\downarrow} \qquad \textit{for all } k \in \mathbb{N}, \tag{2.24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-\downarrow} \geq \sum_{i=1}^{n} d_i^{-\downarrow} \qquad \textit{for all } k \in \mathbb{N}, \tag{2.25}$$

$$\boldsymbol{d}_+ \in \ell^1 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_- \geq \sigma_+ \tag{2.26}$$

$$\boldsymbol{d}_- \in \ell^1 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_+ \geq \sigma_- \tag{2.27}$$

3. The majorization function $f_{\boldsymbol{d}}$

在本节中，我们证明由定义 1.2 给出的主序函数 $f_{\boldsymbol{d}}$ 的若干有用性质。以下命题是对 [14, 引理 3.9]的便捷改述。公式 (3.2) 直接由定义 1.2 得出。

命题 3.1. 设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in I}$ 是 $[0,1]$ 中的一个序列，且对所有 $\alpha \in (0,1)$，均有 $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$。函数 $f_{\boldsymbol{d}}$ 是分段线性、连续且凹的，并且满足

$$\lim_{\alpha\to 0^+} f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) = \lim_{\alpha\to 1^-} f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) = 0, \tag{3.1}$$

and

$$f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) = D_{\boldsymbol{d}}(\alpha) - C_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \quad \textit{for every } \alpha \in (0,1) \setminus \{d_i \colon i \in I\}.$$

此外，对于 $1 > \alpha \geq \beta > 0$

$$C_{\boldsymbol{d}}(\alpha) - D_{\boldsymbol{d}}(\alpha) = C_{\boldsymbol{d}}(\beta) - D_{\boldsymbol{d}}(\beta) + \#|\{i : d_i \in [\beta, \alpha)\}|. \tag{3.2}$$

特别地，存在一个数 $\eta \in [0,1)$，使得

$$D_{\boldsymbol{d}}(\alpha) - C_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \equiv \eta \mod 1 \quad \textit{for all } \alpha \in (0,1).$$

使用主序函数 $f_{\boldsymbol{d}}$时，Kadison 定理 [38, 39] 具有以下形式。

定理 3.2（Kadison）。设 $(d_i)_{i\in I}$ 是 $[0,1]$ 中的一个序列，且 $\alpha \in \in (0,1)$。存在一个作用于 $\ell^2(I)$ 上、对角线为 $(d_i)_{i\in I}$ 的正交投影 P，当且仅当满足以下任一条件：

(i) $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) = \infty$，对某个（因而对所有）$\alpha \in \in (0,1)$ 成立；

(ii) $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$，对某个（因而对所有）$\alpha \in \in (0,1)$ 成立；并且

$$f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \in \mathbb{Z} \qquad \textit{for some (and hence for almost every) } \alpha \in (0,1). \tag{3.3}$$

命题 3.3。设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in I}$ 和 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in J}$ 是 $[0,1]$ 中的序列，满足 $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$，且对所有 $\alpha \in \in (0,1)$，$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) < \infty$。以下条件等价：

(i) $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \geq f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)$ *for all* $\alpha \in (0,1)$

(ii) $f_{\boldsymbol{d}}(\lambda_i) \geq f_{\boldsymbol{\lambda}}(\lambda_i)$ *for all* $i \in J \setminus \{j \in J \colon \lambda_j = 0 \text{ or } 1\}$.

证明。(i)⇒ (ii)显然。对于另一个方向，我们只需注意到 $f_{\boldsymbol{d}}$ 是凹函数，而$f_{\boldsymbol{\lambda}}$ 是分段线性的，其折点位于每个 $\lambda_i \in (0,1)$处。□

命题 3.4。设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in I}$ 是 $[0,1]$ 中的一个序列，且满足 $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$。那么，对于任意集合 $J \subset I$ 以及 $\alpha \in (0,1)$，我们有

$$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \le (1-\alpha)\sum_{i\in J} d_i + \alpha \sum_{i\in I\setminus J}(1-d_i). \tag{3.4}$$

证明。我们可以假设右端 (3.4) 是有限的。假设存在$i_0 \in J$ 使得 $d_{i_0} > \alpha$。那么，与集合 $J \setminus \{i_0\}$对应的右端 (3.4) 会减少 $d_{i_0} - \alpha$。同样，如果存在 $i_0 \in I \setminus J$ 使得 $d_{i_0} < \alpha$，那么，与集合 $J \cup \{i_0\}$ 对应的右端 (3.4) 会减少 $\alpha - d_{i_0}$。这意味着，当且仅当以下条件成立时，右端 (3.4) 取到最小值

$$\{i \in I : d_i < \alpha\} \subset J \subset \{i \in I : d_i \le \alpha\}.$$

在这种情况下，(3.4) 成为等式。 □

引理 3.5。设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是序列，满足 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)+f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$对所有 $\alpha \in (0,1)$ 都成立，且 (1.7) 成立。固定 $\alpha_0 \in (0,1)$，使得 α_0 不是 $\boldsymbol{\lambda}$ 或 $\boldsymbol{d}$中的一项。定义$\boldsymbol{\lambda}_0 := (\lambda_i)_{0\le\lambda_i<\alpha_0}$, $\boldsymbol{d}_0 := (d_i)_{0\le d_i<\alpha_0}$,

$$\kappa := f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha_0) - f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha_0) - \delta_0 + \delta_1,$$

and

$$\beta := f_{\boldsymbol{d}}(\alpha_0) - f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha_0) + (1-\alpha_0)\delta_0 + \alpha_0\delta_1 - \alpha_0\kappa.$$

然后,

$$\delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{d}_0) \ge -\kappa\alpha - \beta \quad \textit{for all } \alpha \ne 0,$$

and

$$\liminf_{\alpha\searrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{d}_0) = \delta_0 - \beta.$$

证明。对于 $\alpha \le \alpha_0$，由 (3.2) 可得

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) &= C_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) + \alpha(D_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) - C_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)) \\ &= C_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) + \alpha(D_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha_0) - C_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha_0) - \#|\{i : \lambda_i \in [\alpha,\alpha_0)\}|) \\ &= C_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) + \alpha f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha_0) - \alpha\#|\{i : \lambda_i \in [\alpha,\alpha_0)\}|. \end{aligned}$$

对序列 $\boldsymbol{d}$ 采用相同的推理可得

$$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) = C_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + \alpha f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha_0) - \alpha\#|\{i : d_i \in [\alpha,\alpha_0)\}|.$$

现在，不等式 (1.7) 变为

$$\begin{aligned} &C_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) - C_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \\ &\quad\le \alpha\big(f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha_0) - f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha_0) + \#|\{i : d_i \in [\alpha,\alpha_0)\}| - \#|\{i : \lambda_i \in [\alpha,\alpha_0)\}| + \delta_1 - \delta_0\big) + \delta_0 \\ &\quad= \alpha\big(\#|\{i : d_i \in [\alpha,\alpha_0)\}| - \#|\{i : \lambda_i \in [\alpha,\alpha_0)\}| + \kappa\big) + \delta_0 \\ &\quad= \sum_{d_i\in[\alpha,\alpha_0)} \alpha - \sum_{\lambda_i\in[\alpha,\alpha_0)} \alpha + \alpha\kappa + \delta_0, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{0\le\lambda_i<\alpha_0}\lambda_i-\sum_{0\le d_i<\alpha_0}d_i &= C_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha_0)-C_{\boldsymbol{d}}(\alpha_0)\\ &= f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha_0)-f_{\boldsymbol{d}}(\alpha_0)+\alpha_0\big(f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha_0)-f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha_0)\big)\\ &= (1-\alpha_0)\delta_0+\alpha_0\delta_1-\alpha_0\kappa-\beta+\alpha_0(\kappa+\delta_0-\delta_1)=\delta_0-\beta.\end{aligned}\tag{3.5}$$

将这些结果合并，我们得到

$$\delta_0-\beta\le\sum_{\lambda_i\in[\alpha,\alpha_0)}(\lambda_i-\alpha)-\sum_{d_i\in[\alpha,\alpha_0)}(d_i-\alpha)+\alpha\kappa+\delta_0$$

因此，

$$-\kappa\alpha-\beta\le\sum_{\lambda_i\in[\alpha,\alpha_0)}(\lambda_i-\alpha)-\sum_{d_i\in[\alpha,\alpha_0)}(d_i-\alpha)=\delta(\alpha,\boldsymbol{\lambda}_0,\boldsymbol{d}_0).$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_0=(\lambda_i)_{\lambda_i\in[0,\alpha_0)}$ 且 $\boldsymbol{d}_0=(d_i)_{d_i\in[0,\alpha_0)}$。由 (3.5) 和引理 2.5 可知

$$\liminf_{\alpha\searrow0}\delta(\alpha,\boldsymbol{\lambda}_0,\boldsymbol{d}_0)=\delta_0-\beta.$$ □

推论 3.6. 假设 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\boldsymbol{d}=(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是序列，且 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)+f_{\boldsymbol{d}}(\alpha)<\infty$ 对所有 $\alpha\in(0,1)$ 均成立。若 (1.7) 在 $\alpha=\alpha_0\in(0,1)$ 处取等号，则 $\boldsymbol{\lambda}_0:=(\lambda_i)_{0\le\lambda_i<\alpha_0}$ 按定义 2.4 的意义支配 $\boldsymbol{d}_0:=(d_i)_{0\le d_i<\alpha_0}$，即

$$\delta(\alpha,\boldsymbol{\lambda}_0,\boldsymbol{d}_0)\ge0\quad \textit{for all } \alpha\ne0.$$

此外，

$$\liminf_{\alpha\searrow0}\delta(\alpha,\boldsymbol{\lambda}_0,\boldsymbol{d}_0)=\delta_0.$$

证明。存在一个非空区间 $I_0=(\alpha_0-\varepsilon,\alpha_0)$，其中不含 $\boldsymbol{\lambda}$ 或 $\boldsymbol{d}$ 的任何项。注意，$C_{\boldsymbol{\lambda}}$、$D_{\boldsymbol{\lambda}}$、$C_{\boldsymbol{d}}$ 和 $D_{\boldsymbol{d}}$ 在 I_0 上均为常数，因此对所有 $\alpha\in I_0$，(1.7) 均取等号。我们可以缩小 α_0，以确保其不等于 $\boldsymbol{\lambda}$ 或 $\boldsymbol{d}$ 的任何项，同时不改变 $\boldsymbol{\lambda}_0$ 和 $\boldsymbol{d}_0$ 的定义。

如引理 3.5 中所述，定义 κ和 β。注意，(1.7) 等价于

$$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha)-f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)+(1-\alpha)\delta_0+\alpha\delta_1\ge0\quad\text{for all }\alpha\in(0,1).$$

在 $\alpha=\alpha_0$ 处，(1.7) 中等号成立等价于 $\beta=-\alpha_0\kappa$。此外，我们看到左端在 α_0处可微。由此可推得左端的导数在$\alpha=\alpha_0$处为 0，即 $\kappa=0$。因此，我们还有 $\beta=-\alpha_0\kappa=0$。于是，将引理 3.5 应用于序列 $\boldsymbol{\lambda}$和 $\boldsymbol{d}$，即可得到所需结论。□

推论 3.7. 假设 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\boldsymbol{d}=(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是满足以下条件的序列：对所有 $\alpha\in(0,1)$，$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)+f_{\boldsymbol{d}}(\alpha)<\infty$。若 (1.7) 在 $\alpha=\alpha_0\in(0,1)$处取等号，则 $\boldsymbol{\lambda}_1:=(1-\lambda_i)_{\alpha_0\le\lambda_i\le1}$按照定义 2.4 的意义支配 $\boldsymbol{d}_1:=(1-d_i)_{\alpha_0\le d_i\le1}$，也就是说，

$$\delta(\alpha,\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{d}_1)\ge0\quad \textit{for all } \alpha\ne0.$$

此外，

$$\liminf_{\alpha\searrow0}\delta(\alpha,\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{d}_1)=\delta_1.$$

证明。与推论 3.6 的证明相同，我们可以假设 α_0 位于区间 I_0 的内部，使得对于所有 $\alpha \in I_0$，以及对于所有 $i \in I$，d_i、$\lambda_i \notin I_0$ 均满足 (1.7)。这意味着 $\boldsymbol{d}_1 = (1-d_i)_{\alpha_0<d_i\le 1}$，且 $\boldsymbol{\lambda}_1 = (1-\lambda_i)_{\alpha_0<\lambda_i\le 1}$。

Set $\widetilde{\boldsymbol{d}} = (1-d_i)_{i\in I}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}} = (1-\lambda_i)_{i\in I}$。注意，对于这些序列，交换 δ_0 和 δ_1 后，(1.7) 仍然成立。因此，对 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 应用推论 3.6，即可得出结论。□

4. Necessity proof of Theorem 1.4

本节旨在证明：当本质谱中有 ≥ 2 个点时，算子的对角线所满足的必要条件。定理 1.4 的必要性方向主要由以下定理推出。从本质上说，定理 4.1 表明，若对角序列 $\boldsymbol{d}$ 满足布拉施克条件，且下超额和上超额有限，则算子 E 必定可对角化，且其特征值满足布拉施克条件。Loreaux 和 Weiss [48, 推论 4.5]证明了一个类似结果，不过其对 E 的假设更强，即 E_- 和 $(E-\mathrm{I})_+$ 属于迹类。

定理 4.1. 设 E 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，且 0 和 1 是其本质谱 $\sigma_{ess}(E)$ 的两个极端点，也就是说，

$$\{0,1\} \subset \sigma_{ess}(E) \subset [0,1].$$

设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j\in J}$ 是 E 的所有特征值按重数排列所得的列表（该列表可能为空）。设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in I}$ 是 E 的一个对角线，由 $d_i = \langle Ee_i, e_i\rangle$ 给出，且相对于 $\mathcal{H}$ 的某个标准正交基 $(e_i)_{i\in I}$。定义

$$\delta^L = \liminf_{\beta\nearrow 0}(f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}}(\beta)) \quad and \quad \delta^U = \liminf_{\beta\searrow 1}(f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}}(\beta)).$$

假设对于某个 $\alpha \in (0,1)$ 和 $\delta^L + \delta^U < \infty$，有 $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$。那么算子 E 可对角化，且 $\boldsymbol{d}$ 的聚点为 0 和 1。此外，存在 $\delta_0 \in [0,\delta^L]$ 和 $\delta_1 \in [0,\delta^U]$，使得以下五个结论成立：

(i) 对所有 $\alpha \in (0,1)$，$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) < \infty$；(ii) 对所有 $\alpha \in (0,1)$，$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_1$；(iii) 对某个 $\alpha \in (0,1)$，$f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) - f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \equiv \delta_1 - \delta_0$ 模 1；(iv) 若 $\sum_{\lambda_j<0}|\lambda_j| < \infty$，则 $\delta^L - \delta_0 \le \delta^U - \delta_1$；(v) 若 $\sum_{\lambda_j>1}(\lambda_j - 1) < \infty$，则 $\delta^U - \delta_1 \le \delta^L - \delta_0$。

此外，假设存在 $\alpha \in [0,1]$，使得 $(\mathfrak{d}_\alpha)$ 成立，其中

$(\mathfrak{d}_0)$ $\delta^L = 0 \quad or \quad \delta_0 = 0$ *and* $\delta_1 = \delta^U$,
$(\mathfrak{d}_\alpha)$ $\alpha \in (0,1)$ *and* $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) = f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_1$,
$(\mathfrak{d}_1)$ $\delta^U = 0 \quad or \quad \delta_1 = 0$ *and* $\delta_0 = \delta^L$.

那么，算子 E 在点 $\alpha \in [0,1]$ 处解耦。也就是说，

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\mathrm{span}}\{e_i : d_i < \alpha\} \qquad and \qquad \mathcal{H}_1 = \overline{\mathrm{span}}\{e_i : d_i \ge \alpha\},$$

是 E 的不变子空间，且

$$\sigma(E|_{\mathcal{H}_0}) \subset (-\infty,\alpha] \qquad and \qquad \sigma(E|_{\mathcal{H}_1}) \subset [\alpha,\infty).$$

下面的引理将在定理 4.1 的证明中发挥关键作用。

引理 4.2. 设 E 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一个正算子，且 $\sigma(E) \subset [0,1]$。设 $(e_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的帕塞瓦尔框架。定义序列 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in I}$ 为 $d_i = \langle Ee_i, e_i\rangle$。若存在一个子集 $J \subset I$ 使得

$$\sum_{i\in J} d_i < \infty \qquad and \qquad \sum_{i\in I\setminus J} (||e_i||^2 - d_i) < \infty, \tag{4.1}$$

那么 E 可对角化。此外，如果 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in I'}$ 是 E的特征值列表（计入重数），那么对所有 $\alpha \in (0,1)$，$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) < \infty$，

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \le (1-\alpha)\sum_{i\in J} d_i + \alpha \sum_{i\in I\setminus J} (||e_i||^2 - d_i) \qquad for\ all\ \alpha \in (0,1), \tag{4.2}$$

此外，如果

$$\sum_{i\in I} \min(||e_i||^2, 1 - ||e_i||^2) < \infty, \tag{4.3}$$

then

$$f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) - f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \in \mathbb{Z} \qquad for\ a.e.\ \alpha \in (0,1). \tag{4.4}$$

证明。由谱定理，存在一个投影值测度 π，使得

$$E = \int_{[0,1]} \lambda \, d\pi(\lambda).$$

固定 $\alpha \in (0,1)$，并令

$$K = \int_{[0,\alpha)} \lambda \, d\pi(\lambda) \quad \text{and} \quad T = \int_{[\alpha,1]} (1-\lambda)\, d\pi(\lambda).$$

令 P为由 $P = \pi([\alpha,1])$给出的投影。对每个 $i \in I$，令 $k_i = \langle Ke_i, e_i\rangle, p_i = \langle Pe_i, e_i\rangle$，以及 $t_i = \langle Te_i, e_i\rangle$。由于 $E = K + P - T$，我们还有

$$d_i = k_i + p_i - t_i. \tag{4.5}$$

我们断言 K 和 T属于迹类。由于 K 和 T是正的，且 $(e_i)_{i\in I}$是帕塞瓦尔框架，只需证明 $\sum_{i\in I} (k_i + t_i) < \infty$。

接下来，我们观察到

$$T = \int_{[\alpha,1]} (1-\lambda)\, d\pi(\lambda) \le \int_{[\alpha,1]} (1-\alpha)\, d\pi(\lambda) = (1-\alpha)P \tag{4.6}$$

and

$$K = \int_{[0,\alpha)} \lambda \, d\pi(\lambda) \le \int_{[0,\alpha)} \alpha \, d\pi(\lambda) = \alpha(\mathbf{I} - P). \tag{4.7}$$

结合 $E = K + P - T$和 (4.6) 得到 $E \ge K + \frac{\alpha}{1-\alpha} T$。由 (4.5) 可推得$d_i \ge k_i + \frac{\alpha}{1-\alpha} t_i$，因此

$$\sum_{i\in J} \left(k_i + \frac{\alpha}{1-\alpha} t_i \right) \le \sum_{i\in J} d_i < \infty. \tag{4.8}$$

由 (4.7) 可推得 $\mathrm{I}-E=T-K+(\mathrm{I}-P)\geq T+\frac{1-\alpha}{\alpha}K$。因此，$||e_i||^2-d_i\geq\frac{1-\alpha}{\alpha}k_i+t_i$。由 (4.1) 得到

$$\sum_{i\in I\setminus J}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}k_i+t_i\right)\leq\sum_{i\in I\setminus J}(||e_i||^2-d_i)<\infty. \tag{4.9}$$

结合 (4.8) 和 (4.9) 可得，K 和 T 是迹类。

令 $\boldsymbol{p}=(p_i)_{i\in I}$。由于 $p_i=d_i-k_i+t_i$和 $1-p_i=1-d_i+k_i-t_i$，根据假设 $(d_i)_{i\in J}$ 和 $(1-d_i)_{i\in I\setminus J}$ 可求和，可知 $(p_i)_{i\in J}$ 和 $(1-p_i)_{i\in I\setminus J}$ 可求和。因此，对所有 $\alpha\in(0,1)$，$f_{\boldsymbol{p}}(\alpha)<\infty$。根据奈马克扩张定理，$(p_i)$ 是某个更大的希尔伯特空间中相对于某个标准正交基的一个投影的对角线；由定理 3.2 可得

$$f'_{\boldsymbol{p}}(\alpha)=\sum_{p_i\geq\alpha}(1-p_i)-\sum_{p_i<\alpha}p_i\in\mathbb{Z}\qquad\text{for a.e. }\alpha\in(0,1).$$

根据紧算子的谱定理，存在 $\operatorname{ran}(\mathrm{I}-P)$ 的一个标准正交基 $(f_i)_{i\in J_1}$，其元素是 K 的特征向量，相应的特征值为 $(\lambda_i)_{i\in J_1}$。此外，$\operatorname{ran}(P)$ 也存在一个标准正交基 $(f_i)_{i\in J_2}$，其元素是 T 的特征向量，相应的特征值为 $(1-\lambda_i)_{i\in J_2}$。由于 K 和 T 是迹类，$(\lambda_i)_{i\in J_1}$ 和 $(1-\lambda_i)_{i\in J_2}$ 均可求和。对于 $i\in J_1$，有 $(P-T)f_i=0$，因此 $Ef_i=\lambda_i f_i$。对于 $i\in J_2$，有$Kf_i=0$，故 $Ef_i=\lambda_i$。因此，$(f_i)_{i\in J_1\cup J_2}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基，其元素是 E 的特征向量，相应的特征值为 $(\lambda_i)_{i\in J_1\cup J_2}$。这表明 E 可对角化。

根据 K 和 T 的定义可知，对于 $i\in J_1$ 有 $\lambda_i<\alpha$，对于 $i\in J_2$ 有 $\lambda_i\geq\alpha$。因此，

$$C_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)=\sum_{\lambda_i<\alpha}\lambda_i=\sum_{i\in J_1}\lambda_i<\infty\quad\text{and}\quad D_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)=\sum_{\lambda_i\geq\alpha}(1-\lambda_i)=\sum_{i\in J_2}(1-\lambda_i)<\infty.$$

这意味着 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)<\infty$。此外，利用（4.8）和（4.9）可得

$$\begin{aligned}f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)&=(1-\alpha)\sum_{i\in J_1}\lambda_i+\alpha\sum_{i\in J_2}(1-\lambda_i)=(1-\alpha)\operatorname{tr}(K)+\alpha\operatorname{tr}(T)=(1-\alpha)\sum_{i\in I}k_i+\alpha\sum_{i\in I}t_i\\&=(1-\alpha)\sum_{i\in J}\left(k_i+\frac{\alpha}{1-\alpha}t_i\right)+\alpha\sum_{i\in I\setminus J}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}k_i+t_i\right)\\&\leq(1-\alpha)\sum_{i\in J}d_i+\alpha\sum_{i\in I\setminus J}(||e_i||^2-d_i),\end{aligned}$$

这表明了（4.2）。由（4.1）和（4.3），我们推得对所有 $\alpha\in(0,1)$

$$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha)=(1-\alpha)C_{\boldsymbol{d}}(\alpha)+\alpha D_{\boldsymbol{d}}(\alpha)<\infty.$$

因此，对几乎处处的 $\alpha \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) - f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) &= \sum_{d_i \geq \alpha} (1-d_i) - \sum_{d_i < \alpha} d_i - \sum_{i \in J_2} (1-\lambda_i) + \sum_{i \in J_1} \lambda_i \\ &\equiv \sum_{i \in I \setminus J} (1-d_i) - \sum_{i \in J} d_i - \operatorname{tr}(T) + \operatorname{tr}(K) \mod 1 \\ &= \sum_{i \in I \setminus J} (1-p_i) - \sum_{i \in J} p_i \equiv f'_{\boldsymbol{p}}(\alpha) \equiv 0 \mod 1. \end{aligned}$$

这就证明了 (4.4)。 □

注 4.3. 假设 (4.2) 中等号成立。那么，通过分析引理 4.2 的证明，我们可以推得 (4.8) 和 (4.9) 中等号成立，因此，对于所有 $i \in J$，都有$d_i = k_i + \frac{\alpha}{1-\alpha} t_i$；对于所有 $i \in I \setminus J$，都有 $||e_i||^2 - d_i = \frac{1-\alpha}{\alpha} k_i + t_i$。因此,

$$\langle Te_i, e_i \rangle = t_i = (1-\alpha) p_i = \langle (1-\alpha) P e_i, e_i \rangle \qquad \text{for all } i \in J,$$
$$\langle Ke_i, e_i \rangle = k_i = \alpha(||e_i||^2 - p_i) = \langle \alpha(\mathbf{I} - P) e_i, e_i \rangle \qquad \text{for all } i \in I \setminus J.$$

由 (4.6) 和 (4.7) 可得

$$e_i \in \operatorname{ran} \pi([0,\alpha]) \text{ for } i \in J \qquad \text{and} \qquad e_i \in \operatorname{ran} \pi([\alpha,1]) \text{ for } i \in J \setminus I.$$

我们将分几个部分证明定理 4.1。为避免重复，在第 4 节余下部分中，我们先引入一些记号。

记号 4.4. 设 E 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，且 0 和 1 是其本质谱 $\sigma_{ess}(E)$ 的极端点，也就是说,

$$\{0,1\} \subset \sigma_{ess}(E) \subset [0,1]. \tag{4.10}$$

令 π 为投影值测度，使得

$$E = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\pi(\lambda),$$

并定义这些算子

$$L_0 = \int_{(-\infty,0)} \lambda \pi(\lambda) \qquad \text{and} \qquad L_1 = \int_{(1,\infty)} \lambda \pi(\lambda),$$

以及投影 $P = \pi([0,1])$。

由 (4.10)，算子 L_0 和 L_1 可对角化。因此，存在 N_0、$N_1 \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$、一个序列 $\lambda_{-1} \leq \lambda_{-2} \leq \ldots < 0$、一个序列 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots > 1$，以及正交归一序列 $(f_{-j})_{j=1}^{N_0}$ 和 $(f_j)_{j=1}^{N_1}$，使得

$$L_0 f = \sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{-j} \langle f, f_{-j} \rangle f_{-j} \quad \text{and} \quad L_1 f = \sum_{j=1}^{N_1} \lambda_j \langle f, f_j \rangle f_j \qquad \text{for } f \in \mathcal{H}.$$

设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j \in J}$ 是 E 的所有特征值列表，按重数计（该列表可能为空）。由于 $(\lambda_{-j})_{j=1}^{N_0}$ 和 $(\lambda_j)_{j=1}^{N_1}$ 是 E 的特征值，我们将假设这些序列的指标集是 J 的子集。

令 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i \in I}$ 为 E 的一条对角线，它由 $d_i = \langle E e_i, e_i \rangle$ 给出，相对于 $\mathcal{H}$ 的某个标准正交基 $(e_i)_{i \in I}$。

定义

$$\delta^L = \liminf_{\beta\nearrow 0}(f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}}(\beta)) \quad \text{and} \quad \delta^U = \liminf_{\beta\searrow 1}(f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}}(\beta)).$$

最后，定义以下两个量，后文将证明它们是良定义的：

$$\delta_0 := \sum_{j=1}^{N_0} |\lambda_{-j}| \sum_{0\le d_i\le 1} |\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2 + \sum_{d_i<0} \langle EPe_i, e_i\rangle + \sum_{j=1}^{N_1}\sum_{d_i<0} |\langle e_i, f_j\rangle|^2. \tag{4.11}$$

$$\delta_1 := \sum_{j=1}^{N_1} (\lambda_j - 1) \sum_{0\le d_i\le 1} |\langle e_i, f_j\rangle|^2 + \sum_{d_i>1} \langle (\mathbf{I} - E)Pe_i, e_i\rangle + \sum_{j=1}^{N_0}\sum_{d_i>1} |\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2. \tag{4.12}$$

引理 4.5。若 $\delta^L < \infty$，则以下三个级数收敛：

$$\sum_{j=1}^{N_0} |\lambda_{-j}| \sum_{d_i\ge 0} |\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2, \qquad \sum_{d_i<0} \langle EPe_i, e_i\rangle, \qquad \sum_{j=1}^{N_1} \lambda_j \sum_{d_i<0} |\langle e_i, f_j\rangle|^2,$$

因此 δ_0 是良定义的。此外，

$$\delta_0 + \sum_{j=1}^{N_0} |\lambda_{-j}| \sum_{d_i>1} |\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2 + \sum_{j=1}^{N_1} (\lambda_j - 1) \sum_{d_i<0} |\langle e_i, f_j\rangle|^2 \le \delta^L, \tag{4.13}$$

当且仅当 $\sum_{\lambda_j<0} |\lambda_j| < \infty$ 时等号成立。

证明。由于 $E = L_0 + EP + L_1$，我们有

$$d_i = \sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{-j} |\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2 + \langle EPe_i, e_i\rangle + \sum_{j=1}^{N_1} \lambda_j |\langle e_i, f_j\rangle|^2. \tag{4.14}$$

情形 1：假设 $\sum_{\lambda_j<0} |\lambda_j| = \infty$。由于 $\delta^L < \infty$，这意味着 $\sum_{i\in I_0} |d_i| = \infty$，其中 $I_0 = \{i \in I : \ d_i < 0\}$。因此， I_0 是无限集，且存在一个双射 $\sigma : \ -\mathbb{N} \to I_0$ ，使得 $d_{\sigma(-1)} \le d_{\sigma(-2)} \le \ldots < 0$。由命题 2.6 和引理 2.11 应用于 $-E$ 和正交归一序列 $(e_{\sigma(-i)})_{i\in\mathbb{N}}$ ，我们推得

$$\begin{aligned}
\delta^L &= \liminf_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} (|\lambda_{-i}| - |d_{\sigma(-i)}|) \\
&\ge \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_{-j}| \left(1 - \sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle e_{\sigma(-i)}, f_{-j}\rangle|^2\right) + \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle (E\circ\pi([0,\infty)))e_{\sigma(-i)}, e_{\sigma(-i)}\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_{-j}| \left(\sum_{d_i\ge 0} |\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2\right) + \sum_{i:d_i<0} \langle EPe_i, e_i\rangle + \sum_{j=1}^{N_1} \lambda_j \sum_{i:d_i<0} |\langle e_i, f_j\rangle|^2 \\
&= \delta_0 + \sum_{j=1}^{N_0} |\lambda_{-j}| \sum_{d_i>1} |\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2 + \sum_{j=1}^{N_1} (\lambda_j - 1) \sum_{d_i<0} |\langle e_i, f_j\rangle|^2.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

这就证明了在假设 $\sum_{\lambda_j<0} |\lambda_j| = \infty$ 下的引理。

情形 2：设 $\sum_{\lambda_j<0}|\lambda_j|<\infty$。这意味着 E 的负部是迹类，因此我们可以应用引理 2.12 和命题 2.7 对 $-E$ 进行处理，从而得到

$$\begin{aligned}\delta^L &= \sum_{j=1}^{N_0}|\lambda_{-j}|\Big(1-\sum_{i:d_i<0}|\langle e_i,f_{-j}\rangle|^2\Big)+\sum_{i:d_i<0}\langle (E\circ\pi([0,\infty)))e_i,e_i\rangle\\ &= \sum_{j=1}^{N_0}|\lambda_{-j}|\Big(\sum_{i:d_i\geq 0}|\langle e_i,f_{-j}\rangle|^2\Big)+\sum_{i:d_i<0}\langle EPe_i,e_i\rangle+\sum_{j=1}^{N_1}\lambda_j\sum_{i:d_i<0}|\langle e_i,f_j\rangle|^2\\ &= \delta_0+\sum_{j=1}^{N_0}|\lambda_{-j}|\sum_{d_i>1}|\langle e_i,f_{-j}\rangle|^2+\sum_{j=1}^{N_1}(\lambda_j-1)\sum_{d_i<0}|\langle e_i,f_j\rangle|^2. \qquad \square\end{aligned}$$

引理 4.6. 若 $\delta^U<\infty$，则以下三个级数收敛：

$$\sum_{j=1}^{N_1}(\lambda_j-1)\sum_{d_i\leq 1}|\langle e_i,f_j\rangle|^2,\qquad \sum_{d_i>1}\langle(\mathbf{I}-E)Pe_i,e_i\rangle,\qquad \sum_{j=1}^{N_0}(1+|\lambda_{-j}|)\sum_{d_i>1}|\langle e_i,f_{-j}\rangle|^2.$$

因此 δ_1 有定义。此外，

$$\delta_1+\sum_{j=1}^{N_1}(\lambda_j-1)\sum_{d_i<0}|\langle e_i,f_j\rangle|^2+\sum_{j=1}^{N_0}|\lambda_{-j}|\sum_{d_i>1}|\langle e_i,f_{-j}\rangle|^2\leq\delta^U \tag{4.16}$$

等号成立当且仅当 $\sum_{j:\lambda_j>1}(\lambda_j-1)<\infty$。

证明. 情形 1：假设 $\sum_{\lambda_j>1}(\lambda_j-1)=\infty$。由于 $\delta^U<\infty$，我们有 $\sum_{i\in I_1}(d_i-1)=\infty$，其中 $I_1=\{i\in I:\ d_i>1\}$。因此，I_1 是无限的，并且存在一个双射 $\sigma:\mathbb{N}\to I_1$，使得 $d_{\sigma(1)}\geq d_{\sigma(2)}\geq\ldots>0$。由命题 2.6 和引理 2.11 应用于 $E-\mathbf{I}$ 以及正交归一序列 $(e_{\sigma(i)})_{i\in\mathbb{N}}$，我们推得

$$\begin{aligned}\delta^U &= \liminf_{M\to\infty}\sum_{i=1}^{M}(\lambda_i-d_{\sigma(i)})\\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j-1)\Big(1-\sum_{i\in\mathbb{N}}|\langle e_{\sigma(i)},f_j\rangle|^2\Big)-\sum_{i\in\mathbb{N}}\langle((E-\mathbf{I})\circ\pi((-\infty,1]))e_{\sigma(i)},e_{\sigma(i)}\rangle\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j-1)\Big(\sum_{i:d_i\leq 1}|\langle e_i,f_j\rangle|^2\Big)+\sum_{i:d_i>1}\langle(\mathbf{I}-E)Pe_i,e_i\rangle+\sum_{j=1}^{\infty}(1+|\lambda_{-j}|)\sum_{i:d_i>1}|\langle e_i,f_{-j}\rangle|^2\\ &= \delta_1+\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_{-j}|\sum_{i:d_i>1}|\langle e_i,f_{-j}\rangle|^2+\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j-1)\sum_{i:d_i<0}|\langle e_i,f_j\rangle|^2.\end{aligned}$$

这证明了在 $\sum_{\lambda_j>1}(\lambda_j-1)=\infty$ 的假设下，该断言成立。

情形 2：假设 $\sum_{j:\ \lambda_j>1}(\lambda_j-1)\ <\infty$。这意味着 E –I 的正部属于迹类，因此我们可以将引理 2.12 和命题 2.7 应用于 E –I，从而得到

$$\begin{aligned}\delta^U &= \sum_{j=1}^{N_1}(\lambda_j-1)\Big(1-\sum_{i:d_i>1}|\langle e_i,f_j\rangle|^2\Big)-\sum_{i:d_i>1}\langle((E-\mathbf{I})\circ\pi((-\infty,1]))e_i,e_i\rangle\\ &= \sum_{j=1}^{N_1}(\lambda_j-1)\Big(\sum_{i:d_i\le 1}|\langle e_i,f_j\rangle|^2\Big)+\sum_{i:d_i>1}\langle(\mathbf{I}-E)Pe_i,e_i\rangle+\sum_{j=1}^{N_0}(1+|\lambda_{-j}|)\sum_{i:d_i>1}|\langle e_i,f_{-j}\rangle|^2\\ &= \delta_1+\sum_{j=1}^{N_0}|\lambda_{-j}|\sum_{i:d_i>1}|\langle e_i,f_{-j}\rangle|^2+\sum_{j=1}^{N_1}(\lambda_j-1)\sum_{i:d_i<0}|\langle e_i,f_j\rangle|^2.\end{aligned}$$ □

引理 4.7. 若 $\delta^U<\infty$，则 $\sum_{d_i<1}(1-d_i)\ =\infty$。同样，若 $\delta^L<\infty$，则 $\sum_{d_i>0}d_i=\infty$.

证明。假设 $\delta^U<\infty$。反之，假设 $\sum_{d_i<1}(1-d_i)\ <\infty$. 根据引理 4.6，以下两个级数收敛

$$\sum_{d_i\le 1}(\langle(\mathbf{I}-E)P_1e_i,e_i\rangle=-\sum_{j=1}^{N_1}(\lambda_j-1)\sum_{d_i\le 1}|\langle e_i,f_j\rangle|^2,$$

$$\sum_{d_i>1}\langle(\mathbf{I}-E)(P_0+P)e_i,e_i\rangle=\sum_{d_i>1}\langle(\mathbf{I}-E)Pe_i,e_i\rangle+\sum_{j=1}^{N_0}(1+|\lambda_{-j}|)\sum_{d_i>1}|\langle e_i,f_{-j}\rangle|^2.$$

利用恒等式

$$\sum_{d_i\le 1}(1-d_i)=\sum_{d_i\le 1}\big(\langle(\mathbf{I}-E)P_1e_i,e_i\rangle+\langle(\mathbf{I}-E)(P_0+P)e_i,e_i\rangle\big)$$

我们可推得

$$\sum_{i\in I}\langle(\mathbf{I}-E)(P_0+P)e_i,e_i\rangle<\infty.$$

这意味着算子 $(\mathbf{I}-E)(P_0+P)$ 属于迹类，这与我们的假设 $0\in\sigma_{ess}(E)$ 相矛盾。关于 $\delta^L<\infty$ 的另一结论可用类似论证得出。□

下面的推论表明 (1.9) 的必要性。作为推论，我们也可以通过对称性得到 (1.10) 的必要性。

推论 4.8. 设 $\delta^L+\delta^U\ <\infty$。若 $\sum_{\lambda_j<0}|\lambda_j|\ <\infty$，则 $\delta^L-\delta_0\ \le\delta^U-\delta_1$。若$\sum_{\lambda_j>1}(\lambda_j-1)\ <\infty$，则 $\delta^U-\delta_1\le\delta^L-\delta_0$。

证明。令

$$\Delta=\sum_{j=1}^{N_1}(\lambda_j-1)\sum_{d_i<0}|\langle e_i,f_j\rangle|^2+\sum_{j=1}^{N_0}|\lambda_{-j}|\sum_{d_i>1}|\langle e_i,f_{-j}\rangle|^2.$$

由引理 4.5 和 4.6，若 $\sum_{\lambda_j<0}|\lambda_j|\ <\infty$，则 $\delta^L-\delta_0=\Delta\le\delta^U-\delta_1$。类似地，若$\sum_{\lambda_j>1}(\lambda_j-1)\ <\infty$，则 $\delta^L-\delta_0\le\Delta=\delta^U-\delta_1$。□

引理 4.9. 如果 $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$ 对某个 $\alpha \in (0,1)$ 和 $\delta^L + \delta^U < \infty$，那么

$$\begin{aligned}\sum_{0\le d_i<\alpha} d_i + \delta_0 &= \sum_{d_i<\alpha}\langle EPe_i, e_i\rangle \\ &+ \sum_{j=1}^{N_0}|\lambda_{-j}| \sum_{\alpha\le d_i\le 1}|\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2 + \sum_{j=1}^{N_1}\lambda_j \sum_{0\le d_i<\alpha}|\langle e_i, f_j\rangle|^2 + \sum_{j=1}^{N_1}\sum_{d_i<0}|\langle e_i, f_j\rangle|^2,\end{aligned} \tag{4.17}$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\le d_i\le 1}(1-d_i) + \delta_1 &= \sum_{d_i\ge\alpha}\langle(\mathbf{I}-E)Pe_i, e_i\rangle + \sum_{j=1}^{N_1}(\lambda_j - 1)\sum_{0\le d_i\le\alpha}|\langle e_i, f_j\rangle|^2 \\ &+ \sum_{j=1}^{N_0}(1+|\lambda_{-j}|)\sum_{\alpha\le d_i\le 1}|\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2 + \sum_{j=1}^{N_0}\sum_{d_i>1}|\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2.\end{aligned} \tag{4.18}$$

证明。由 (4.14) 可得

$$\sum_{0\le d_i<\alpha} d_i = \sum_{0\le d_i<\alpha}\left(\sum_{j=1}^{N_0}\lambda_{-j}|\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2 + \langle EPe_i, e_i\rangle + \sum_{j=1}^{N_1}\lambda_j|\langle e_i, f_j\rangle|^2\right).$$

由于 $\sum_{0\le d_i<\alpha} d_i < \infty$，我们可以交换求和顺序

$$\begin{aligned}\sum_{0\le d_i<\alpha}\langle EPe_i, e_i\rangle &= \sum_{0\le d_i<\alpha} d_i + \sum_{j=1}^{N_0}|\lambda_{-j}|\sum_{0\le d_i\le 1}|\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2 \\ &- \sum_{j=1}^{N_0}|\lambda_{-j}|\sum_{\alpha\le d_i\le 1}|\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2 - \sum_{j=1}^{N_1}\lambda_j\sum_{0\le d_i<\alpha}|\langle e_i, f_j\rangle|^2.\end{aligned} \tag{4.19}$$

由 (4.19) 和 δ_0 的定义可得 (4.17)。

再次由 (4.14) 可得

$$\sum_{\alpha\le d_i\le 1}(1-d_i) = \sum_{\alpha\le d_i\le 1}\left(\sum_{j=1}^{N_1}(1-\lambda_j)|\langle e_i, f_j\rangle|^2 + \langle(\mathbf{I}-E)Pe_i, e_i\rangle + \sum_{j=1}^{N_0}(1+|\lambda_{-j}|)|\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2\right).$$

因此，

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\le d_i\le 1}\langle(\mathbf{I}-E)Pe_i, e_i\rangle &= \sum_{\alpha\le d_i\le 1}(1-d_i) + \sum_{j=1}^{N_1}(\lambda_j-1)\sum_{0\le d_i\le 1}|\langle e_i, f_j\rangle|^2 \\ &+ \sum_{j=1}^{N_1}(\lambda_j-1)\sum_{0\le d_i\le\alpha}|\langle e_i, f_j\rangle|^2 - \sum_{j=1}^{N_0}(1+|\lambda_{-j}|)\sum_{\alpha\le d_i\le 1}|\langle e_i, f_{-j}\rangle|^2.\end{aligned} \tag{4.20}$$

结合 (4.20) 和 δ_1 的定义可得 (4.18)。 □

引理 4.10. 若对于某个 $\alpha \in (0,1)$ 和 $\delta^L + \delta^U < \infty$，$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$，则 E 可对角化，并且

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_1 \tag{4.21}$$

对于所有 $\alpha \in (0,1)$ 都成立。此外，若对于某个 $\alpha \in (0,1)$，等式 (4.21) 成立，则 E 在 α 处解耦。

证明。定义 $g_i = Pe_i$, $i \in \mathbb{N}$。那么，$(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是子空间 $\mathcal{K} = P(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$的帕塞瓦尔框架。令 $d_i = \langle EPe_i, e_i\rangle$ 对于 $i \in I$和 $J = \{i \in I : \ d_i < \alpha\}$。由引理 4.9 可得

$$\sum_{i:d_i\in[0,\alpha)} d_i + \delta_0 \geq \sum_{i:d_i<\alpha} \langle EPe_i, e_i\rangle, \tag{4.22}$$

and

$$\sum_{i:d_i\in[\alpha,1]} (1-d_i) + \delta_1 \geq \sum_{i:d_i\geq\alpha} \langle (\mathbf{I}-E)Pe_i, e_i\rangle. \tag{4.23}$$

因此，对于算子 E 到$\mathcal{K}$ 的限制以及帕塞瓦尔框架 $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$，引理 4.2 中的假设 (4.1) 得以满足。于是，我们可得 EP 可对角化。由于算子 E 是 $E = L_0 + EP + L_1$的分块对角和，因此它也可对角化。

令 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j\in J}$ 为 E的特征值列表。由引理 4.2、(4.22) 和 (4.23)，对所有 $\alpha \in (0,1)$，均有

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \leq (1-\alpha)\sum_{i\in J} \widetilde{d}_i + \alpha \sum_{i\in I\setminus J} (||g_i||^2 - \widetilde{d}_i) \leq f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_1. \tag{4.24}$$

假设对于某个 $\alpha \in (0,1)$，(4.21) 中成立等式。这意味着 (4.24) 中的两个不等式都取等号。特别地，(4.22) 和 (4.23) 中也都取等号。由 (4.17) 和 (4.18) 可得

$$\begin{aligned} \langle e_i, f_j\rangle &= 0 \qquad \text{for } i \in I, d_i < \alpha \text{ and } j \geq 1, \\ \langle e_i, f_{-j}\rangle &= 0 \qquad \text{for } i \in I, d_i \geq \alpha \text{ and } j \geq 1. \end{aligned}$$

另一方面，注 4.3 给出

$$g_i = Pe_i \in \begin{cases} \operatorname{ran}\pi([0,\alpha]) & \text{if } d_i < \alpha, \\ \operatorname{ran}\pi([\alpha,1]) & \text{if } d_i \geq \alpha. \end{cases}$$

综合这些观察可得

$$e_i \in \begin{cases} \operatorname{ran}\pi((-\infty,\alpha]) & \text{if } d_i < \alpha, \\ \operatorname{ran}\pi([\alpha,\infty)) & \text{if } d_i \geq \alpha. \end{cases}$$

此外，如果 $d_i = \alpha$，那么 $e_i \in \operatorname{ran}\pi(\{\alpha\})$。因此，空间 $\mathcal{H}_0 = \operatorname{span}\{e_i : \overline{\ d_i\ } < \alpha\}$ 和$\mathcal{H}_1 = \operatorname{span}\{\overline{e_i : \ d_i} \geq \alpha\}$ 在 E 作用下是不变的。□

引理 4.11. 如果对于某个 $\alpha \in (0,1)$ 和 $\delta^L + \delta^U < \infty$, $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$，那么对于所有 $\alpha \in (0,1)$, $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) < \infty$，并且存在 $\alpha \in (0,1)$ 使得

$$f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) - f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \equiv \delta_1 - \delta_0 \mod 1. \tag{4.25}$$

证明. 根据 (4.17) 和 (4.18)，对于几乎处处的 $\alpha \in (0,1)$，我们有

$$
\begin{aligned}
f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + \delta_1 - \delta_0 &= \sum_{\alpha \le d_i \le 1} (1 - d_i) - \sum_{0 \le d_i < \alpha} d_i + \delta_1 - \delta_0 \\
&= \sum_{d_i \ge \alpha} \langle (\mathbf{I} - E) P e_i, e_i \rangle + \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{d_i \ge \alpha} |\langle e_i, f_{-j} \rangle|^2 - \sum_{d_i < \alpha} \langle E P e_i, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{d_i < \alpha} |\langle e_i, f_j \rangle|^2.
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

由 (4.26) 可得

$$
\begin{aligned}
f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + \delta_1 - \delta_0 &= \sum_{d_i \ge \alpha} (\langle (\mathbf{I} - E) P e_i, e_i \rangle + \langle P_0 e_i, e_i \rangle) - \sum_{d_i < \alpha} (\langle E P e_i, e_i \rangle + \langle P_1 e_i, e_i \rangle) \\
&= \sum_{d_i \ge \alpha} \langle (\mathbf{I} - EP - P_1) e_i, e_i \rangle - \sum_{d_i < \alpha} \langle (EP + P_1) e_i, e_i \rangle.
\end{aligned}
$$

令 $\boldsymbol{\lambda}$ 为 $EP + P_1$ 的特征值列表。将引理 4.2 应用于算子 $EP + P_1$ 和标准正交基 $(e_i)_{i \in I}$，可知对角线 $\boldsymbol{d} = (\langle (EP + P_1) e_i, e_i \rangle)_{i \in I}$ 满足

$$
f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + \delta_1 - \delta_0 \equiv f'_{\widehat{\boldsymbol{d}}}(\alpha) \equiv f'_{\widehat{\boldsymbol{\lambda}}}(\alpha) \mod 1 \qquad \text{for a.e. } \alpha \in (0,1). \tag{4.27}
$$

最后，由于算子 E 和 $EP + P_1$ 在开区间 (0, 1) 内具有相同的特征值，因此 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) = f_{\widehat{\boldsymbol{\lambda}}}(\alpha)$ 对于 $\alpha \in (0,1)$ 成立，从而得到 (4.25)。□

引理 4.12. 若对于某个 $\alpha \in (0,1)$ 和 $\delta^L + \delta^U < \infty$，有 $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$，则 $\boldsymbol{d}$ 在 0 和 1 处有聚点。

证明. 注意，假设 (4.10) 和对于某个 $\alpha \in (0,1)$ 有 $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$，意味着 0 和 1 是 $\boldsymbol{d}$ 唯一可能的聚点。由引理 4.7 可知，$\sum_{d_i < 1} (1 - d_i) = \sum_{d_i > 0} d_i = \infty$，因此 0 和 1 都是 $\boldsymbol{d}$ 的聚点。□

引理 4.13. 假设对于某个 $\alpha \in (0,1)$ 和 $\delta^L + \delta^U < \infty$，$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$。若 $\delta_0 = 0$ 和 $\delta_1 = \delta^U$，则 E 在 0 处解耦。若 $\delta_1 = 0$ 和 $\delta_0 = \delta^L$，则 E 在 1 处解耦。

证明. 我们只证明第二个蕴含。另一个可由对称论证得出。假设 $\delta_0 = \delta^L$ 和 $\delta_1 = 0$。由 (4.13) 可推出，如果 $d_i \le 1$ 且 $e_i \in \pi([1, \infty))$，则 $e_i \in \pi((-\infty, 1])$；如果 $d_i \ge 1$。特别地，若 $d_i = 1$，则 $e_i \in \pi(\{1\})$ 是 E 的特征向量。因此，空间 $\mathcal{H}_0 =$ 张成空间$\{e_i : d_i < 1\}$ 和 $\mathcal{H}_1 =$ 张成空间$\{e_i : d_i \ge 1\}$ 在 E 下是不变的。□

现在我们可以给出定理 4.1 的证明了。

定理 4.1 的证明。E 可对角化，结论 (i) 和 (ii) 由引理 4.10 得出。引理 4.12 表明，$\boldsymbol{d}$ 在 0 和 1 处有聚点。结论 (iii) 由引理 4.11 得出，而 (iv) 和 (v) 则由推论 4.8 得出。根据命题 2.10，当 $\delta^L = 0$ 时，算子 E 在 $\alpha = 0$ 处解耦；当 $\delta^U = 0$ 时，则在 $\alpha = 1$ 处解耦。因此，定理中“此外”部分由引理 4.10 和 4.13 得出。□

最后，我们以一些必要条件结束本节：当定理 4.1 中的 $(\mathfrak{d}_\alpha)$ 对某个 $\alpha \in [0,1]$ 成立时，这些必要条件随之而来。E 的解耦给出了以下一系列附加的必要条件。

定理 4.14。在与定理 4.1 相同的假设下，设以下情形之一成立：

$(\mathfrak{d}_0)$ 成立。若 $\sum_{0<d_i<1}(1-d_i) < \infty$，则

$$\sum_{0<\lambda_j<1}(1-\lambda_j) \le \delta_1 + \sum_{0<d_i<1}(1-d_i),$$

并且，若 $\sum_{\lambda_j>0}\lambda_j < \infty$，则我们还有

$$\delta_0 + \sum_{0\le d_i<1}(1-d_i) \le \sum_{0\le\lambda_j<1}(1-\lambda_j),$$

若 $\sum_{0<d_i<1}(1-d_i) = \infty$，则 $\sum_{0\le\lambda_j<1}(1-\lambda_j) = \infty$.

$(\mathfrak{d}_\alpha)$ 对某个 $\alpha \in (0,1)$ 成立。于是存在 $z_1, z_2 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$，使得：

- $\#|\{j:\ \lambda_j=\alpha\}| = z_1 + z_2 + \#|\{i:\ d_i=\alpha\}|$,
- $(d_i)_{d_i<\alpha}$ 是一个紧算子的对角线，该算子的特征值列表为 $(\lambda_j)_{\lambda_j<\alpha}\oplus\alpha 1_{z_1}$，其中 1_{z_1} 是由 z_1 个 1 组成的序列，并且
- $(d_i-1)_{d_i>\alpha}$ 是一个紧算子的对角线，该算子的特征值列表为 $(\lambda_j-1)_{\lambda_j>\alpha}\oplus(\alpha-1)1_{z_2}$。

$(\mathfrak{d}_1)$成立。若$\sum_{0<d_i<1} d_i < \infty$，则

$$\sum_{0<\lambda_j<1}\lambda_j \le \delta_0 + \sum_{0<d_i<1} d_i,$$

并且，若$\sum_{\lambda_j<0}|\lambda_j| < \infty$，则我们还有

$$\delta_0 + \sum_{0<d_i\le 1} d_i \le \sum_{0<\lambda_j\le 1}\lambda_j.$$

If $\sum_{0<d_i<1} d_i = \infty$, *then* $\sum_{0<\lambda_j\le 1}\lambda_j = \infty$.

$(\mathfrak{d}_\alpha)$的证明。这是定理 4.1 的推论，该定理表明算子 E 在 α处分解。更确切地说，设

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : d_i<\alpha\} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{H}_1 = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : d_i>\alpha\},$$

由于 $d_i=\alpha$ 意味着 e_i 是 E 的特征值为 α的特征向量，因此算子 $E|_{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1}$的特征值列表为 $(\lambda_j)_{\lambda_j\neq\alpha}\oplus\alpha 1_z$，其中 $z=\#|\{j:\ \lambda_j=\alpha\}| - \#|\{i:\ d_i=\alpha\}|$。设 $z_k, k=0,1$为算子 $E|_{\mathcal{H}_k}$ 的特征值 α 的重数。显然，$z = z_0 + z_1$。于是，$E|_{\mathcal{H}_0}$是一个特征值列表为$(\lambda_j)_{\lambda_j<\alpha}\oplus\alpha 1_{z_0}$ 的紧自伴算子。同样，$E|_{\mathcal{H}_1}$ 是一个特征值列表为$(\lambda_j)_{\lambda_j>\alpha}\oplus\alpha 1_{z_1}$的自伴算子。因此，其本质谱仅包含点1。由此得到所需的结论。□

（$\mathfrak{d}_1$）的证明。我们需要考虑两种可能的情形。回想一下，空间 $\mathcal{H}_0 = \operatorname{span}\{e_i:\ d_i<1\}$ 和 $\mathcal{H}_1 = \operatorname{span}\{e_i:\ d_i\ge 1\}$ 在 E 下是不变的。如果 $\sum_{0<d_i<1} d_i < \infty$，那么根据定理 2.13，$E|_{\mathcal{H}_0}$ 的正部是迹类，并且

$$\sum_{0<\lambda_j<1}\lambda_j \le \operatorname{tr}((E|_{\mathcal{H}_0})_+) \le \delta^L + \sum_{0<d_i<1} d_i.$$

如果我们假设加 此外，若 $\sum_{\lambda_j<0}|\lambda_j| < \infty$，那么根据定理 2.13，我们有等式

$$\delta^L + \sum_{0<d_i<1} d_i = \operatorname{tr}((E|_{\mathcal{H}_0})_+).$$

Co结合这一事实：当 $d_i = 1$ 时， e_i 是 E 的特征向量，可得 s

$$\delta^L + \sum_{0<d_i\le 1} d_i = \mathrm{tr}((E|_{\mathcal{H}_0})_+) + \#|\{i : d_i = 1\}| \le \sum_{0<\lambda_j\le 1} \lambda_j.$$

另一方面，若 $\sum_{0<d_i<1} d_i = \infty$，则 1 是序列$\{d_i : 0 < d_i < 1\}$的聚点，因此， $E|_{\mathcal{H}_0}$ 的正部不是紧的。因此，

$$\sum_{0<\lambda_j\le 1} \lambda_j \ge \mathrm{tr}((E|_{\mathcal{H}_0})_+) = \infty.$$

通过对称性考量可得结论（$\mathfrak{d}_0$）。 □

此外，对于定理 4.1 中的算子 as，我们还有以下基数估计，它们是解耦的推论：

(i) 若 ($\mathfrak{d}_0$) 成立，则

$$\#|\{j : \lambda_j = 0\}| \ge \#|\{i : d_i = 0\}| \quad \text{and} \quad \#|\{j : \lambda_j \le 0\}| \ge \#|\{i : d_i \le 0\}|.$$

(ii) 若 ($\mathfrak{d}_1$) 成立，则

$$\#|\{j : \lambda_j = 1\}| \ge \#|\{i : d_i = 1\}| \quad \text{and} \quad \#|\{j : \lambda_j \ge 1\}| \ge \#|\{i : d_i \ge 1\}|.$$

(iii) 最后，若 ($\mathfrak{d}_0$) 和 ($\mathfrak{d}_1$) 均成立，则

$$\#|\{i : 0 < d_i < 1\}| \ge \#|\{j : 0 < \lambda_j < 1\}| \quad \text{and} \quad \#|\{j : 0 \le \lambda_j \le 1\}| \ge \#|\{i : 0 \le d_i \le 1\}|.$$

由于这些额外的必要条件并不完备，在以下每个充分性结果中，我们都将假设解耦条件（$\mathfrak{d}_\alpha$）不成立。

5. Equivalence of Riemann and Lebesgue majorization

本节将证明，对于满足布拉施克条件的 $[0,1]$ 中的非递减序列，黎曼内部主序与勒贝格内部主序等价。勒贝格内部主序的概念最初是在 $[0,1]$ 中的 $\boldsymbol{\lambda}$ 只取有限多个值的情形下，于 [15, 定义 4.2] 中引入的。下面的定义将其推广到 $\boldsymbol{\lambda}$ 可能取无限多个值的情形。

定义 5.1. 设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in I}$，且 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in J}$ 是 $[0,1]$ 中的序列。若对所有 $\alpha \in (0,1)$， $\boldsymbol{d}$ 满足被 $\boldsymbol{\lambda}$ 内部主序，即 $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$，并且以下两项均成立，则称 $\boldsymbol{d}$ 被 $\boldsymbol{\lambda}$ 内部主序：

$$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \ge f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \quad \text{for all } \alpha \in (0,1), \tag{5.1}$$

and

$$f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \equiv f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \mod 1 \quad \text{for some } \alpha \in (0,1). \tag{5.2}$$

类似地，黎曼内部主序 [15, 定义 5.2] 也针对 $\boldsymbol{\lambda}$ 仅取有限多个值的情形进行了定义。

定义 5.2. 设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 和 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $[0,1]$ 中的非递减序列，满足$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$ 且 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) < \infty$，对所有 $\alpha \in (0,1)$均成立。若存在某个 $k \in \mathbb{Z}$ 使得以下两条成立，则称 $\boldsymbol{d}$ 被 $\boldsymbol{\lambda}$ 黎曼主化：

$$\delta_m := \sum_{i=-\infty}^{m} (d_{i-k} - \lambda_i) \geq 0 \qquad \text{for all } m \in \mathbb{Z}, \tag{5.3}$$

$$\lim_{m\to\infty} \delta_m = 0. \tag{5.4}$$

定理 5.3. 设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 和 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $[0,1]$ 中的非递减序列，其中 $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$ 且 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) < \infty$ 对所有 $\alpha \in (0,1)$ 均成立。当且仅当 $\boldsymbol{d}$ 被 $\boldsymbol{\lambda}$ 内主序时，序列 $\boldsymbol{d}$ 才被 $\boldsymbol{\lambda}$ 黎曼主化。

证明. 首先，假设 $\boldsymbol{\lambda}$ 是 $(0,1)$ 中的一个序列。设 $(A_j)_{j=-\infty}^{\infty}$ 是 $(0,1)$ 中由序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 的所有不同取值组成的递增序列。此外，令$N_j = \#|\{i \in \mathbb{Z}\colon\ \lambda_i = A_j\}|$。

不失一般性，通过平移 $\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 的指标，我们可以假设 $\lambda_i < A_1 \iff i \leq 0$ 且 $d_i < A_1 \iff i \leq 0$。对每个 $r \in \mathbb{Z}$，令

$$m_r = \max\{i \in \mathbb{Z} : d_i < A_r\} \quad \text{and} \quad \sigma_r = \max\{i \in \mathbb{Z} : \lambda_i < A_r\}.$$

根据这个记号，我们有

$$A_{r-1} \leq d_i < A_r \iff m_{r-1} + 1 \leq i \leq m_r, \tag{5.5}$$

$$\lambda_i = A_{r-1} \iff \sigma_{r-1} + 1 \leq i \leq \sigma_r. \tag{5.6}$$

此外，注意 我们选择的 $\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 的平移意味着 $m_1 = \sigma_1 = 0$。因此，我们有

$$C_{\boldsymbol{d}}(A_r) = \sum_{i=-\infty}^{m_r} d_i, \qquad D_{\boldsymbol{d}}(A_r) = \sum_{i=m_r+1}^{\infty} (1 - d_i). \tag{5.7}$$

由于对所有 $\alpha \in \in (0,1)$， $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$ 且 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) < \infty$，我们可知 $C_{\boldsymbol{d}}(A_1) < \infty$， $D_{\boldsymbol{d}}(A_1) < \infty$， $\sum_{i=-\infty}^{0} \lambda_i < \infty$，且 $\sum_{i=1}^{\infty}(1-\lambda_i) < \infty$。

接下来，我们定义

$$k_0 := \sum_{i=-\infty}^{\infty} (d_i - \lambda_i). \tag{5.8}$$

由此我们有

$$\begin{aligned} C_{\boldsymbol{d}}(A_1) - D_{\boldsymbol{d}}(A_1) &= \sum_{i=-\infty}^{0} d_i - \sum_{i=1}^{\infty}(1-d_i) = \sum_{i=-\infty}^{0} \lambda_i - \sum_{i=1}^{\infty}(1-\lambda_i) + k_0 \\ &= C_{\boldsymbol{\lambda}}(A_1) - D_{\boldsymbol{\lambda}}(A_1) + k_0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

根据命题 3.1，对于所有 $\alpha \in (0,1)$ 中 $f_{\boldsymbol{d}}$ 和 $f_{\boldsymbol{\lambda}}$ 均可微的点，差值 $f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) - f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \equiv k_0$ 模 1。因此，(5.2) 等价于 k_0 为整数。

接下来，注意对于 $r, k \in \mathbb{Z}$，我们有

$$\sum_{i=-\infty}^{r} (d_{i-k} - \lambda_i) = \sum_{i=-\infty}^{r-k} (d_i - \lambda_i) - \sum_{i=r-k+1}^{r} \lambda_i.$$

令 $r \to \infty$，并利用 $\lambda_i \to 1$ 随 $i \to \infty$ 成立这一假设，我们有

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} (d_{i-k} - \lambda_i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (d_i - \lambda_i) - k. \tag{5.10}$$

若假设 (5.2)，则 $k_0 \in \mathbb{Z}_\circ$ 由 (5.10) 可推得，(5.4) 在 $k = k_0$ 下成立。反之，若对于某个 $k \in \mathbb{Z}$，(5.4) 成立，则 (5.10) 蕴含 $k_0 = k \in \mathbb{N}$，从而 (5.2) 成立。这就证明了 (5.2) 与 (5.4) 的等价性。在证明的其余部分，我们将假设 (5.2) 和 (5.4) 均成立。

接下来，我们断言，带有 $\alpha = A_r$ 的不等式 (5.1) 等价于

$$\sum_{i=-\infty}^{m_r} d_i \geq \sum_{j=-\infty}^{\sigma_r} \lambda_i + A_r(k_0 - \sigma_r + m_r). \tag{5.11}$$

由 (3.2)、(5.5) 和 (5.6)，我们可得，对于所有 $r \in \mathbb{Z}$

$$C_{\boldsymbol{\lambda}}(A_r) - D_{\boldsymbol{\lambda}}(A_r) = C_{\boldsymbol{\lambda}}(A_1) - D_{\boldsymbol{\lambda}}(A_1) + \sigma_r. \tag{5.12}$$

and

$$C_{\boldsymbol{d}}(A_r) - D_{\boldsymbol{d}}(A_r) = C_{\boldsymbol{d}}(A_1) - D_{\boldsymbol{d}}(A_1) + m_r. \tag{5.13}$$

利用 (5.9)、(5.12) 和 (5.13)，我们有

$$C_{\boldsymbol{d}}(A_r) - D_{\boldsymbol{d}}(A_r) = C_{\boldsymbol{\lambda}}(A_r) - D_{\boldsymbol{\lambda}}(A_r) + k_0 - \sigma_r + m_r. \tag{5.14}$$

利用恒等 式 (5.14)，我们可以将带有 $\alpha = A_r$ 的 (5.1) 改写为等价的不等式

$$C_{\boldsymbol{d}}(A_r) \geq C_{\boldsymbol{\lambda}}(A_r) + A_r(k_0 - \sigma_r + m_r).$$

这恰好就是 (5.11)，因此如果 (5.1) 成立，那么对所有 $r \in \mathbb{Z}$，(5.11) 都成立。反过来，由命题 3.3 可知，如果对所有 $r \in \mathbb{Z}$，(5.11) 都成立，那么 (5.1) 成立。

为了完成证明，我们将证明：对所有 $r \in \mathbb{Z}$，(5.11) 成立，当且仅当 (5.3) 成立。

假设 (5.11) 成立。我们将证明，对每个 $r \in \mathbb{Z}$，对于 $m = \sigma_r + 1$，...，σ_{r+1}，都有 $\delta_m \geq 0$。需要考虑三种情形：

情形 1。假设 $\sigma_r + 1 \leq m_r + k_0 \leq \sigma_{r+1}$。首先我们将证明 $\delta_{m_r+k_0} \geq 0$。利用 (5.11)，再利用 (5.6)

$$\begin{aligned}\delta_{m_r+k_0} &= \sum_{i=-\infty}^{m_r+k_0} (d_{i-k_0} - \lambda_i) = \sum_{i=-\infty}^{m_r} d_i - \sum_{i=-\infty}^{m_r+k_0} \lambda_i \geq \sum_{i=-\infty}^{\sigma_r} \lambda_i + A_r(k_0 - \sigma_r + m_r) - \sum_{i=-\infty}^{m_r+k_0} \lambda_i \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\sigma_{r+1}} \lambda_i + A_r(k_0 - \sigma_{r+1} + m_r) - \sum_{i=-\infty}^{m_r+k_0} \lambda_i = A_r(k_0 - \sigma_{r+1} + m_r) + \sum_{i=m_r+k_0+1}^{\sigma_{r+1}} A_r = 0.\end{aligned}$$

由 (5.5) 和 (5.6)

$$\begin{aligned} d_{i-k_0} - \lambda_i &\geq A_r - \lambda_i \geq 0 \qquad \text{for } m_r + k_0 \leq i \leq \sigma_{r+1}, \\ d_{i-k_0} - \lambda_i &< A_r - \lambda_i = 0 \qquad \text{for } \sigma_r + 1 \leq i \leq m_r + k_0. \end{aligned}$$

将此与 $\delta_{m_r+k_0} \geq 0$ 结合可得 $\delta_m \geq 0$，对所有 $m = \sigma_r + 1$，....., σ_{r+1} 均成立。

情形 2. 假设 $m_r + k_0 > \sigma_{r+1}$。先使用 (5.11)，再使用 (5.5)

$$\begin{aligned}\delta_{\sigma_{r+1}} &= \sum_{i=-\infty}^{\sigma_{r+1}} (d_{i-k_0} - \lambda_i) = \sum_{i=-\infty}^{\sigma_{r+1}-k_0} d_i - \sum_{i=-\infty}^{\sigma_r} \lambda_i - (\sigma_{r+1} - \sigma_r)A_r \\ &\geq \sum_{i=-\infty}^{\sigma_{r+1}-k_0} d_i + A_r(k_0 - \sigma_{r+1} + m_r) - \sum_{i=-\infty}^{m_r} d_i = -\sum_{i=\sigma_{r+1}-k_0+1}^{m_r} d_i + A_r(k_0 - \sigma_{r+1} + m_r) \\ &> -\sum_{i=\sigma_{r+1}-k_0+1}^{m_r} A_r + A_r(k_0 - \sigma_{r+1} + m_r) = 0.\end{aligned}$$

对于所有满足 $\sigma_r + 1 \leq i \leq \sigma_{r+1}$ 的 i，(5.5) 和 (5.6) 蕴含 $d_{i-k_0} - \lambda_i < A_r - \lambda_i = 0$。将此与 $\delta_{\sigma_r+1} \geq 0$ 结合可得，对于所有 $m = \sigma_r + 1$、……、σ_{r+1}，$\delta_m \geq 0$。

情形 3。假设 $m_r + k_0 \leq \sigma_r$。首先，我们计算

$$\begin{aligned}\delta_{\sigma_r} &= \sum_{i=-\infty}^{\sigma_r} (d_{i-k_0} - \lambda_i) = \sum_{i=-\infty}^{m_r} d_i + \sum_{i=m_r+1}^{\sigma_r-k_0} d_i - \sum_{i=-\infty}^{\sigma_r} \lambda_i \\ &\geq A_r(k_0 - \sigma_r + m_r) + \sum_{i=m_r+1}^{\sigma_r-k_0} d_i \geq A_r(k_0 - \sigma_r + m_r) + \sum_{i=m_r+1}^{\sigma_r-k_0} A_r = 0.\end{aligned}$$

对于满足 $\sigma_r+1 \leq i \leq \sigma_{r+1}$ 的 i，利用 (5.5) 和 (5.6) 可得 $d_{i-k_0}-\lambda_i > A_r-\lambda_i = 0$。由于我们已经证明 $\delta_{\sigma_r} \geq 0$，这表明对于 $m = \sigma_r + 1$、……、σ_{r+1}，$\delta_m \geq 0$。

最后，假设 (5.3) 对某个 $k \in \mathbb{Z}$ 成立。固定 $r \in \mathbb{Z}$ 并假设 $\sigma_r \geq m_r + k$。利用 $\delta_{m_r+k} \geq 0$ 以及 $\lambda_i \leq A_{r-1} < A_r$ 对 $i \leq \sigma_r$ 成立这一事实，我们有

$$\sum_{i=-\infty}^{m_r} d_i = \sum_{i=-\infty}^{m_r+k} d_{i-k} \geq \sum_{i=-\infty}^{m_r+k} \lambda_i = \sum_{i=-\infty}^{\sigma_r} \lambda_i - \sum_{i=m_r+k+1}^{\sigma_r} \lambda_i \geq \sum_{i=-\infty}^{\sigma_r} \lambda_i - (\sigma_r - m_r - k)A_r.$$

接下来假设 $\sigma_r < m_r + k$。利用 $\delta_{m_r+k} \geq 0$ 以及对于 $i \geq \sigma_r + 1$有 $\lambda_i \geq A_r$ 这一事实，我们得到

$$\sum_{i=-\infty}^{m_r} d_i = \sum_{i=-\infty}^{m_r+k} d_{i-k} \geq \sum_{i=-\infty}^{m_r+k} \lambda_i = \sum_{i=-\infty}^{\sigma_r} \lambda_i + \sum_{i=\sigma_r+1}^{m_r+k} \lambda_i \geq \sum_{i=-\infty}^{\sigma_r} \lambda_i + (m_r + k - \sigma_r)A_r.$$

这证明了 (d_i) 对每个 $r \in \mathbb{Z}$ 都满足 (5.11)。

为了完成证明，我们必须考虑 0 和 1 是 $\boldsymbol{\lambda}$ 中的项的情形。如果 0 和 1 都是 $\boldsymbol{\lambda}$ 中的项，那么 $\boldsymbol{\lambda}$ 只取有限多个值，此时结论就是 [15] 中定理 5.2 的一种改述。如果 0 是 $\boldsymbol{\lambda}$ 中的项而 1 不是，那么我们定义序列 (A_j)，但以 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 为索引，并令 $A_0 = 0$，然后将 r 限制在 $\mathbb{N}$ 上，使用与上面相同的证明。最后一种情形是 1 是 $\boldsymbol{\lambda}$ 中的项；0 的情形可由对称的证明得到。□

6. 内部主化的充分性

本节将证明，对于满足布拉施克条件且取值于 (0, 1) 的序列，内主序足以推出从对角线到对角线的结论。为此，我们将证明黎曼内部主序对于非递减序列是充分的。

定理 6.1. 设 $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 和 $(d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $[0,1]$ 中的两个非递减序列，且 $(d_i)_{i=-\infty}^{0}$、$(\lambda_i)_{i=-\infty}^{0}$、$(1-d_i)_{i=1}^{\infty}$ 和 $(1-\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ 均可求和。定义

$$\delta_m = \sum_{i=-\infty}^{m} (d_i - \lambda_i) \quad for\ m \in \mathbb{Z}.$$

假设

$$\delta_m \geq 0 \quad for\ all\ m \in \mathbb{Z} \tag{6.1}$$

and

$$\lim_{m\to\infty} \delta_m = 0. \tag{6.2}$$

如果 (λ_i) 是自伴算子 E 的对角线，那么 (d_i) 也是。

证明。首先，假设存在 $m_0 \in \mathbb{Z}$ 使得 $\delta_{m_0} = 0$。令 $I_1 = J_1 = \mathbb{Z} \cap (-\infty, m_0]$和 $I_2 = J_1 = \mathbb{Z} \cap (m_0, \infty)$。对于 $k = 1$、2，令 E_k 为一个对角线为 $(\lambda_i)_{i\in I_k}$ 的自伴算子。序列 $(\lambda_{m_0+1-i})_{i=1}^{\infty}$ 和 $(d_{m_0+1-i})_{i=1}^{\infty}$ 是非增的，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都有

$$\delta_n^{(1)} := \sum_{i=1}^{n} (\lambda_{m_0+1-i} - d_{m_0+1-i}) = \delta_{m_0+1-n} - \delta_{m_0} = \delta_{m_0+1-n} \geq 0.$$

显然，当 $n \to \infty$ 时，$\delta_n^{(1)} \to 0$。根据命题 2.15，$(d_i)_{i\in I_1}$ 也是 E_1 的一个对角线。类似地，序列 $(\lambda_{m_0+i})_{i=1}^{\infty}$ 和 $(d_{m_0+i})_{i=1}^{\infty}$ 是非减的，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$

$$\delta_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} (d_{m_0+i} - \lambda_{m_0+i}) = \delta_{m_0+n} - \delta_{m_0} = \delta_{m_0+n} \geq 0.$$

再次，显然 $\delta_n^{(2)} \to 0$ 如 $n \to \infty$。由命题 2.15 的对称版本（[19,定理 3.6]）(d_i)，$_{i\in I_2}$ 也是 E_2的一个对角线。由于 E_1 和 E_2 是任意的，根据引理 2.17，若 E 是一个对角线为 $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$的任意自伴算子，则 $(d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 也是E的一个对角线。

现在我们可以假设，对所有 $m \in \mathbb{Z}$，$\delta_m > 0$。设 E 是一个对角线为 $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$的自伴算子。固定满足 $\lambda_{i_0-1} < \lambda_{i_0}$的 $i_0 \in \mathbb{Z}$。由于 $\delta_m \to 0$ 如 $m \to -\infty$，我们可以选取 $k_0 < i_0$，使得对于 $m = k_0+1$、k_0+2、.....、i_0，都有 $\delta_{k_0} \leq \delta_m$。此外，我们可以选取足够小的$k_0$，使得

$$d_{k_0} + \delta_{k_0} < \lambda_{i_0} - \lambda_{i_0-1}. \tag{6.3}$$

~定义序列 $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 为

$$\widetilde{\lambda}_i = \begin{cases} d_i & i \leq k_0, \\ \lambda_i & i \in \{k_0+1, \ldots, i_0-1\} \cup \{i_0+1, i_0+2, \ldots\}, \\ \lambda_{i_0} - \delta_{k_0} & i = i_0. \end{cases}$$

设 $I_1 = J_1 = \{i_0, k_0, k_0-1, k_0-2, \ldots\}$，且 $I_2 = J_2 = \mathbb{Z} \setminus I_1$。对于 $k = 1$，2 令 E_k 为一个对角线为 $(\lambda_i)_{i\in I_k}$ 的自伴算子。显然，$(\lambda_i)_{i\in I_2} = (\lambda_i)_{i\in I_2}$ 是 E_2 的一个对角线。定义序列

$$\boldsymbol{\mu} = (\lambda_{i_0}, \lambda_{k_0}, \lambda_{k_0-1}, \ldots) \quad \text{and} \quad \widetilde{\boldsymbol{\mu}} = (\lambda_{i_0} - \delta_{k_0}, d_{k_0}, d_{k_0-1}, \ldots).$$

根据 $d_{k_0}+\delta_{k_0}<\lambda_{i_0}$ 这一假设，我们可知 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{\mu}}$ 均为非递增的。此外，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们有

$$\delta_n^{\mu}:=\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\widetilde{\mu}_i)=\delta_{k_0+1-n}\geq 0,$$

并且显然，$\delta_n\to 0$，因为 $n\to\infty$。注意，$\boldsymbol{\mu}$ 是 E_1的对角线。由命题 2.15，$\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\mu}}}$ 也是 E_1的对角线。由于 E_1 和 E_2 是任意的，由引理 2.17（λ_i），$_{i\in\mathbb{Z}}$ 也是 E的对角线。

在最后一次应用引理 2.17 时，我们定义集合 $I_1=J_1=\{k_0+1,k_0+2,\ldots\}$和 $I_2=J_2=\mathbb{Z}\setminus I_1$。对于 $k=1$，2 令 E_k为一个对角线为（λ_i）$_{i\in I_k}$的自伴算子。显然，（d_i）$_{i\in I_2}$ 是 E_2的对角线。定义序列

$$\boldsymbol{\eta}=(\lambda_{k_0+1},\lambda_{k_0+2},\ldots,\lambda_{i_0-1},\lambda_{i_0}-\delta_{k_0},\lambda_{i_0+1},\ldots)\quad\text{and}\quad\widetilde{\boldsymbol{\eta}}=(d_{k_0+1},d_{k_0+2},\ldots).$$

由（6.3）可知，$\boldsymbol{\eta}$ 是非递减的。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，有

$$\delta_n^{\eta}:=\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{\eta}_i-\eta_i)=\begin{cases}\delta_{k_0+n}-\delta_{k_0} & n=1,\ldots,i_0-1,\\ \delta_{k_0+n} & n\geq i_0.\end{cases}$$

根据我们对 k_0 的选择可知，对所有 $n\in\mathbb{N}$，$\delta_n^{\eta}\geq 0$。此外，当 $n\to\infty$时，$\delta_n^{\eta}\to 0$。由命题 2.15 的对称版本可得，$\widetilde{\boldsymbol{\eta}}$ 是 E_1的对角线，因此（d_i）$_{i\in I_1}$ 是 E_1的对角线。由于 E_1 和 E_2 是任意的，由引理 2.17（d_i），$_{i\in\mathbb{Z}}$ 也是 E的对角线。□

定理 6.2。设 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\boldsymbol{d}=(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 (0, 1) 中的两个序列，它们在 0 和 1 处都有聚点。假设

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)\leq f_{\boldsymbol{d}}(\alpha)<\infty\qquad \textit{for all } \alpha\in(0,1),$$

and

$$f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)\equiv f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha)\mod 1\qquad \textit{for some } \alpha\in(0,1).$$

如果 $\boldsymbol{\lambda}$ 是自伴算子 E 的对角线，那么 $\boldsymbol{d}$ 也是。

证明。$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha)$ 和 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)$ 有限这一假设意味着，我们可以按非递减顺序对 $\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 重新编号。定理 5.3 表明，$\boldsymbol{d}$ 被 $\boldsymbol{\lambda}$ 黎曼主化。最后，定理 6.1 表明，如果 $\boldsymbol{d}$ 是某个自伴算子的对角线，那么 $\boldsymbol{\lambda}$ 也是对角线。□

定理 6　　.3. 设 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_i)_{i\in I}$ 和 $\boldsymbol{d}=(d_i)_{i\in J}$ 是 (0, 1) 中的两个序列。假设

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)\leq f_{\boldsymbol{d}}(\alpha)<\infty\qquad \textit{for all } \alpha\in(0,1),$$

and

$$f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)\equiv f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha)\mod 1\qquad \textit{for some } \alpha\in(0,1).\tag{6.4}$$

存在一个序列 $\boldsymbol{\lambda}$，它是在 $\boldsymbol{\lambda}$ 后附加若干个零和一得到的，使得若 $\boldsymbol{\lambda}$ 是自伴算子 E 的对角线，那么 $\boldsymbol{d}$也是。

证明。首先我们将证明 $\#|I| \le \#|J|$。假设 $\#|J| < \infty$。取 $\alpha_0 \in (0,1)$，使得$\alpha_0 < d_i$对所有 $i \in J$均成立。在 $(0,\alpha_0)$ 上，函数 $f_{\boldsymbol{d}}$是线性的，斜率为 $D_{\boldsymbol{d}}(\alpha_0) = \sum_{i\in J}(1-d_i)$。对于 $\alpha \in (0,\alpha_0)$，我们有

$$\sum_{i\in J}(1-d_i) = \frac{f_{\boldsymbol{d}}(\alpha)}{\alpha} \ge \frac{f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)}{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha}C_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) + D_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \ge D_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) = \sum_{\lambda_i \ge \alpha}(1-\lambda_i).$$

令 $\alpha \to 0$，我们有

$$\sum_{i\in J}(1-d_i) \ge \sum_{i\in I}(1-\lambda_i).$$

对称论证可得

$$\sum_{i\in J} d_i \ge \sum_{i\in I}\lambda_i. \tag{6.5}$$

由此可推得 $\#|I| < \infty$，将这些不等式相加可得 $\#|J| \ge \#|I|$。

情形 1。假设 0 和 1 都是 $\boldsymbol{d}$ 的聚点。则在 $\boldsymbol{\lambda}$ 后附加无穷多个零；如果 1 不是 $\boldsymbol{\lambda}$ 的聚点，则在 $\boldsymbol{\lambda}$ 后附加无穷多个一，从而得到 $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}$。因此，可按非递减顺序对序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 重新编号，使得 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$。类似地，由于 0 和 1 都是 $\boldsymbol{d}$ 的聚点，并且对于 $\alpha \in (0,1)$，$C_{\boldsymbol{d}}(\alpha)$ $D_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$，我们可以按非递减顺序对 $\boldsymbol{d}$ 重新编号，使得 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$。由定理 5.3 可知，$\boldsymbol{d}$ 被 $\boldsymbol{\lambda}$ 黎曼主化，而定理 6.1 给出了所需结论。

情形 2。假设 1 不是 $\boldsymbol{d}$ 的聚点。由 (6.5) 可推得，1 也不是 $\boldsymbol{\lambda}$ 的聚点。

选取 $\alpha_0 \in$，使得对于所有 $i \in J$，都有 $\alpha_0 > d_i$，并且对于所有 $i \in I$，都有 $\alpha_0 > \lambda_i$。根据命题 3.1，我们有

$$f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha_0) = -C_{\boldsymbol{d}}(\alpha_0) = -\sum_{i\in J} d_i \quad \text{and} \quad f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha_0) = -C_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha_0) = -\sum_{i\in J}\lambda_i.$$

由 (6.4) 和 (6.5) 可知，存在某个 $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$，使得

$$\sum_{i\in J} d_i = k + \sum_{i\in I}\lambda_i. \tag{6.6}$$

将引理 3.5 应用于序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$，由 (6.6) 可推得 $\kappa = -k$ 和 $\beta = k$（注意，由于这些序列都属于 $(0,1)$，因此有 $\delta^U = \delta^L = \delta_0 = \delta_1 = 0$）。因此，

$$\liminf_{\alpha\searrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) = -k \quad \text{and} \quad \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) \ge -k(1-\alpha) \quad \text{for all } \alpha \ne 0.$$

定义 $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}$：在 $\boldsymbol{\lambda}$ 后附加 k 个一，并附加和 $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{\infty\}$ 个零，其中 m 将在稍后选定。现在注意，对于 $\alpha < 1$，我们有

$$\delta(\alpha, \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{d}) = \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) + k(1-\alpha).$$

因此

$$\liminf_{\alpha\searrow 0} \delta(\alpha, \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{d}) = 0 \quad \text{and} \quad \delta(\alpha, \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{d}) \ge 0 \quad \text{for all } \alpha \ne 0.$$

命题 2.6（若 $\boldsymbol{d}$ 是有限数列，则使用其有限情形）意味着

$$\sum_{i=1}^{k} d_i^{\downarrow} \le \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\lambda}_i^{\downarrow} \quad \text{for all } k.$$

并且由 (6.6) 可知，这些序列的和（有限）相同。综合起来可知，$\boldsymbol{d}$ 中正项的个数至少与 $\boldsymbol{\lambda}$ 中正项的个数相同。选择 m，使这些序列的项数相同。最后，应用命题 2.15（若 $\boldsymbol{d}$ 是有限数列，则应用 Schur-Horn 定理），可知如果 $\boldsymbol{\lambda}$ 是某个自伴算子 E 的对角线，那么 $\boldsymbol{d}$ 也一样。

情形 3。假设 0 不是 $\boldsymbol{d}$ 的聚点。对序列 $\widetilde{(1-\lambda_i)}$ 和 $(1-d_i)$ 应用情形 2，得到一个序列 $(1-\lambda_i)$，它是通过向 $(1-\lambda_i)$ 追加零和 $\widetilde{\quad\quad}$ 个一得到的。令 $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_i)$，注意到该序列是通过向 $\boldsymbol{\lambda}$ 追加零 $\widetilde{\quad}$ 和一得到的。若 E 是一个对角线为 $\boldsymbol{\lambda}$ 的自伴算子，则 $\mathrm{I} - E$ 的对角线为 $\widetilde{(1-\lambda_i)}$。因此，$(1-d_i)$ 也是 $\mathrm{I} - E$ 的对角线，从而 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。

□

7. Blaschke condition diagonal-to-diagonal result

在本节中，我们证明具有仅为 0 和 1 的聚点、且满足布拉施克条件的序列的对角线到对角线结果。我们首先在对序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 施加严格限制的条件下证明一个预备结果。

引理 7.1. 设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是两个序列，它们只有 0 和 1 作为聚点，并且满足 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(1/2) < \infty$, $f_{\boldsymbol{d}}(1/2) < \infty$。假设序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 有无穷多个项 $0 < \lambda_i < 1/2$，且有无穷多个项 $1/2 < \lambda_i < 1$。定义

$$\delta^L = \liminf_{\beta\nearrow 0}(f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}}(\beta)) \quad \textit{and} \quad \delta^U = \liminf_{\beta\searrow 1}(f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}}(\beta)).$$

假设 $\delta^L + \delta^U < \infty$,

$$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \qquad \textit{for all } \alpha \in \mathbb{R}\setminus[0,1],$$

且存在 $\delta_0 \in [0, \delta^L]$ 和 $\delta_1 \in [0, \delta^U]$ 使得

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_1 \qquad \textit{for all } \alpha \in (0,1),$$
$$f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) - f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \equiv \delta_1 - \delta_0 \mod 1 \qquad \textit{for some } \alpha \in (0,1).$$

此外，假设以下条件之一成立:

(i) $\lambda_i, d_i > 0$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 均成立，且 $\delta^U = \delta_1 > 0$;
(ii) $\lambda_i, d_i < 1$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 均成立，且 $\delta^L = \delta_0 > 0$;
(iii) $\delta^L > 0$, $\delta^U > 0$，且 $\delta^L - \delta_0 = \delta^U - \delta_1$。

如果 $\boldsymbol{\lambda}$ 是自伴算子 E 的对角线，那么 $\boldsymbol{d}$ 也是。

证明。我们给出一个平行的证明，它同时适用于互斥假设 (i)–(iii) 中的每一个。不过，(iii) 的证明最有趣，因为前两种情形只是对这一论证作了简化修改。

暂且假设 $\delta^L > 0$。令 $0 < \alpha_0 < 1/2$ 足够小，使得 t

$$\sum_{\lambda_i<\alpha_0} \lambda_i < \frac{\delta^L}{2} \quad \text{and} \quad \mathbb{N} \cap \left[\frac{1}{1-\alpha_0} \sum_{\lambda_i \geq \alpha_0} (1-\lambda_i), \frac{\delta^L}{2\alpha_0} \right] \neq \varnothing.$$

第一个不等式显然对所有 $\alpha_0 > 0$ 充分小的情况成立。对于第二个条件，我们注意到给定区间两个端点的比值为

$$\frac{\delta^L(1-\alpha_0)}{2\alpha_0 \sum_{\lambda_i \geq \alpha_0}(1-\lambda_i)}.$$

根据命题 3.1，上述比值在 $\alpha_0 \searrow 0$时趋于 ∞ 。由于区间的左端点在 $\alpha \searrow 0$ 时也趋于 ∞ ，我们看到第二个条件对所有充分小的 α_0同样成立。因此，令 α_0 充分小，并令 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{1}{1-\alpha_0} \sum_{\lambda_i \geq \alpha_0} (1-\lambda_i) \leq N \leq \frac{\delta^L}{2\alpha_0}.$$

~令$(d_i)_{i\in I_0}$ 为$(0, \alpha_0]$ 中的一个无限正数列，其中包含 $\boldsymbol{\lambda}$ 在$(0, \alpha_0)$中的所有项、 α_0的 N个副本，以及一个由有限个附加项组成的有限数列，使得

$$\sum_{i\in I_0} \widetilde{d}_i = \delta^L.$$

当 $\delta^L = 0$时，上述构造不起作用，此时令 $\alpha_0 = 0$ 和 $I_0 = \varnothing$。

同样，暂时假设 $\delta^U > 0$。通过对称论证，我们可以找到充分接近于 1 的$\alpha_1 \in (1/2,1)$以及 $M \in \mathbb{N}$，使得

$$\sum_{\lambda_i \geq \alpha_1} (1-\lambda_i) < \frac{1}{2}\delta^U \quad \text{and} \quad \frac{1}{\alpha_1} \sum_{\lambda_i<\alpha_1} \lambda_i \leq M \leq \frac{\delta^U}{2(1-\alpha_1)}.$$

~设 $(d_i)_{i\in I_1}$ 是 $[\alpha_1, 1)$ 中的一个无限正数列，包含 $[\alpha_1, 1)$ 中 $\boldsymbol{\lambda}$ 的所有项、 α_1的 M个副本，以及一个由额外项构成的有限数列，使得

$$\sum_{i\in I_1} (1-\widetilde{d}_i) = \delta^U.$$

当 $\delta^U = 0$时，我们令 $\alpha_1 = 0$ 和 $I_1 = \varnothing$。

Let $\widetilde{\boldsymbol{d}} = (d_i)_{0<d_i<1} \oplus (\widetilde{d}_i)_{i\in I_0} \oplus (\widetilde{d}_i)_{i\in I_1}$。每个假设 (i) – (iii) 都意味着 $I_0 \cup I_1$~是无限的，因此 $\boldsymbol{d}$ 是一个无限数列。对于 $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$，我们有

$$f_{\widetilde{\boldsymbol{d}}}(\alpha) = f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1-\alpha)\delta^L + \alpha\delta^U \geq f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_1 \geq f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha).$$

如果 $\alpha_0 > 0$，那么对于 $\alpha \in (0, \alpha_0]$，我们有

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) &= (1-\alpha) \sum_{\lambda_i<\alpha} \lambda_i + \alpha \sum_{\alpha\leq\lambda_i<\alpha_0} (1-\lambda_i) + \alpha \sum_{\lambda_i\geq\alpha_0} (1-\lambda_i) \\ &\leq (1-\alpha) \sum_{\widetilde{d}_i<\alpha} \widetilde{d}_i + \alpha \sum_{\alpha\leq\widetilde{d}_i<\alpha_0} (1-\widetilde{d}_i) + \alpha(1-\alpha_0)N \\ &\leq (1-\alpha) \sum_{\widetilde{d}_i<\alpha} \widetilde{d}_i + \alpha \sum_{\alpha\leq\widetilde{d}_i<\alpha_0} (1-\widetilde{d}_i) + \alpha \sum_{\widetilde{d}_i\geq\alpha_0} (1-\widetilde{d}_i) = f_{\widetilde{\boldsymbol{d}}}(\alpha) \end{aligned}$$

通过对称论证，对于所有 $\alpha \in [\alpha_1, 1)$，若 $\alpha_1 < 1$，我们也有 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \le f_{\widetilde{\boldsymbol{d}}}(\alpha)$。结合这些估计可得

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \le f_{\widetilde{\boldsymbol{d}}}(\alpha) \qquad \text{for all } \alpha \in (0,1).$$

此外，我们计算了

$$f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) - f'_{\widetilde{\boldsymbol{d}}}(\alpha) \equiv f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) - f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + \delta^L - \delta^U \equiv \delta_1 - \delta_0 + \delta^L - \delta^U = 0 \mod 1 \qquad \text{for a.e. } \alpha \in (0,1).$$

根据定理 6.2，如果一个自伴算子的对角线为 $(\lambda_j)_{0<\lambda_j<1}$，那么 $\boldsymbol{d}$ 也是它的对角线。因此，$\boldsymbol{\eta} = (\lambda_j)_{\lambda_j \le 0} \oplus \boldsymbol{d} \oplus (\lambda_j)_{\lambda_j \ge 1}$ 是 E 的一个对角线。

我们声称，如果一个自伴算子的对角线为 $\boldsymbol{\mu} = (\lambda_j)_{\lambda_j \le 0} \oplus (d_i)_{0<d_i<1/2} \oplus (d_i)_{i \in I_0}$，那么 $(d_i)_{d_i<1/2}$ 也是它的对角线。事实上，

$$\delta(\alpha, \boldsymbol{\mu}, (d_i)_{d_i<1/2}) = \begin{cases} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) & \alpha < 0, \\ \sum_{i \in I_0, \widetilde{d}_i > \alpha} (\widetilde{d}_i - \alpha) & \alpha > 0. \end{cases}$$

由引理 2.5 得出

$$\liminf_{\alpha \nearrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\mu}, (d_i)_{d_i<1/2}) = \delta^L = \sum_{i \in I_0} \widetilde{d}_i = \liminf_{\alpha \searrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\mu}, (d_i)_{d_i<1/2}).$$

因此，定理 2.19 适用，并在 $\delta^L > 0$ 时得出该结论。若 $\delta^L = 0$，则由 (i) 可知该结论显然成立，因为 $\boldsymbol{\mu} = (d_i)_{d_i<1/2}$。

通过使用定理 2.19 或假设 (ii) 的类似论证，如果一个自伴算子的对角线为 $\boldsymbol{\nu} = (d_i)_{1/2 \le d_i < 1} \oplus (d_i)_{i \in I_1} \oplus (\lambda_j)_{\lambda_j \ge 1}$，那么 $(d_i)_{d_i \ge 1/2}$ 也是它的对角线。由于 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu} \oplus \boldsymbol{\nu}$ 是 E 的一个对角线，根据引理 2.17，$\boldsymbol{d}$ 也是如此。□

我们使用引理 7.1，在序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 满足更一般条件的情况下证明以下对角线到对角线结果；这些条件与定理 4.1 中的必要条件几乎相同。

定理 7.2。设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ 和 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ 是两个序列，它们仅在 0 和 1 处有聚点，并且满足 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(1/2) < \infty$ 和 $f_{\boldsymbol{d}}(1/2) < \infty$。定义

$$\delta^L = \liminf_{\beta \nearrow 0} (f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}}(\beta)) \quad \textit{and} \quad \delta^U = \liminf_{\beta \searrow 1} (f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}}(\beta)).$$

假设 $\delta^L + \delta^U < \infty$,

$$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \qquad \textit{for all } \alpha \in \mathbb{R} \setminus [0,1], \tag{7.1}$$

并且存在 $\delta_0 \in [0, \delta^L]$ 和 $\delta_1 \in [0, \delta^U]$ 使得

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_1 \qquad \text{对所有 } \alpha \in (0,1), \tag{7.2}$$

$$f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) - f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \equiv \delta_1 - \delta_0 \mod 1 \qquad \text{对某个 } \alpha \in (0,1), \tag{7.3}$$

$$\sum_{\lambda_i < 0} |\lambda_i| < \infty \implies \delta^L - \delta_0 \le \delta^U - \delta_1, \tag{7.4}$$

$$\sum_{\lambda_i > 1} (\lambda_i - 1) < \infty \implies \delta^U - \delta_1 \le \delta^L - \delta_0. \tag{7.5}$$

此外，在 $\delta_0 = \delta^L$ 或 $\delta_1 = \delta^U$ 的情况下，假设婷婷五月

$$\delta_0, \delta_1 > 0 \qquad \textit{and} \qquad f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) < f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_1 \textit{ for all } \alpha \in (0,1). \tag{7.6}$$

如果 $\boldsymbol{\lambda}$ 是自伴算子 E的对角线，那么 $\boldsymbol{d}$也是。

注 7.3. 假设 E 是一个满足定理 4.1 假设的算子。那么，如果定理 7.2 的最后一个假设 (7.6) 不成立，我们必然会遇到以下三种情形之一：

- $(\mathfrak{d}_0)$成立，

对于某个 $\alpha \in (0,1)$，- $(\mathfrak{d}_\alpha)$成立，或者

- $(\mathfrak{d}_1)$成立。

由定理 4.1 可知，算子 E 在 $\alpha \in [0,1]$处解耦。因此，特征值列表 $\boldsymbol{\lambda}$ 和对角线 $\boldsymbol{d}$还必须满足一些必要条件，见定理 4.14；要得到对角线到对角线结果，我们需要施加这些条件。

证明. 不失一般性，我们可以假设 $\delta_0 < \delta^L$ 和 $\delta_1 < \delta^U$，必要时通过将 δ_0和 δ_1 同时减去相同的量来实现这一点。事实上，如果 $\delta_0 = \delta^L$ 或 $\delta_1 = \delta^U$，那么根据 (7.6) 和命题 3.1，存在一个常数 $0 < c \le \min(\delta_0, \delta_1)$，使得

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) + c \le f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_1 \qquad \text{for all } \alpha \in (0,1).$$

因此，分别用 $\delta_0 - c$ 和 $\delta_1 - c$ 替换 δ_0 和 δ_1，不会影响假设 (7.2)–(7.5)。

步骤 1。我们将问题化简为存在无穷多个 $\lambda_j \in (0, 1/2)$ 和无穷多个 $\lambda_j \in (1/2, 1)$ 的情形。如果只有有限多个 $\lambda_j \in (0, 1/2)$，那么就有无穷多个 $\lambda_j \le 0$，因为假设 0 是 $\boldsymbol{\lambda}$ 的聚点。

取 $0 < \epsilon < \min(\delta^L - \delta_0, \delta^U - \delta_1)$。将 δ_0 和 δ_1 增加 ϵ 后，我们可以假设δ_0、$\delta_1 \ge \epsilon$ 并且

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) + \epsilon \le f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_1 \qquad \text{for all } \alpha \in (0,1). \tag{7.7}$$

选择 $\alpha_0 < 0$ 使得

$$\delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) \ge \epsilon \qquad \text{for } \alpha_0 < \alpha < 0. \tag{7.8}$$

同样，选择 $\alpha_1 > 1$ 使得

$$\delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) \ge \epsilon \qquad \text{for all } 1 < \alpha < \alpha_1. \tag{7.9}$$

如果有无穷多个 $\lambda_j > 1$，那么我们选择 j_0，使得 $1 < \lambda_{j_0} < \alpha_1$。否则，我们为 λ_{j_0} 选择最小的 $\lambda_j > 1$。我们还选择一个无穷子集 J_0，使得对于所有 $j \in J_0$ 和 $\sum_{j\in J_0} |\lambda_j| < \min(\epsilon/2, \lambda_{j_0} - 1)$，都有 $\alpha_0 \le \lambda_j \le 0$。

~任取满足 $\sum_{j\in J_0} |\lambda_j| < \eta < \min(\epsilon/2, \lambda_{j_0} - 1)$ 的 η，并令 $\lambda_{j_0} = \lambda_{j_0} - \eta$。选取一个~正数列 $(\lambda_j)_{j\in J_0}$，使得

$$\sum_{j\in J_0} \widetilde{\lambda}_j = \eta - \sum_{j\in J_0} |\lambda_j| = \lambda_{j_0} - \widetilde{\lambda}_{j_0} + \sum_{j\in J_0} \lambda_j.$$

~根据定理 2.19，若 $(\lambda_j)_{j\in J_0\cup\{j_0\}}$ 是某个自伴算子的对角线，则 $(\lambda_j)_{j\in J_0\cup\{j_0\}}$也是。~ ~定义 $\lambda_j = \lambda_j$，其中 $j \notin J_0 \cup \{j_0\}$。于是，序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 满足定理 7.2 的假设 (7.1)–(7.5)，其中

$$\widetilde{\delta}^L = \delta^L - \sum_{j\in J_0} |\lambda_j|, \quad \widetilde{\delta}_0 = \delta_0 - \sum_{j\in J_0} |\lambda_j|, \quad \widetilde{\delta}^U = \delta^U - \eta, \quad \widetilde{\delta}^1 = \delta^1 - \eta. \tag{7.10}$$

~事实上，(7.8) 和 (7.9) 表明，对于分别属于值域 $\alpha<0$ 和 $\alpha>1$的 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$，(7.1) 成立。同样，(7.7) 和 (7.10) 表明 (7.2) 成立。事实上，对于任意 $\alpha\in(0,1)$，由命题 3.4 可得

$$f_{\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}}(\alpha)\le f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)+(1-\alpha)\sum_{j\in J_0}\widetilde{\lambda}_j\le f_{\boldsymbol{d}}(\alpha)+(1-\alpha)\delta_0+\alpha\delta_1+\eta-\epsilon$$
$$\le f_{\boldsymbol{d}}(\alpha)+(1-\alpha)\delta_0+\alpha\delta_1-\eta\le f_{\boldsymbol{d}}(\alpha)+(1-\alpha)\widetilde{\delta}_0+\alpha\widetilde{\delta}_1.$$

或许最不明显的是 (7.3)

$$f'_{\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}}(\alpha)-f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha)=f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)-\sum_{j\in J_0}\widetilde{\lambda}_j-f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha)\equiv\delta_1-\delta_0+\sum_{j\in J_0}|\lambda_j|-\eta=\widetilde{\delta}_1-\widetilde{\delta}_0\mod 1.$$

最后，(7.4) 和 (7.5) 由 $\boldsymbol{\lambda}$ 的定义和 (7.10) 立即得出。

~这一过程将对角序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 修改为另一个对角序列 $\boldsymbol{\lambda}$，使得

~$\lambda_j\in(0,1/2)$ 对无穷多个 j 成立，并且满足关于 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 的定理 7.2 的假设。因此，不失一般性，我们可以假设有无穷多个 $\lambda_j\in(0,1/2)$。通过类似的步骤，我们可以假设有无穷多个 $\lambda_j\in(1/2,1)$。

步骤 2。接下来，我们将问题化归到 $\delta^L-\delta_0=\delta^U-\delta_1$ 的情形。假设 $\delta^L-\delta_0>\delta^U-\delta_1$。由 (7.4) 可知，这意味着 $\sum_{j\in J_0}|\lambda_j|=\infty$，其中 $J_0=\{j:\ \lambda_j<0\}$。由于 $\delta^L<\infty$，我们还~有 $\sum_{i\in I_0}|d_i|=\infty$，其中 $I_0=\{i:\ d_i<0\}$。定义 $\delta^L:=\delta_0+\delta^U-\delta_1$。由于 $\delta^L<\delta^L$，存在 $\alpha_0<0$ 使得

$$\delta(\alpha,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{d})\ge\widetilde{\delta}^L\qquad\text{for all }\alpha\in(\alpha_0,0).\tag{7.11}$$

令 $\boldsymbol{\nu}$ 为序列 $(d_i)_{i\in I_0}$，再附加一个有限数列；该数列的各项属于 $(\alpha_0,0)$~，且其和为 $-\delta^L$。定义序列 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}\setminus J_0}\oplus\boldsymbol{\nu}$。

由 (7.11) 可得

$$\delta(\alpha,\boldsymbol{\lambda},\widetilde{\boldsymbol{\lambda}})=\delta(\alpha,(\lambda_j)_{j\in J_0},\boldsymbol{\nu})\ge0\qquad\text{for all }\alpha<0.$$

由命题 2.16，若 $(\lambda_j)_{j\in J_0}$ 是某个自伴算子的对角线，则 $\boldsymbol{\nu}$ 也为对角线。因此，由引理 2.17 可推得，$\boldsymbol{\lambda}$ 是 E 的对角线。

另一方面，

$$\delta(\alpha,\widetilde{\boldsymbol{\lambda}},\boldsymbol{d})=\delta(\alpha,\boldsymbol{\nu},(d_i)_{i\in I_0})\ge0\qquad\text{for all }\alpha<0.$$

由引理 2.5 可得

$$\liminf_{\alpha\nearrow0}\delta(\alpha,\widetilde{\boldsymbol{\lambda}},\boldsymbol{d})=\widetilde{\delta}^L.$$

~因此，序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 满足假设 (7.1)-(7.3)，但 δ^L 被~替换为 $\delta^L=\delta_0+\delta^U-\delta_1$。类似地，我们利用 (7.5) 处理 $\delta^L-\delta_0>\delta^U-\delta_1$ 的情形。

步骤 3。经过前两步约化，我们可以假设：

- 序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 有无穷多项 $0<\lambda_i<1/2$ 和无穷多项$1/2<\lambda_i<1$,
- δ^L、$\delta^U>0$，以及
- $\delta^L-\delta_0=\delta^U-\delta_1>0$。

因此，引理 7.1 的假设（iii）得以满足，证明至此完成。 □

当恰好缺少一个外部部分时，我们也可以利用引理 7.1 得出以下对角线到对角线的结果。

定理 7.4. 设 $\boldsymbol{\lambda} =(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是两个序列，它们满足与定理 7.2 中相同的假设 (7.1)–(7.5)。此外，假设以下条件之一成立：

(i) 对所有 $i \in \mathbb{N}$, $\lambda_i, d_i > 0$, 且 $\delta_1 > 0$,

(ii) 对所有 $i \in \mathbb{N}$, $\lambda_i, d_i < 1$, 且 $\delta_0 > 0$,

如果 $\boldsymbol{\lambda}$ 是自伴算子 E的对角线，那么 $\boldsymbol{d}$也是。

证明. 假设 (ii) 成立。如果 $\delta^L = \delta_0$，则由引理 7.1 可得结论。因此，我们可以假设 $\delta^L > \delta_0$, 并按照定理 7.2 中步骤 2 的证明进行。由 (7.4)，有 $\sum_{j\in J_0} |\lambda_j| = \infty$，其中 $J_0 = \{j : \lambda_j < 0\}$。由于 $\delta_L < \infty$，我们也有$\sum_{i\in I_0} |d_i| = \infty$，其中 $I_0 = \{i : d_i < 0\}$。存在 $\alpha_0 < 0$ 使得

$$\delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) \geq \delta_0 \quad \text{for all } \alpha \in (\alpha_0, 0). \tag{7.12}$$

令 $\boldsymbol{\nu}$ 为序列 $(d_i)_{i\in I_0}$ 后接一个有限数列，其中各项属于$\widetilde{}(\alpha_0, 0)$，且各项之和为 $-\delta_0$。定义序列 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}\setminus J_0} \oplus \boldsymbol{\nu}$。

由 (7.12) 可得

$$\delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}) = \delta(\alpha, (\lambda_j)_{j\in J_0}, \boldsymbol{\nu}) \geq 0 \qquad \text{for all } \alpha < 0.$$

根据命题 2.16，若 $(\lambda_j)_{j\in J_0}$ 是某个自伴算子的对角线，则 $\boldsymbol{\nu}$ 也是一条$\widetilde{}$对角线。因此，由引理 2.17 可推得， $\boldsymbol{\lambda}$ 是 E 的对角线。

另一方面，

$$\delta(\alpha, \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{d}) = \delta(\alpha, \boldsymbol{\nu}, (d_i)_{i\in I_0}) \geq 0 \qquad \text{for all } \alpha < 0.$$

由引理 2.5 可得

$$\liminf_{\alpha\nearrow 0} \delta(\alpha, \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{d}) = \delta_0.$$

$\widetilde{}$因此，序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 满足假设 (7.1)-(7.3)，但 δ^L 由 $\delta^L = \delta_0$替代$\widetilde{}$。因此，满足引理 7.1 中的假设 (ii)。从而， $\boldsymbol{d}$ 是 E的对角线。□

8. Non-Blaschke diagonal result

在本节中，我们证明，所有满足外部主化、但在内部不满足布拉施克条件的序列，都是本质谱至少含有两个点的自伴算子的对角线。此外，当外部超额为无穷大时，即使满足布拉施克条件，我们也能证明同样的结论。

M¨uler 和 Tomilov [51, 定理 1.1] 证明了以下关于存在满足非布拉施克条件的对角线的结果。他们的结果也适用于 n 元自伴算子，但我们不需要如此一般的情形。为方便起见，我们假设 0 和 1 是本质谱的两个极端点，但它们可以替换为任意一对不同的实数。

定理 8.1. 设 E 是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，使得 0 和 1 是 E 的本质谱 $\sigma_{ess}(E)$ 的两个极端点，也就是说，

$$\{0, 1\} \subset \sigma_{ess}(E) \subset [0, 1]. \tag{8.1}$$

令 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in I}$ 为 (0, 1) 中的一个序列，使得

$$\sum_{i\in I} \min(d_i, 1-d_i) = \infty.$$

那么， $\boldsymbol{d}$ 是 E的一个对角线。

引理 8.2. 设 E 是 $\mathcal{H}$ 上的一个自伴算子，使得 0 和 1 是 E的本质谱 $\sigma_{ess}(E)$的两个极端点，也就是说，

$$\{0,1\} \subset \sigma_{ess}(E) \subset [0,1].$$

此外，假设 $\sigma(E) \subset (-\infty, 1]$。令 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j\in J}$为 E的所有特征值列表，按重数计（该列表可能为空）。若 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in I}$ 是$(-\infty, 1)$中的一个序列，且对于某个 $\alpha \in (0, 1)$，有 $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) = \infty$，

$$\delta^L = \liminf_{\beta\nearrow 0} (f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}}(\beta)) > 0,$$

and

$$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \qquad \textit{for all } \alpha < 0,$$

那么 $\boldsymbol{d}$ 是 E的一个对角线。

证明。我们需要考虑两种情形。

情形 1. 假设序列$(d_i)_{d_i\le 0}$ 是无限的。令 $\boldsymbol{\nu}$ 为$(0, 1)$中的一个无限序列，其和为 δ^L。根据定理 8.1，序列 $\boldsymbol{\nu} \oplus (d_i)_{0<d_i<1}$ 是$EP|_{\mathcal{H}_0}$的一个对角线，其中 π 是 E的谱测度， $P = \pi(0, \infty)$，且 $\mathcal{H}_0 = \operatorname{ran}(P)$。因此，序列$(\lambda_j)_{\lambda_j\le 0} \oplus \boldsymbol{\nu} \oplus (d_i)_{0<d_i<1}$ 是 E的一个对角线。若 $\delta^L < \infty$，根据定理 2.19，我们得出：如果$(\lambda_j)_{\lambda_j\le 0} \oplus \boldsymbol{\nu}$ 是某个自伴算子的对角线，那么$(d_i)_{d_i\le 0}$也是。利用定理 2.19，在 $\delta^L = \infty$ 的情形下也可得出相同结论。因此，根据引理 2.17，我们得出 $\boldsymbol{d}$ 是 E的一个对角线。

情形 2. 假设 $I_0 = \{i : d_i \le 0\}$ 是有限的。设 J_0 为一个有限集，且其元素个数至多为 $\#|I_0|$，使得 $(\lambda_j)_{j\in J_0}$包含 $(\lambda_j)_{\lambda_j\le 0}$中最小的元素，并且

$$\delta(\alpha, (\lambda_j)_{j\in J_0}, (d_i)_{i\in I_0}) \ge 0 \qquad \text{for } \alpha < 0.$$

因此，

$$\widetilde{\delta}^L = \sum_{j\in J_0} |\lambda_j| - \sum_{i\in I_0} |d_i| \ge 0$$

并且当 $N = \#|I_0| - \#|J_0| > 0$ 时，不等式为严格不等式。在这种情况下，我们选择 $\alpha \in (0, 1)$，使得~ $N\alpha < \delta^L$。否则，若 $N = 0$，则令 $\alpha = 0$。接下来，我们选择一个有限集 K_0，使得~ $0 < d_i < 1$ 对于 $i \in K_0$ 和 $\sum_{i\in K_0}(1 - d_i) > \delta^L$均成立。选择 $d_i \le \widetilde{d}_i < 1$、 $i \in K_0$，使得

$$\sum_{i\in K_0} (\widetilde{d}_i - d_i) = \widetilde{\delta}^L - \alpha N.$$

~根据 Schur-Horn 定理，如果 $(\lambda_j)_{j\in J_0} \oplus \alpha 1_N \oplus (d_i)_{i\in K_0}$是一个自伴（有限维）算子的对角线，那么 $(d_i)_{i\in I_0\cup K_0}$也是。这里， 1_N 表示由~个 1 组成的常数序列。根据定理 8.1，序列 $\alpha 1_N \oplus (d_i)_{i\in K_0} \oplus (d_i)_{i\in I\setminus(I_0\cup K_0)}$ 是 $E|_{\mathcal{H}_0}$的对角线，其中 $\mathcal{H}_0$ 是与对应于~特征值 λ_j，$j \in J_0$的特征向量正交的补空间。因此，序列 $(\lambda_j)_{j\in J_0} \oplus \alpha 1_N \oplus (d_i)_{i\in K_0} \oplus (d_i)_{i\in I\setminus(I_0\cup K_0)}$是 E 的对角线。于是，根据引理 2.17，我们得出 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。□

定理 8.3. 设 E 是 $\mathcal{H}$ 上的一个自伴算子，使得 0 和 1 是本质谱 $\sigma_{ess}(E)$ 的两个极端点，其中 E，也就是说，

$$\{0,1\} \subset \sigma_{ess}(E) \subset [0,1]. \tag{8.2}$$

令 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j\in J}$ 为 E 的所有特征值列表（按重数计，列表可能为空）。令 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in I}$ 为一个序列，使得

$$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \qquad \textit{for all } \alpha \in \mathbb{R} \setminus [0,1]. \tag{8.3}$$

定义

$$\delta^L = \liminf_{\beta \nearrow 0} (f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}}(\beta)) \quad \textit{and} \quad \delta^U = \liminf_{\beta \searrow 1} (f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}}(\beta)).$$

假设以下情况之一成立：

(a) δ^L、$\delta^U > 0$ 和 $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) = \infty$，其中某个 $\alpha \in$ 属于 (0, 1)；
(b) $\delta^L > 0$、$\delta^U = \infty$ 和 $\sum_{d_i>0} d_i = \infty$；(b') $\delta^L = 0$、$\delta^U = \infty$、$\sum_{d_i>0} d_i = \infty$ 和 $d_i > 0$ 对所有 $i \in I$ 都成立；(c) $\delta^U > 0$、$\delta^L = \infty$ 和 $\sum_{d_i<1}(1 - d_i) = \infty$；(c') $\delta^U = 0$、$\delta^L = \infty$、$\sum_{d_i<1}(1 - d_i) = \infty$，且对所有 $i \in I$，$d_i < 1$；(d) $\delta^L = \delta^U = \infty$。

那么，$\boldsymbol{d}$ 是 E的对角线。

(a) 的证明。我们声称，存在两个正交不变子空间 $\mathcal{K}_0$ 和 $\mathcal{K}_1$，它们是 E 的子空间，并且指标集 I 存在一个划分 $\{I_0, I_1\}$，使得：

(i) $\mathcal{H} = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1$ 与算子$E_0 = E|_{\mathcal{K}_0}$ 和$E_1 = E|_{\mathcal{K}_1}$ 满足（8.1）(ii) 对所有 $i \in I_0$，$d_i < 1$ 成立，并且对所有 $i \in I_1$，$d_i > 0$ 成立，(iii) 令 $\boldsymbol{d}^k = (d_i)_{i\in I_k}$，则对于 $k = 0$、1 和 $\alpha \in (0, 1)$，有 $f_{\boldsymbol{d}^k}(\alpha) = \infty$，(iv) 令 $\boldsymbol{\lambda}^k$ 为 E_k 的所有特征值列表（计入重数），我们有 h。 ave

$$f_{\boldsymbol{\lambda}^0}(\alpha) \ge f_{\boldsymbol{d}^0}(\alpha) \quad \text{for all } \alpha < 0 \qquad \text{and} \qquad \liminf_{\beta \nearrow 0} (f_{\boldsymbol{\lambda}^0}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}^0}(\beta)) > 0, \tag{8.4}$$

$$f_{\boldsymbol{\lambda}^1}(\alpha) \ge f_{\boldsymbol{d}^1}(\alpha) \quad \text{for all } \alpha > 1 \qquad \text{and} \qquad \liminf_{\beta \searrow 1} (f_{\boldsymbol{\lambda}^1}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}^1}(\beta)) > 0. \tag{8.5}$$

为了证明该断言，我们可以将一个序列 $(d_i)_{0<d_i<1}$ 划分为两个子序列，它们都满足非布拉施克条件。然后，我们将所有项 $d_i \le 0$附加到第一个子序列中，得到 $\boldsymbol{d}^0 = (d_i)_{i\in I_0}$。同样地，我们将所有项 $d_i \ge 1$ 附加到第二个子序列中，得到 $\boldsymbol{d}^1 = (d_i)_{i\in I_1}$。这就证明了 (ii) 和 (iii)。

令 π 为 E的谱测度。如果序列 $(\lambda_j)_{\lambda_j\le 0}$ 是无限的，那么我们要求子空间 $\mathcal{K}_0$ 和 $\mathcal{K}_1$ 各自包含无穷多个对应于特征值 $\lambda_j \le 0$ 的特征向量，并且 (8.4) 成立。由于我们假设 $\delta^L > 0$，这是可能的。否则，如果序列 $(\lambda_j)_{\lambda_j\le 0}$ 是有限的，那么我们要求 $\mathcal{K}_0$ 包含所有特征向量 $\lambda_j \le 0$。在这种情况下，对所有 $\delta > 0$，投影 $\pi(0, \delta)$的秩都是无限的。因此，我们可以将区间 $(0, 1/2)$ 划分为两个博雷尔集 B_0和 B_1，使得 $\operatorname{rank}(\pi(B_k)) = \infty$, $k = 0, 1$，以保证 $0 \in \sigma_{ess}(E_0)$和 $0 \in \sigma_{ess}(E_1)$。类似地，如果序列 $(\lambda_j)_{\lambda_j\ge 1}$ 是无限的，那么我们要求子空间 $\mathcal{K}_0$ 和 $\mathcal{K}_1$ 各自包含无穷多个对应于特征值 $\lambda_j \ge 1$ 的特征向量，并且 (8.5) 成立。否则，我们要求 $\mathcal{K}_1$ 包含所有特征向量 $\lambda_j \ge 1$。由此得到 (i) 和 (iv)。

根据该断言，我们可以将定理 8.3 的证明归约到如下情形：序列$\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in I}$ 满足对所有 $i \in I$都有 $d_i < 1$ ，尽管 δ^U 可能取值为 0。这正是引理 8.2。□

（c）的证明。鉴于（a），只需考虑 $f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$ for some$\alpha \in (0, 1)$的情形。结合假设 $\sum_{d_i<1}(1 - d_i) = \infty$，可知 0 是子序列 $(d_i)_{d_i<1}$ 的一个聚点。因此，存在一个无限子集 $I_0 \subset I$，使得 0 是 $(d_i)_{i\in I_0}$ 的唯一聚点，并且

$$\{i \in I : d_i \le 0\} \subset I_0. \tag{8.6}$$

~ ~ ~ ~ ~取一个序列 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $i \in \mathbb{N}$， $d_i \in (0, 1)$，$\lim d_i = 0$，且 $\sum d_i = \infty$。取一个无限子集 $J_0 \subset \{j \in J : \lambda_j < 0\}$ ，使得 $\sum_{j\in J_0} |\lambda_j| < \infty$ 且 $\delta(\alpha, (\lambda_j)_{j\in J\setminus J_0}, \boldsymbol{d}) \ge 0$ 对所有 $\alpha < 0$ 均成立。因此，

$$\liminf_{\alpha\nearrow 0} \delta(\alpha, (\lambda_j)_{j\in J_1}, \boldsymbol{d}) = \infty, \qquad \text{where } J_1 = \{j \in J \setminus J_0 : \lambda_j < 0\}. \tag{8.7}$$

~由 (a) 部分可知，序列 $(d_i)_{d_i>0} \oplus \boldsymbol{d}$ 是 $E|_{\mathcal{H}_0}$ 的对角线，其中 $\mathcal{H}_0$ 是对应于特征值 λ_j，$j \in J_1$ 的特征向量的正交补。因此，序列~$(d_i)_{d_i>0} \oplus \boldsymbol{d} \oplus (\lambda_j)_{j\in J_1}$ 是 E 的对角线。令 $I_1 = \{i \in I_0 : d_i > 0\}$。由定理 2.19 和~(8.7)，如果 $(d_i)_{i\in I_1} \oplus \boldsymbol{d} \oplus (\lambda_j)_{j\in J_1}$ 是某个自伴算子的对角线，那么 $(d_i)_{i\in I_0}$ 也是。由 (8.6) 可得

$$\{i \in I : d_i > 0\} \setminus I_1 = I \setminus I_0.$$

因此，由 引理 2.17 可知，$(d_i)_{i\in I_0} \oplus (d_i)_{i\in I\setminus I_0} = \boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线 . □

（c’）的证明。证明与（c）的证明完全相同，只需将两次应用（a）替换为引理 8.2。□

（b）、（b’）和（d）的证明。由对称性，（c）和（c’）分别推出（b）和（b’）。假设 $\delta^L = \delta^U = \infty$。由于 $\boldsymbol{d}$ 是一个无限序列，和式 $\sum_{d_i>0} d_i$ 或 $\sum_{d_i<1}(1 - d_i)$ 必有一个是无穷大。因此，（d）立即由（b）和（c）推出。□

9. Main result for operators with at least 2-point essential spectrum

本节将表述并证明我们的主要结果——定理 9.1，该定理讨论本质谱中有 ≥ 2 个点的自伴算子的对角线。为此，我们结合第 4 节的必要性结果和第 5–8 节的充分性结果。定理 9.1 的表述用到了“解耦”这一概念，见定义 2.9。最后，我们还将证明定理 1.4，它刻画了 T 所共有的谱测度对应的自伴算子类中的 $\mathcal{D}(T)$，允许特征值 0 和 1 的重数有所不同。定理 9.1 的证明只是结合先前的结果，而定理 1.4 的证明则需要额外的工作。

定理 9.1. 设 E 是 $\mathcal{H}$ 上的一个自伴算子，使得 0 和 1 是其本质谱 $\sigma_{ess}(E)$ 的两个极端点，也就是说，

$$\{0, 1\} \subset \sigma_{ess}(E) \subset [0, 1]. \tag{9.1}$$

设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j\in J}$ 为 E 的所有特征值（按重数计）组成的列表（该列表可能为空）。设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为一个实数序列。定义

$$\delta^L = \liminf_{\beta\nearrow 0}(f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}}(\beta)) \quad and \quad \delta^U = \liminf_{\beta\searrow 1}(f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}}(\beta)).$$

（必要性）若 $\boldsymbol{d}$ 是 E的对角线，则

$$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \qquad for\ all\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus[0,1], \tag{9.2}$$

且以下五个条件之一成立：

（i） $\delta^L = \delta^U = \infty$，（ii） $\delta^L < \infty$、 $\delta^U = \infty$和 $\sum_{d_i>0} d_i = \infty$，（iii） $\delta^U < \infty$、$\delta^L = \infty$和 $\sum_{d_i<1}(1-d_i) = \infty$，（iv） $\delta^L + \delta^U < \infty$ 和 $f_{\boldsymbol{d}}(1/2) = \infty$，或（v） $\delta^L + \delta^U < \infty$、 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(1/2) < \infty$、 $f_{\boldsymbol{d}}(1/2) < \infty$、 $\boldsymbol{d}$ 在 0 和 1 处有聚点，并且存在 $\delta_0 \in [0,\delta^L]$ 和 $\delta_1 \in [0,\delta^U]$ 使得：

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_1 \qquad \text{对所有 } \alpha \in \in(0,1), \tag{9.3}$$

$$f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) - f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \equiv \delta_1 - \delta_0 \mod 1 \qquad for\ some\ \alpha \in (0,1), \tag{9.4}$$

$$\sum_{\lambda_i<0} |\lambda_i| < \infty \implies \delta^L - \delta_0 \le \delta^U - \delta_1, \tag{9.5}$$

$$\sum_{\lambda_i>1} (\lambda_i - 1) < \infty \implies \delta^U - \delta_1 \le \delta^L - \delta_0. \tag{9.6}$$

In 此外，算子 E 在点 $\alpha \in [0,1]$ 处解耦，若（$\mathfrak{d}_\alpha$）成立，其中 e

($\mathfrak{d}_0$) $\delta^L = 0 \quad or \quad \delta_0 = 0\ and\ \delta_1 = \delta^U$,
($\mathfrak{d}_\alpha$) $\alpha \in (0,1)\ and\ f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) = f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_1$,
($\mathfrak{d}_1$) $\delta^U = 0 \quad or \quad \delta_1 = 0\ and\ \delta_0 = \delta^L$.

（充分性）反之，若外部主化 (9.2) 成立，条件 (i)–(v) 中至少有一个成立，且对任意 $\alpha \in [0,1]$, ($\mathfrak{d}_\alpha$) 均不成立，则 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的一个对角线。

注 9.2。注意，只有在 (v) 成立时，数值 δ_0 和 δ_1 才有定义。因此，在 (v) 不成立的情况下，必须按照以下约定正确理解陈述 ($\mathfrak{d}_\alpha$)。若条件 (i)–(iv) 中有一个成立，则 δ_0 和 δ_1 均无定义，我们将陈述 ($\mathfrak{d}_\alpha$) 中涉及它们的任何等式都解释为假。根据这一约定，我们注意到，若 (i)–(iv) 中有一个成立，则对于所有 $\alpha \in \in (0,1)$，($\mathfrak{d}_\alpha$) 均为假；而陈述 ($\mathfrak{d}_0$) 变为 $\delta^L = 0$，($\mathfrak{d}_1$) 则变为 $\delta^U = 0$。

证明。（必要性）首先，注意到 (9.2) 可由定理 2.8 得出。现在根据 δ^L 和 δ^U 是有限还是无限，共有四种互斥情形。如果两者都是无限的，则无需证明。如果恰有一个是有限的，则所需结论由引理 4.7 得出。最后，如果两者都是有限的，那么要么 $f_{\boldsymbol{d}}(1/2) = \infty$，此时无需证明；否则，定理 4.1 恰好给出定理 9.1 的结论 (v)，以及保证算子 E 在 $\alpha \in [0,1]$处解耦的条件。

（充分性）假设（9.2）成立。由于（$\mathfrak{d}_\alpha$）对 $\alpha \in \{0,1\}$ 不成立，我们可知 δ^U、$\delta^L > 0$。如果条件（i）—（iv）中任一条件成立，那么根据定理 8.3， $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。如果条件（v）成立，那么定理 4.1 表明 E 可对角化，因此 $\boldsymbol{\lambda}$ 是 E 的对角线。（$\mathfrak{d}_0$）和（$\mathfrak{d}_1$）不成立，这说明若 $\delta_0 = \delta^L$ 或 $\delta_1 = \delta^U$，那么

δ_0、$\delta_1 > 0$。假设（$\mathfrak{d}_\alpha$）对任意 $\alpha \in$ (0, 1) 都不成立，这意味着在（9.3）中具有严格不等式。因此，若 $\delta_0 = \delta^L$ 或 $\delta_1 = \delta^U$ 成立，那么（7.6）也成立。由此，我们可以应用定理 7.2，推得 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。□

定理 1.4 的证明。必要性方向直接由定理 9.1 的必要性方向推出。对于充分性方向，注意到如果 (i)-(iv) 中任一条件成立，那么根据定理 9.1，序列 $\boldsymbol{d}$ 是 T 的对角线。因此我们可以假设 (v) 成立。特别地，这意味着 T 可对角化。此外，算子 T' 模 $\{0, 1\}$ 与 T 酉等价，当且仅当 T' 可对角化，且 T 和 T' 的特征值列表除 0 和 1 外完全相同。因此，为完成证明，我们必须构造一个算子 T'，其对角线为 $\boldsymbol{d}$，且 T 和 T' 的特征值列表除 0 和 1 外完全相同。

在 $\delta_0 < \delta^L$ 和 $\delta_1 < \delta^U$ 的情况下，结论可由定理 7.2 得出。因此，我们可以假设 $\delta_0 = \delta^L$ 或 $\delta^1 = \delta^U$ （或两者同时成立）。根据对称性，只需考虑 $\delta_0 = \delta^L$ 的情况。

情形 1. 假设对于某个 $\alpha_0 \in$ (0,1)，(1.7) 中等号成立。定义序列$\boldsymbol{\lambda}_0 := (\lambda_i)_{\lambda_i < \alpha_0}$、$\boldsymbol{\lambda}_1 := (1 - \lambda_i)_{\lambda_i \geq \alpha_0}$、$\boldsymbol{d}_0 := (d_i)_{d_i < \alpha_0}$ 和 $\boldsymbol{d}_1 := (1 - d_i)_{d_i \geq \alpha_0}$。由推论 3.6、推论 3.7 和命题 2.6 可知

$$(\boldsymbol{d}_0)_+ \prec (\boldsymbol{\lambda}_0)_+, \ (\boldsymbol{d}_0)_- \prec (\boldsymbol{\lambda}_0)_-, \ (\boldsymbol{d}_1)_+ \prec (\boldsymbol{\lambda}_1)_+, \ (\boldsymbol{d}_1)_- \prec (\boldsymbol{\lambda}_1)_-$$

$$\liminf_{\alpha \nearrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{d}_0) = \delta^L, \quad \liminf_{\alpha \searrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{d}_0) = \delta_0,$$

$$\liminf_{\alpha \nearrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{d}_1) = \delta^U, \quad \text{and} \quad \liminf_{\alpha \searrow 0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{d}_1) = \delta_1.$$

注意，$\delta_0 = \delta^L$ 和 $\delta_1 \leq \delta^U$。此外，若 $(\boldsymbol{d}_1)_- \in \ell^1$，则由于 $\delta^U < \infty$，我们也有 $(\boldsymbol{\lambda}_1)_- \in \ell^1$，因此 (9.6) 意味着 $\delta^U = \delta_1$。于是，由定理 2.23，存在紧自伴算子 T_0、S_0、T_1 和 S_1，使得对于 $i = 0$，1

- T_i 具有对角线 $\boldsymbol{d}_i$，
- S_i 具有特征值列表 $\boldsymbol{\lambda}_i$，
- $T_i \oplus \mathbf{0}$ 和 $S_i \oplus \mathbf{0}$ 酉等价，其中 0 是定义在无限维希尔伯特空间上的零算子。

最后，我们注意到，算子 $T' = T_0 \oplus (\mathrm{I} - T_1)$ 可对角化，具有对角线 $\boldsymbol{d}$，并且 T 和 T' 的特征值列表除 0 和 1 外完全相同。情形 1 至此完成。

对于最后三种情形，我们假设对所有 $\alpha \in$ (0,1)，(1.7) 中的不等式都严格成立。若 $\delta_0, \delta_1 > 0$，则定理 7.2 给出了所需结论。因此，我们只需考虑 $\delta_0 = 0$ 或 $\delta_1 = 0$ （或两者）成立的情形。

情形 2。假设 $\delta_0 = 0$，且 $\delta_1 > 0$。这意味着 $\delta^L = 0$。根据命题 2.6 $\boldsymbol{d}_- \prec \boldsymbol{\lambda}_-$。由此我们推得，序列 $\boldsymbol{d}$ 中负项的数量至少与 $\boldsymbol{\lambda}$ 中负项的数量相同。若 $\boldsymbol{d}$ 有 $N < \infty$ 个负项，那么根据 Schur-Horn 定理，存在一个算子 T_0，其对角线为 $(d_i)_{d_i < 0}$，特征值为 $(-\lambda_i^{-\downarrow})_{i=1}^N$ （注意，这些就是 T 的全部负特征值，也可能还包括一些零）。若 $\boldsymbol{d}$ 有无限多个负项，那么根据命题 2.15，存在一个自伴算子 S_0，其特征值列表为 $(\boldsymbol{\lambda}_-)^\downarrow$，对角线为 $(\boldsymbol{d}_-)^\downarrow$。令 $T_0 = -S_0$。因此，无论哪种情形，我们都有一个可对角化的负算子 T_0，其对角线为 $(d_i)_{d_i < 0}$，特征值由 $(\lambda_i)_{\lambda_i < 0}$ 以及可能的一些零组成。根据定理 7.4，存在一个自伴算子 T_1，其特征值列表为 $(\lambda_i)_{\lambda_i > 0}$，且

对角线为 $(d_i)_{d_i>0}$。最后，令 0 表示定义在维数为 $\#|\{i \text{ 的空间上的零算子：}\ d_i=0\}|$，而 $T'=T_0\oplus \mathbf{0}\oplus T_1$ 就是所需的算子。

情形 3。假设 $\delta_0>0$，且 $\delta_1=0$。根据 (1.10)，要么 $(\lambda_i-1)_{\lambda_i>1}$ 不可求和，要么$\delta_U=\delta_1=0$。在不可求和的情形下，我们应用命题 2.16，得到一个紧自伴算子 T_1，其对角线为 $(d_i-1)_{d_i>1}$，特征值为 $(\lambda_i-1)_{\lambda_i>1}$。如果 $\delta^U=0$，那么，与前一种情形一样，借助 Schur-Horn 定理或命题 2.15，可得一个自伴算子 T_1，其对角线为 $(d_i-1)_{d_i>1}$，特征值为 $(\lambda_i-1)_{\lambda_i>1}$，并且可能还包含一些零。根据定理 7.4，存在一个自伴算子 T_0，其特征值列表为 $(\lambda_i)_{\lambda_i<1}$，对角线为 $(d_i)_{d_i<1}$。最后，令 I' 为维数为 $\#|\{i:d_i=1\}|$ 的空间上的恒等算子，且$T'=T_0\oplus \mathrm{I}'\oplus(T_1+\mathrm{I})$ 即为所需算子。

情形 4。假设 $\delta_0=\delta_1=0$。由于 $\delta_0=0$，我们可以像情形 2 中那样构造算子 T_0。由于 $\delta_1=0$，我们可以像情形 3 中那样构造算子 T_1。定义序列$\boldsymbol{d}_I=(d_i)_{d_i\in(0,1)}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_I=(\lambda_i)_{\lambda_i\in(0,1)}$。根据假设 $\delta_0=\delta_1=0$，我们看到 $\boldsymbol{d}_I$ 和$\boldsymbol{\lambda}_I$ 满足定理 6.3 的假设。因此，存在自伴算子 T_I，其对角线为 $\boldsymbol{d}_I$，特征值由 $\boldsymbol{\lambda}_I$构成，可能还包含额外的零和一。和之前一样，令 0 表示定义在维数为 $\#|\{i:d_i=0\}|$的空间上的零算子，并令 I' 表示定义在维数为 $\#|\{i:\ d_i=1\}|$的空间上的恒等算子。算子 $T'=T_0\oplus\mathbf{0}\oplus T_I\oplus\mathrm{I}'\oplus(\mathrm{I}+T_1)$ 符合要求。□

10. Algorithm for determining diagonals of self-adjoint operators with at least 3-point essential spectrum

本节给出一种算法，用于判定给定序列是否为某个自伴算子 E 的对角线，其中本质谱至少包含三个点。我们引入剪枝的概念，它使我们能够将问题简化为一个本质谱中点数较少的算子 E'。

定义 10.1. 设 E 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一个自伴算子，其投影值测度为 π，满足

$$E=\int_{\mathbb{R}}\lambda\,d\pi(\lambda).$$

E 的右本质谱是集合

$$\sigma^+_{ess}(E):=\big\{\lambda\in\mathbb{R}:\operatorname{rank}\pi([\lambda,\lambda+\varepsilon])=\infty\ \text{for all}\ \varepsilon>0\big\}.$$

类似地，E 的左本质谱是集合 $\sigma^-_{ess}(E):=\{\lambda:-\lambda\in\ \sigma^+_{ess}(-E)\}$.

注意到，$\lambda\notin\sigma^+_{ess}(E)$ 当且仅当 $\dim\ker(E-\lambda\mathrm{I})<\infty$，并且存在 $\varepsilon>0$ 使得 $(\lambda,\lambda+\varepsilon)\cap\sigma(E)=\varnothing$。

定理 10.2. 设 E 是作用在 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，且 0 和 1 是 E的本质谱 $\sigma_{ess}(E)$ 的两个极端点，也就是说，

$$\{0,1\}\subset\sigma_{ess}(E)\subset[0,1]. \tag{10.1}$$

令 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_j)_{j\in J}$ 为 E 的全部特征值列表，并计入重数（该列表可能为空）。若 $\sigma_{ess}(E)=\{0,1\}$，则还假设 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(1/2)=\infty$。令 $\boldsymbol{d}=(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 定义

$$\delta^L=\liminf_{\beta\nearrow 0}(f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta)-f_{\boldsymbol{d}}(\beta))\quad and\quad \delta^U=\liminf_{\beta\searrow 1}(f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta)-f_{\boldsymbol{d}}(\beta)).$$

（必要性）若 $\boldsymbol{d}$ 是 E的对角线，则

$$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \qquad for\ all\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus [0,1], \tag{10.2}$$

$$\delta^L = 0 \implies \#|\{i:\ d_i = 0\}| \le \#|\{j:\ \lambda_j = 0\}| \text{ 且 } \#|\{i:\ d_i \le 0\}| \le \#|\{j:\ \lambda_j \le 0\}|, \tag{10.3}$$

$$\delta^U = 0 \implies \#|\{i:\ d_i = 1\}| \le \#|\{j:\ \lambda_j = 1\}| \text{ 且 } \#|\{i:\ d_i \ge 1\}| \le \#|\{j:\ \lambda_j \ge 1\}|, \tag{10.4}$$

并且以下四个条件之一成立：

(i) $\delta^L = \delta^U = \infty$，(ii) $\delta^L < \infty$、$\delta^U = \infty$和 $\sum_{d_i>0} d_i = \infty$，(iii) $\delta^U < \infty$、$\delta^L = \infty$和$\sum_{d_i<1}(1-d_i) = \infty$，或者 (iv) $\delta^L + \delta^U < \infty$ 和 $f_{\boldsymbol{d}}(1/2) = \infty$。

(充分性 性）反之，若 (10.2)–(10.4) 成立，则 (i)–(iv) 中有一个条件成立，

$$\delta^L = 0 \implies 0 \in \sigma^+_{ess}(E), \quad and \quad \delta^U = 0 \implies 1 \in \sigma^-_{ess}(E), \tag{10.5}$$

那么 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。

定理 10.2 的证明。必要性方向直接由定理 9.1 的必要性方向得出。事实上，根据我们的假设 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(1/2) = \infty$，定理 9.1 中的结论 (v) 不可能成立，而结论 (10.3) 和 (10.4) 则由命题 2.10 和引理 2.14 得出。

对于充分性方向，注意到若 (i)–(iv) 中任一条件成立且 $\delta^L, \delta^U > 0$，则根据定理 9.1 的必要性方向，序列 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。

接下来，假设 $\delta^L = 0$。我们声称可以将问题归结为对所有 i 均有 $d_i \neq 0$ 的情形。事实上，暂且假设定理 10.2 对满足以下条件的序列 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 成立：对所有 i 均有 $d_i \neq 0$。取任意满足定理 10.2 假设的序列 $\boldsymbol{d}$。令 $I_0 = \{i:\ d_i = 0\}$。若 I_0 是有限的，则由 (10.3) 可知，存在 $J_0 \subset J$，使得 $\#|I_0| = \#|J_0|$ 且对所有 $j \in J_0$ 均有 $\lambda_j = 0$。若 I_0 是无限的，则由 (10.3) 可知，存在一个无限子集 $J_0 \subset J$，使得对所有 $j \in J_0$ 均有 $\lambda_j = 0$，对无穷多个 $j \in J \setminus J_0$ 均有 $\lambda_j = 0$，并且

$$\#|\{i \in \mathbb{N} \setminus I_0 : d_i \le 0\}| \le \#|\{j \in J \setminus J_0 : \lambda_i \le 0\}|. \tag{10.6}$$

无论哪种情况，(10.6) 都成立。接下来，我们将算子 $E = \mathbf{0} \oplus E_0$ 分解，其中 $\mathbf{0}$ 是定义在维数为 $\#|J_0|$ 的空间上的零算子，而 $0 \in \sigma_{ess}(E_0)$。在非零对角序列的情形下应用定理 10.2，可得 $(d_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus I_0}$ 是算子 E_0的一个对角线。显然，$(d_i)_{i\in I_0}$ 是算子 $\mathbf{0}$ 的一个对角线。因此，$\boldsymbol{d}$ 是 E 的一个对角线，从而完成了归约步骤。因此，不失一般性，我们可以假设对于所有 i，$d_i \neq 0$。通过类似的论证，当 $\delta^U = 0$ 时，我们也可以假设对于所有 i，$d_i \neq 1$。

由 (10.2) 和 $\delta^L = 0$，命题 2.6 得出 $\boldsymbol{d}^{\downarrow} \preccurlyeq \boldsymbol{\lambda}^{\downarrow}$，因此

$$\#|\{j : \lambda_j < 0\}| \le \#|\{i : d_i < 0\}|.$$

因此，存在一个满足条件的集合 J_1

$$\{j : \lambda_j < 0\} \subset J_1 \subset \{j : \lambda_j \le 0\}$$

使得 $I_1 = \{i : d_i < 0\}$ 和 J_1 具有相同的基数。此外，我们可以保证，如果 $\{j \in J:\ \lambda_j = 0\}$ 是无限的，那么 $\{j \in J \setminus J_1:\ \lambda_j = 0\}$ 也是无限的。我们可以将其分解为

算子 $E = E_1 \oplus E_2$，使得 E_1 是一个特征值列表为（λ_j）$_{j\in J_1}$的可对角化算子。特别是，这意味着 σ（E_2）$\subset [0,\infty)$，并且根据（10.5），我们还有 $0 \in \sigma_{ess}$（E_2）。

由于 $\delta^L = 0$，(ii) 或 (iv) 成立。若 (ii) 成立，则由定理 8.3(b') 可得，$(d_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus I_1}$ 是 E_2 的对角线。接下来，假设 (iv) 成立。若 $\delta^U > 0$，则由引理 8.2 的对称变体可得，$(d_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus I_1}$ 是 E_2 的对角线。若 $\delta^U = 0$，则还可假设对所有 i 都有 $d_i \neq 1$。令 $I_3 = \{i : \ d_i > 1\}$，且 $I_4 = \{i : \ 0 < d_i < 1\}$。通过与上一段类似的论证，存在一个子集 $J_3 \subset \{j : \ \lambda_j \geq 1\}$ 以及算子 $E_2 = E_3 \oplus E_4$ 的一个分解，使得 E_3 是一个可对角化算子，其特征值列表为 $(\lambda_j)_{j\in J_3}$，并且 $\sigma(E_4) \subset [0,1]$。由 (10.5) 还可得 $1 \in \sigma_{ess}(E_4)$，因此$\{0,1\} \subset \sigma_{ess}(E_4)$。由于

$$f_{\boldsymbol{d}}(1/2) = \sum_{i\in I_4} \min(d_i, 1-d_i) = \infty,$$

由定理 8.1 可知，$(d_i)_{i\in I_4}$ 是 E_4的对角线。

若 I_1 有限，则根据 Schur-Horn 定理，$(d_i)_{i\in I_1}$ 是 E_1的对角线。若 I_1 无限，则由命题 2.15，$(d_i)_{i\in I_1}$ 是 E_1的对角线。同样，$(d_i)_{i\in I_3}$ 是 E_3的对角线。因此，$\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in I_1\cup I_3\cup I_4}$ 是 $E = E_1 \oplus E_3 \oplus E_4$的对角线。□

作为定理 10.2 的直接推论，我们得到以下关于一大类算子对角线的刻画。推论 10.3 的 (i) 部分已由 Loreaux 和 Weiss 在 [48, 定理 4.6] 中证明。

推论 10.3. 设 E 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子。令 $a = \inf \sigma_{ess}(E)$ 和 $b = \sup \sigma_{ess}(E)$，并假设 $\sigma(E) \subset [a,b]$。假设以下条件之一成立

(i) $\#|\sigma_{ess}(E)| \geq 3$，或 (ii) $\#|\sigma_{ess}(E)| = 2$，且特征值列表 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j\in J}$ 满足 E

$$\sum_{j\in J} \min(\lambda_j - a, b - \lambda_j) = \infty.$$

令 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in I}$ 是 $[a,b]$ 中的一个序列。那么，当且仅当 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线时，f

$\#|\{i : \ d_i = a\}| \leq \dim\ker(E - a\mathrm{I})$，$\#|\{i : \ d_i = b\}| \leq \dim\ker(E - b\mathrm{I})$，并且

$$\sum_{i\in I} \min(d_i - a, b - d_i) = \infty.$$

为了描述我们的算法，引入算子的剪枝这一概念会很方便。

定义 10.4。设 E 是一个满足 (10.1) 的自伴算子。令 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$。假设

$$\delta^L = 0 \qquad \text{and} \qquad 0 \notin \sigma^+_{ess}(E).$$

设 π 是 E的谱测度。E 在 0 处的剪枝是有序对 $(E', \boldsymbol{d}')$，其中 E' 是 E 在投影 $\pi([0,\infty))$的值域上的限制，且 $\boldsymbol{d}' = (d_i)_{d_i\geq 0}$。同样，如果

$$\delta^U = 0 \qquad \text{and} \qquad 1 \notin \sigma^-_{ess}(E),$$

E 在 1 处的剪枝是数对 $(E', \boldsymbol{d}')$，其中 E' 是 E 在投影 $\pi((-\infty,1])$ 的值域上的限制，且 $\boldsymbol{d}' = (d_i)_{d_i\leq 1}$。

下面的引理二描述了当定理 10.2 中的必要条件成立、但充分条件不成立时会发生什么。

引理 10.5. 设 E 是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，且满足 (10.1)。设 $\boldsymbol{d}=(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 满足 (10.2)、(10.3)，以及定理 10.2 中 (i)–(iv) 四个条件之一。假设

$$\delta^L = 0 \qquad and \qquad 0 \notin \sigma^+_{ess}(E).$$

设 $(E', \boldsymbol{d}')$ 是 $(E, \boldsymbol{d})$ 在 0 处的一个剪枝。设 $\alpha_0 = \min \sigma_{ess}(E')$。设 $\boldsymbol{\lambda}'$ 是 E' 的所有特征值列表，并计入重数（该列表可能为空）。假设

$$\delta'^L := \liminf_{\alpha \nearrow \alpha_0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{d}') \le 0.$$

那么，$\boldsymbol{d}$ 是 E $\iff$ $\boldsymbol{d}'$ 的对角线当且仅当 E' 是 E $\iff$ $\boldsymbol{d}'$ 的对角线。

证明。注意，$0 \notin \sigma^+_{ess}(E)$ 蕴含 $\alpha_0 > 0$。先假设 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。由于 $\delta^L = 0$，算子 E 关于 $\boldsymbol{d}$ 在 0 处解耦，如定义 2.9 所述。特别地，算子 $E|_{\mathcal{H}_1}$ 是 E' 的一个限制，其对角线为 $\boldsymbol{d}'$。算子 E' 和 $E|_{\mathcal{H}_1}$ 的差异至多在于特征值 0 的重数。也就是说，$E|_{\mathcal{H}_1}$ 的特征值列表与 E' 的相同，唯一的区别可能是前者包含较少的零特征值。由定理 2.8 应用于 $E|_{\mathcal{H}_1}$ 可知，$E|_{\mathcal{H}_1}$ 在 α_0 处的下超额为 ≥ 0，且至多为 δ'^L。由此得到 $\delta'^L = 0$ 和 $E|_{\mathcal{H}_1} = E'$。因此，$\boldsymbol{d}'$ 是 E' 的对角线。反过来，假设 $\boldsymbol{d}'$ 是 E' 的对角线。根据定理 2.20 的一个特例——Kaftal 和 Weiss 关于具有平凡核的正紧算子的对角线的刻画—— [41]，$(d_i)_{d_i<0}$ 是 E 在 π 的值域上的限制的对角线，其中 $\pi(-\infty, 0)$。因此，$\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。□

引理 10.6. 设 E 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，使得 $\#|\sigma_{ess}(E)| \ge 5$，且满足 (10.1)。设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 满足 (10.2)、(10.3)、(10.4)，并且满足定理 10.2 中 (i)–(iv) 四个条件之一。假设

$$\delta^L = 0 \quad and \quad 0 \notin \sigma^+_{ess}(E) \quad and \quad \delta^U = 0 \quad and \quad 1 \notin \sigma^-_{ess}(E).$$

设 $(E', \boldsymbol{d}')$ 是 $(E, \boldsymbol{d})$ 在 0 和 1 处的剪枝。设 $\alpha_0 = \min \sigma_{ess}(E')$，且 $\alpha_1 = \max \sigma_{ess}(E')$。设 $\boldsymbol{\lambda}'$ 是 E' 的所有特征值按重数排列的列表（该列表可能为空）。假设

$$\delta'^L := \liminf_{\alpha \nearrow \alpha_0} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{d}') > 0 \quad and \quad \delta'^U := \liminf_{\alpha \searrow \alpha_1} \delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{d}') > 0.$$

那么，$\boldsymbol{d}$ 是 E $\iff$ $\boldsymbol{d}'$ 的对角线，当且仅当 $\boldsymbol{d}$ 是 E' 的对角线。

证明. 注意，假设 $0 \notin \sigma^+_{ess}(E)$、$1 \notin \sigma^-_{ess}(E)$ 和 $\#|\sigma_{ess}(E)| \ge 5$ 蕴含 $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < 1$。先假设 $\boldsymbol{d}$ 是相对于 $\mathcal{H}$ 的标准正交基 (e_i) 而言的 E 的对角线。由于 $\delta^L = \delta^U = 0$，算子 E 在 0 和 1 处相对于 $\boldsymbol{d}$ 解耦，如定义 2.9 所述。也就是说，这些空间

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : d_i < 0\}, \qquad \mathcal{H}_{[0,1]} = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : 0 \le d_i \le 1\}, \qquad \mathcal{H}_1 = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : d_i \ge 1\}$$

是 E 和的不变子空间

$$\sigma(E|_{\mathcal{H}_0}) \subset (-\infty, 0], \qquad \sigma(E|_{\mathcal{H}_{[0,1]}}) \subset [0, 1], \qquad \sigma(E|_{\mathcal{H}_1}) \subset [1, \infty).$$

特别地，算子 $E|_{\mathcal{H}_{[0,1]}}$ 的对角线为 $\boldsymbol{d}'$。算子 E' 和 $E|_{\mathcal{H}_{[0,1]}}$ 可能仅在特征值 0 和 1 的重数上有所不同。也就是说， $E|_{\mathcal{H}_{[0,1]}}$ 的特征值列表与 E' 的相同，只是其中等于 0 或 1 的特征值可能较少。因此， E' 在 0 处的下超额和 E' 在 1 处的上超额均为正。由于算子 $E|_{\mathcal{H}_{[0,1]}}$ 的归一化满足定理 10.2 中关于对角线 $\boldsymbol{d}'$归一化的必要条件，算子 E'的归一化也满足这些条件。由于 E' 的上超额和下超额均为正，且 $\#|\sigma_{ess}(E')| \geq 3$，根据定理 10.2 的充分性，序列 $\boldsymbol{d}'$ 是 E'的一个对角线。

反过来，假设 $\boldsymbol{d}'$ 是 E' 的对角线。根据定理 2.20 的一个特殊情形——Kaftal 和 Weiss 关于具有平凡核的正紧算子的对角线的刻画—— [41]，$(d_i)_{d_i<0}$ 是 E 在 π 的值域上的限制的对角线（$-\infty$，0）。同理，$(d_i)_{d_i>1}$ 是 E 在 π 的值域上的限制的对角线（1，∞）。因此， $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。□

判断序列 $\boldsymbol{d}$ 是否为算子 E 的对角线（其中 $\#|\sigma_{ess}(E)| \geq 5$ ）的算法如图 1 所示。该过程首先对 E 进行归一化，使得（10.1）成立。然后检查所有必要条件（10.2）–（10.4）以及定理 10.2 中条件（i）–（iv）之一是否满足。若不满足，则 $\boldsymbol{d}$ 不是 E 的对角线。否则，检查引理 10.5 中的三个条件 $\delta^L = 0$、 $0 \notin \sigma_{ess}^+(E)$ 和 $\delta'^L \leq 0$ 是否都成立。若成立，则可以在 0 处对算子 E 进行剪枝，然后只要本质谱中至少有 5 个点，就重复归一化并检查定理 10.2 中必要条件的过程。由于每次剪枝后，E 的本质谱的最小值（未经归一化）都会增大，这一迭代过程必定会在可数步之后停止。这可以用可数超限归纳过程来描述。利用引理 10.5 的对称变体，我们还从右侧对算子 E 进行剪枝。

经过可数次剪枝后，我们得到一个三分法：

(i) 算子 E 的本质谱恰有 4 个点，此时需要应用图 2 中描述的 4 点算法；(ii) 定理 10.2 中的必要性不成立，此时 $\boldsymbol{d}$ 不是 E的对角线；或者 (iii) 无法再进行引理 10.5 中所述的剪枝，此时得到的配对 $(E, \boldsymbol{d})$ 具有如下性质： $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线，当且仅当原始输入算子与序列也满足同样的条件。

在最后一种情况下，我们最多再进行两次剪枝。也就是说，我们检查 $\delta^L = 0$和 $0 \notin \sigma_{ess}^+(E)$。如果是，则在 0 处对算子 E 进行剪枝，对 E重新归一化，并注意到新的下超额 $\delta^L > 0$。如果否，则保持 E 不变。同样，我们检查 $\delta^U = 0$ 和$1 \notin \sigma_{ess}^-(E)$。如果是，则在 1 处对算子 E 进行剪枝，对 E重新归一化，并注意到新的上超额 $\delta^U > 0$。如果否，则保持 E 不变。由此，我们得到一个本质谱至少有 3 个点的归一化算子E' 以及一个新序列 $\boldsymbol{d}'$，它满足

$$\delta'^L = 0 \implies 0 \in \sigma_{ess}^+(E'), \quad \text{and} \quad \delta'^U = 0 \implies 1 \in \sigma_{ess}^-(E'), \tag{10.7}$$

其中，δ'^L 和 δ'^U 是对应于（E'，$\boldsymbol{d}'$）的超额。我们声称， $\boldsymbol{d}$ 是E 的对角线，当且仅当 $\boldsymbol{d}'$ 是 E' 的对角线。引理 10.6 表明，当 E' 是通过在 0 和 1 两处对 E 进行剪枝而得到时，这一断言成立。仅在一侧进行剪枝的情形可用类似方式证明。由于 E' 的下超额和上超额均为正，必要的

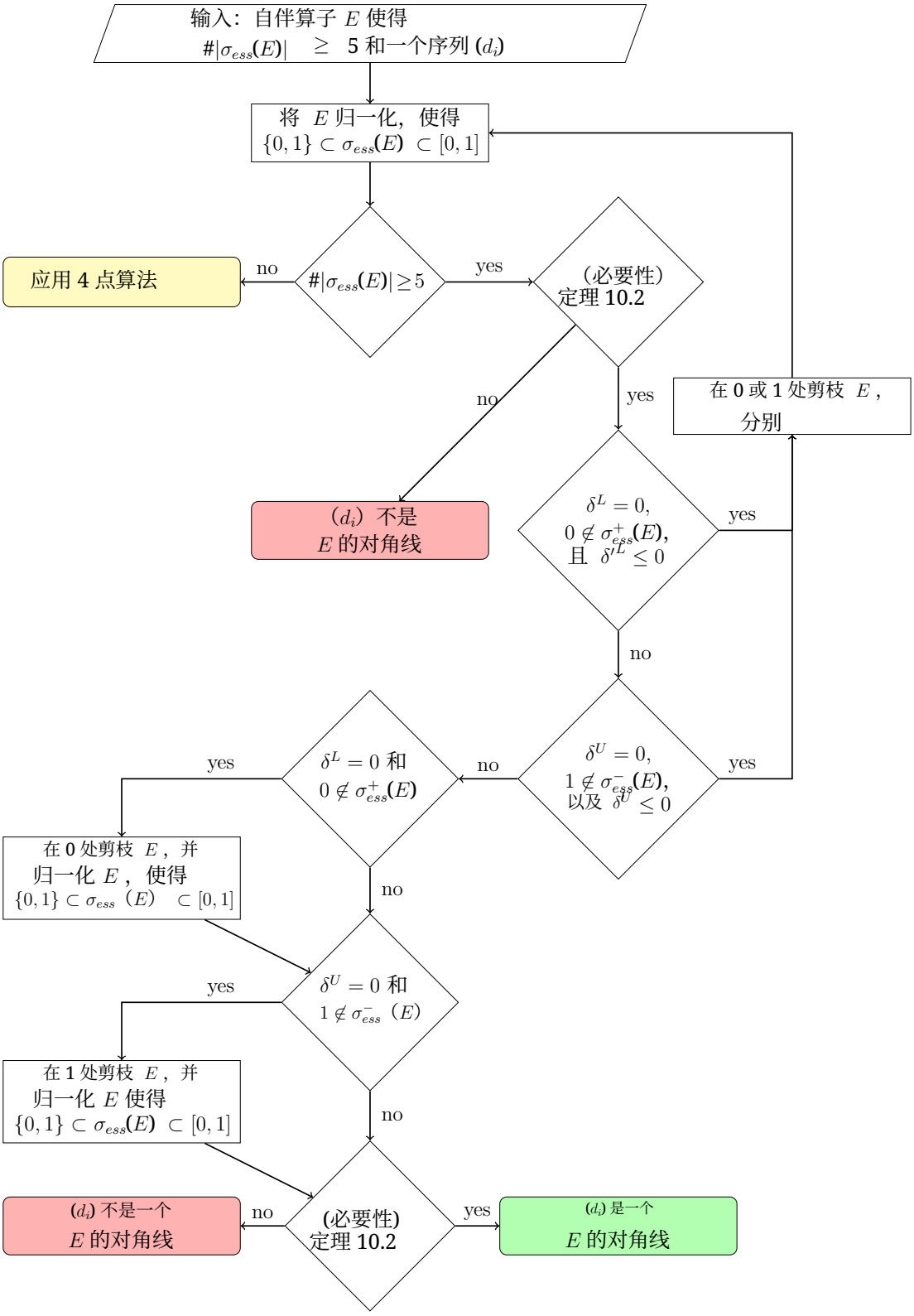


FIGURE 1. 通过可数超限递归过程对具有 ≥ 5 点本质谱的算子进行剪枝的算法。

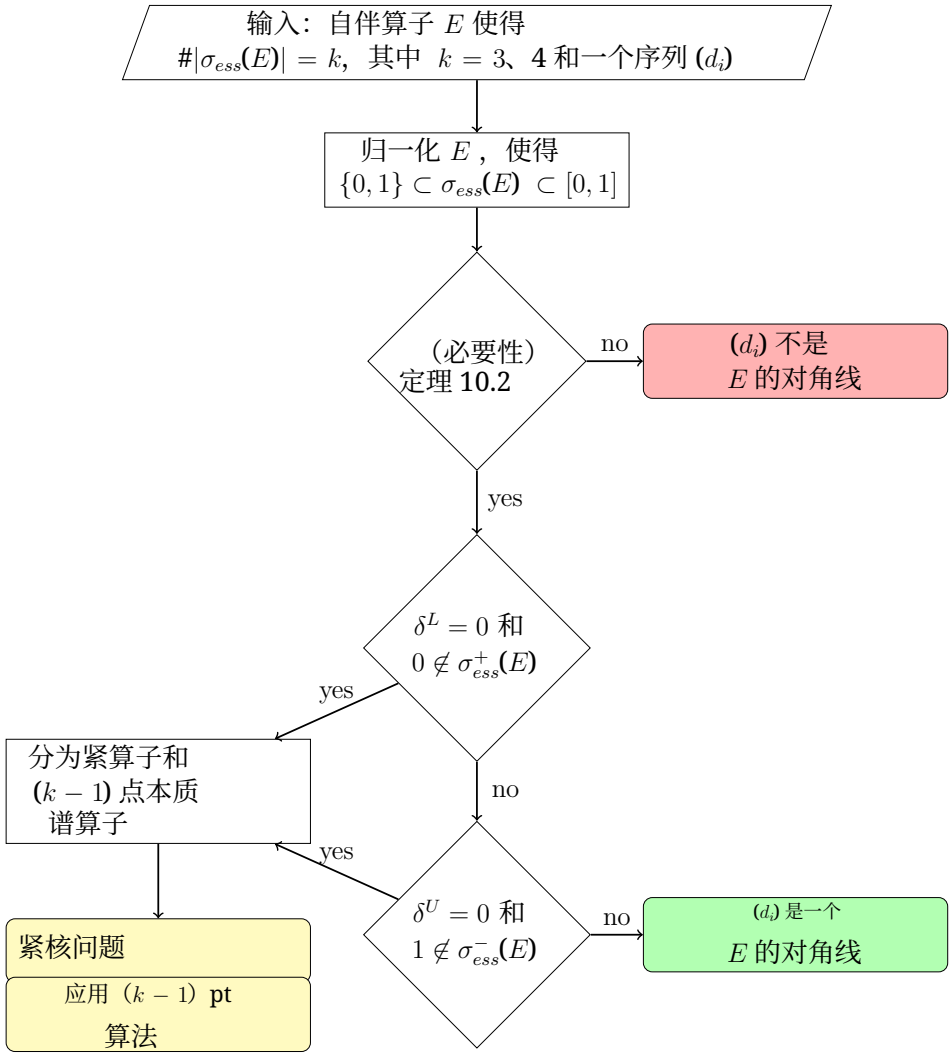


FIGURE 2. 具有三点或四点本质谱的算子算法。

定理 10.2 中的条件也足以成立。因此，该算法最终会明确判定 $\boldsymbol{d}$ 是否为 E 的对角线。

用于确定序列 $\boldsymbol{d}$ 是否为具有 $\#|\sigma_{ess}(E)| = 3$、4 的算子 E 的对角线的算法由图 2 表示。该过程首先对 E 进行归一化，使其满足 (10.1)。然后，根据本质谱中有 3 个点还是 4 个点，算法分为两个相似的情形。

在后一种情形下，我们检查所有必要条件 (10.2)–(10.4) 以及定理 10.2 中条件 (i)–(iv) 是否至少有一个成立。若不成立，则 $\boldsymbol{d}$ 不是 E的对角线。否则，只要 (10.5) 成立，$\boldsymbol{d}$ 就是 E 的对角线。如果 $\delta^L = 0$ 和 $0 \notin \sigma^+_{ess}(E)$均成立，则适用定理 2.22。具体而言，我们要找出所有可能的分解方式，将 E在 0 处分裂为 E_1 和 E_2，且满足 $z_0 = \#|\{i\colon\ d_i = 0\}|$；然后应用定理 2.20 检验 $(d_i)_{d_i<0}$ 是否为 E_1 的对角线，并应用 3点算法检验 $(d_i)_{d_i>0}$ 是否为 E_2的对角线。若定理 2.20 中的必要条件不成立，或 3点算法对所有可能的分解均给出否定答案，则 $\boldsymbol{d}$ 不是 E的对角线。另一方面，若充分

条件在定理 2.20 中成立，且 3点算法对某种分解给出肯定答案，则 $\boldsymbol{d}$ 是 E的对角线。这没有涵盖这样一种可能性：对于某些分解，3点算法无法得出结论（这只会发生在需要调用 2点算法时），或者我们遇到正紧算子的核问题。由于 dim ker $E < \infty$，该算法只需分析 E的有限种分解（若存在）。对于 $\delta^U = 0$ 和 $1 \notin \sigma_{ess}^-(E)$成立的情形，我们也用类似的方法处理。最后还剩下一种情形，即 (10.5) 成立；此时定理 10.2 推出 $\boldsymbol{d}$ 是 E的对角线。

三点本质谱的算法以相同方式执行，但有一个例外：在 $\delta^L = 0$ 和$0 \notin \sigma_{ess}^+$（E）的情形，或 $\delta^U = 0$ 和$1 \notin \sigma_{ess}^-$（E）的情形下，我们需要考虑所有可能的分解，并应用定理 2.20 和 2点算法。因此，3点算法仅在遇到正紧算子的核问题或 2点算法无法得出结论时才无法得出结论。同样，4 点算法仅在遇到正紧算子的核问题或 3点算法无法得出结论时才无法得出结论。最后，≥ 5点算法仅在其归约为 4 点算法时无法得出结论。事实上，下面的定理表明，对于本质谱中含有 ≥ 3 个点的算子，图 1 和图 2 中算法的组合对于一大类算子是能够得出结论的。

定理 10.7。设 E 是一个自伴算子，满足

$$\exists\, \lambda \in \sigma_{ess}(E) \qquad \inf \sigma_{ess}^+(E) < \lambda < \sup \sigma_{ess}^-(E). \tag{10.8}$$

设 $\boldsymbol{d}$ 是一个实数的有界序列。那么，图 1 和图 2 中的算法将明确给出 $\boldsymbol{d}$ 是否为 E 的对角线。

为证明这一结果，我们需要引理 10.6 的一个类似结论。

引理 10.8。设 E 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，使得 #$|\sigma_{ess}(E)| = 4$，且 (10.1) 和 (10.8) 成立。设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 满足 (10.2)、(10.3)、(10.4) 以及定理 10.2 中四个条件 (i)–(iv) 之一。假设

$$\delta^L = 0 \quad and \quad 0 \notin \sigma_{ess}^+(E). \tag{10.9}$$

设 $(E', \boldsymbol{d}')$ 是 $(E, \boldsymbol{d})$ 在 0 处的剪枝。设 $\alpha_0 =$inf $\sigma_{ess}(E')$。假设 $\alpha_0 \in \sigma_{ess}^+(E)$。那么， $\boldsymbol{d}$ 是 $E \iff \boldsymbol{d}'$ 的对角线当且仅当 E' 是 E' 的对角线。

证明。注意，条件 (10.1) 和 $0 \notin \sigma_{ess}^+(E)$ 意味着 $0 < \alpha_0 < 1$。首先假设 $\boldsymbol{d}$ 是算子 E 关于 $\mathcal{H}$ 的标准正交基 (e_i) 所对应的对角线。由于 $\delta^L = 0$，算子 E 按照定义 2.9 关于 $\boldsymbol{d}$ 在 0 处解耦。特别地，算子 $E|_{\mathcal{H}_1}$ 的对角线为 $\boldsymbol{d}'$。算子 E' 和 $E|_{\mathcal{H}_1}$ 可能仅在特征值 0 的重数上有所不同。由于算子 $E|_{\mathcal{H}_1}$ 的归一化满足定理 10.2 关于对角线 $\boldsymbol{d}'$ 的归一化的必要条件，算子 E' 的归一化也满足这些条件。由于 $\alpha_0 \in \sigma_{ess}^+(E')$、 $1 \in \sigma_{ess}^-(E')$，且 #$|\sigma_{ess}(E')| = 3$，根据定理 10.2 的充分性，序列 $\boldsymbol{d}'$ 是算子 E' 的对角线。

反过来，假设 $\boldsymbol{d}'$ 是 E' 的对角线。根据定理 2.20 的一个特殊情形，由 Kaftal 和 Weiss 提出的、关于具有平凡核的正紧算子的对角线的刻画 [41], $(d_i)_{d_i<0}$ 是将 E 限制在 $\pi(-\infty, 0)$ 的值域上所得算子的对角线。因此，$\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。□

定理 10.7 的证明。注意，图 1 中的 ≥ 5 点算法只有在退化为 4 点算法时才无法得出结论。根据假设 (10.8)，图

2 中的 3 点算法可以得出结论。最后，只有当 (10.9) 或其在 1 处的对称变体成立时，4 点算法才可能无法得出结论。然而，引理 10.8（或其对称变体）表明，判断 $\boldsymbol{d}$ 是否为 E 的对角线这一问题，可归结为判断在 0 处对 E 进行剪枝后是否仍是对角线这一相同问题，而该问题可由 3 点算法解答。无论哪种情况，我们的算法都能对满足 (10.8) 的算子给出明确答案。□

注 10.9. 作为定理 10.7 的推论，≥ 5pt 算法对于具有不可数谱的自伴算子这一类算子是完备的，其中包括所有不可对角化的自伴算子。事实上，如果自伴算子 E 的谱不可数，那么$\sigma(E)$的势为连续统 $\mathfrak{c}$，其本质谱 $\sigma_{ess}(E)$的势也为连续统。因此，集合 $\sigma_{ess}^{+}(E) \cap \sigma_{ess}^{-}(E)$ 的势为连续统 $\mathfrak{c}$，且（10.8）成立。

我们以例子说明算法图 1 中超限递归剪枝的必要性，从而结束本节。

例10.10. 设 $\boldsymbol{\lambda}$、$\boldsymbol{d} \in c_0^+$ 是 $[0,1]$ 中的两个序列，满足必要条件（2.18）–（2.21），但充分条件（2.22）对 $z=1$不成立。也就是说，无法应用定理 2.20 推导出存在一个紧算子 E，其特征值列表为 $\boldsymbol{\lambda}$，对角线为 $\boldsymbol{d}$。换言之，我们遇到了紧正算子的一维核问题。接下来，我们将在 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 中添加额外项，以掩盖核问题的存在。

根据 von Neumann 对序数的定义，序数 α 是由较小序数组成的良序集 $\beta < \alpha$。设 α 是一个可数极限序数。设 $\pi\colon\ \mathbb{N} \to \alpha$ 是一个双射。定义序列 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_\beta)_{\beta<\alpha}$ 如下

$$\nu_\beta = 2 - \sum_{n\in\mathbb{N}:\ \pi(n)<\beta} 2^{-n}.$$

因此，$\boldsymbol{\nu}$ 将序数 α 嵌入为区间 $[1,2]$ 的一个子集，并反转实数的通常顺序 $<$。此外，序列 $\boldsymbol{\nu}$ 的极限点与极限序数 $\leq \alpha$一一对应。我们将考察由 $\boldsymbol{\lambda}$和 $\boldsymbol{d}$与序列 $\boldsymbol{\nu}$拼接而成的序列。

现在假设我们的序数 α 相当大，比如说 $\alpha = \omega^\omega$。设 E 是一个自伴算子，其特征值列表为 $\boldsymbol{\lambda} \oplus \boldsymbol{\nu}$。因此，$\#|\sigma_{ess}(E)| = \infty$。当我们对 E 和序列 $\boldsymbol{d} \oplus \boldsymbol{\nu}$运行图 1 中的算法后，归一化后可见，定理 10.2 中的所有必要条件都成立。虽然 $\delta^L = 0$，但我们有 $0 \in \sigma_{ess}^{+}(E)$，因此不允许在 0 处剪枝。然而，$\delta^U = 0$，$1 \notin \sigma_{ess}^{-}(E)$，且在 1 处对 E 进行剪枝的上超额为零，$\delta'^U = 0$。因此，我们在 1 处对算子 E 进行剪枝，这相当于将序列$\boldsymbol{\nu}$ 缩减为 $\boldsymbol{\nu}' = (\nu_\beta)_{\omega\leq\beta<\alpha}$。因此，除一个缩放因子外，所得的算子对为算子 E，其特征值列表为 $\boldsymbol{\lambda} \oplus \boldsymbol{\nu}'$，序列为 $\boldsymbol{d} \oplus \boldsymbol{\nu}'$。

该算法取这对对象，并将其作为输入，开始循环的另一次运行。本次运行的结果是一个算子 E，其特征值列表为 $\boldsymbol{\lambda} \oplus \boldsymbol{\nu}''$，序列为 $\boldsymbol{d} \oplus \boldsymbol{\nu}''$，其中 $\boldsymbol{\nu}'' = (\nu_\beta)_{2\omega\leq\beta<\alpha}$。如此无限次重复，直到还原为原始对 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$。若 $\alpha = \omega^\omega$，则仅使用图 1 中的算法。然而，若 $\alpha = \omega^\omega + 3\omega$，那么在 ω 次循环之后，剩下的这对对象为 $\boldsymbol{\lambda} \oplus \boldsymbol{\nu}^\omega$ 和 $\boldsymbol{d} \oplus \boldsymbol{\nu}^\omega$，其中$\boldsymbol{\nu}^\omega = (\nu_\beta)_{\omega^\omega\leq\beta<\alpha}$。由于 $\boldsymbol{\lambda} \oplus \boldsymbol{\nu}^\omega$ 有 4 个聚点，我们需要在最后阶段依次运行图 2 和图 3 中的4点、3点和 2点算法，因为剪枝需要由分裂取代。图 2 中的紧核问题不会在每次分裂时出现，因为序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 是通过同一序列拼接而成的。同样，

在图 3 的 2点算法中，我们注意到 $(\mathfrak{d}_1)$ 成立，并将 E 分裂为两个紧算子，分别使用 1点算法 [18, 图 1] 和定理 2.20。然而，这实际上是由 § 标记的分裂的特殊情形。不过，定理 2.20 中的核问题并未出现，因为序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 是通过同一序列拼接而成的。最终结果是原始对 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$，对于这对对象，1点算法等同于尚未解决的核问题。

这说明了我们的算法如何将一对序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 处理为更简单的子序列，直至无法继续处理，此时我们要么得到一个确定的答案，要么遇到核问题。

11. Algorithm for determining diagonals of self-adjoint operators with 2-point essential spectrum

在本节中，我们给出一种算法，用于确定给定序列是否为本质谱恰有两个点的自伴算子 E 的对角线。

定理 11.1. 设 E 是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，且其谱满足

$$\sigma(E) \subset (-\infty, 1] \qquad and \qquad \sigma_{ess}(E) = \{0, 1\}.$$

假设 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(1/2) < \infty$，其中 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j\in J}$ 是 E 的所有特征值列表，按重数计。设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $(-\infty, 1]$中的一个序列。定义

$$\delta^L = \liminf_{\beta \nearrow 0} (f_{\boldsymbol{\lambda}}(\beta) - f_{\boldsymbol{d}}(\beta)).$$

（必要性）如果 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线，那么

$$\#|\{i : d_i = 1\}| \le \#|\{j : \lambda_j = 1\}|, \tag{11.1}$$

$$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \qquad for\ all\ \alpha < 0, \tag{11.2}$$

并且以下三个条件之一成立：

(i) $\delta^L = \infty$ 并且 $\sum_{d_i<1}(1 - d_i) = \infty$，(ii) $\delta^L < \infty$ 并且 $f_{\boldsymbol{d}}(1/2) = \infty$，或 (iii) $\delta^L < \infty$, $f_{\boldsymbol{d}}(1/2) < \infty$, $\boldsymbol{d}$ 在 0 和 1 处有聚点，并且存在$\delta_0 \in [0, \delta^L]$ 使得：

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1 - \alpha)\delta_0 \qquad \text{对所有 } \alpha \in (0, 1), \tag{11.3}$$

$$f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) - f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \equiv -\delta_0 \mod 1 \qquad \text{对某个 } \alpha \in (0, 1), \tag{11.4}$$

$$\sum_{\lambda_i<0} |\lambda_i| < \infty \implies \delta^L = \delta_0. \tag{11.5}$$

In 此外，若 $(\mathfrak{d}'_\alpha)$ 成立，则算子 E 在某点 $\alpha \in [0, 1)$ 处解耦，且 whe *re*

$(\mathfrak{d}'_0)$ $\delta^L = 0$ *or* $\delta_0 = 0$,

$(\mathfrak{d}'_\alpha)$ $\alpha \in (0, 1)$ *and* $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) = f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) + (1 - \alpha)\delta_0$.

(充分性) 反过来，若 (11.1) 和 (11.2) 成立，$(\mathfrak{d}'_\alpha)$ 对任何 $\alpha \in [0, 1)$ 都不成立，并且

- (i) 或 (ii) 成立，或
- (iii) 成立，$\lambda_j < 1$ 对所有 j,

那么 $\boldsymbol{d}$ 是 E的对角线。

注 11.2. 注意，只有在 (iii) 成立时，数 δ_0 才有定义。因此，在 (iii) 不成立的情况下，必须按照以下约定恰当地理解陈述 $(\mathfrak{d}'_\alpha)$。如果 (i) 或 (ii) 成立，那么我们将陈述 $(\mathfrak{d}'_\alpha)$ 中涉及 δ_0 的任何等式都视为假。根据这一约定，我们注意到，如果 (i) 或 (ii) 成立，那么对于所有$\alpha \in (0,1)$，$(\mathfrak{d}'_\alpha)$ 都是假的，而陈述 $(\mathfrak{d}'_0)$ 则变为 $\delta^L = 0$。

证明。定理 11.1 的必要性部分可直接由定理 9.1 得出。例外是 (11.1)，它可由以下事实得出：任何与对角线$d_i = 1$ 对应的基向量都是 E的特征向量。

为证明充分性，假设 (11.1) 和 (11.2) 成立，且对于任何$\alpha \in [0,1)$，$(\mathfrak{d}'_\alpha)$ 均不成立。由 (i)–(iii) 可知，对于无穷多个 i，$d_i < 1$。令 $\boldsymbol{d}' = (d_i)_{d_i<1}$。若 $\#|\{i\colon d_i = 1\}| < \infty$，令 $\boldsymbol{\lambda}'$ 为一个序列，其项包含 $(\lambda_i)_{\lambda_i<1}$ 的所有项，以及 $\#|\{i\colon \lambda_i = 1\}| - \#|\{i\colon d_i = 1\}|$ 个等于 1 的项。若 $\#|\{i\colon d_i = 1\}| = \infty$，则令 $\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda}$。若$\boldsymbol{d}'$是自伴算子 E 的对角线，且其特征值列表为 $\boldsymbol{\lambda}'$，则 $E \oplus \mathrm{I}$ 的特征值列表为 $\boldsymbol{\lambda}$，对角线为 $\boldsymbol{d}$，其中 I 是维数为 $\#|\{i : d_i = 1\}|$ 的空间上的恒等算子。注意，1 是 $\boldsymbol{\lambda}'$ 的聚点，因此不失一般性，我们可以假设对于所有 i，$d_i < 1$。

若 (i) 成立，则由定理 8.3(c') 可知，序列 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。若 (ii) 成立，则$\delta^L > 0$，因为 $(\mathfrak{d}'_0)$ 不成立。由引理 8.2 可知，序列 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。最后，假设 (iii) 成立，并且对所有 j 都有 $\lambda_j < 1$。$(\mathfrak{d}'_0)$ 不成立意味着 $\delta_0 > 0$。因此，我们可以应用定理 7.4(ii)，推得 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。□

定理 1　　1.3. 设 E 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，且其谱满足

$$\sigma(E) \subset [0,1] \qquad and \qquad \sigma_{ess}(E) = \{0,1\}.$$

假设 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(1/2) < \infty$，其中 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j\in J}$ 是 E 的所有特征值按重数排列的列表。设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $[0,1]$ 中的一个序列。

（必要性）若 $\boldsymbol{d}$ 是 E的对角线，则

$$\#|\{i : d_i = 0\}| \le \#|\{j : \lambda_j = 0\}|, \tag{11.6}$$

$$\#|\{i : d_i = 1\}| \le \#|\{j : \lambda_j = 1\}|, \tag{11.7}$$

且以下两个条件之一成立：

（i） $f_{\boldsymbol{d}}(1/2) = \infty$，或

（ii） $f_{\boldsymbol{d}}(1/2) < \infty$，$\boldsymbol{d}$ 在 0 和 1 处有聚点，并且

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \qquad \text{对所有 } \alpha \in (0,1), \tag{11.8}$$

$$f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) - f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \equiv 0 \mod 1 \qquad \text{对某个 } \alpha \in (0,1)。 \tag{11.9}$$

*In a*此外，算子 E 在点 $\alpha \in (0,1)$ 处解耦，当且仅当 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) = f_{\boldsymbol{d}}(\alpha)$。

（充分性）反过来，如果 (11.6) 和 (11.7) 成立，并且满足以下任一条件：

- (i) 成立，或者
- (ii) 成立，且对所有 j，都有 $0 < \lambda_j < 1$，

那么 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。

证明。（必要性）假设 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。由以下事实可得 (11.6) 和 (11.7)：由于 $\sigma(E) \subset [0,1]$，任何与对角项 $d_i \in \{0,1\}$ 相对应的基元素都必须是特征向量。若 $f_{\boldsymbol{d}}(1/2) = \infty$，则无需证明。在.....的情况下

$f_{\boldsymbol{d}}(1/2) < \infty$，则 (11.8)、(11.9) 以及关于解耦的补充陈述均由定理 4.1 得出。

（充分性）假设 (11.6) 和 (11.7) 成立。再假设 (i) 成立。我们可以将$E = \mathbf{0} \oplus E' \oplus \mathrm{I}$ 分解，其中 0 是定义在维数为 $\#|\{i : d_i = 0\}|$ 的空间上的零算子，而 I 是定义在维数为 $\#|\{i : d_i = 1\}|$ 的空间上的恒等算子。此外，我们可以假设$\{0, 1\} \subset \sigma_{ess}(E')$。根据定理 8.1，序列 $\boldsymbol{d}' := (d_i)_{d_i \in (0,1)}$ 是 E' 的一个对角线，因此 $\boldsymbol{d}$ 是 E的一个对角线。接下来，假设 (ii) 成立，且对所有 j，都有 $0 < \lambda_j < 1$。注意，(11.6) 和 (11.7) 蕴含对所有 $i \in \mathbb{N}$，都有 $0 < d_i < 1$，因此根据定理 6.2，$\boldsymbol{d}$ 是 E 的一个对角线。□

用于确定序列 $\boldsymbol{d}$ 是否为满足 $\#|\sigma_{ess}(E)| = 2$ 的算子 E 的对角线的算法如图 3 所示。该过程首先对 E 进行归一化，使其满足 (9.1)。随后，算法根据特征值序列$\boldsymbol{\lambda}$ 是否满足布拉施克条件 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(1/2) < \infty$分为两种情况。

在前一种情况下，我们检查外部主化 (9.2) 是否成立，以及定理 9.1 中的条件 (i)–(v) 是否至少有一个成立。若不成立，则 $\boldsymbol{d}$ 不是E的对角线。满足定理 9.1 中的必要条件后，我们检查是否存在某个 $\alpha \in (0, 1)$ 使 $(\mathfrak{d}_\alpha)$ 成立。根据注 9.2，如果条件 (i)–(iv) 中有一个成立，那么对所有 $\alpha \in (0, 1)$，$(\mathfrak{d}_\alpha)$ 均不成立。因此，若存在某个 $\alpha \in (0, 1)$ 使 $(\mathfrak{d}_\alpha)$ 成立，则定理 9.1 中的条件 (v) 必然成立。根据定理 4.1，若 $\boldsymbol{d}$ 是 E的对角线，则算子 E 在 α处解耦。因此，定理 2.22 给出 E 在 α 处分解为算子 E_1 和 E_2，使得 $(d_i)_{d_i<\alpha}$ 是 E_1的对角线，$(d_i)_{d_i>\alpha}$ 是 E_2的对角线，并且 (2.23) 成立。反过来，这种分解的存在意味着 $\boldsymbol{d}$ 是 E的对角线。因此，要确定 $\boldsymbol{d}$是否为 E的对角线，我们需要寻找如上所述在 α 处分解 E 为 E_1 和 E_2 的所有可能方式。对于算子 E_1 和 E_2，我们分别使用图 1]中的 1点算法 [18,，检验 $(d_i)_{d_i<\alpha}$和 $(d_i)_{d_i>\alpha}$ 是否分别为 E_1 和 E_2的对角线。

如果对所有 $\alpha \in (0, 1)$，$(\mathfrak{d}_\alpha)$ 都不成立，那么我们检查 $(\mathfrak{d}_\alpha)$ 对 $\alpha = 0$ 还是 $\alpha = 1$ 是否成立。若不成立，则由定理 9.1 可知，$\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。因此，我们可以假设 $(\mathfrak{d}_\alpha)$ 对 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$ 成立。为明确起见，假设 $(\mathfrak{d}_1)$ 成立，但 $(\mathfrak{d}_0)$ 不成立。根据定理 9.1，如果 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线，那么算子 E 在 1 处解耦。和前面一样，定理 2.22 得出 E 在 1 处分解为算子 E_1 和 E_2，使得 $(d_i)_{d_i<1}$ 是 E_1 的对角线，$(d_i)_{d_i>1}$ 是 E_2 的对角线，并且 (2.23) 对 $\alpha = 1$ 成立。反过来，存在这样的分解意味着 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。算子 E_2 是紧算子的平移，而算子 E_1 的本质谱中是否有两个点，取决于 1 是否属于 $\sigma_{ess}^-(E)$ 的左本质谱。在 E_1 的本质谱只有一个点这一特殊情形下，我们使用 $[18, $图 $1]$ 中的 1 点算法和定理 2.20，检验 $(d_i)_{d_i<1}$ 和 $(d_i)_{d_i>1}$ 是否分别为 E_1 和 E_2 的对角线。这对应于图 3 中的符号 §。在一般情形下，E_1 的本质谱有两个点，此时使用定理 11.1 检验 $(d_i)_{d_i<1}$ 是否为 E_1 的对角线。由于对任何 $\alpha \in [0, 1)$ 和 $\delta_1 = 0$，$(\mathfrak{d}_\alpha)$ 都不成立，我们可以推断，对于算子 E_1，条件 $(\mathfrak{d}'_\alpha)$ 对任何 $\alpha \in [0, 1)$ 都不成立。请注意，定理 11.1 的充分性方向仅适用于 E_1 的所有特征值 λ 均为 < 1 的情形。对于 E_1 至少有一个特征值 $\lambda = 1$ 的所有分解，由于定理 11.1 中这类算子的核问题，该算法无法得出结论。最后注意，如果对 E 的任何分解都会得到一个有限维算子 E_2，那么我们就采用经典的 Schur-Horn

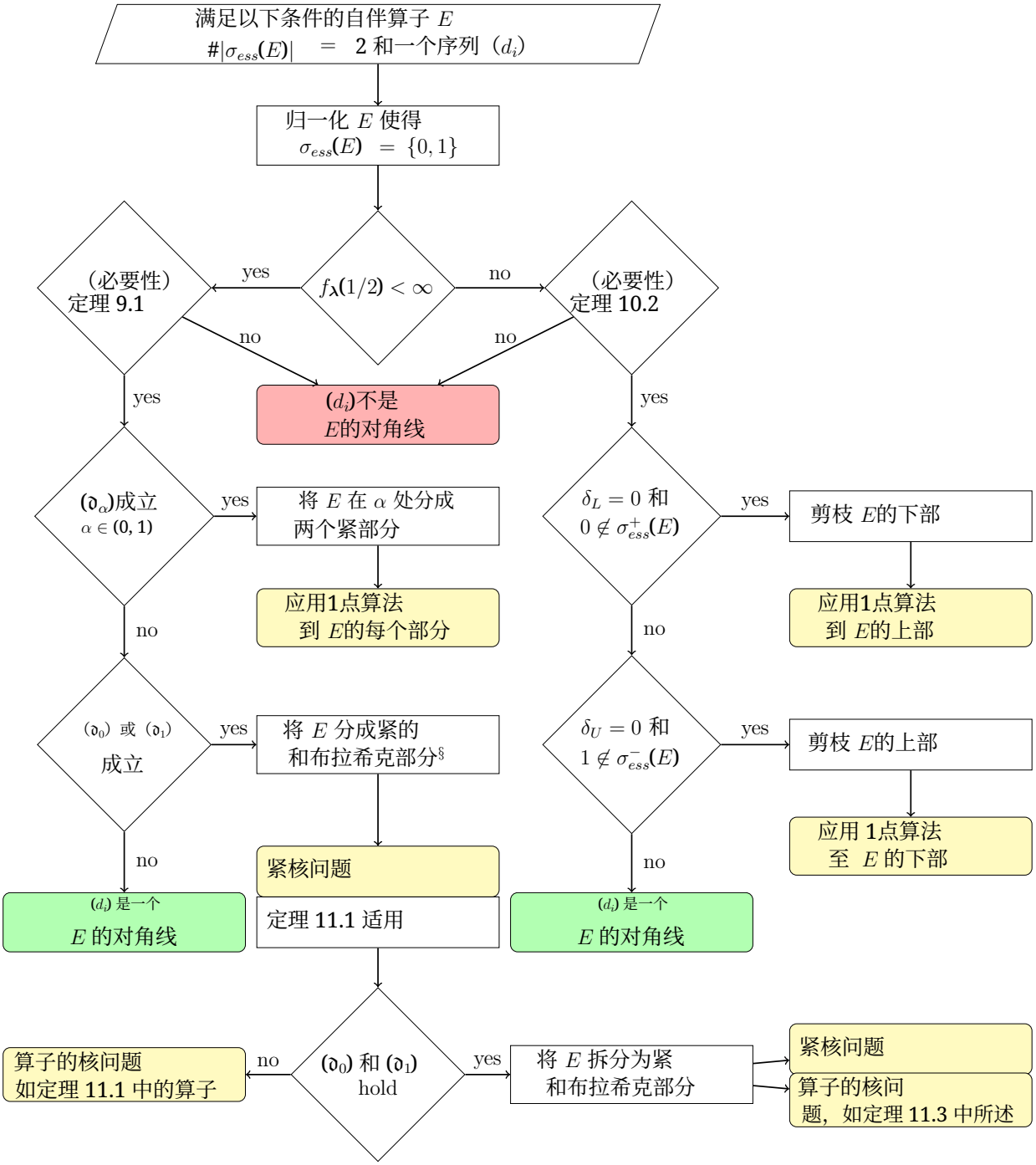


FIGURE 3. 两点本质谱算子算法。在特殊情况下，标记为 § 的分裂可能会产生两个紧算子，此时改用 1点算法和定理 2.20。

定理，而不是定理 2.20。至此，我们完成了对算法的分析：$(\mathfrak{d}_1)$ 成立，但 $(\mathfrak{d}_0)$ 不成立。

当 $(\mathfrak{d}_0)$ 成立但 $(\mathfrak{d}_1)$ 不成立时，可通过应用定理 11.1 的一个对称变体得到结论。最后，我们考虑 $(\mathfrak{d}_0)$ 和 $(\mathfrak{d}_1)$ 均成立的情形。根据定理 9.1，若 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的一个对角线，则算子 E 在 0 和 1 处均解耦。连续两次应用定理 2.22，可将 E 在 0 和 1 处分解为算子 E_0、E_1 和 E_2，使得 $(d_i)_{d_i<0}$ 是 E_0 的一个对角线，$(d_i)_{0<d_i<1}$ 是 E_1 的一个对角线，$(d_i)_{d_i>1}$ 是E_2 的一个对角线，并且

$$\dim\ker(E) = \dim\ker(E_0) + \dim\ker(E_1) + \#|\{i : d_i = 0\}|,$$
$$\dim\ker(\mathbf{I} - E) = \dim\ker(\mathbf{I} - E_1) + \dim\ker(\mathbf{I} - E_2) + \#|\{i : d_i = 1\}|.$$

反过来，存在这样的分解意味着 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的一个对角线。因此，为了确定 $\boldsymbol{d}$ 是否是 E 的一个对角线，我们要寻找 E 分解为 E_0、E_1 和 E_2（如上所述）的所有可能方式。对于算子 E_0 和 E_2，我们使用定理 2.20 检验 $(d_i)_{d_i<0}$ 和 $(d_i)_{d_i>1}$ 是否分别是 E_0 和 E_2 的对角线；而对于 $(d_i)_{0<d_i<1}$ 是否是 E_1 的一个对角线，则使用定理 11.3 进行检验。对于所有满足 E_1 至少有一个特征值 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$ 的分解，由于定理 11.3 中此类算子存在核问题，该算法无法给出确定结论。

最后请注意，如果对 E 的任何分裂导致算子 E_0、E_1 或 E_2 中的某一个是有限维的，那么我们采用经典 Schur-Horn 定理，而不采用定理 2.20 和 11.3。请注意，两者 E_0 和 E_2 均为有限维的极端情形也可能发生。然而，只有在这种情况下，算子 E_0、E_1 或 E_2 中才会有两个是有限维的。至此，当特征值序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 满足布拉施克条件 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(1/2) < \infty$ 时，图 3 中算法的分析就结束了。

为了分析特征值序列 $\boldsymbol{\lambda}$ 满足非布拉施克条件$f_{\boldsymbol{\lambda}}(1/2) = \infty$ 时的算法，我们采用以下引理。

引理 11.4. 设 E 是作用在 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子。设 $\boldsymbol{\lambda}$ 为 E 的所有特征值按重数列出的列表。假设

$$\sigma_{ess}(E) = \{0, 1\} \qquad and \qquad f_{\boldsymbol{\lambda}}(1/2) = \infty.$$

设 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 满足 (10.2)、(10.3) 以及定理 10.2 中的四个条件 (i)–(iv) 之一。假设

$$\delta^U = 0 \qquad and \qquad 1 \notin \sigma^-_{ess}(E).$$

设 $(E', \boldsymbol{d}')$ 是 $(E, \boldsymbol{d})$ 在 1 处的一种剪枝。设 $\boldsymbol{\lambda}'$ 是 E' 的所有特征值按重数排列而成的列表。那么，$\boldsymbol{d}$ 是 $E \iff \boldsymbol{d}'$ 的对角线，也是 E' 的对角线。

证明。首先假设 $\boldsymbol{d}$ 是 E 的对角线。由于 $\delta^U = 0$，算子 E 相对于 $\boldsymbol{d}$ 在 1 处解耦，如定义 2.9 所述。也就是说，

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : d_i \le 1\} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{H}_1 = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : d_i > 1\},$$

是 E 的不变子空间，并且

$$\sigma(E|_{\mathcal{H}_0}) \subset (-\infty, 1] \qquad \text{and} \qquad \sigma(E|_{\mathcal{H}_1}) \subset [1, \infty).$$

特别地，算子 $E|_{\mathcal{H}_0}$ 是 E' 的一个限制，其对角线为 $\boldsymbol{d}'$。算子 E' 和 $E|_{\mathcal{H}_0}$ 是紧的，且至多只在特征值 1 的重数上有所不同。也就是说，$E|_{\mathcal{H}_0}$ 的特征值列表与 E' 的相同，只是前者中等于 1 的特征值可能较少。如果 E' 等于 $E|_{\mathcal{H}_0}$，那么 $\boldsymbol{d}'$ 是 E' 的一个对角线。否则，注意定理 2.18 中针对 $(E', \boldsymbol{d}')$ 这一对的 σ_+ 的值为正，且大于

或等于针对 $(E|_{\mathcal{H}_0}, \boldsymbol{d}')$ 这一对的值。根据定理 2.18 的必要性方向，我们看到 (2.9)–(2.12) 和 (2.14) 对 $(E', \boldsymbol{d}')$ 这一对也成立。由于 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(1/2) = \infty$，我们有 $(\boldsymbol{\lambda}')_+ \notin \ell^1$。因此，若 $\boldsymbol{d}_+ \in \ell^1$，则针对 $(E|_{\mathcal{H}_0}, \boldsymbol{d}')$ 这一对的 σ_+ 和 σ_- 的值均为无穷大。于是，(2.13) 对 $(E', \boldsymbol{d}')$ 这一对也成立，并且根据定理 2.18 的充分性方向，序列 $\boldsymbol{d}'$ 是 E' 的一个对角线。

反过来，假设 $\boldsymbol{d}'$ 是 E'的对角线。根据定理 2.20 的一个特殊情形——Kaftal 和 Weiss 对具有平凡核的正紧算子的对角线所作的刻画—— [41], $(d_i)_{d_i>1}$ 是 E 在 $\pi(1,\infty)$ 的值域上的限制的对角线。因此，$\boldsymbol{d}$ 是 E的对角线。□

在 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(1/2) = \infty$的情形下，我们首先检查所有必要条件 (10.2)–(10.4) 以及定理 10.2 中条件 (i)–(iv) 是否至少有一个成立。若不成立，则 $\boldsymbol{d}$不是 E的对角线。若 $\delta^U = 0$ 和 $1 \notin \sigma^-_{ess}(E)$均成立，则定义 $(E', \boldsymbol{d}')$ 为在 1 处对 $(E, \boldsymbol{d})$ 进行剪枝所得的结果。引理 11.4 表明，$\boldsymbol{d}$是 E 的对角线，当且仅当 $\boldsymbol{d}'$ 是 E'的对角线。由于 E' 是紧算子，我们应用 1点算法来检验 $\boldsymbol{d}'$ 是否为 E'的对角线。同样，若 $\delta^L = 0$ 和 $0 \notin \sigma^+_{ess}(E)$均成立，则我们使用引理 11.4 的对称变体来证明可在 0 处对 $(E, \boldsymbol{d})$ 进行剪枝。最后剩下满足 (10.5) 的情形，此时由定理 10.2 可知 $\boldsymbol{d}$ 是 E的对角线。至此，图 3 中 2点算法的分析结束。

12. Kernel problem for operators with 2-point essential spectrum

本节讨论定理 11.1 和定理 11.3 中两类算子的核问题。特别地，我们证明，与定理 2.20 中的紧正算子类似，定理 11.3 中的算子还必须满足额外的必要条件。

定理 12.1. 设 E 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的正算子，且满足 $\sigma(E) \subset [0,1]$。设 $(e_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基。定义序列 $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in I}$ 为 $d_i = \langle Ee_i, e_i\rangle$。若$f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) < \infty$ 对某个 $\alpha \in (0,1)$成立，则 E 可对角化。此外，若 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in I}$ 是 E的特征值列表（计入重数），则

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \le f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) \qquad \text{for all } \alpha \in (0,1), \tag{12.1}$$

$$f'_{\boldsymbol{d}}(\alpha) - f'_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) \in \mathbb{Z} \qquad \text{for a.e. } \alpha \in (0,1). \tag{12.2}$$

此外，我们有

$$\#|\{i : d_i = 0\}| + \liminf_{\alpha\searrow 0} \frac{f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) - f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)}{\alpha} \ge \#|\{j : \lambda_j = 0\}| \ge \#|\{i : d_i = 0\}|, \tag{12.3}$$

$$\#|\{i : d_i = 1\}| + \liminf_{\alpha\nearrow 1} \frac{f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) - f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)}{1-\alpha} \ge \#|\{j : \lambda_j = 1\}| \ge \#|\{i : d_i = 1\}|. \tag{12.4}$$

注 12.2. 条件 (12.3) 和 (12.4) 是定理 2.20 中主序不等式 (2.21) 的类似形式，不过它们是用主序函数表述的。事实上，(2.21) 可以等价地用勒贝格主序表述为

$$\liminf_{\alpha\searrow 0} \frac{\delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d})}{\alpha} \ge z.$$

同样，(2.22) 等价于存在 $\alpha_0 > 0$ 使得

$$\delta(\alpha, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) \ge \alpha z \qquad \text{for } 0 < \alpha < \alpha_0.$$

由于我们不需要这些事实，证明留给读者完成。

证明。根据引理 4.2，只需证明结论 (12.3) 和 (12.4)。考虑对称性，只需证明 (12.3)。若对某个 $i \in I$， $d_i = 0$ 为 0 或 1，则 e_i 是 E 的特征值为 0 或 1 的特征向量。因此，不失一般性，我们可以假设对所有 $i \in I$， $d_i \in$ 属于 (0, 1)。我们按照引理 4.2 的证明进行。

根据谱定理，存在一个投影值测度 π，使得

$$E = \int_{[0,1]} \lambda \, d\pi(\lambda).$$

固定 $\alpha \in \in (0, 1)$，并令

$$K = \int_{[0,\alpha)} \lambda \, d\pi(\lambda) \quad \text{and} \quad T = \int_{[\alpha,1]} (1-\lambda) \, d\pi(\lambda).$$

令 P 为由 $P = \pi([\alpha, 1])$ 给出的投影。对每个 $i \in I$，令 $k_i = \langle Ke_i, e_i \rangle$、$p_i = \langle Pe_i, e_i \rangle$，以及 $t_i = \langle Te_i, e_i \rangle$。由于 $E = K + P - T$，我们还有

$$d_i = k_i + p_i - t_i. \tag{12.5}$$

我们断言 K 和 T 是迹类。由于 K 和 T 是正的，且 $(e_i)_{i \in I}$ 是帕塞瓦尔框架，只需证明 $\sum_{i \in I} (k_i + t_i) < \infty$。

接下来，我们观察到

$$T = \int_{[\alpha,1]} (1-\lambda) \, d\pi(\lambda) \leq \int_{[\alpha,1]} (1-\alpha) \, d\pi(\lambda) = (1-\alpha)P \tag{12.6}$$

and

$$K = \int_{(0,\alpha)} \lambda \, d\pi(\lambda) \leq \int_{(0,\alpha)} \alpha \, d\pi(\lambda) = \alpha(\mathbf{I} - P) - \alpha\pi(\{0\}). \tag{12.7}$$

令 $J = \{i \in I : \ d_i < \alpha\}$。结合 $E = K + P - T$和 (12.6) 可得 $E \geq K + \frac{\alpha}{1-\alpha} T$。由 (12.5) 可推得 $d_i \geq k_i + \frac{\alpha}{1-\alpha} t_i$，因此

$$\sum_{i \in J} \left(k_i + \frac{\alpha}{1-\alpha} t_i \right) \leq \sum_{i \in J} d_i < \infty. \tag{12.8}$$

由 (12.7) 可推得

$$\mathbf{I} - E = T - K + (\mathbf{I} - P) \geq T + \frac{1-\alpha}{\alpha} K + \pi(\{0\}).$$

因此，$1 - d_i \geq \frac{1-\alpha}{\alpha} k_i + t_i + z_i$，其中 $z_i = \langle \pi(\{0\}) e_i, e_i \rangle$。由此可得

$$\sum_{i \in I \setminus J} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} k_i + t_i + z_i \right) \leq \sum_{i \in I \setminus J} (1 - d_i) < \infty. \tag{12.9}$$

结合 (12.8) 和 (12.9) 可得 K 和 T 是迹类。

根据紧算子的谱定理，存在一个标准正交基 $(f_i)_{i \in J_1}$，它由 K 的特征向量组成，用于 ran(I $- P$)，相应的特征值为 $(\lambda_i)_{i \in J_1}$。此外，还存在一个标准正交基 $(f_i)_{i \in J_2}$，它由 T 的特征向量组成，用于 ran(P)，相应的特征值为 $(1 - \lambda_i)_{i \in J_2}$。由于 K 和 T 属于迹类，$(\lambda_i)_{i \in J_1}$ 和 $(1 - \lambda_i)_{i \in J_2}$ 都是可求和的。对于 $i \in J_1$，我们有 $(P - T) f_i = 0$，因此 $E f_i = \lambda_i f_i$。对于 $i \in J_2$，我们有

$Kf_i = 0$ 从而 $Ef_i = \lambda_i$。因此，$(f_i)_{i\in J_1\cup J_2}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基，它由 E 的特征向量组成，相应的特征值为 $(\lambda_i)_{i\in J_1\cup J_2}$。这表明 E 是可对角化的。

根据 K 和 T 的定义可知，对于 $i \in J_1$，有 $\lambda_i < \alpha$；对于 $i \in J_2$，有 $\lambda_i \geq \alpha$。因此，

$$C_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) = \sum_{\lambda_i<\alpha} \lambda_i = \sum_{i\in J_1} \lambda_i < \infty \quad \text{and} \quad D_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) = \sum_{\lambda_i\geq\alpha} (1-\lambda_i) = \sum_{i\in J_2} (1-\lambda_i) < \infty.$$

这意味着 $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) < \infty$。此外，利用 (12.8) 和 (12.9)，可得

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha) &= (1-\alpha)\sum_{i\in J_1}\lambda_i + \alpha\sum_{i\in J_2}(1-\lambda_i) = (1-\alpha)\operatorname{tr}(K) + \alpha\operatorname{tr}(T) = (1-\alpha)\sum_{i\in I} k_i + \alpha\sum_{i\in I} t_i \\ &= (1-\alpha)\sum_{i\in J}\left(k_i + \frac{\alpha}{1-\alpha}t_i\right) + \alpha\sum_{i\in I\setminus J}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}k_i + t_i\right) \\ &\leq (1-\alpha)\sum_{i\in J} d_i + \alpha\sum_{i\in I\setminus J}(1-d_i) - \alpha\sum_{i\in I\setminus J} z_i = f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) - \alpha\sum_{i\in I\setminus J} z_i, \end{aligned}$$

这表明 (12.1) 成立。此外，

$$\frac{f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) - f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)}{\alpha} \geq \sum_{d_i>\alpha} z_i \to \sum_{i\in I} z_i = \dim\ker E \qquad \text{as } \alpha \searrow 0.$$

这就证明了 (12.3)。 □

通过将结论 (12.4) 替换为下式，定理 12.1 可像定理 11.1 那样推广到算子类

$$\#|\{i : d_i = 1\}| + \liminf_{\alpha\nearrow 1} \frac{f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) - f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)}{1-\alpha} + \delta_0 \geq \#|\{j : \lambda_j = 1\}| \geq \#|\{i : d_i = 1\}|.$$

由于我们不会用到这一事实，因此略去其证明；该证明是定理 12.1 的一个更复杂的变体。此外，(12.3) 和 (12.4) 似乎并非存在具有指定对角元的算子（如定理 12.1 中所述）的充分条件。事实上，我们预计存在 $\alpha_0 > 0$ 使得

$$\#|\{i : d_i = 0\}| + \frac{f_{\boldsymbol{d}}(\alpha) - f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha)}{\alpha} \geq \#|\{j : \lambda_j = 0\}| \geq \#|\{i : d_i = 0\}| \qquad \text{for } 0 < \alpha < \alpha_0,$$

连同 (12.4) 的类似陈述，都是充分条件。这与定理 2.20 中正紧算子的核问题类似，其中必要条件 (2.21) 与充分条件 (2.22) 之间的差距依然存在。

References

[1] J. Antezana, P. Massey, M. Ruiz, D. Stojanoff, 《指定范数和框架算子的算子与框架的 Schur-Horn 定理》, 《伊利诺伊数学杂志》51 (2007), 537–560。[2] M. Argerami, 《主序与 Carpenter 定理》, 《积分方程与算子理论》82 (2015), 33–49。[3] M. Argerami, P. Massey, 《II_1 因子中的 Schur-Horn 定理》, Indiana Univ. Math. J. 56 (2007), 2051–2059。[4] M. Argerami, P. Massey, 《论 Carpenter 定理》, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 3679–3687。

[5] M. Argerami, P. Massey, 《II∞-因子中的 Schur-Horn 定理》, 《太平洋数学杂志》261 (2013), 283–310。[6] W. Arveson, 《有限谱正规算子的对角线》, 《美国国家科学院院刊》104 (2007), 1152–1158。[7] W. Arveson, R. Kadison, 《自伴算子的对角线》, 《算子理论、算子代数及其应用》, 247–263, 《当代数学》414, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2006。[8] M. F. Atiyah, 《凸性与可交换哈密顿量》, 《伦敦数学会会刊》14 (1982), 1–15。[9] B. V. R. Bhat and M. Ravichandran, 《有限谱算子的 Schur-Horn 定理》, Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014), 3441–3453。[10] J.-C. Bourin, 《压缩与压缩映射》, 《算子理论杂志》50 (2003), 211–220。[11] J.-C. Bourin, E.-Y. Lee, 《压缩映射与正线性映射》, 《泛函分析杂志》270 (2016), 359–374。[12] M. Bownik, J. Jasper, 《框架范数序列的刻画》, 《纯粹与应用数学杂志》654 (2011), 219–244。[13] M. Bownik, J. Jasper, 《Carpenter 定理的构造性证明》, 《加拿大数学通报》57 (2014), 463–476。[14] M. Bownik, J. Jasper, 《指定框架范数的框架算子的谱》, 《调和分析与偏微分方程》, 《当代数学》612 (2014), 65–79。[15] M. Bownik, J. Jasper, 《有限谱算子的 Schur-Horn 定理》, 《美国数学会汇刊》367 (2015), 5099–5140。[16] M. Bownik, J. Jasper, 《有限谱自伴算子的对角线》, 《波兰科学院数学通报》63 (2015), 249–260。[17] M. Bownik, J. Jasper, 《指定范数和框架算子的框架的存在性》, 《调和分析专题》第4卷, 103–117, 《应用数值调和分析》, Birkh¨auser/施普林格, 纽约, 2015。[18]M. Bownik, J. Jasper, 《自伴算子的对角线 I：紧算子》, 预印本 arXiv:2212.08182。[19] M. Bownik, J. Jasper, B. Siudeja, 《离散谱无界算子的 Schur-Horn 定理》, 《伦敦数学会会刊》49 (2017), 148–164。[20] M. Bownik, M. Szyszkowski, 《Kadison 的 Carpenter 定理中的可测选择子》, 《加拿大数学杂志》72 (2020), 1505–1528。[21] O. Christensen, 《框架与 Riesz 基导论》, 《应用与数值调和分析》。Birkh¨auser Boston, Inc., 波士顿, 马萨诸塞州, 2003。[22] J. B. Conway, 《算子理论教程》, 《数学研究生教材》21。美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2000。[23] D. Dauitbek, J. Huang, F. Sukochev, 《被可积函数主序的元素集合的极端点：解决 Luxemburg 提出的问题及其非交换对应问题》, 《数学进展》365 (2020), 107050, 共26页。[24] K. J. Dykema, J. Fang, D. W. Hadwin, and R. R. Smith, 《有限因子中极大阿贝尔自伴子代数的 Carpenter 问题与 Schur-Horn 问题》, Illinois J. Math. 56 (2012), 第4期, 1313–1329。[25] K. Dykema, D. Freeman, K. Kornelson, D. Larson, M. Ordower, E. Weber, 《椭球紧框架与算子的投影分解》, Illinois J. Math. 48 (2004), 477–489。[26] P. Fan, 《算子的对角线》, 《美国数学会会刊》283 (1984), 239–251。[27] P. Fan, C. K. Fong, 《零对角算子的内在刻画》, Proc. Amer. Math. Soc. 121 (1994), 803–805。[28] P. Fan, C. K. Fong, D. Herrero, 《零对角算子与迹》, Proc. Amer. Math. Soc. 99 (1987), 第3期, 445–451。[29] P. A. Fillmore, J. G. Stampfli, J. P. Williams, 《关于本质数值域、本质谱及 Halmos 的一个问题》, 《塞格德数学科学学报》33 (1972), 179–192。[30] C. K. Fong, 《幂零算子的对角线》, 《爱丁堡数学会会刊》29 (1986), 221–224。[31] V. Guillemin, S. Sternberg, 《动量映射的凸性性质》, 《数学发明》67 (1982), 491–513。[32] V. Guillemin, S. Sternberg, 《动量映射的凸性性质 II》, 《数学发明》77 (1984), 533–546。

[33] D. Han, D. Larson, 《框架、基与群表示》，美国数学学会回忆录 147 (2000)，第697期，x+94 页。[34] D. Herrero, 《希尔伯特空间算子的对角元》, 《非线性偏微分方程当前研究方向》（犹他州普罗沃, 1987）。《落基山数学杂志》21 (1991)，857–864。[35] A. Horn, 《双随机矩阵与旋转矩阵的对角线》, 《美国数学杂志》76 (1954)，620–630。[36] J. Jasper, 《三点谱算子的 Schur-Horn 定理》, 《泛函分析杂志》265 (2013)，1494–1521。[37] J. Jasper, J. Loreaux, G. Weiss, 《紧算子的 Thompson 定理与酉算子的对角》，Indiana Univ. Math. J. 67 (2018)，1–27。[38] R. Kadison, 《勾股定理 I：有限情形》, 《美国国家科学院院刊》99 (2002)，4178–4184。[39] R. Kadison, 《勾股定理 II：无限离散情形》, 《美国国家科学院院刊》99 (2002)，5217–5222。[40] V. Kaftal, J. Loreaux, 《Kadison 勾股定理与本质余维》，Integral Equations Operator Theory 87 (2017)，565–580。[41] V. Kaftal, G. Weiss, 《无限维舒尔-霍恩定理与主序理论》, 《泛函分析杂志》259 (2010)，3115–3162。[42] V. Kaftal, G. Weiss, 《主序与算术平均理想》，Indiana Univ. Math. J. 60 (2011)，第5期，1393–1424。[43] M. Kennedy 和 P. Skoufranis, 《正规算子的 Schur-Horn 问题》, 《伦敦数学会会刊》(3) 111 (2015)，第2期，354–380。[44] K. Kornelson, D. Larson, 《算子的秩一分解与框架构造》, 《小波、框架与算子理论》, 203–214, 《当代数学》345，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2004。[45] B. Kostant, 《关于凸性、魏尔群与岩泽分解》, 《科学研究所高等研究院数学年刊》6 (1973)，413–455。[46] J. Loreaux 和 G. Weiss, 《正紧算子的主序与 Schur-Horn 定理：非零核情形》, 《泛函分析杂志》268 (2015)，第3期，703–731。[47] J. Loreaux 和 G. Weiss, 《对角性与幂等元及其在算子理论和框架理论问题中的应用》, 《算子理论杂志》75 (2016)，91–118。[48] J. Loreaux 和 G. Weiss, 《算子的对角线：自伴、正规及其他类别》，#opera- tortheory27，193–214, 《Theta 高等数学丛书》，Theta 出版社，布加勒斯特，2020。[49] A. W. Marshall, I. Olkin, B. C. Arnold, 《不等式：主序理论及其应用》，第二版，Springer 统计学丛书，施普林格，纽约，2011。[50] P. Massey, M. Ravichandran, 《多变量 Schur-Horn 定理》, 《伦敦数学会会刊》112 (2016)，206–234。[51] V. Müller, Y. Tomilov, 《算子的对角线与 Blaschke 谜题》, 《美国数学会会刊》372 (2019)，第5期，3565–3595。[52] V. Müller, Y. Tomilov, 《探寻凸性：对角线与数值域》, 《伦敦数学会会刊》53 (2021)，第4期，1016–1029。[53] V. Müller, Y. Tomilov, 《算子、基与矩阵之间的相互作用》, 《泛函分析杂志》281 (2021)，第9期，论文编号109158，38页。[54] A. Neumann, 《Schur-Horn 凸性定理的无限维版本》, 《泛函分析杂志》161 (1999)，418–451。[55] M. Ravichandran, 《冯·诺依曼代数中的 Schur-Horn 定理》，预印本 arxiv 1209.0909.[56]I. Schur, 《关于一类平均构造及其在行列式理论中的应用》, 《柏林数学会会议报告》22 (1923)，9–20。[57] R. C. Thompson, 《奇异值、对角元与凸性》, 《工业与应用数学学会应用数学杂志》32 (1977), 39–63。[58] J. P. Williams, 《关于矩阵压缩》, 《伦敦数学会杂志》3 (1971)，526–530。

Department of Mathematics, University of Oregon, Eugene, OR 97403–1222, USA电子邮件地址：mbownik@uoregon.edu

Department of Mathematics & Statistics, Air Force Institute of Technology, WrightPatterson AFB, OH 45433, USA电子邮件地址：john.jasper@afit.edu