arXiv:2304.14524v1 [math.MG] 27 Apr 2023

无限维 Carnot 群中的零集概念

NATHANIEL ELDREDGE*、MARIA GORDINA†、ENRICO LE DONNE‡ 和 SEAN LI

摘要。我们研究无限维卡诺群上的若干种零测集概念。我们证明，一个集合是 Aronszajn 零集，当且仅当它相对于卡诺子群上绝对连续测度的卷积（CAC）测度为零。CAC 测度是立方体测度的非交换类比。对于无限维类海森堡群，我们还证明，在上述意义下为零，等价于相对于所有热核测度均为零。此外，我们证明，交换子子群局部紧的无限维卡诺群具有巴拿赫流形结构。文中还提出了若干开放问题。

目录

1. 引言 2 2. 预备知识 4 2.1. 无限维 Carnot 群 4 2.2. 分层巴拿赫-李群 6 2.3. 无限维空间中概率测度的卷积与收敛 9 3. 可缩放度量群的商群 10 4. 局部紧交换子 14 5. 绝对连续测度的卷积 20 6. 高斯–哈尔测度 28 6.1. 准不变性 30 6.2. 高斯–哈尔测度与 CAC 测度 31 7. 热核测度 33 8. 开放问题 34 8.1. 其他零测集概念 35

日期：2023年5月1日。2020 数学主题分类。主要分类 22E66 ； 次要分类28C10, 28C20, 22E25, 53C17 。关键词和短语。无限维 Carnot 群、零测集、Aronszajn 零集、高斯测度、热核、分层巴拿赫-李群、无限维类海森堡群。

∗ 本研究部分由西蒙斯基金会资助（资助编号 #355659）。
† 本研究部分由美国国家科学基金会资助（资助编号 DMS-1954264）。
‡ 本研究部分由瑞士国家科学基金会资助（资助编号 200021-204501，项目“次黎曼测地线的正则性及其应用”），由欧洲研究委员会资助（ERC 初始资助项目 713998 GeoMeG“度量群的几何”），并由芬兰科学院资助（资助编号 322898，项目“通过度量几何和李群理论研究次黎曼几何”）。

8.2. 分层巴拿赫-李群 8.3. Aronszajn 零集及其紧子 35
集 8.4. 高阶热核零测集 参考文献 35
35
36

1. 引言

无限维巴拿赫空间分析中的主要挑战之一，是不存在规范的参考测度，因此也就没有与之对应的规范零测集概念。相反，人们提出了若干不同的概念。这些概念有重要应用，例如推广拉德马赫定理；这类定理表明，利普希茨函数的不可微点在某种意义上构成一个零测集 [22]。

这自然引出了一个问题：不同的零测集概念彼此之间有何关系？我们关注 M. Csörnyei 的一个定理 [8], ，该定理指出其中三种概念相同：具体而言，即 Aronszajn 零集、立方零集和高斯零测集。

若可分实巴拿赫空间 X 中的博雷尔集 E 满足以下条件，则称其为*Aronszajn* 零集：对于任意一个张成稠密子空间的序列 $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset X$ ，集合 E 都可以分解为若干博雷尔子集$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ，使得

$$m(\{t \in \mathbb{R} : x + tv_i \in E_i\}) = 0, \text{ for all } x \in X, i \in \mathbb{N},$$

其中， m 是 $\mathbb{R}$上的勒贝格测度。其次， X 上的非退化立方体测度是 X值随机变量的分布，其形式为 $x+\sum_{i=1}^{\infty} X_i v_i$，其中 $x \in X$、 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$是 $[-1,1]$上的独立同分布均匀随机变量，而 $\{v_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ 是向量序列，其张成空间在 X 中稠密，并且 $\sum_{i=1}^{\infty} \|v_i\| < \infty$。于是，若一个博雷尔集 E 相对于每个非退化立方体测度都是零测的，则称其为立方体零测。最后，若一个博雷尔集相对于每个非退化高斯测度都是零测的，则称其为高斯零测。不难看出，对于上述每一种概念，相应的零测集族都是一个 σ-理想，且不包含任何非空开集；本文研究的所有零测集概念都具有这一性质。

在本研究中，我们考虑将巴拿赫空间替换为一类特殊的无限维拓扑群时，零测集的不同概念。在这种情形下，由于缺少定义立方体测度和高斯测度所需的某些线性结构，我们需要引入新的零测集概念。我们首先回顾一类无限维群，在这类群中，Aronszajn 零集的概念已得到研究。在 [20], 中，作者引入了无限维 *Carnot* 群，这是一类以 Carnot 群和巴拿赫空间为模型的无限维拓扑群。我们回顾其定义，并从其（度量）可缩放群的概念开始。

定义 1.1 （可缩放群）。 可缩放群 是一个二元组 (G,δ)，其中 G 是一个拓扑群，且 δ: $\mathbb{R} \times G \to G$ 是一个连续映射，使得对所有$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$， $\delta_\lambda := \delta(\lambda,\cdot) \in \mathrm{Aut}(G)$,

$$\delta_\lambda \circ \delta_\mu = \delta_{\lambda\mu} \text{ for all } \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

以及 $\delta_0 \equiv e_G$，其中 e_G 是 G的单位元。

由此可知， δ_1 是 G的恒等映射。我们称 H 是可缩放群（G,δ）的一个可缩放子群，如果 H是 G的闭子群，并且对所有 $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$， δ_λ （H） $= H$。

定义 1.2 （度量可缩放群）。 一个度量可缩放群 是一个三元组 (G,δ,d)，其中 (G,δ) 是一个可缩放群，而 d 是 G 上的一个可容许左不变距离，使得

$$d(\delta_t(p),\delta_t(q)) = |t|d(p,q), \qquad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

这里的可容许 是指该度量在 G 上诱导出原拓扑。

现在 介绍由（有限维）Carnot 子群构成的滤过这一概念 .

定义 1.3 （按卡诺子群滤过）。 如果存在一列 $\{N_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 的 G 可缩放子群，使得每个 N_m 都具有卡诺群结构， $N_m < N_{m+1}$，且 G 是 $\cup_{m\in\mathbb{N}} N_m$ 的闭包，那么我们称可缩放群 $G = (G,\delta)$ 是按卡诺子群滤过的。在这种情况下，我们称序列 $\{N_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是可缩放群 G 的一个滤过，其滤过子群为卡诺子群。

最后，我们给出无限维卡诺群的定义。

定义 1.4。 我们将具有卡诺子群滤过的完备度量可缩放群称为无限维卡诺群。

[20] 的目标之一是将 Aronszajn 零集的概念扩展到我们在定义 2.5 中定义的这些无限维卡诺群。我们将在第 2.1 节回顾这些群的性质，但现在要指出的是，这些群可能具有复杂的结构，因为它们不一定是幂零群，也不一定是 Banach 流形。不过，我们将在定理 4.1 中给出这类群成为 Banach 流形的一个充分条件。

在另一条并行的研究脉络中，学者们研究了无限维类海森堡群上的布朗运动。这类群由 [10] 引入，后来发现它们是上述无限维卡诺群的一个子类。这些布朗运动的端点分布称为热核测度。由于在巴拿赫空间情形下，热核测度与高斯测度是同一类对象，因此可以将热核测度视为高斯测度在非交换情形下的推广。

本文聚焦于次椭圆热核测度，这类测度已在 [1, 9]中得到研究。借助那些论文中的正则性结果，我们证明热核零集（即对每个次椭圆热核测度而言均为零测集的集合）与 [20]中的 Aronszajn 零集一致。

定理 (定理 7.3)。 无限维类海森堡群中的一个博雷尔集是 *Aronszajn* 零集，当且仅当它是热核零集。

然而，对于一般的无限维卡诺群，缺少以规范方式构造布朗运动所需的额外结构。因此，我们引入无限维卡诺群上的另一种零测集概念，即*CAC* 零集。这类博雷尔集相对于一类测度为零，我们称之为*CAC*测度 ； 这些测度由一族测度的卷积给出，而这族测度相对于某个滤过中有限维卡诺子群上的哈尔测度绝对连续（见定义 5.1）。正如我们在注 5.2 中所解释的，这些测度可以视为立方体测度的一种粗略类比。我们将证明以下定理。

定理 (定理5.3). 无限维卡诺群中的一个博雷尔集是 *Aronszajn* 零集，当且仅当它是 *CAC* 零集。

虽然本文重点探讨的是零测集的不同概念，但我们也建立了无限维卡诺群与其他类型的无限维群（如巴拿赫-李群）之间的联系。以往许多无限维版本的卡诺群都与巴拿赫空间同胚。具体而言， [10,23,24]中研究的群是巴拿赫-李群。尽管其中大多数群也是 [20], 所定义的无限维卡诺群，但并非所有无限维卡诺群都是巴拿赫-李群。我们证明，当无限维卡诺群的换位子子群是局部紧的时，它就是一个分层巴拿赫-李群（定义见第 2.2 节）。请注意, [24] 在高阶巴拿赫-李群上构造了热核测度，但我们不知道这些测度是否相对于更易于分析的测度（例如第 6 节中的高斯-哈尔测度）绝对连续。

本文结构如下。第 2.1 节回顾无限维卡诺群和分层巴拿赫-李群（包括无限维类海森堡群）的基本性质。第 3 节研究无限维卡诺群的商群；特别地，我们证明它们的阿贝尔化是巴拿赫空间，这一事实将在全文中用到。第 4 节证明，若无限维卡诺群的换位子子群局部紧，则该群是分层巴拿赫-李群。第 5 节定义并研究立方体测度及其零测集的非交换类比。第 6 节介绍研究第 7 节中热核测度零集所需的背景知识。最后，我们在第 8 节讨论开放问题和猜想。

2. 预备知识

2.1. 无限维卡诺群。 我们已在引言中介绍了可伸缩卡诺群和无限维卡诺群的定义。现在我们来介绍引言中略过的（有限维）卡诺群的概念。

每个（有限维）卡诺群自然具有可缩放群的结构。这里，卡诺群 G 指的是一个单连通李群，其李代数 Lie(G) 带有分层 Lie(G) $= V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$。Lie($G$) 的分层在同构意义下唯一，参见 [5, 命题 2.2。10] 或 [18], ，并且它定义了 G 上的一族膨胀。事实上，根据 [5, 注 1.3， 26] 存在一族李群同态，它们对应于由 $\delta_\lambda^*(X) = \lambda^k X$ 定义的李代数缩放，其中 $X \in V_k$ 且 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。这样的群可以赋予度量，成为度量可缩放群；该度量在双 Lipschitz 等价意义下唯一。反过来，如果存在一个卡诺群与拓扑群 G 同构，且其由分层给出的膨胀与 δ 一致，我们就称可缩放群 (G, δ) 具有卡诺群结构。除非另有明确说明，本文中出现的卡诺群均假定为有限维。

回顾一下，无限维 Carnot 群包含一个由 Carnot 子群构成的稠密滤过 $\{N_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 。显然，若一个度量可缩放群存在由 Carnot 子群构成的滤过，则它是可分的。注意，无限维卡诺群 G不可能等于

其滤过 $\cup_{m\in\mathbb{N}}N_m$，除非 $G=N_m$ 对某个 $m\in\mathbb{N}$成立。事实上，每个 $N_m\subseteq G$ 都是无处稠密的，因此并集 $\cup_{m\in\mathbb{N}}N_m$ 在 G中是第一类集。

我们希望为可缩放群存在 Carnot 子群滤过提供充分的几何条件。对于可缩放群 G，将其 k 第 *th* 层定义为

$$V_k(G):=\{p\in G: t\mapsto \delta_{t^{1/k}}(p) \text{ is a one-parameter subgroup}\}, \tag{2.1}$$

这里，一参数子群是指从加法群 $\mathbb{R}$ 到 G的连续群同态。这意味着，对于所有 t、$s\in\mathbb{R}$ 和 $p\in V_k(G)$，我们都有

$$\delta_{(t+s)^{1/k}}(p)=\delta_{t^{1/k}}(p)\delta_{s^{1/k}}(p).$$

注意，若 $p\in V_1(G)$，则对于所有 $r\in\mathbb{R}$，$\delta_r(p)\in V_1(G)$，因为

$$\delta_{t+s}(\delta_r(p))=\delta_{tr+sr}(p)=\delta_{tr}(p)\delta_{sr}(p)=\delta_t(\delta_r(p))\delta_s(\delta_r(p)).$$

引理 2.1. 设 G 是一个无限维卡诺群，则对于所有 k，$V_k(G)$ 是闭的。

证明。设 $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $V_k(G)$中的一个序列，并设 $v\in G$ 满足 $v_i\to v$。令 $t,s\in\mathbb{R}$，则由 δ 的连续性可得

$$\delta_{(t+s)^{1/k}}(v)=\lim_{i\to\infty}\delta_{(t+s)^{1/k}}(v_i)=\lim_{i\to\infty}\delta_{t^{1/k}}(v_i)\delta_{s^{1/k}}(v_i)=\delta_{t^{1/k}}(v)\delta_{s^{1/k}}(v),$$

其中最后一个等式也用到了群乘法的连续性。因此，$t\mapsto\delta_{t^{1/k}}(v)$是一个单参数子群，故 $v\in V_k(G)$。□

我们称集合 $A\subseteq G$ 生成 G 作为可缩放群，或简称 A 生成G，若 G 是由 $\{\delta_t(a): a\in A, t\in\mathbb{R}\}$ 生成的群的闭包。注意，$V_1(G)$ 与有限维卡诺群的生成第一层（的指数像）完全类似。此外，以下命题成立。

命题 2.2 ([20,命题 1。10])。设 G 是一个可缩放群。若 G 具有由卡诺子群构成的滤过，则 $V_1(G)$ 作为可缩放群生成 G。反之，若 G 是幂零的，$V_1(G)$ 是可分的，且 $V_1(G)$ 作为可缩放群生成 G，则 G 具有由卡诺子群构成的滤过。

我们指出，前一命题中的幂零性假设不可删除，因为存在第一层生成的可缩放群，却不具有滤过（见 [20, 命题 5.11]）。然而，并非所有具有滤过的度量可缩放群都是幂零的，如 [20,命题 5.10]所示。我们将在第 4 节中更详细地讨论这种关系。

命题 2.2 的第二部分由以下结果得出。

命题 2.3 ([20, 命题 2.2])。设$(G,\ \delta)$ 是由v_1、.....、$v_n\in V_1(G)$生成的度量可缩放群。若 G 是幂零的，则 G 是卡诺群。

现在我们希望定义 G 的生成序列这一概念，使其符合滤过。为此，我们称 $V_1(G)$ 中的一个序列 X_1, X_2,... 为 *Carnot* 张成集，如果对于每个 $i\in\mathbb{N}$，由 $X_1,\dots,X_i$ 生成的可缩放群 H_i 都是有限维的，并且

$$G=\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}H_i}.$$

换言之，我们要求子群 $H_1, H_2, \ldots$ 根据定义 1.3 构成 G 的一个滤过。我们将此滤过称为与 Carnot 张成集 $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ 相关联的 滤过。

对于无限维 Carnot 群， [20]中介绍了以下两种零测集的定义。

定义 2.4 （滤过零集）。 给定可缩放群 G 的一列 Carnot 子群滤过 $(N_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ，若博雷尔集 $\Omega \subseteq G$ 是 $(N_m)_m$ 零测集，则称 Ω 是零测集的可数并 Ω_m ，且满足

$$\mathrm{vol}_{N_m}(N_m \cap (g\Omega_m)) = 0, \qquad \text{for all } m \in \mathbb{N}, \text{ for all } g \in G,$$

其中，vol_{N_m} 表示 N_m 上的任意哈尔测度。最后，如果博雷尔集 $E \subset G$ 对 G 的每个滤过 $(N_m)_m$ 都是 $(N_m)_m$ 零测集，则称其为滤过零集 。

定义 2.5 （Aronszajn 零集）。 给定一个元素 $Y \in V_1(G)$，我们将类 $\mathcal{A}(Y)$ 定义为满足以下条件的博雷尔集 $E \subset G$ 的集合:

$$\mathcal{L}^1(\{t \in \mathbb{R} : g\delta_t(Y) \in E\}) = 0, \qquad \text{for all } g \in G;$$

其中，我们用 $\mathcal{L}^1$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度。给定一个 Carnot 张成集 $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \ldots)$，我们将 $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ 定义为满足以下条件的博雷尔集 $E \subset G$ 的集合：它们存在博雷尔分解 $E = \bigcup_i E_i$ ，使得

$$E_i \in \mathcal{A}(X_i), \qquad \text{for every } i \geqslant 1.$$

最后，我们称一个博雷尔集 $E \subset G$ 是*Aronszajn* 零集 ，如果对于每个 Carnot 张成集 $\mathcal{X}$，它都属于 $\mathcal{A}(\mathcal{X})$。

由于 Carnot 张成集 $V_1(G)$ 与 G 的滤过可以相互导出，以下命题很容易说明，这两种可忽略性的概念是等价的。

命题 2.6 （参见 [20, 命题 3.6]）。 设 G 是一个度量可缩放群。设 $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ 是一个 *Carnot* 张成集，其中 $H_i := \langle X_1, \ldots, X_i\rangle$。那么，集合 $\Omega \subseteq G$ 属于类 $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ ，当且仅当它是 $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 零集。

这很容易由以下命题推出，该命题将在后文使用。

命题 2.7 （参见 [20, 命题 3.12]）。 设 $Y_1, \ldots, Y_n$ 是有限维 *Carnot* 子群 H 的生成水平元素，该子群包含于 G。给定一个子集 $E \subset G$,

$$E \in \mathcal{A}(Y_1, \ldots, Y_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{vol}_H(x^{-1}E \cap H) = 0, \quad \textit{for all } x \in G.$$

2.2. **分层巴拿赫-李群**。 我们首先将巴拿赫-李代数 定义为一个可分巴拿赫空间 X ，其上赋有连续、双线性且反对称的映射 $[\cdot,\cdot] : X \times X \to X$，并满足雅可比恒等式。我们称 $[\cdot,\cdot]$ X的李括号 。若存在某个 $s \in \mathbb{N}$ 使得

$$[\cdots[[x_1, x_2], x_3], \cdots], x_s], x_{s+1}] = 0, \text{ for all } x_1, \ldots, x_{s+1} \in X. \tag{2.2}$$

使（2.2）总是成立的最小 s称为 X的幂零步长 。若存在闭子空间 $V_1,\dots,V_s$，使得 $X = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ 且一个步长为 s的幂零巴拿赫-李代数称为分次的

$$[x, y] \in V_{j+k}, \qquad \text{for all } x \in V_j, y \in V_k, \text{ for all } j, k \in \mathbb{N}$$

约定当 $i > s$ 时， $V_i = \{0\}$ 。最后，如果 V_1 生成 X，也就是说， X 中不存在包含 V_1 的真闭子代数，则称分次 Banach–Lie 代数 X 是分层的。

设定一个分层 Banach–Lie 代数 X。可以通过 Baker-Campbell-Dynkin-Hausdorff（ BCDH）公式在 X 上定义一个光滑的群乘法

$$xy = x + y + \sum_{k=2}^{s} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{\substack{r_i+s_i>0,\\ 1\leq i\leq k}} \frac{\left(\sum_{j=1}^{k}(r_i+s_i)\right)^{-1}}{r_1!s_1!\cdots r_k!s_k!} \times (\operatorname{ad} x)^{r_1}(\operatorname{ad} y)^{s_1}\cdots(\operatorname{ad} x)^{r_k}(\operatorname{ad} y)^{s_k-1}y, \tag{2.3}$$

其中 (ad x)$y := [x, y]$。

注 2.8. 由于李括号是反对称的，可以假设 $s_k = 1$ 和 $r_k > 1$。因此，也可以将式 (2.3) 中最后一个 y 替换为 $x + y$。

现在可以将 G 定义为一个带有由 (2.3) 给出的群乘法的群。这样的群称为分层巴拿赫-李群。

备注 2.9. 基于无限维李代数构造群的方法还有很多。我们简要回顾并比较其中一些相关方法。文献 [23] 研究的 Banach 齐性群与分层巴拿赫-李群几乎完全相同，区别在于前者不要求 V_1 生成 X。它们可以视为分次巴拿赫-李群。文献 [10] 研究的无限维类海森堡群（下文例 2.11 将对此进行回顾）仅为 2 阶群，且第二层 V_2 必须是有限维的。最后，文献 [24] 中的半无限李代数可以是任意阶幂零的，但不是分次的，并且只有 V_1 层允许是无限维的。

可以在 X 上赋予膨胀 δ_λ ，其中对于 $x_i \in V_i$，有

$$\delta_\lambda(x_1, \dots, x_s) = (\lambda x_1, \dots, \lambda^s x_s), \tag{2.4}$$

其中，我们使用由分次诱导的 X 上的笛卡尔积。由 X 的分次性质可知，这是 G 的一个自同构。

分层巴拿赫-李群是无限维 Carnot 群的例子。

命题 2.10. 分层巴拿赫-李群可以赋予度量，使其成为无限维 *Carnot* 群。

证明。 令 X 表示 G的底层巴拿赫空间。根据 [17, 引理 II.1]（另见 [7,引理 2.5]） ，存在依赖于 $[\cdot,\cdot]$ 的正常数 $1 = \sigma_1, \dots, \sigma_s$，使得规范

$$N(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant s} \sigma_i |x_i|^{1/i} \tag{2.5}$$

满足 $N(\delta_\lambda(x)) = |\lambda|N(x)$ 且 $N(xy) \leqslant N(x) + N(y)$。尽管 [7,17] 中的引理针对幂零李群，但除李括号有界外，并未用到局部紧性，而这一条件对我们成立。定义 $d(x,y) := N(x^{-1}y)$，可得 (G,d) 是一个度量可缩放群。

可以证明，配备由 $|\cdot|$ 和 d 诱导的拓扑的 G 是同胚拓扑空间。事实上，从 (2.5) 立即可见，以原点为中心的 $|\cdot|$ 球和 d 球在彼此包含方面是等价的。由于李括号有界，由 BCDH 公式可知，左平移在 $|\cdot|$ 中连续（当然，在 d 中也连续）。因此，以任意点为中心的 $|\cdot|$ 球和 d 球也彼此等价，所以这两个度量是同胚的。

现在令 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为 V_1 的稠密子集。对于每个 n，令 X_n 表示由 x_1、……、x_n 生成的子代数。这是一个有限维分层李代数，因此，配备 BCDH 乘法的 X_n 是 G 的 Carnot 子群。由于 V_1 生成 X，我们得到 $\bigcup_n X_n$ 在 G 中稠密。

最后，只需证明 d 是完备的。这直接由以下事实得出：在任意有界集合 $U \subset X$上，都存在一个常数 $c = c_U \geqslant 1$，使得

$$c^{-1}|x-y| \leqslant d(x,y) \leqslant c|x-y|^{1/s}, \quad \text{for all } x,y \in U. \tag{2.6}$$

界（2.6）基本上由 [5, 命题 5.15.1] 得出。对证明稍作调整即可：乘积 $y^{-1}x$ 应表示为 V_ks 的笛卡尔积。具体而言，若 $x = (x_1, ..., x_s)$ 且 $y = (y_1, ..., y_s)$，则 BCDH 公式允许我们写成

$$(y^{-1}x)_j = x_j - y_j + \sum_{k=1}^{j-1} u_k^{(j)}$$

其中，每个 $u_k^{(j)} \in V_j$ 都是由 $\{x_1, ..., x_{j-1}, y_1, ..., y_{j-1}\}$ 的迭代李括号构成的多项式。根据注 2.8，对于某个多项式 $Q_k^{(j)}$，可以对 $|u_k^{(j)}| \leq Q_k^{(j)}(|x|, |y|)|x_k - y_k|$ 作出界定。（2.6）的上界随后由 [5] 中的证明得出。

另一方面，可以给出下界

$$\left| x_j - y_j + \sum_{k=1}^{j-1} u_k^{(j)} \right| \geqslant \inf_{T_1^{(j)},\dots,T_{j-1}^{(j)}} \left| x_j - y_j + \sum_{k=1}^{j-1} T_k^{(j)}(x_k - y_k) \right| =: f_j(x-y),$$

其中 $T_k^{(j)}: V_k \to V_j$ 是范数由 $Q_k^{(j)}(|x|, |y|) \leq M$ 界定的算子，其中 M 是一个仅取决于 U 和李括号 $[\cdot,\cdot]$ 的常数。通过对 s 进行归纳并使用三角不等式论证，可以证明 $\inf_{|z|=1}\max_{1\leq j\leq s} f_j(z) > 0$。这使我们能够使用 [5] 的其余证明来得到（2.6）的下界。□

分层巴拿赫-李群构成无限维 Carnot 群的真子集。与分层巴拿赫-李群不同，无限维 Carnot 群不一定是幂零的 [20, 命题 5。10] 然而，即使在幂零情形下，也不能说所有无限维 Carnot 群都是分层巴拿赫-李群 [20,命题 5。12]

现在我们介绍一类特殊的分层巴拿赫-李群，将在第 7 节中使用。

例 2.11（无限维类海森堡群）。 我们回顾 [10] 中引入的无限维二阶群的构造。这些群建立在一个配备非退化连续斜对称双线性形式的抽象 Wiener 空间上。我们可以将该群视为一个无限维辛向量空间的海森堡群。

设 W 是一个实可分 Banach 空间 W，且 C 是一个有限维内积空间。定义 $\mathfrak{g} := W \times$C 为一个无穷维 Banach-Lie 代数，它是一个带有连续 Lie 括号的无穷维 2 阶幂零 Lie 代数。具体而言，设 $\omega\colon W \times W \to$ C 是 W 上的连续斜对称双线性形式。我们还假设 ω 是满射。

于是， $\mathfrak{g}_\omega = \mathfrak{g} := W \times$C 被视为一个李代数，其李括号定义为

$$[(X_1, V_1), (X_2, V_2)] := (0, \omega(X_1, X_2)). \tag{2.7}$$

这意味着 $\mathfrak{g}$ 是 W 按 ω 作中心扩张。将 $G_\omega = G$ 记作 $W \times$C，并将其视为一个群，其乘法律定义为

$$g_1 g_2 := g_1 + g_2 + \frac{1}{2}[g_1, g_2], \tag{2.8}$$

其中 g_1 和 g_2 被视为 $\mathfrak{g}$ 的元素。对于 $g_i = (w_i, c_i)$，这也可以等价地写成

$$(w_1, c_1) \cdot (w_2, c_2) = \left(w_1 + w_2, c_1 + c_2 + \frac{1}{2}\omega(w_1, w_2) \right). \tag{2.9}$$

那么， G 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的分层巴拿赫-李群。这些分层巴拿赫-李群称为无限维类海森堡群。

注意，(2.8) 是步长为 2 时的 BCDH 公式。因此，无限维类海森堡群恰好是具有有限维V_2 的步长为 2 的分层巴拿赫-李群。

2.3.无限维空间中的卷积与概率测度的收敛。下面我们回顾若干适用于本研究情形的标准定义。设 G 为一个拓扑群。当 G 是局部紧时，可以像 (2.12) 中那样为 Radon 测度定义卷积，例如见 [11]。该定义依赖于 Riesz 表示定理，因此无法在我们的情形中使用。我们改用 [25] 中的方法，该方法允许我们为可分度量群上的概率测度定义卷积。注意，在 [25] 中，测度均为概率测度，且连续函数空间被限制为有界连续函数空间，这与概率测度收敛的要求相符。

假设 G是一个可分度量群，并用 Prob(G) 表示 G上概率测度的空间。这种选择使我们能够在 Prob(G) 上引入一种自然的拓扑，即弱或弱 *收敛的拓扑。注意，在概率论文献中，这种收敛称为弱收敛。

定义 2.12（概率测度的弱收敛）。若序列μ_k在$\mathrm{Prob}(G)$中弱收敛到测度$\lim_{k\to\infty}\mu_k \in \mathrm{Prob}(G)$，则称之为弱收敛；如果对每个有界连续函数 $\varphi:\ G\to\mathbb{R}$，都有

$$\lim_{k\to\infty}\int_G \varphi \,\mathrm{d}\mu_k \to \int_G \varphi \,\mathrm{d}(\lim_{k\to\infty}\mu_k). \tag{2.10}$$

关于概率测度弱收敛的定义有许多等价方式；我们参阅经典专著 [2]。

定义 2.13（测度的卷积）。设 $\mu,\nu\in \mathrm{Prob}(G)$ 如下，则

$$(\mu*\nu)(A) := \int_G \mu\left(Ax^{-1}\right)\mathrm{d}\nu(x), A\in\mathcal{B}(G), \tag{2.11}$$

其中 $\mathcal{B}(G)$ 是 G 上的博雷尔 σ-代数。

因此，对于每个有界（或非负）博雷尔函数 φ: $G\to\mathbb{R}$，有

$$\int_G \varphi \,\mathrm{d}(\mu*\nu) := \int_G\int_G \varphi(xy)\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y). \tag{2.12}$$

此外，根据 Fubini 定理，概率测度的卷积仍是概率测度。

我们还需要以下定理，它本质上是 [25, 定理 1.1，第 57] 页。

定理 2.14。设 G 是一个可分度量群。那么，卷积关于 $\mathrm{Prob}(G)$ 上的弱拓扑是连续的。

3. 可缩放度量群的商群

以下命题涉及商群 $G\to G/N$ 的次度量。其陈述及证明是对 [21] 中先前结果的直接推广。

命题 3.1. 设 G 是配备可容许左不变距离函数 d 的拓扑群。设 N 是 G 的闭正规子群。那么函数

$$d_{G/N}(g_1N,g_2N) := d(g_1N,g_2N) := \inf\{d(g_1n_1,g_2n_2)\ :\ n_1,n_2\in N\} \tag{3.1}$$

是商群 G/N 上的可容许左不变距离函数，使得投影 $\pi:\ G\to G/N$ 成为次浸映射。

证明。众所周知，当 N 是闭正规子群时，G/N 是一个（豪斯多夫）拓扑群。我们将证明，在满足关于 G的假设时，由方程 (3.1) 定义的函数可度量化 G/N。首先，注意到由于 N 是正规子群，且 d 上的距离 G 是左不变的，因此我们有

$$d(g_1N,g_2N) := \inf\{d(g_1,g_2n)\ :\ n\in N\}. \tag{3.2}$$

因此，函数 $d_{G/N}$ 显然具有对称性且为左不变。由（3.2）可知，它还满足三角不等式。此外，如果 $g_1N\neq g_2N$，即如果 $g_2^{-1}g_1\notin N$，那么由于 N 是闭集，存在 $r>0$ 使得 $B\left(g_2^{-1}g_1,\ r\right)\cap N=\emptyset$；按照惯例，在给定的度量空间中，我们用 $B\left(g,\ r\right)$ 表示以 g 为中心、半径为 r 的开球。因此，$d\left(g_2^{-1}g_1,\ N\right)\ >r$

因此， $d(g_1N, g_2N) > r \neq 0$。我们推断，（3.1）在 G/H 上定义了一个距离函数。

在证明该距离是可容许的之前，我们先验证

$$\pi(B(g,r)) = B(\pi(g),r), \qquad \text{for all } g \in G, \text{ for all } r \geqslant 0. \tag{3.3}$$

关于包含关系 $\subseteq$，若 $p \in \pi(B(g,r))$，其中 $p = \pi(\bar{p})$ 且 $\bar{p} \in B(g,r)$，则$d(\pi(\bar{p}) \pi(g)) \leqslant d(\bar{p},g) < r$，因此 $p \in B(\pi(g) r)$。关于包含关系 $\supseteq$，若 $p \in B(\pi(g) r)$ 且 $\bar{p} \in G$ 满足 $p = \pi(\bar{p})$，则存在 $n \in N$ 满足 $d(g,\bar{p}n) < r$。因此， $p = \pi(\bar{p}n)$，其中 $\bar{p}n \in B(g,r)$。故 $p \in \pi(B(g,r))$。

最后，我们来证明距离 $d_{G/N}$ 在 G/N 上定义了商拓扑。设 $U \subseteq G/N$ 是某点 $p \in G/N$ 的一个开邻域。由于 π 连续，因此 $\pi^{-1}(U) \subseteq G$ 在 G 中是开集。取 $\bar{p} \in \pi^{-1}(p)$。于是存在 $r > 0$ 使得$B(\bar{p},r) \subseteq \pi^{-1}(U)$。由 (3.3) 得到 $B(p,r) \subseteq U$，这就证明了 U 关于由该度量给出的拓扑是开集。反过来，任意球 $B(p,r)$，其中 $p \in G/N$ 且 $r \geqslant 0$，都是开集，这是由 (3.3) 以及 π 是开映射这一事实得出的。□

命题 3.2。设 (G, d, δ) 是一个度量可缩放群，且 N是一个闭正规可缩放子群。那么，商群 G/N 具有可缩放度量群的自然结构，其膨胀定义为

$$\delta_\lambda(gN) := \delta_\lambda(g)N, \qquad \textit{for all } g \in G, \tag{3.4}$$

且距离 由 (3.1)给出。此外，如果 $V_1(G)$ 生成 G，那么 $V_1(G/N)$ 生成 G/N .

证明。根据命题 3.1， G/N 的商拓扑与由（3.1）定义的距离所诱导的拓扑相同。我们需要验证，由（3.4）定义的映射 δ 将G/N变为一个度量可缩放群。首先，我们注意到映射 $\delta\colon \mathbb{R}\times G/N \to G/N$是良定义的。

$$\delta_\lambda(gn)N = \delta_\lambda(g)\delta_\lambda(n)N = \delta_\lambda(g)N, \qquad \text{for all } g \in G, \text{ for all } n \in N,$$

这里用到了 δ_λ 是一个群同态且 N 是可缩放的。此外，这样的映射δ 是连续的。如果 $\lambda_i \to \lambda$ 和 $g_iN \to gN$，则存在 $n_i \in N$ 使得 $g_in_i \to g$。于是 $\delta_{\lambda_i}(g_in_i) \to \delta_\lambda(g)$，因此 $\delta_{\lambda_i}(g_in_i)N \to \delta_\lambda(gN)$，从而 $\delta_{\lambda_i}(g_iN) \to \delta_\lambda(gN)$。

接下来我们验证 δ_λ 是一个群同态。

$$\begin{aligned}\delta_\lambda(g_1N)\delta_\lambda(g_2N) = \delta_\lambda(g_1)N\delta_\lambda(g_2)N = \delta_\lambda(g_1)\delta_\lambda(g_2)N \\ = \delta_\lambda(g_1g_2)N = \delta_\lambda(g_1g_2N) = \delta_\lambda(g_1Ng_2N),\end{aligned}$$

这里我们用到了 δ_λ 是一个群同态以及 N 是正规的事实。此外，性质 $\delta_0 \equiv 1_{G/H}$ 和 (1.1) 显然成立。因此，$(G/N, d)$ 是一个可缩放群。

最后，距离的缩放性质是显而易见的。

$$\begin{aligned}d(\delta_t(g_1N), \delta_t(g_2N)) &= d(\delta_t(g_1)N, \delta_t(g_2)N) \\ &= \inf\{d(\delta_t(g_1)n_1, \delta_t(g_2)n_2) : n_1, n_2 \in N\} \\ &= \inf\{d(\delta_t(g_1n_1), \delta_t(g_2n_2)) : n_1, n_2 \in N\} \\ &= |t| \inf\{d(g_1n_1, g_2n_2) : n_1, n_2 \in N\} = |t| d(g_1N, g_2N),\end{aligned}$$

其中我们用到了 δ_λ 是群同态、 N 是可缩放的，以及 G 上的距离具有缩放性质。

关于 V_1s 的最后一个断言，源于这样一个事实：由 $V_1(G)$ 生成的群的闭包在投影下的像，等于由 $V_1(G/N)$ 生成的群的闭包。□

注 3.3. 一个可缩放的阿贝尔度量群未必是赋范空间。例如，可以考虑 $\mathbb{R}^2$ ，其膨胀定义为

$$\delta_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \qquad \text{or} \qquad \lambda \begin{pmatrix} \cos(\log\lambda) & -\sin(\log\lambda) \\ \sin(\log\lambda) & \cos(\log\lambda) \end{pmatrix} = \exp\left(\log(\lambda)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

关于可缩放度量的存在性，请参见 [19] 。

命题 3.4。 设(G, d, δ) 为度量可缩放群。若 G 是阿贝尔群，且 $V_1(G)$ 生成 G，则 G是赋范向量空间，其中数乘定义为

$$tg := \delta_t g, \qquad \text{for all } t \in \mathbb{R}, \text{ for all } g \in G \tag{3.5}$$

和范数

$$\|g\| := d(e_G, g), \qquad \text{for all } g \in G. \tag{3.6}$$

证明。 为验证数乘关于标量是线性的，我们将证明$V_1 := V_1(G)$与 G重合。设 x_1 和 $x_2 \in V_1(G)$，则由（2.1）可得

$$\delta_{s+t}(x_i) = \delta_s(x_i)\delta_t(x_i), \qquad \text{for all } s, t \in \mathbb{R}, \text{ for } i = 1, 2.$$

因此，对于 x_1x_2我们也有相同的性质

$$\begin{aligned}\delta_{s+t}(x_1x_2) = \delta_{s+t}(x_1)\delta_{s+t}(x_2) &= \delta_s(x_1)\delta_t(x_1)\delta_s(x_2)\delta_t(x_2) \\ &= \delta_s(x_1)\delta_s(x_2)\delta_t(x_1)\delta_t(x_2) = \delta_s(x_1x_2)\delta_t(x_1x_2),\end{aligned}$$

其中我们利用了 δ_s、 δ_t和 δ_{s+t} 是群同态， x_1、 x_2 属于 V_1，以及 G是阿贝尔群。此外，由于同样的性质，我们还有

$$\begin{aligned}\delta_{s+t}(x_1^{-1}) = \delta_{s+t}(x_1)^{-1} &= (\delta_s(x_1)\delta_t(x_1))^{-1} \\ &= (\delta_t(x_1)\delta_s(x_1))^{-1} = \delta_s(x_1)^{-1}\delta_t(x_1)^{-1} = \delta_s(x_1^{-1})\delta_t(x_1^{-1}).\end{aligned}$$

因此， V_1 是一个子群。

由于引理2.1表明 V_1 在 G中是闭的，假设 V_1 生成 G意味着 $V_1 = G$。因此，由 δ 给出的乘法定义了一个数乘（3.5），从而将阿贝尔群 G 变成一个向量空间。

接下来，我们证明（3.6）确实是一个范数。标量上的线性性为：

$$\|tg\| = \|\delta_t g\| = d(e_G, \delta_t g) = td(e_G, g) = t\|g\|.$$

我们有三角不等式：

$$\|g_1g_2\| = d(1, g_1g_2) \leqslant d(1, g_1) + d(g_1, g_1g_2) = d(1, g_1) + d(1, g_2) = \|g_1\| + \|g_2\|.$$

□

推论 3.5。 设 $(G,\ d,\ \delta)$ 是一个度量可缩放群，其中 $V_1(G)$ 生成 G。若 G'表示交换子子群 $[G, G]$的闭包，则 G/G' 是一个赋范向量空间。

证明。 首先注意到， $[G,G]$ 是一个正规且可缩放的子群。正规可缩放子群的闭包仍然是正规且可缩放的。因此，交换子子群 $[G,G]$ 的闭包 G' 是一个闭、正规且可缩放的子群。由命题 3.2可知， G/G' 自然地是一个度量可缩放群；又由于我们假设 $V_1(G)$生成 G，因此也有 $V_1(G/G')$生成 G/G'。此外，由于 G' 包含交换子子群 $[G,G]$，所以商群 G/G' 是阿贝尔群。于是，由命题 3.4可推得， G/G' 是一个赋范向量空间。□

在无限维卡诺群中， $[G,G]$ 并不总是闭的。令$G := \ell_2 \times \ell_2 \times \ell_2$，并定义斜对称双线性形式

$$\begin{aligned}\omega : (\ell_2 \times \ell_2) \times (\ell_2 \times \ell_2) &\to \ell_2 \\ ((x,y),(x',y')) &\mapsto (x_1y_1' - x_1'y_1, x_2y_2' - y_2x_2', \ldots)\end{aligned}$$

根据柯西-施瓦茨不等式以及$\|\cdot\|_{\ell_2} \leqslant \|\cdot\|_{\ell_1}$这一事实，我们有 ω是连续的。于是，我们将 G上的群乘法定义为

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z' + \frac{1}{2}\omega((x,y),(x',y'))).$$

请注意，这一构造与例 2.11 类似，只是双线性形式的取值属于一个无限维巴拿赫空间。

为证明 G 是一个无限维卡诺群，我们首先定义膨胀 s

$$\delta_t(x,y,z) = (tx, ty, t^2z).$$

根据 [7, 引理 2.5], , 存在一个 $\sigma > 0$ ，因此我们可以由规范定义容许左不变度量 $d(g,h) = N(g^{-1}h)$

$$N(x,y,z) = \max\{\|x\|_{\ell_2}, \|y\|_{\ell_2}, \sigma\|z\|_{\ell_2}\}.$$

最后，由 x_1生成的子群 H_k、……、x_k、y_1、……、y_k、z_1、……、z_k 同构于第一个海森堡群 ($\mathbb{H}$) 的 k 重乘积 ^{k} ，并构成 G 的一个滤过。我们得到 $[G,G] = \{(0,0)\} \times \ell_1$，它是稠密的，但并不等于$\overline{[G,G]} = \{(0,0)\} \times \ell_2$。

引理 3.6. 设 G 为幂零无限维 *Carnot* 群。那么

$$\#(V_1(G) \cap g\overline{[G,G]}) \leqslant 1, \qquad \textit{for all } g \in G.$$

证明。我们将对 G 的步数进行归纳，以证明该引理。当 G 为第 1 步时， G 为阿贝尔群，因此该引理由 $\overline{[G,G]} = \{e_G\}$ 这一事实得出。

现在假设引理对步数不超过 $s-1$ 的情形成立，并设 G 是一个步数为 $s > 1$ 的无限维卡诺群。将 G_i 定义为通常的下中心列。因此， $G_2 = [G,G]$、$G_s \neq \{e_G\}$和 $G_{s+1} = \{e_G\}$。令 H_k 表示由有限维 Carnot 子群构成的 G 的滤过， K 表示稠密子群 $\bigcup_k H_k$，并令 K_i 表示 K 的下中心列。若 $g \in K_s$，则对于某个 j， g 属于 H_j 的第 s 个下中心群。由有限维卡诺群理论可知， $g \in V_s(H_j) \subset V_s(G)$，因此 $K_s \subseteq V_s(G)$。最后，由于 K_s 在 $\overline{G_s}$ 中稠密，且 $V_s(G)$ 是闭集，我们得到 $\overline{G_s} \subseteq V_s(G)$。

我们首先断言

$$\#(V_1(G) \cap g\overline{G_s}) \leqslant 1, \qquad \text{for all } g \in G. \tag{3.7}$$

设 $g \in G$，并假设 $u, v \in V_1(G) \cap g\overline{G_s}$。那么存在 $h \in \overline{G_s} \subseteq V_s(G)$，使得$uh = v \in V_1(G)$。设 $s, t \in \mathbb{R}$。由于$\overline{G_s}$ 位于 G 的中心，我们有

$$\delta_t(uh)\delta_s(uh) = \delta_t(u)\delta_t(h)\delta_s(u)\delta_s(h) = \delta_{t+s}(u)\delta_t(h)\delta_s(h).$$

另一方面，$\delta_{t+s}(uh) = \delta_{t+s}(u)\delta_{t+s}(h)$，因此我们必须有 $h \in V_1(G)$，从而 $\delta_t(h)\delta_s(h) = \delta_{t+s}(h)$。但是，$h \in V_s(G) \cap V_1(G) = \{e_G\}$，所以 $u = v$，这就证明了 (3.7)。

现在反设 u、$v \in V_1(G) \cap g\overline{[G,G]}$ 是彼此不同的元素。定义投影 π：$G \to G/\overline{G_s} = L$。于是，$L$ 是一个步数为 $s-1$ 的无限维卡诺群。事实上，这源于 L 是幂零的，以及命题 2.2 和 3.2。由 (3.7)，我们有 $\pi(u) \neq \pi(v)$。根据在 L 上构造 δ 的方式，容易得到 $\pi(u)$ $\pi(v) \in V_1(L)$。注意，$\pi(g\overline{G_2}) \subseteq \pi(g)\overline{[L,L]}$。因此，我们有 $\pi(u)$ 和 $\pi(v)$ 是 $V_1(L) \cap \pi(g)\overline{[L,L]}$ 中彼此不同的元素。但这与归纳假设矛盾。□

4. 局部紧交换子

如前所述，无限维卡诺群不一定是第 2.2 节意义下的巴拿赫-李群。本节将证明，当换位子子群局部紧时，这一结论确实成立。

定理 4.1. 设 G 是一个无限维卡诺群。如果 G 的换位子子群局部紧，那么 G 是一个分层巴拿赫-李群。

局部紧子群必定是闭的，因此与上一节不同，我们无需区分 $[G,G]$ 及其闭包。

接下来，我们指出，局部紧性的假设实际上意味着 $[G,G]$ 是有限维的。

引理 4.2. 设 G 是一个局部紧的可缩放群。假设 $H_1 \leqslant H_2 \leqslant \cdots \leqslant G$ 是由闭可缩放子群构成的递增链，且 $H := \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ 在 G中稠密。那么$G = H_N$ 对某个 N成立。

证明。 我们大致沿用 [6, I.2.4 定理 3] 中关于拓扑向量空间的证明。设 $U \subset G$ 是单位元的一个相对紧开邻域。由于 H 在 G中稠密，因此 $\{h\delta_{1/2}(U) : h \in H\}$是 $\overline{U}$的一个开覆盖，所以存在有限多个$h_1, \ldots, h_n \in H$，使得 $U \subset \overline{U} \subset \bigcup_{j=1}^{n} h_j\delta_{1/2}(U)$。由于 H是H_i的递增并集，对于某个足够大的 N，有 $h_1, \ldots, h_n \in H_N$。因此 $U \subset H_N\delta_{1/2}(U)$。迭代可得 $U \subset H_N\delta_{1/2}(H_N\delta_{1/2}(U)) = H_N\delta_{1/4}(U)$，因为 H_N是一个可缩放子群。如此继续，我们得出$U \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} H_N\delta_{1/2^k}(U)$，它等于 H_N，因为 H_N是闭集。由于 H_N 是可缩放的，因此 $G = \bigcup_k \delta_k U \subset H_N$。□

命题 4.3. 设 G 为带有滤过 $H_1 \leqslant H_2 \leqslant$ 的无限维卡诺群 $\cdots$。假设 $[G,G]$ 是局部紧的。那么，对于某个 N，有 $[G,G] = [H_N, H_N]$。特别地，$[G,G]$ 是有限维可缩李群，而 G 是幂零的。

证明。显然，$[H_1,H_1] \leqslant [H_2,H_2] \leqslant \cdots \leqslant [G,G]$ 是 $[G,G]$ 的递增闭可缩子群链。要将引理 4.2 应用于 $[G,G]$，只需证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty}[H_i,H_i]$ 在 $[G,G]$ 中稠密。任取 g、$g' \in G$，并考虑交换子 $[g,g'] = g^{-1}g'^{-1}gg'$。由于 $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ 稠密，我们可以找到 h_n、$h'_n \in H$，使得 $h_n \to g$、$h'_n \to g'$。由乘法和求逆运算的连续性，有 $[h_n,h'_n] \to [g,g']$。当 N_n 足够大时，有 h_n、$h'_n = H_{N_n}$，因此 $[h_n,h'_n] \in \bigcup_{i=1}^{\infty}[H_i,H_i]$。所以有 $[g,g'] \in \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}[H_i,H_i]}$。由于前者生成 $[G,G]$，而后者是一个闭子群，因此如所要求的，有 $[G,G] \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}[H_i,H_i]}$。现在我们应用引理 4.2，得到对于某个 N，有 $[G,G] = [H_N,H_N]$。□

当 $[G,G]$ 为局部紧时，我们对引理 3.6 有如下改进。

命题 4.4。假设 $[G,G]$ 为局部紧，并令 $L = G/[G,G]$ 赋予其商拓扑（等价地，范数拓扑），其中 $\pi\colon\ G \to L$ 为商映射。则限制映射 $\pi|_{V_1(G)}\colon\ V_1(G) \to L$ 是一个同胚。

证明。单射性由引理 3.6 得出。我们还知道，$\pi|_{V_1(G)}$ 的像是稠密的。事实上，令 $H = \bigcup_k H_k$ 表示来自 G 的滤过中的有限维卡诺群之并。由于 H 是稠密的，$\pi(H)$ 在 L 中是稠密的。根据有限维卡诺群理论，对于每个 k，我们有 $\pi(H_k) = \pi(V_1(H_k))$。因此，$\pi(V_1(H)) = \pi(H)$，所以 $\pi|_{V_1(G)}$ 的像是稠密的。

现在我们证明该像是闭集，从而 $\pi|_{V_1(G)}$ 是满射，并且逆映射 $\varphi = \pi|_{V_1}^{-1}\colon\ \pi(V_1(G)) \to V_1(G)$ 是连续的。

设 y 是 L 中的任意元素，因此对某个 $g \in G$，有 $y = \pi(g)$。设 $y_n \in \pi(V_1(G))$，其中 $y_n \to y$，因此对某个（唯一的）$x_n \in V_1(G)$，有 $y_n = \pi(x_n)$。我们要证明 x_n 收敛到某个 x。若果真如此，则 $x \in V_1(G)$；由 π 的连续性可得 $\pi(x_n) \to \pi(x) = y$，从而 $y \in \pi(V_1(G))$。因此该像是闭集，故 $\pi|_{V_1(G)}$ 是满射。此外，我们有 $\varphi(y_n) = x_n \to x = \varphi(y)$；由于 y_n 是任意的，这表明 φ 是连续的。

事实上，只需证明 x_n 有一个收敛子列；这实际上表明 x_n 的每个子列都有一个收敛子列。此外，x_n 的每个收敛子列 x'_n 都必定收敛到某个满足 $\pi(x') = y$ 的 x'，因此由单射性可知，所有收敛子列都收敛到同一点 x。由此我们便证明了 x_n 的每个子列都有一个收敛到 x 的子列，这意味着 $x_n \to x$。

利用商度量的定义 (3.1) 以及 $\pi(x_n) \to \pi(g)$ 这一事实，可得存在 $u_n, v_n \in [G,G]$ 使得 $d(u_nx_n, v_ng) \to 0$。根据左不变性，我们有 $v_n^{-1}u_nx_n \to g$，因此令 $k_n = v_n^{-1}u_n \in [G,G]$，则 $k_nx_n \to g$。

注意，由于缩放和平移不变性，如果 $[G,G]$ 是局部紧的，那么 $[G,G]$ 的每个有界子集都是相对紧的。因此，只需证明 k_n 有界。若如此，则通过取子列，我们可以假设 $k_n \to k$，从而 $x_n = k_n^{-1}(k_nx_n) \to k^{-1}g$。

为导出矛盾，假设 k_n 无界。取一个子列后，可设 $d(e,k_n) \to \infty$，从而 $r_n := 1/d(e,k_n) \to 0$。于是 $d(e,\delta_{r_n}(k_n)) = 1$。由于 $[G,G]$ 是

可缩放子群，我们有 $\delta_{r_n}(k_n) \in [G,G]$，因此再取一个子列后，可设 $\delta_{r_n}(k_n)$ 收敛到某个 $h \in [G,G]$。注意，$d(e,h) = 1$，尤其是$h \neq e$。现在

$$\delta_{r_n}(x_n) = \delta_{r_n}(k_n)^{-1}\delta_{r_n}(k_n x_n)$$

其中，由于 $k_n x_n \to g$和 $r_n \to 0$，我们有 $\delta_{r_n}(k_n x_n) \to e$。因此 $\delta_{r_n}(x_n) \to h^{-1} \neq e$。但由于 $V_1(G)$ 是闭的，且关于缩放封闭，我们对所有 n 都有 $\delta_{r_n}(x_n) \in V_1(G)$，从而 $h^{-1} \in V_1(G)$。因此，e 和 h^{-1} 是 $V_1(G) \cap [G,G]$ 中的不同元素，这与引理 3.6 矛盾。□

下面的引理给出了一个略微定量的改进，并表明同胚 $\pi|_{V_1(G)}$ 保持有界集。

引理 4.5。设 $[G,G]$ 是局部紧的，并令 $\pi\colon\ G \to (G/[G,G],\ \|\cdot\|)$，其中 $\|\cdot\|$ 是诱导的商范数。存在一个常数 $c \in (0,\ 1)$ 使得

$$cd(e_G,g) \leqslant \|\pi(g)\| \leqslant d(e_G,g) \qquad \textit{for all } g \in V_1. \tag{4.1}$$

证明。上界直接由命题 3.1 中定义的商度量得出（对所有 $g \in G$）。剩下要证明下界。由齐次性，不妨设$d(e_G,g) = 1$。

令 S 表示所有满足 $d(e_G,g) = 1$ 的元素。这是一个闭集。令$B = [G,G] \cap B(e_G,2)$，这是一个紧集。由于 B 和 S 不相交，$c := d(B,S) > 0$。

令 $g \in S$。我们将证明

$$d(e_G,gh) \geqslant c, \qquad \text{for all } h \in [G,G],$$

这就证明了该引理。若 $d(e_G,h) > 2$，则由三角不等式可得 $d(e_G,gh) \geqslant 1$（注意 $1 \geqslant c$）。现在假设 $h \in B$，则

$$d(e_G,gh) = d(g^{-1},h) \geqslant d(S,B) \geqslant c,$$

至此证明完成。□

命题 2.3 表明，$V_1(G)$ 的每个有限子集都包含在某个有限维 Carnot 子群中。当 $[G,G]$ 局部紧时，对于G的每个有限子集也有相同的结论。

引理 4.6. 设 $[G,G]$ 为局部紧的。那么对于每个有限子集 $\{g_1,\dots,g_n\} \subset G$，都存在有限维 *Carnot* 子群 $K \leqslant G$，使得 $\{g_1,\dots,g_n\} \subset K$。此外，可以选取 K，使得 $[K,K] = [G,G]$。

证明. 如命题 4.3 所示，对于某个（有限维）Carnot 子群 $H \leqslant G$，有 $[G,G] = [H,H]$。选取某个有限集合 $y_1,\dots,y_m \in V_1(H) \subset V_1(G)$，它生成 H，使其成为可缩放群。

接下来，对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$，令 x_i 为 $V_1(G)$ 中满足 $g_i \in x_i[G,G]$ 的唯一元素；根据命题 4.4，该元素存在。令 K 为由 $\{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m\}$ 生成的可缩放子群；根据命题 2.3，它是一个 Carnot 子群。于是 $[G,G] = [H,H] \subset [K,K]$，因此对每个 i，都有 $g_i \in x_i[G,G] \subset K$。□

备注 4.7。我们不知道命题 4.4、引理 4.5，或引理 4.6 的第一部分（该部分断言存在一个满足 $\{x_1, \dots, x_n\} \subset K$ 的 Carnot 子群 K）是否需要 $[G, G]$ 具有局部紧性。

在陈述下一个结果之前，我们指出，如果 $[G, G]$ 是局部紧的，那么我们可以将 $G/[G, G]$ 和 $[G, G]$ 视为线性空间。事实上，我们可以将 $G/[G, G]$ 与 $V_1(G)$等同，并将 $[G, G]$ 与其李代数等同。

我们将需要以下引理。

引理 4.8。设 G 是一个（拓扑意义上的） n维卡诺群， X 是一个巴拿赫空间，且$\dim(X) \geqslant n$。假设存在线性嵌入 $f: V_1(G) \to X$ 和 $g: [G, G] \to X$，使得 $f(X) \cap g(X) = \{0\}$。那么存在 X的一个子空间 Y、定义在 Y上的李括号运算，以及一个同胚同构 $F: G \to Y$，其中 Y 赋有 *BCDH* 群乘法，并且该同构扩张了 f 和 g。子空间 Y 、李括号运算以及该扩张都是唯一的。

此外，如果 $H \leqslant G$ 是 *Carnot* 子群，那么 $F|_H$ 就是将 $f|_{V_1(H)}$ 和 $h|_{[H,H]}$扩展得到的同胚嵌入。

证明。我们利用指数映射，将 G与其李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$等同。在此对应下，集合 $V_1(G)$ 恰好是第一层 $\mathfrak{g}_1$，而 $[G, G]$ 是 $\mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$，因此这两个集合是 $\mathfrak{g}$的互补子空间。因此，通过简单的线性代数即可得到扩展 F。随后，我们可以将 $\mathfrak{g}$ 的李括号推前至像 Y 上，从而得到第一个结论。

对于第二个结论，由此可知，若 H 是 G的 Carnot 子群，则其李代数 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$的李子代数（因而也是子空间）。此外， $\mathfrak{h}$的李括号是 $\mathfrak{g}$的李括号在 $\mathfrak{h}$上的限制。□

引理 4.9。设 $G' = [G, G]$ 为局部紧的，且设 $\|\cdot\|$ 为 G' 上的任意一个诱导其李代数向量空间拓扑的范数。则由 d_G 和 $\|\cdot\|$在 G' 上诱导的拓扑一致。此外，集合 $A \subset G'$ 在 d_G 下有界，当且仅当它在$\|\cdot\|$下有界。

证明。根据引理 4.6，子群 G' 是一个有限维 Carnot 子群的换位子子群，并且众所周知，由 d_G 和 $\|\cdot\|$ 诱导的拓扑相同。只需证明有界集也相同即可。

设 $B_{G'}(r)$ 和 $B_{\|\cdot\|}(r)$ 分别为关于 d_G 和 $\|\cdot\|$、以 e_G 为中心的球。不妨设 $B_{\|\cdot\|}(r)$ 是相对于 $\{V_k(G)\}_{k=2}^s$正交的轴对齐椭球。则存在常数 $0 < r_1 < r_2 < r_3$，使得

$$B_{G'}(r_1) \subseteq B_{\|\cdot\|}(r_2) \subseteq B_{G'}(r_3). \tag{4.2}$$

由 (2.4) 及我们对 $B_{\|\cdot\|}(r)$ 的假设可得，

$$\lambda B_{\|\cdot\|}(r) \subseteq \delta_\lambda(B_{\|\cdot\|}(r)) \subseteq \lambda^s B_{\|\cdot\|}(r), \qquad \text{for all } r > 0, \lambda \geqslant 1. \tag{4.3}$$

Let $r>0$ 且不失一般性，我们可以假设 $r \geqslant \max\{r_1, r_2\}$。该 n

$$B_{\|\cdot\|}(r) = \frac{r}{r_2} B_{\|\cdot\|}(r_2) \overset{(4.3)}{\subseteq} \delta_{r/r_2}(B_{\|\cdot\|}(r_2)) \overset{(4.2)}{\subseteq} \delta_{r/r_1}(B_{G'}(r_3)) = B_{G'}\left(\frac{r_3}{r_1} r\right).$$

同样，

$$B_{G'}(r) = \delta_{r/r_1}(B_{G'}(r_1)) \overset{(4.2)}{\subseteq} \delta_{r/r_1}(B_{\|\cdot\|}(r_2)) \overset{(4.3)}{\subseteq} \left(\frac{r}{r_1}\right)^s B_{\|\cdot\|}(r_2) = B_{\|\cdot\|}\left(\frac{r_2}{r_1^s} r^s\right).$$

d_G 和 $\|\cdot\|$ 的有界集相同。 □

现在我们可以证明定理 4.1。

定理 *4.1* 的证明。 设 $G' := [G,G]$ 且 $W = G/G'$。令 $K \subset G$ 为任意一个有限维 Carnot 子群，使得 $[K,K] = G'$，正如引理 4.6 所示，这样的子群存在。因此，由于 $[K,K]$ 是分次的，G' 也是分次的，并且我们有一个分解 $G' = \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$，其中我们将 G' 与其李代数等同。由此可知，$W \times G'$ 是一个巴拿赫空间，我们赋予它 ℓ_∞-范数

$$\|(u,v)\| = \max\{\|u\|_W, \|v\|_{G'}\}.$$

由于 G' 是有限维的，因此由 d_G 和 $\|\cdot\|$ 诱导的拓扑下，G' 是同胚拓扑空间。我们将构造一个李括号 $[\cdot,\cdot]$ 于 $W \times G'$ 上，并构造一个映射 $F\colon G \to X$，使得当 $W \times G'$ 被视为巴拿赫-李群时，映射 F 是一个同构。令 $W =: \mathfrak{g}_1$，则得到一个分次 $W \times G' = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$。

我们定义 $f\colon V_1(G) \to W$ 为命题 4.4 给出的识别映射。我们还令$g\colon G' \to G'$ 为单位元。因此，我们可以用显然的方式将 f 和 g 视为映射到 $W \times G'$ 中的映射。现在我们按如下方式构造映射 $F\colon G \to W \times G'$。任取 $x \in G$。令 H为 G 的某个有限维 Carnot 子群，使得 $x \in H$ 和 $G' \subset H$成立；其存在性由引理 4.6 保证。于是我们定义 $F(x) := h_H(x)$，其中 $h_H\colon H \to W \times G'$是唯一一个延拓 $f|_{V_1(H)}$ 和 g 的映射，见引理 4.8。

对于映射 F，其单射性显而易见，而满射性由引理 4.6 得出。为说明这与 H的选取无关，令 K 为另一个有限维 Carnot 子群，使得 $G' \subset K$ 和 $x \in K$成立。令 L 为包含 K 和 H 的某个有限维 Carnot 子群，并令 h_K 和 h_L 为分别延拓 g 以及 f 在相关子集上的限制的映射。根据命题 4.8 的第二部分

$$h_H(x) = h_L(x) = h_K(x).$$

现在，我们以类似的方式在 $W \times G'$ 上定义李括号。设 x'、$y' \in W \times G'$，并设 x、$y \in G$ 是它们在 F 下的原像。于是 x、y 属于某个有限维 Carnot 子群 H，该子群也包含 G'。现在，我们将 $h_H(H)$ 上的李括号定义为命题 4.8 给出的李括号。通过类似于证明 F 定义良好的推理，可以得出该李括号定义良好。

为证明李括号保持分次 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$，取两个向量$x \in \mathfrak{g}_i$、$y \in \mathfrak{g}_j$，并令 H 为引理 4.6 中的子群。将 H 视为其李代数后，我们得到 $H = \mathfrak{g}_H \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$，其中 $\mathfrak{g}_H \subset V_1(G)$。由于 H 是分次的，我们得到$[x,y] \in \mathfrak{g}_{i+j}$，这表明 G 上的李括号保持分次。

现在证明 $[\cdot,\cdot]$ 有界。首先，只需证明$W\times G'$ 中在 F^{-1} 下的像属于 $V=\bigcup_k V_k(G)$ 的元素有界，因为 $W\times G'$ 是$\{f(V_k(G))\}_k$的直和。令 $x'\in f(V_i(G))\cap B_{W\times G'}(0,1)$ $y'\in f(V_j(G))\cap B_{W\times G'}(0,1)$，$x=F^{-1}(x')$、$y=F^{-1}(y')$，并令 H为包含 G'和 $\{x,y\}$的有限维 Carnot 子群。根据引理 4.5 和 4.9，存在常数 $C>0$，它仅取决于 G以及 G'上的范数的选取，使得 $x,y\in B_G(e_G,C)$。

将 BCDH 公式应用于 H，可得子空间 $V_{i+j}(H)$ 中交换子 $xyx^{-1}y^{-1}$ 的坐标恰为 $[x',y']$。由于 $x,y\in B_G(e_G,C)$，由三角不等式可得 $xyx^{-1}y^{-1}$ 属于 $G'\cap B_G(e_G,4C)$。根据引理 4.9，这在$\|\cdot\|$ 下也是一个有界子集，因此

$$\sup_{x\in f(V)\cap B_{W\times G'}(0,1)}\ \sup_{y\in f(V)\cap B_{W\times G'}(0,1)}\|[x,y]\|<\infty,$$

这证明了 $[\cdot,\cdot]$的有界性。

给定李括号 $[\cdot,\cdot]$，现在我们可以利用 BCDH 乘法在 $W\times G'$ 上定义群乘法。由于 $[\cdot,\cdot]$ 是有界李括号且该群是幂零的，因此群乘法是连续的。根据引理 4.6，映射 F: $G\to(W\times G',\cdot)$ 也是一个群同构。我们可以将 G 上的度量推前，得到 $W\times G'$ 上的左不变度量 d_G。注意， $W\times\{0\}$ 可以识别为 $V_1(W\times G')$。总之，在 $(W\times G',\cdot)$ 上有两种拓扑，一种来自 d_G，另一种来自$\|\cdot\|$，且群乘法在这两种拓扑下都是连续的。要证明该定理，只需证明这两种拓扑相同。

我们令 $B_{W\times G'}$和 B_G分别表示 $\|\cdot\|$度量和 d_G度量中的球。令 $(x,z)\in W\times G'$。为了证明由 $\|\cdot\|$和 d_G诱导的拓扑等价，我们将证明对于每个$\rho>0$，都存在一个 $r>0$ 使得

$$B_{W\times G'}((x,z),r)\subseteq B_G((x,z),\rho)$$

and

$$B_G((x,z),r)\subseteq B_{W\times G'}((x,z),\rho).$$

由于群乘法在两种拓扑下都是连续的，只需考虑 $(x,z)=0$的情形。

现在固定 $\rho>0$，并令 $(u,v)\in W\times G'$满足 $\|u\|,\|v\|<r$，其中 $r>0$足够小，稍后确定。我们有

$$(u,v)(u,0)^{-1}=(u,v)(-u,0)=(0,v+P((u,v),(-u,0))).$$

由于 P是由 [的迭代李括号构成的多项式（u,v），$(-u,0)$],，因此当 $r\to0$时，我们得到

$$\lim_{r\to0}\|v+P((u,v),(-u,0))\|=0. \tag{4.4}$$

Thus

$$\lim_{r\to0}d_G((u,v)(u,0)^{-1},(0,0))=\lim_{r\to0}d_G((0,0),(0,v+P((u,v),(-u,0))))=0, \tag{4.5}$$

其中，在最后一个等式中，我们利用了这样一个事实： G' 配备由 d_G 和 $\|\cdot\|$ 诱导的拓扑后是同胚拓扑空间。现在我们来计算

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} d_G((u,v),(0,0)) &\leqslant \lim_{r\to 0}(d_G((u,v),(u,v)(u,0)^{-1}) + d_G((u,v)(u,0)^{-1},(0,0)))\\ &\overset{(4.5)}{\leqslant} \lim_{u\to 0} d_G((u,0),(0,0)) + 0\\ &= 0,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式用到了命题 4.4。因此，存在足够小的 r ，使得 $B_{W\times G'}((0,0)\ r) \subseteq B_G((0,0)\ \rho)$。

现在，令 $(u,v) \in B_G((0,0)\ r)$，其中 $r>0$ 足够小，其值待定。根据 W 上范数的定义，我们有 $B_G((0,0)\ r) \subset B_W(0,r) \times G'$，因此 $\|u\|_W \leqslant r$。于是由命题 4.4

$$\lim_{r\to 0} d_G((0,0),(u,0)) = 0.$$

于是我们得到

$$\lim_{r\to 0} d_G((u,v)(-u,0),(0,0)) \leqslant \lim_{r\to 0} d_G((u,v),(0,0)) + \lim_{r\to 0} d_G((0,0),(u,0)) = 0.$$

因此，由于 G' 关于 d_G 且 $\|\cdot\|$ 是同胚的拓扑空间 s,

$$\lim_{r\to 0} \|(u,v)(-u,0)\| = 0.$$

我们还有

$$(u,v) - (u,v)(-u,0) = (u, P((u,v),(-u,0))).$$

同样，类似于 (4.4)，我们得到

$$\lim_{r\to 0} \|(u,v) - (u,v)(-u,0)\| = 0.$$

现在我们计算

$$\lim_{r\to 0} \|(u,v)\| \leqslant \lim_{r\to 0} \|(u,v) - (u,v)(-u,0)\| + \lim_{r\to 0} \|(u,v)(-u,0)\| = 0$$

因此，存在充分小的 r，使得 $B_G((0,0)\ r) \subseteq B_{W\times G'}((0,0)\ \rho)$。这就证明了该定理。□

5. 绝对连续测度的卷积

在本节中，我们设 G 是一个无限维卡诺群，其第一层为$V_1(G)$。给定一个局部紧子群 $H \subset G$，我们用 vol_H 表示 H 上哈尔测度的任意归一化。若 H 上的测度相对于 vol_H 绝对连续，则称其为绝对连续，因此它也相对于 H 上的所有其他哈尔测度绝对连续。我们用 $\mathrm{AC}(H)$ 表示 H 上绝对连续的概率测度集合，即

$$\mathrm{AC}(H) := \{\mu \in \mathrm{Meas}(H) \ :\ \mu(H) = 1, \mu \ll \mathrm{vol}_H\}.$$

我们还将 $\mathrm{AC}(H)$ 中的测度视为定义在 G 上、支撑于 H 的测度。现在，我们基于绝对连续测度的卷积引入一类新的零测集。

定义 5.1（CAC($\mathcal{X}$) 和 CAC 零集）。设 $\mathcal{X}=(X_1,X_2,\dots)$ 是无限维卡诺群 G 的一个 Carnot 张成集，并具有相关滤过 $H_k:=\langle X_1,\dots,X_k\rangle$。我们将集合 CAC′($\mathcal{X}$) 定义为 G 上所有满足以下条件的概率测度 μ 的集合：对每个 $k\in\mathbb{N}$，存在一个测度 $\nu_k\in \mathrm{AC}(H_k)$，使得对每个 $m\in\mathbb{N}$，序列

$$(\nu_k * \cdots * \nu_m)_k \text{ converges weakly, as } k\to\infty,$$

以及序列

$$(\nu_k * \cdots * \nu_1)_k \text{ converges weakly to } \mu, \text{ as } k\to\infty.$$

最后，令 $\mathrm{CAC}(\mathcal{X}):=\{(L_g)_*\mu\colon\ g\in G,\mu\in \mathrm{CAC}'(\mathcal{X})\}$。我们称博雷尔集 $E\subset G$为 CAC 零集，如果对于每个 Carnot 张成集 $\mathcal{X}$ 以及每个 $\mu\in\mathrm{CAC}(\mathcal{X})$，都有 $\mu(E)=0$。

出于辅助目的，给定一个 Carnot 张成集 $\mathcal{X}=(X_1,X_2,\dots)$，其关联滤过为 $H_k:=\langle X_1,\dots,X_k\rangle$，我们还将考虑以下集合

$$\mathrm{CAC}'_k(X_1,\dots,X_k):=\{\nu_k*\cdots*\nu_1:\nu_i\in\mathrm{AC}(H_i),\ \text{for all } i=1\dots,k\}.$$

且 $\mathrm{CAC}(X_1,\dots,X_k):=\{(L_g)_*\mu\colon\ g\in H_k,\mu\in\mathrm{CAC}'(X_1,\dots,X_k)\}$.

注 5.2. 我们指出，CAC 测度与巴拿赫空间中的立方体测度有一些相似之处。回顾一下，在巴拿赫空间 X 中，立方体测度 是形如 $a+\sum_k X_k e_k$ 的随机变量的分布，其中 a、e_1、e_2、$\dots\in X$，e_ks 的张成空间是稠密的，$\sum_k\|e_k\|<\infty$，并且 X_k 是 $[0,1]$ 上的独立同分布均匀随机变量。若令 H_i 表示由 e_1、...、e_i 生成的子空间，则可见，立方体测度是形如 $\cdots*\mu_2*\mu_1$ 的测度的平移，其中每个 μ_i 都是定义在由 e_i 张成的子空间上的有界均匀概率测度，而该子空间是 H_i 中 H_{i-1} 的补子群。

与巴拿赫空间中的情形不同，H_{i-1} 在 H_i 中并不总有一个互补的 Carnot 子群。这就是为什么我们必须让 ν_i 定义在 H_i 的全部 部分上，因此 ν_i 会重新经过H_{i-1}，而不是 μ_i。

与巴拿赫空间中的立方零测度情形一样，我们证明，这种零集概念等价于是 Aronszajn 零集。

定理 5.3。 无限维卡诺群中的一个博雷尔集，其换位子子群局部紧，当且仅当它是 *Aronszajn* 零集，当且仅当它是 CAC 零集。

请注意，这里并未假设交换子具有局部紧性。

我们首先证明反向结论：如果一个集合不是 Aronszajn 零集，那么存在一个 CAC 测度对其赋予正测度。为此，令 $\mathcal{X}=(X_1,X_2,\dots)$ 为一个 Carnot 张成集，其关联的滤过为 $H_k:=\langle X_1,\dots,X_k\rangle$。

对于每个 $k\geqslant 0$ 和 $\epsilon\in(0,\infty)$，考虑某个 $\nu_k^\epsilon\in\mathrm{AC}(H_k)$。我们寻求使得

$$e_G \text{ density point of } U\subseteq H_k \implies \lim_{\epsilon\to 0}\nu_k^\epsilon(U)=1. \tag{5.1}$$

在上文和下文中，如果一个点相对于 H_k 上某个（因而也相对于每个）哈尔测度都是密度点，我们就称它为密度点。

下面的引理给出了一种利用膨胀 δ_ϵ 构造这类族的简便方法，从而说明这类测度十分常见。

引理 5.4。 对于每个 $\nu\in\mathrm{AC}(H_k)$，测度 $\nu_k^\epsilon:=(\delta_\epsilon)_*(\nu)$ 满足 (5.1)　　.

证明。设 $U \subseteq H_k$ 是一个集合，e_G 是其密度点，且 $\eta > 0$。由于 ν 是概率测度，存在 $R > 0$，使得 $\nu(H_k \backslash B_{H_k}(e_G, R)) < \eta/2$。由于 ν 绝对连续，存在一个 $\delta > 0$，使得对于所有满足 $\mathrm{vol}_{H_k}(A) < \delta$ 的集合 $A \subset H_k$，都有 $\nu(A) < \eta/2$。

由于 e_G 是 U 的密度点，存在 $\rho > 0$ 使得

$$\frac{\mathrm{vol}_{H_k}(U \cap B_{H_k}(e_G, r))}{\mathrm{vol}_{H_k}(B_{H_k}(e_G, r))} > 1 - \frac{\delta}{\mathrm{vol}_{H_k}(B_{H_k}(e_G, R))}, \qquad \text{for all } r < \rho.$$

将所有内容按 R/r 缩放，并利用 H_k 上哈尔测度的齐次性，可得

$$\mathrm{vol}_{H_k}(\delta_{R/r}(U) \cap B_{H_k}(e_G, R)) > \mathrm{vol}_{H_k}(B_{H_k}(e_G, R)) - \delta, \qquad \text{for all } r < \rho.$$

由此可得

$$\nu(B_{H_k}(e_G, R) \backslash \delta_{R/r}(U)) < \eta/2, \qquad \text{for all } r < \rho.$$

令 $\epsilon < \rho/R$。则有

$$\nu_k^\epsilon(U) = \nu(\delta_{1/\epsilon}(U)) \geqslant 1 - \nu(H_k \backslash B_{H_k}(e_G, R)) - \nu(B_{H_k}(e_G, R) \backslash \delta_{1/\epsilon}(U)) \geqslant 1 - \eta.$$

□

给定一列测度族 ν_1^ϵ、ν_2^ϵ、.....，其参数为 $\epsilon \in (0, \infty)$，以及一列数 ϵ_1、ϵ_2、$\ldots > 0$，我们对 $k > m$ 定义

$$\nu^{\epsilon_m, \ldots, \epsilon_k; m} := \nu_k^{\epsilon_k} * \cdots * \nu_m^{\epsilon_m}.$$

我们也记作 $\nu^{\epsilon_1, \ldots,}{}^{\epsilon_k} = \nu^{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k; 1}$。

下面的定理直接推出定理 5.3 的反向结论。

定理 *5.5.* 设 $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ 是无限维卡诺群 G 中的一个 *Carnot* 张成集，其对应的滤过为 $H_k := \langle X_1, \ldots, X_k \rangle$。对于 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\epsilon > 0$，设 $\nu_k^\epsilon \in AC(H_k)$ 满足 *(5.1)*。设 $E \subseteq G$ 是一个博雷尔集，使得 $E \notin \mathcal{A}(\mathcal{X})$。那么存在 $x \in E$ 和一个序列 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$，使得该序列 $\nu^{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n}$ 的弱极限 ν 存在，且 $(x\nu)(E) > 0$。

注 5.6。请注意，这个定理实际上比定理 5.3 的反向结论略强，因为它指出，我们可以独立于 E 指定这些族 $\{\nu_k^\epsilon\}_{k,\epsilon}$。

我们先给出几个预备引理。首先证明，当 ϵ_i 衰减得足够快时，弱极限存在。

引理 5.7。设 g_1，g_2，..... 是 G 中的一个序列，且 $d(e, g_i) < 2^{-i}$ 对除有限多个 i 外均成立。于是，无穷乘积 $\ldots g_n g_{n-1} \ldots g_1$ 在 G 中收敛。

证明。设 $s_n := g_n g_{n-1} \cdots g_1$。由于度量 d 是左不变的而非右不变的，我们无法轻易界定 $d(s_n, s_{n+1}) = d(s_n, g_{n+1} s_n)$。然而，我们可以说

$$d(s_n^{-1}, s_{n+1}^{-1}) = d(s_n^{-1}, s_n^{-1} g_{n+1}^{-1}) = d(e, g_{n+1}^{-1}) = d(g_{n+1}, e) < 2^{n+1}$$

除有限多个 n 外，因此根据三角不等式的论证，序列 s_n^{-1} 是柯西序列，因而收敛。由于 G 是拓扑群，求逆是连续的，因此 s_n 也收敛。□

引理 5.8。 设 $\nu_k^{\epsilon} \in \mathrm{AC}(H_k)$ 是满足 (5.1) 的概率测度族。存在充分小的 δ_1, δ_2..... , 使得对于所有 m 以及满足 $0 < \epsilon_i < \delta_i$ 的所有序列 ϵ_1, ϵ_2, ... , 测度序列 $\nu_{m,\ k} = \nu^{\epsilon_k}$, ..., ϵ_m; ^{m} 弱收敛到某个 μ_m, 其中 $k \to \infty$。

证明。 对于每个 i, 选取足够小的 $\delta_i > 0$, 使得对所有 $\epsilon < \delta_i$, $\nu_i^{\epsilon}(B_{H_i}(e_G, 2^{-i})) > 1 - 2^{-i}$。假设 $\epsilon_i < \delta_i$, 令 $\xi_i \sim \nu_i^{\epsilon_i}$ 为相互独立的 G 值随机变量。根据博雷尔–坎泰利引理, 几乎必然地, 对除有限多个 i 之外的所有 i, 都有 $d(e_G, \xi_i) < 2^{-i}$ 。因此, 对每个固定的 m, 由引理 5.7 可知, 元素序列 $\sigma_k = \xi_k \cdots \xi_m$ 几乎必然收敛。由于 $\sigma_k \sim \nu^{\epsilon_m, \ldots, \epsilon_k; m}$, 测度列弱收敛。□

定理 5.5 的证明思路大致是归纳地构造序列 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$, 使得对于适当的 $x \in E$, 对所有 n 都有 $(x\nu^{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n})(E) > c$, 其中 $0 < c < 1$ 是任意给定的常数。若 E 是闭集, 那么由 Portmanteau 定理可得 $(x\nu)(E) \geqslant c$, 这正是我们所需的。不幸的是, 对于一般的博雷尔集 E, 我们只能得出 $(x\nu)\left(\overline{E}\right) \geqslant c$, 这还不够。

为了解决这个问题, 我们将用到以下技术性引理 5.9。在 [8, 引理 7]) 中, 它被称为一个"标准事实", 并附有证明概要, 因此我们在此补全细节。引理 5.9 将使我们能够在归纳的每一步 n 稍微缩小集合 E, 从而得到一个由更小的博雷尔集组成的递降序列 $E_n = E_{k_1, \ldots, k_n}$。只要确保 $\nu^{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n}$ 在 E_n上赋予足够的测度, 我们便可得出结论: 测度 ν 在闭集 $\bigcap_n \overline{E_n}$ 上赋予了足够的测度, 而该闭集实际上包含于 E中。

初读时, 读者不妨先关注定理 5.5 中 E为闭集的特殊情形, 此时不会出现这些复杂情况。对于闭集 E, 引理 5.9 就变得显而易见, 因为所有集合 $E_{k_1, \ldots, k_n}$ 都可以直接取为 E。在这种情况下, 在定理 5.5 的证明中, 序列 k_1、 k_2、.....的所有出现都可以忽略。

有关这一问题的进一步讨论, 请参见第 8.3 节。

引理 5.9. 假设 E 是波兰空间 X 的任意博雷尔子集。存在一个由博雷尔集 $E_{k_1, \ldots, k_n}$ 组成的可数族, 以自然数的有限序列 $(k_1, \ldots, k_n)$ 为索引, 并具有以下性质:

(1) $E_{\emptyset} = E$, 其中 $\emptyset$ 表示长度为 $n = 0$ 的平凡序列; *(2)* 对于每一个 $(k_1, \ldots, k_n)$, 我们都有

$$E_{k_1, \ldots, k_n, 0} \subset E_{k_1, \ldots, k_n, 1} \subset \cdots \subset E_{k_1, \ldots k_n} \text{ and } E_{k_1, \ldots, k_n} = \bigcup_{j=0}^{\infty} E_{k_1, \ldots, k_n, j}$$

(*3*) 对于每个无限序列 k_1, k_2..... , 闭集 $F_{k_1,\ k_2, \ldots} := \bigcap_{n=0}^{\infty} E_{k_1, \ldots, \ k_n}$ 包含于 E。

请注意, 尽管 $E_{k_1, \ldots, k_n} \subset E$, 但该构造并不能保证$E_{k_1, \ldots, k_n} \subset E$, 因此引理的第 3 项并非显而易见。

证明。 考虑带有积拓扑的贝尔空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 其元素记作函数 $\alpha \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$。存在一个闭集 $C \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 和一个连续单射$\varphi \colon C \to X$, 其像为 E (参见 [28, 定理 3.3.17])。对于每个有限序列 $k_1, \ldots, k_n$,

令 $Z_{k_1,\dots,k_n} = \{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \colon \alpha(i) \leqslant k_i, i = 1,\dots,n\}$，它是 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 的闭子集；再令 $E_{k_1,\dots,k_n} = \varphi(C \cap Z_{k_1,\dots,k_n})$。那么性质 1 和 2 立即由 $Z_{k_1,\dots,k_n}$ 的相应显然性质推出。

对于性质 3，固定一个无限序列 $k_1, k_2,\dots$，并令 $x \in F_{k_1,\ k_2\dots}$。于是，对每个 n，都存在一点 $x_n \in E_{k_1,\ k_n}$，满足 $d(x_n, x) < 1/n$，从而 $x_n \to x$，并且我们可以将 $x_n = \varphi(\alpha_n)$ 写成某个 $\alpha_n \in C \cap Z_{k_1,\ k_n}$。

我们断言 α_n 有一个收敛子列。事实上，令 $\beta_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 定义为

$$\beta_n(i) = \begin{cases} \alpha_n(i), & i \leqslant n \\ 0, & i > n. \end{cases}$$

于是，每个 β_n 都属于集合 $\bigcap_n Z_{k_1,\ k_n} = \prod_n \{0, 1, \dots, k_n\}$，该集合由 Tikhonov 定理可知是紧的。因此，β_n 有一个收敛子列 $\beta_{n_j} \to \beta$，也就是说，对每个 i，都有 $\beta_{n_j}(i) \to \beta(i)$。并且，对每个 i，对所有 $n \geqslant i$，都有 $\alpha_n(i) = \beta_n(i)$，所以 $\alpha_{n_j}(i) \to \beta(i)$ 也成立。因此 $\alpha_{n_j} \to \beta$。

由于 C 是闭集，我们有 $\beta \in C$。因此，由 φ 的连续性可知，$x_{n_j} = \varphi(\alpha_{n_j}) \to \varphi(\beta)$，从而 $x = \varphi(\beta) \in E$。□

现在我们可以证明定理 5.5 了。

定理 *5.5* 的证明。 与定理陈述中一样，设 $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots)$ 是一个 Carnot-张成集，H_1, $H_2, \dots$ 是其对应的滤过，而 ν_k^ϵ 是给定的定义在 H_k 上的绝对连续测度族，并满足 (5.1)。为方便起见，我们引入一个退化的基础情形：令 $H_0 = \{e_G\}$ 为平凡子群，$\nu_0 = \delta_{e_G}$ 为单位元处的单位点质量测度。注意，它是卷积运算的单位元（因此，对于所有概率测度 μ，都有 $\mu * \delta_{e_G} = \mu$）。

令 $\nu^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n} = \nu_n^{\epsilon_n} * \cdots * \nu_1^{\epsilon_1}$，其中 $\nu^\emptyset = \nu_0 = \delta_{e_G}$，与之前一样，$\emptyset$ 表示长度为 0 的平凡序列。令 δ_k 如引理 5.8 中所述。从现在起，每个 ϵ_i 都表示 $(0, \delta_i)$ 中的一个有理数，因此对于任意这样的 ϵ_i 序列，序列 $\nu^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}$ 将弱收敛。

假设 E 是一个满足 $E \notin \mathcal{A}(\mathcal{X})$ 的博雷尔集，并令 $E_{k_1,\dots,k_n}$ 为一族具有引理 5.9 中所述性质的集合。任取一个常数 $0 < c < 1$。我们的目标是构造一个 $x \in G$ 以及序列 $\epsilon_1, \epsilon_2,\dots$ 和 $k_1, k_2,\dots$，使得对每个 $n \geqslant 0$，都有

$$(x\nu^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n})(E_{k_1,\dots,k_n}) > c. \tag{5.2}$$

然后，利用族 $E_{k_1,\ \dots,\ k_n}$ 以及弱收敛的性质，我们将能够得出结论：$(x\nu)(E) \geqslant c > 0$。

事实上，我们希望找到一个 x，使得能够归纳地同时构造序列 ϵ_1、ϵ_2、……和 k_1、k_2、……。作为基础情形，注意到当 $n = 0$ 时，不等式 (5.2) 变为 $(x\delta_{e_G})(E) > c$，这对每个 $x \in E$ 都显然成立。因此，给定一个 $x \in E$，只需证明归纳步骤：对于每个 $n \geqslant 0$，以及满足 (5.2) 的任意序列 ϵ_1、……、ϵ_n 和 k_1、……、k_n，存在 ϵ_{n+1} 和 k_{n+1}，使得将序列扩展为 ϵ_1、……、ϵ_{n+1} 和 k_1、……、k_{n+1} 后，(5.2) 仍然成立。如果一个点 $x \in E$ 满足这一条件，我们就称其为“好点”。

为了证明好点存在，我们考虑“坏点”的补集 $B \subset E$，并证明 $B \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$，从而特别得到 $B \neq E$。将上述条件转化为集合的语言，我们写成

$$A^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}_{k_1,\dots,k_n} = \{x : (x\nu^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n})(E_{k_1,\dots,k_n}) > c\} \tag{5.3}$$

$$B^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}_{k_1,\dots,k_n} = A^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}_{k_1,\dots,k_n} \setminus \bigcup_{k_{n+1}} \bigcup_{\epsilon_{n+1}} A^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{n+1}}_{k_1,\dots,k_{n+1}} \tag{5.4}$$

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k_1,\dots,k_n} \bigcup_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n} B^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}_{k_1,\dots,k_n} \tag{5.5}$$

这里，关于 k_i 的并集是指从 0 到 ∞ 取并，而关于 ϵ_i 的并集则是在可数集 $(0,\delta_i)\cap\mathbb{Q}$ 上取并。这些都是博雷尔集。事实上，对于任意博雷尔概率测度 μ 和任意博雷尔集 D，函数 $f(x) = (x\mu)(D) = \int_G 1_D(xy)\ \mu(dy)$ 根据 Fubini 定理是一个博雷尔函数，因为 $1_D(xy)$ 是 (x,y) 的博雷尔函数。于是，每个 $A^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}_{k_1,\dots,k_n}$ 都是形如 $\{x : (x\mu)(D) > c\} = \{x : f(x) > c\}$ 的集合，因此也是博雷尔集。取可数并集和补集后，$B^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}_{k_1,\dots,k_n}, B$ 也都是博雷尔集。

因此，证明的关键在于以下断言：

断言 5.10. $B^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}_{k_1,\dots,k_n} \in \mathcal{A}(X_1,\dots,X_{n+1})$。

为简洁起见，记 $B^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}_{k_1,\dots,k_n}$ 为 B_n，并记 $E_{k_1,\dots,k_n}$ 为 E_n。由命题 2.7，要证明断言 5.10，只需证明对于所有 $y \in G$，$\mathrm{vol}^{H_{n+1}}(y^{-1}B_n \cap H_{n+1}) = 0$；为此，我们证明 $y^{-1}B_n \cap H_{n+1}$ 不含任何密度点。

反设 $x \in y^{-1}B_n \cap H_{n+1}$ 是一个密度点。在左侧乘以 x^{-1} 后，可知 e_G 是集合 $D = x^{-1}y^{-1}B_n \cap H_{n+1}$ 的一个密度点。（由于 $x \in H_{n+1}$，我们有 $x^{-1}H_{n+1} = H_{n+1}$）。由于 $yx \in B_n$，对于所有 ϵ_{n+1} 和 k_{n+1}，都有 $yx \notin A^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{n+1}}_{k_1,\dots,k_{n+1}}$，即：

$$(yx\nu^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{n+1}})(E_{k_1,\dots,k_{n+1}}) \leqslant c.$$

但 $E_n = E_{k_1,\dots,k_n} = \bigcup_{k_{n+1}=0}^{\infty} E_{k_1,\dots,k_{n+1}}$ 是一个递增并集，因此可得

$$(yx\nu^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{n+1}})(E_n) \leqslant c. \tag{5.6}$$

另一方面，由于 $\nu^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{n+1}} = \nu^{\epsilon_{n+1}}_{n+1} * \nu^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}$，我们可以写成

$$(yx\nu^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{n+1}})(E_n) = \int_{H_{n+1}} (yxz\nu^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n})(E_n)\, \nu^{\epsilon_{n+1}}_{n+1}(dz).$$

现在，若 $z \in D$，则 $yxz \in B_n \subset A^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}_{k_1,\dots,k_n}$，因此 $(yxz\nu^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n})(E_n) > c$。于是

$$(yx\nu^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{n+1}})(E_n) > c \cdot \nu^{\epsilon_{n+1}}_{n+1}(D). \tag{5.7}$$

但是由于 ν^{ϵ}_{n+1} 满足 (5.1)，我们有 $\nu^{\epsilon_{n+1}}_{n+1}(D) \to 1$ 当 $\epsilon_{n+1} \to 0$时。因此，当 ϵ_{n+1}足够小时，式 (5.6) 和 (5.7) 彼此矛盾。命题 5.10 得证。

现在我们可以按照上述概述的思路继续进行。由于 $B^{\epsilon_1,\dots,k_1\dots\overset{\epsilon_n}{},,k_n} \in \mathcal{A}(X_1,\dots,X_{n+1})$，我们可以将 $B^{\epsilon_1,\dots,k_1\dots\overset{\epsilon_n}{},,k_n} = \bigcup_{i=1}^{n+1} B^{\epsilon_1}_{,\dots,k_1\dots\overset{\epsilon_n}{}k_n,,}(i)$ 写成 $B^{\epsilon_1,\dots,k_1\dots\overset{\epsilon_n}{}k_n,,}(i) \in \mathcal{A}(X_i)$。于是，(5.5) 可以重新编号为

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty}\left[\bigcup_{n=i-1}^{\infty}\bigcup_{k_1,\dots,k_n}\bigcup_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n} B^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}_{k_1,\dots,k_n}(i)\right]$$

由于 $\mathcal{A}(X_i)$ 对可数并封闭，括号中的集合属于 $\mathcal{A}(X_i)$，因此我们有$B \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$。于是存在某个“好点” $x \in E \setminus B$。我们通过归纳构造数列 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ 和 $k_1, k_2, \dots$，使得对于所有 n，(5.2) 都成立。如上所述，(5.2) 对 $n = 0$ 成立，这仅仅是因为 $x \in E$。现在假设 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 和 $k_1, \dots, k_n$ 已经构造完成，且它们满足 (5.2)。这意味着 $x \in A^{\epsilon_1,\dots,k_1\dots\overset{\epsilon_n}{},,k_n}$。由于 $x \in E \setminus B$，我们有 $x \notin B^{\epsilon_1,\dots,k_1\dots\overset{\epsilon_n}{}k_n,,}$，因此必定存在 ϵ_{n+1}, k_{n+1}，使得 $x \in A^{\epsilon_1,\dots,k_1\dots\overset{\epsilon_{n+1}}{}k_{n+1},,}$，也就是说，$\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+1}$ 和 $k_1, \dots, k_{n+1}$ 满足 (5.2)。由归纳法可知，对于所有 n，所构造的数列都满足 (5.2)。

为了完成证明，令 ν 为 $\nu^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}$ 的弱极限，该极限存在，因为每个 ϵ_i 都被选得小于 δ_i。现在，对于任意 $n > m$，我们有

$$(x\nu)^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}\left(\overline{E_{k_1,\dots,k_m}}\right) \geqslant (x\nu)^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}\left(E_{k_1,\dots,k_m}\right) \geqslant (x\nu)^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}\left(E_{k_1,\dots,k_n}\right) > c$$

因此，令 $n \to \infty$ 并使用 Portmanteau 定理，我们有 $(x\nu)\left(E_{k_1,\dots,k_m}\right) \geqslant c$。现在，$\bigcap_{m=1}^{\infty} E_{k_1,\dots,k_m} \subset E$ 是一个递减的可数交，因此使用从下连续性，我们有

$$(x\nu)(E) \geqslant (x\nu)\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{E_{k_1,\dots,k_m}}\right) = \lim_{m\to\infty}(x\nu)\left(\overline{E_{k_1,\dots,k_m}}\right) \geqslant c$$

定理 5.5 的证明至此完成。 □

现在我们证明一些引理，它们将有助于证明定理 5.3 的正向部分。

引理 5.11。 $\mathrm{CAC}_k(X_1,\dots,X_k)$ 中的元素是 H_k 上的绝对连续测度。

证明。取 $g \in H_k$ 和 $\nu_i \in \mathsf{AC}(H_i)$，对每个 $i = 1, \dots, k$。我们需要证明 $(L_g)_*(\nu_k * \cdots * \nu_1) \ll \mathrm{vol}_{H_k}$。取集合 $E \subset H_k$，使得 $\mathrm{vol}_{H_k}(E) = 0$。首先，由于 H_k 是幂零的（因而是幺模的），我们有 vol_{H_k} 对右平移和左平移均不变，因此对所有 a、$b \in H_k$，$\mathrm{vol}_{H_k}(R_b(L_a(E))) = 0$。其次，回顾 $\mathrm{vol}\ \nu_k \ll {}_{H_k}$，因此

$$\nu_k(R_b(L_a(E))) = 0, \qquad \text{for every } a, b \in H_k. \tag{5.8}$$

因此，回顾测度 $\nu := \nu_{k-1} * \cdots * \nu_1$ 支持于 H_k 上，我们有

$$\begin{aligned}(L_g)_*(\nu_k * \cdots * \nu_1)(E) &= (\nu_k * \nu)(g^{-1}E)\\ &= \int_G \mathbb{I}^{g^{-1}E}\,\mathrm{d}(\nu_k * \nu)\\ &\overset{(2.12)}{=} \int_G\int_G \mathbb{I}^{g^{-1}E}(xy)\,\mathrm{d}\nu_k(x)\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \int_G\int_G \mathbb{I}^{g^{-1}Ey^{-1}}(x)\,\mathrm{d}\nu_k(x)\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \int_G \nu_k(g^{-1}Ey^{-1})\,\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \int_{H_k} \nu_k(R_{y^{-1}}(L_{g^{-1}}(E)))\,\mathrm{d}\nu(y)\\ &\overset{(5.8)}{=} \int_{H_k} 0\,\mathrm{d}\nu(y) = 0.\end{aligned}$$

□

引理 5.12. 对于每个 $k \geqslant 1$ 和 $\mu \in \mathrm{CAC}'(\mathcal{X})$，存在测度 $\nu \in \mathrm{CAC}'_k(X_1, \ldots, X_k)$ 以及 η，定义在 G 上，使得

$$\mu = \eta * \nu.$$

证明。设 μ 具有 $\lim_j(\nu_j * \cdots * \nu_1)$ 的形式，其中 $\nu_j \in \mathrm{AC}(H_j)$ 对 $j \in \mathbb{N}$ 成立，并且对所有 $m \in \mathbb{N}$，弱极限 $\lim_j(\nu_j * \cdots * \nu_m)$ 存在。固定 $k \in \mathbb{N}$，取 $\eta := \lim_j(\nu_j * \cdots * \nu_k)$ 和 $\nu := \nu_k * \cdots * \nu_1$。由于定理 2.14 可用（因为 ν 和每个 $(\nu_j * \cdots * \nu_k)$ 都是概率测度），故得引理。□

现在我们终于可以证明定理 5.3 了。

定理 *5.3* 的证明。反向蕴含由定理 5.5 得出。现在我们证明正向蕴含。

给定一个 Aronszajn 零集 E 和一个 Carnot 张成集 $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \ldots)$，我们首先证明

$$\mu(E) = 0, \qquad \text{for all } \mu \in \mathrm{CAC}'(\mathcal{X}). \tag{5.9}$$

注意，根据假设，$E \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$。因此，$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$，其中 $E_k \in \mathcal{A}(X_k)$。只需证明，对每个 k，$\mu(E_k) = 0$。

固定 k，令 $\nu \in \mathrm{CAC}'_k(X_1, \ldots, X_k)$，并令 η 为将引理 5.12 应用于 μ 所得到的测度。那么

$$\mu(E) = \int_G\int_{H_k} \mathbf{1}_E(xy)\; d\nu(y)\; d\eta(x) = \int_G \nu(x^{-1}E)\; d\eta(x).$$

由于对每个 $x \in G$ 都有 As $x^{-1}E \in \mathcal{A}(X_k)$，由命题 2.7 和引理 5.11 可得 $\nu(x^{-1}E) = 0$，从而得到 $\mu(E) = 0$。

现在，设 $\nu \in \mathrm{CAC}(\mathcal{X})$，其中 $\mathcal{X}$ 是某个 Carnot 张成集，并设 E 是 Aronszajn 零集。那么存在某个 $g \in G$ 和 $\mu \in \mathrm{CAC}'(\mathcal{X})$，使得

$$\nu(E) = \mu(gE) = 0,$$

在最后一个等式中，我们使用了 (5.9)，以及这样一个事实： gE 是某个 Aronszajn 零集的左平移，因此它也是 Aronszajn 零集。□

6. Gauss–Haar 测度

本文最初的灵感源自 Csörnyei 的结果 [8]： 该结果表明，在巴拿赫空间中，博雷尔集 B 是 Aronszajn 零集，当且仅当它是高斯零测；也就是说，对于每个定义在 B上的非退化高斯测度 γ，都有 $\gamma(B) = 0$。我们的主要结果定理 5.3 可视为 Csörnyei 定理在无限维 Carnot 群情形下的类比，其中 CAC 测度扮演了高斯测度的角色。

本节及下一节中，我们将讨论无限维卡诺群 G 且其换位子子群局部紧的情形。根据定理 4.1， G 实际上是某个有限步数 s的分层巴拿赫-李群，因此作为集合， G 等于一个巴拿赫李代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$，并配备由 BCDH 公式 (2.3) 定义的群运算。在这种情形下，指数映射就是单位映射；在该空间的群与李代数解释之间转换时，我们将省略指数映射。

设 $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ 是 $\mathfrak{g}$ 的分层。为与例 2.11 的记号一致，令 $W = V_1$ 且 $\mathbf{C} = V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$，因此 C 是一个有限维幂零李代数。相对于 G 上的可缩放群结构，我们有 $W = V_1(G)$ 且 $\mathbf{C} = [G, G]$。令 m 表示 C 上的勒贝格测度（采用任意固定的归一化），它也是子群 $\mathbf{C} = [G, G] \subset G$ 上的哈尔测度。

引理 6.1. 固定 $x \in W$。映射 $\psi_x : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ 由 $\psi_x(y) = xy - x$ 定义，是一个保持勒贝格测度 m 不变的双射。

证明. 显然， ψ_x 是一个双射，其逆映射为 $\psi_x^{-1}(z) = x^{-1}(z + x)$。为证明它保持测度，对每个 $y \in \mathbf{C}$，记 $y = y_2 + \cdots + y_s$，其中 $y_k \in V_k$。将 $\psi_x(y)$ 用 BCDH 公式 (2.3) 展开，并注意到 $\mathrm{ad}\ x$、$\mathrm{ad}\ y$ 将 V_k 映入 $V_{k+1} \oplus \cdots \oplus V_s$，可知对每个 k， $\psi_x(y)$ 的 V_k 分量等于 y_k 加上一个仅依赖于 y_2、……、y_{k-1} 的项。因此，若为 C 选取一个与分层相适应的基，则 ψ_x 的雅可比矩阵是对角线元素均为 1 的下三角矩阵，故其行列式为 1。□

推论 6.2. 设 W 上有任意一个概率测度 γ。那么，对于任意博雷尔函数f，有

$$\begin{aligned}\int_W \int_{\mathbf{C}} f(xy)\, m(dy)\, \gamma(dx) &= \int_W \int_{\mathbf{C}} f(x + \psi_x(y))\, m(dy)\, \gamma(dx) \\ &= \int_W \int_{\mathbf{C}} f(x + y)\, m(dy)\, \gamma(dx)\end{aligned}$$

我们将关注 γ 为高斯测度的情形，因此现在回顾一些关于巴拿赫空间上高斯测度的事实；详细内容请参阅 [4] 。这里我们只考虑中心化 高斯测度（即均值为零的高斯测度）。

若实可分巴拿赫空间 W 上的博雷尔概率测度 γ 满足：对每个连续线性泛函 $f \in W^*$，其推前 $f_*\gamma$ 都是定义在 $\mathbb{R}$上的均值为零的高斯测度，则称 γ 为高斯测度 。用特征函数重述此定义：γ 是高斯测度，当且仅当对每个 $f \in W^*$，都有 $\int_W e^{if(x)}\,\gamma(dx) = e^{-q(f,f)/2}$，其中 q是定义在 W^*上的连续半正定二次型，称为γ的协方差型 。

我们称 G　高斯测度 γ 在以下等价条件成立时是非退化的 hol　　d.

- 对于所有非零的 $f \in W^*$，推前 $f_*\gamma$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非退化高斯测度（即它不是狄拉克测度 δ_0，后者可视为方差为零的高斯测度）；
- 协方差型 q 是正定的；
- γ 的拓扑支撑是整个 W。

在这种情况下，协方差形式 q 可以视为 W^* 上的内积（通常不完备）。现在可以证明，存在一个单射线性映射 $J:\ W^* \to W$，使得对所有 f、$g \in W^*$，都有 $q(f,g) = f(Jg)$。如果将内积 q推前到 ran $J \subset W$上，再在此内积下对 ran J取完备化，所得希尔伯特空间（$H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H$）称为 γ的*Cameron–Martin* 空间。事实证明，包含映射 ran $J \hookrightarrow W$ 可单射地延拓到 H，因此 H 可以视为一个线性子空间$H \subset W$；在这些假设下，该子空间关于 W-范数是稠密的。 H-内积强于 W-范数，因此，任何稠密子集 $E \subset H$ （相对于H-内积）在 W中关于 W-范数也稠密。三元组（W, H, γ）也称为抽象 *Wiener* 空间，例如 [16]。

我们回顾著名的 Cameron–Martin 准不变性定理。

定理 6.3. 高斯测度 γ 在其 *Cameron–Martin* 空间 H中的元素所生成的平移下是准不变的。也就是说，对于 $y \in W$，考虑定义在W上的平移映射 L_y，其定义为 $L_y(x) = x + y$，则平移后的测度 $\gamma_y = (L_y)_*\gamma$与 γ 相互绝对连续（当 $y \in H$时）；当 $y \notin H$ 时，我们有 $\gamma_y \perp \gamma$。

我们还回顾高斯测度的以下性质，以备后用。

- 高斯测度的膨胀仍是高斯测度；
- 两个高斯测度的卷积仍是高斯测度；
- 高斯测度序列的弱极限（若存在）仍是高斯测度。

因此，按照上一小节中的乘积或卷积构造，我们得到了适合研究的一类自然测度和零测集。

定义 6.4. 我们将 $G = W \times$C 上形如 $\nu = \gamma \times m$ 的测度 ν 称为 高斯–哈尔测度 ，其中 γ 是 W 上的非退化高斯测度，而 m 是 C上的勒贝格测度。如果一个博雷尔集 $E \subset G$ 满足：对于每个高斯–哈尔测度 ν 以及每个 $g \in G$，都有 $(L_g)_*\nu(E) = \nu(g^{-1}E) = 0$，则称其为 *Gauss–Haar* 零集 。

本节的目标是证明以下定理。

定理　m 6.5. 博雷尔集 $E \subset G$ 是 *Aronszajn* 零集，当且仅当它是高斯–*Haar* 零集　*ll.*

6.1. **准不变性**。卡梅伦–马丁定理（定理 6.3）中出现的准不变性概念，可以自然地推广到拓扑群上的测度。关于可测群作用和准不变性的更一般方法，请参见 [15]。

定义 6.6. 令 G 为一个拓扑群，并令 ν 为 G 上的测度。与通常一样，令$L_g(h) = gh$ 和 $R_g(h) = hg$ 分别为左平移和右平移映射。对于一个集合 $Q \subset G$，我们称 ν 在 Q 的左平移（分别为右平移）下准不变，若对每个 $g \in Q$，测度 ν 与 $(L_g)_*\nu$ （分别为 $(R_g)_*\nu$）相互绝对连续。

大致遵循 [26, 命题 5], 的思路，我们有以下引理 a.

引理 6.7。 设 G 是一个幂零无限维 *Carnot* 群（此处 $[G,G]$ 不必局部紧），且 ν 是 G 上的一个 σ-有限测度。假设存在一个子集$Q \subset V_1(G)$，它在 $V_1(G)$ 中稠密且在膨胀下封闭，并且 ν 在 Q作用下右平移准不变。那么对于每个 *Aronszajn* 零集 $E \subset G$，都有 $\nu(E) = 0$。此外，对于每个左平移$(L_g)_*\nu$，结论也成立，其中 $g \in G$。

证明。 由于 Q 在 $V_1(G)$ 中稠密，我们可以找到一个 Carnot 张成序列 $Y_1, Y_2, \cdots \in Q$。例如，取 $Y_1, Y_2, \ldots$ 为 Q 中的一个稠密序列（回想一下，假设 G，因此 Q，是可分的）。根据命题 2.3，对于每个 k，由 $Y_1, \ldots, Y_k$ 生成的可缩放子群 H_k是有限维的。而闭可缩放子群 $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} H_k}$包含每个 Y_k，因此包含 Q，进而包含 $V_1(G)$，根据命题 2.2，最终包含整个 G。

现在假设 $E \subset G$ 是 Aronszajn 零集，因此特别有 $E \in \mathcal{A}(Y_1, Y_2, \ldots)$。这意味着存在一个分解 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$，使得 $E_k \in \mathcal{A}(Y_k)$。任取 k；只需证明 $\nu(E_k) = 0$。根据 $\mathcal{A}(Y_k)$ 的定义，对于每个 $g \in G$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{E_k}(g\delta_t(Y_k))\, dt = 0. \tag{6.1}$$

对 (6.1) 关于 ν 积分，并利用 Fubini 定理，可知对于几乎所有的 $t \in \mathbb{R}$，都有

$$\int_G 1_{E_k}(g\delta_t(Y_k))\, \nu(dg) = [(R_{\delta_t(Y_k)})_*\nu](E_k) = 0.$$

固定任意一个这样的 t。由于假设 Q 在膨胀下封闭，因此 ν 在关于 δ_t 的右平移下准不变（Y_k），从而 ν（E_k）$= 0$。由此得出 ν（E）$= 0$；对 $(L_g)_*\nu$ 的相应结论，则可将同样的论证应用于集合 $g^{-1}E$ 得到，该集合也是 Aronszajn 零测集。□

我们指出，当 G 是巴拿赫空间（即阿贝尔无限维卡诺群）时，结合引理 6.7 与 Cameron–Martin 定理 6.3，即可简洁地证明 Phelps 的结果：巴拿赫空间中的 Aronszajn 零测子集是高斯零测的 [26]。

现在我们再次假设 $[G,G]$ 是局部紧的，因此 G 是一个具有有限维交换子子群的分层巴拿赫-李群。为了将引理 6.7 应用于高斯–哈尔测度，我们先证明以下结论。

引理 6.8。设 γ 是 W 上的非退化高斯测度，其 *Cameron–Martin* 空间为 H。那么，*Gauss–Haar* 测度 $\gamma \times m$ 在由 H 作左平移或右平移时是准不变的。

证明。设 $(\gamma \times m)(E) = 0$。根据推论 6.2，这意味着

$$\int_W \int_{\mathbf{C}} 1_E(xy)\, m(dy)\, \gamma(dx) = 0.$$

固定 $h \in H$。于是有

$$\begin{aligned}[(L_h)_*(m \times \gamma)](E) &= \int_W \int_{\mathbf{C}} 1_E(hxy)\, m(dy)\, \gamma(dx) \\ &= \int_W \int_{\mathbf{C}} 1_E((h+x)(h+x)^{-1}hxy)\, m(dy)\, \gamma(dx) \\ &= \int_W \int_{\mathbf{C}} 1_E((h+x)y)\, m(dy)\, \gamma(dx)\end{aligned}$$

根据 Baker–Campbell–Hausdorff–Dynkin 公式，$(h+x)^{-1}hx \in \mathbf{C}$；并且 C 上的哈尔测度 m 在左平移下保持不变。但是

$$\int_W \int_{\mathbf{C}} 1_E((h+x)y)\, m(dy)\, \gamma(dx) = \int_W \int_{\mathbf{C}} 1_E(xy)\, m(dy)\, \gamma_h(dx) = 0$$

因为根据 Cameron–Martin 定理，γ_h 对 γ绝对连续。 □

结合引理 6.7 和 6.8，我们已经证明了定理 6.5 的一半，即 ，

推论 6.9. 如果 $E \subset G$ 是 *Aronszajn* 零集，那么它就是 *Gauss–Haar* 零集。

6.2. **Gauss–Haar 测度与 CAC 测度**。为了证明定理 6.5 的另一个方向，我们将用到定理 5.5。由于 Gauss–Haar 测度不是 CAC 测度（它们甚至不是概率测度），我们不直接使用定理 5.5，而是构造一族可应用该定理的 CAC 测度，其中每个测度都绝对连续于某个 Gauss–Haar 测度。

令 $\pi\colon G \to W$ 表示李代数到第一层的投影；也就是说，使得$\pi(x+y) = x$ 对于 $x \in W$, $y \in \mathbf{C}$。注意，我们还有 $\pi(xy) = x$，因此 π 是从 G 到巴拿赫空间 W的连续满射可缩放群同态，其核为 C。

令 $\star$ 表示巴拿赫空间 W上概率测度的卷积运算。我们继续用 $*$表示 G上测度的卷积。注意，对于 G上的概率测度 ν_1、ν_2，有 $\pi_*(\nu_1 * \nu_2) = \pi_*\nu_1 \star \pi_*\mu_2$。

引理 6.10. 设 ν_0, ν_1 是 G上的两个概率测度，并设 $\nu = \nu_1 * \nu_0$。假设 ν_0具有性质 $\nu_0 \ll (\pi_*\nu_0 \times m)$。那么 $\nu \ll (\pi_*\nu \times m)$。

证明。设 E 为一个博雷尔集，且 $(\pi_*\nu \times m)(E) = 0$。利用推论 6.2，这意味着

$$\begin{aligned}0 &= \int_G \int_{\mathbf{C}} 1_E(\pi(g)y)\, m(dy)\, \nu(dg) \\ &= \int_G \int_G \int_{\mathbf{C}} 1_E(\pi(gh)y)\, m(dy)\, \nu_0(dh)\, \nu_1(dg).\end{aligned}$$

因此，若令 $F(g,h,y) = 1_E(\pi(gh)y)$，则我们有 $F = 0$, $\nu_1 \times \nu_0 \times m$-几乎处处成立。

令 ρ 为相对于 $\pi_*\nu_0 \times m$ 的 ν_0 密度。于是我们写作：

$$\begin{aligned}\nu(E) &= \int_G \int_G 1_E(gk)\, \nu_0(dk)\, \nu_1(dg) \\ &= \int_G \int_G \int_{\mathbf{C}} 1_E(g\pi(h)y)\rho(\pi(h),y)\, m(dy)\, \nu_0(dh)\, \nu_1(dg).\end{aligned}$$

现在写作 $g\pi(h)y = \pi(gh)\pi(gh)^{-1}g\pi(h)y$。容易验证，$\pi(gh)^{-1}g\pi(h) \in \mathsf{C}$，因此我们有

$$\begin{aligned}\nu(E) &= \int_G \int_G \int_{\mathbf{C}} F(g,h,\pi(gh)^{-1}g\pi(h)y)\rho(\pi(h),y)\, m(dy)\, \nu_0(dh)\, \nu_1(dg) \\ &= \int_G \int_G \int_{\mathbf{C}} F(g,h,z)\rho(\pi(h),\pi(h)^{-1}g^{-1}\pi(gh)z)\, m(dz)\, \nu_0(dh)\, \nu_1(dg)\end{aligned}$$

其中我们作了变量代换 $z = \pi(gh)^{-1}g\pi(h)y$，并利用了 m 的左不变性。但相对于 $\nu_1 \times \nu_0 \times m$, $F = 0$ 几乎处处成立，因此我们有 $\nu(E) = 0$。□

定理 6.11. 如果 $E \subset G$ 是 *Gauss–Haar* 零集，那么它就是 *Aronszajn* 零集。

证明. 我们证明其逆否命题。假设 E 不是 Aronszajn 零集，因此存在一个 Carnot 张成序列 $X_1, X_2, \ldots$，满足 $E \notin \mathcal{A}(X_1, X_2, \ldots)$。对每个 k，令 $H_k = \langle X_1, \ldots, X_k \rangle$；根据假设，它是一个卡诺群。接着在 H_k 上固定一个概率测度 ν_k，它相对于哈尔测度绝对连续，具有严格正的密度，且其投影 $\gamma_k = \pi_*\nu_k$ 是 $W_k =$ 上的（中心）非退化高斯测度 $\pi(H_k) \subset H_k \cap W$。例如，$\nu_k$ 可以是将 H_k 视为有限维向量空间后定义其上的非退化高斯测度；或者 ν_k 可以是热核测度（见第 7 节）。

对于 $\epsilon > 0$，令 $\nu_k^\epsilon = (\delta_\epsilon)_*\nu_k$，因此根据引理 5.4，族 $\{\nu_k^\epsilon : \epsilon > 0\}$ 满足 (5.1)。根据定理 5.5，存在一个序列 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ 以及一个元素 $g \in E$，使得测度序列 $\nu^{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = \nu_n^{\epsilon_n} * \cdots * \nu_1^{\epsilon_1}$ 弱收敛于一个测度 ν，且该测度满足 $(g\nu)(E) = \nu(g^{-1}E) > 0$。为了完成证明，我们证明 $\gamma = \pi_*\nu$ 是 W 上的非退化高斯测度，并且 $\nu \ll \gamma * m$。

请注意，由于 π 是连续同态，γ 是序列 $\pi_*\nu^{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = \gamma_1 \star \cdots \star \gamma_n$ 的弱极限，因此 γ 是高斯测度，因为其中每个 γ_k 都是。为证明其非退化，任取 $f \in W^*$，并假设 $q(f,f) = 0$，因此对 $f = 0$, γ-几乎处处成立。我们断言 f 必为零泛函。对每个 k，根据卷积和傅里叶变换的性质，f 必为常数，γ_k-几乎处处成立。但 γ_k 是线性子空间 $W_k \subset W$ 上的非退化高斯测度，因此必有 $W_k \subset \mathsf{Ker}\ f$。由于 f 现在在稠密线性子空间 $\bigcup_k W_k$ 上为零，所以它是零泛函。

接下来，由于 $X_1, X_2, \ldots$ 是 Carnot 张成的，且 $[G,G]$ 是有限维的，因此存在足够大的 N，使得 $[H_N, H_N] = [G,G]$。令 $\nu' = \nu^{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N}$，并令 ν'' 为 $\nu_M^{\epsilon_M} * \cdots * \nu_{N+1}^{\epsilon_{N+1}}$ 在 $M \to \infty$ 时的弱极限，从而 $\nu = \nu'' * \nu'$。由于 $\nu_N^{\epsilon_N}$ 是定义在 H_N 上的绝对连续测度，且其密度严格为正，而 $\gamma_N \times m$ 也是一个这样的测度，因此二者相互绝对连续。于是，引理 6.10 适用，我们得出 $\nu \ll \pi_*\nu \times m = \gamma \times m$，证明至此完成。□

注 6.12。 当 G是巴拿赫空间（一个阿贝尔无限维卡诺群）时，定理 6.11 得出了 [8]的主要结果。即使做了显而易见的简化，证明仍然比必要的复杂一些。在阿贝尔情形下，不需要重新遍历，而且我们无需将所需的高斯测度构造为 CAC 测度，只需在坐标轴 Y_i上取一维高斯分布的卷积即可。

7. 热核测度

我们沿用上一节的假设和记号。设 G 仍为一个换位子子群局部紧的无限维卡诺群，因此它是一个分层 Banach–Lie 群 $G = W \times$C。

在本节中，我们讨论亚椭圆热核测度 $[1, 9]$, ——一族定义在 G 上的测度。从某些方面来说，它们与该群结构的契合程度甚至超过了上文定义 6.4 中所定义的高斯–哈尔测度。这些测度的定义需要一些随机微积分方面的背景知识，我们在此不作回顾，而是请读者参阅 $[10, 24]$ ；对于无限维非幂零群，请参阅 [12–14]。

由于假设 G 的换位子子群是局部紧的，因此 G 是一个巴拿赫李群（见定理 4.1）。与上一节的处理方式相同，我们可以将 G与其李代数 $\mathfrak{g}$视为同一集合，而不写出指数映射。此外，我们将巴拿赫空间 $W = V_1 = V_1(G)$视为 $\mathfrak{g} = G$的第一层。设 W上有一个非退化高斯测度 γ 。那么存在相应的布朗运动过程 B_t ，它定义在 W上，是一个具有平稳独立增量的连续马尔可夫过程，使得对每个 $t > s > 0$，都有 $(t - s)^{-1/2}(B_t - B_s) \sim \gamma$ 。

G 上的亚椭圆布朗运动 g_t 定义为下列 Stratonovich 型随机微分方程的解。

$$\circ\, dg_t = dL_{g_t} \circ dB_t, \qquad g_0 = e_G. \tag{7.1}$$

实际上，可以利用 iterated stochastic integrals，并按照 [24] 中的方法使用 Baker–Campbell–Hausdorff–Dynkin 公式，显式求解 (7.1)。

现在令 $\nu = \mathrm{Law}(g_1)$ 为 g_t 在时刻 $t = 1$ 的终点分布。我们称 ν 为由 γ 在 G 上诱导的（次椭圆）热核。

当然，选择时间 1 是任意的；由于以下时空缩放性质，这样做并不失一般性：

$$\nu * \nu = \mathrm{Law}(g_2) = (\delta_{\sqrt{2}})_* \nu. \tag{7.2}$$

方程 (7.2) 也说明，将热核测度作为高斯测度的类比是合理的，因为 (7.2) 中的缩放关系对巴拿赫空间上的高斯测度同样成立，而且事实上能唯一刻画它们。参见 $[4,$ 定理 1.9。$5]$, ，其中该结果归功于 [27]。

定义 7.1。 若博雷尔集 $E \subset G$ 满足：对于 G 上的每个热核测度 ν 以及每个 $g \in G$，都有 $\nu(g^{-1}E) = 0$，则称其为热核零集。

注记 7.2。在 $[10, 24]$ 本文中，主要研究对象是椭圆热核测度，它们由高斯测度构造而成；该测度 γ 支撑在整个 $\mathfrak{g}$上，而不只是 W上。

已知椭圆热核测度满足更强的正则性条件，但它们与可缩放群结构并不以同样的方式相容；例如，椭圆热核测度不满足（7.2）。因此，本文只关注上述定义的次椭圆布朗运动和热核。这个问题类似于三维海森堡群上的左不变黎曼度量与次黎曼度量之间的区别：黎曼几何更容易用经典工具研究，但它们不遵循膨胀，因此从这个意义上说不那么自然。

在另行通知之前，假设 G 是二阶的，因此它是一个无限维类海森堡群（例 2.11）。在这种情况下，我们能够证明以下定理。

定理 7.3。设 G 是一个无限维类海森堡群。博雷尔集 $E \subset G$ 是 *Aronszajn* 零集，当且仅当它是热核零集。

该证明基于上一节的研究进展，以及关于热核正则性的一些关键结果。

定理 7.4 ([1, 定理 5。9], 另见 [9, 第 7]节)。设 ν 是由高斯测度 γ 在 W 上诱导的热核测度，并设 $H \subset W$ 是对应于 γ 的 *Cameron–Martin* 空间。定义 Cameron–Martin 子群 $G_{CM} = H \times C$，它是 G 的稠密可缩放子群。那么 ν 在 G_{CM} 的左平移和右平移下准不变，尤其是在 H 下准不变。

由引理 6.7 可立即得出

推论 7.5. 如果 $E \subset G$ 是 *Aronszajn* 零集，那么它就是热核零集。

对于反向结论，我们将用到 [9] 中的一项结果。该结果原本是证明定理 7.4 时所用的一个引理，但其本身也可能具有价值。

定理 7.6 ([9,推论 4.7 和 4.8]). 设 ν 是由 W上的高斯测度 γ 所诱导的热核测度。那么，ν 相对于高斯–哈尔测度$\gamma \times m$绝对连续。此外，其密度几乎处处为正，因此实际上 ν与 $\gamma \times m$ 相互绝对连续。

推论 7.7. 如果 $E \subset G$ 是热核零集，那么它就是 *Aronszajn* 零集。

证明. 假设 E 不是 Aronszajn 零集。由定理 6.11，存在 W 上的一个高斯测度 γ以及某个 $g \in G$，使得 $(\gamma \times m)(g^{-1}E) > 0$。设 ν 为由 γ诱导的热核测度。根据定理 7.6，我们有 $\gamma \times m \ll \nu$，因此 $\nu(g^{-1}E) > 0$ 也成立。□

结合推论 7.5 和 7.7，我们证明了定理 7.3。

8. 开放问题

作为本文的结尾，我们汇总一些问题和有待进一步研究的课题 .

8.1. **其他零测集概念**。 在证明了两种零测集概念等价之后，人们或许会考虑其他概念。

问题 8.1。 在无限维卡诺群上，还能构造出哪些其他有趣的 左不变 σ-博雷尔集理想？它们与本文研究的 Aronszajn /滤过 / CAC 零集 σ-理想 $\mathcal{A}$ 有何关联？

这里所说的有趣的 是指，该 σ-理想应以一种有意义的方式利用可缩放群结构来定义，而不是像可数集的 σ-理想那样。

8.2. **分层巴拿赫-李群**。 无限维卡诺群何时是分层巴拿赫-李群、何时不是，仍不清楚。定理 4.1 中关于换位子子群为局部紧的假设，似乎相当严格。

问题 8.2。 在什么条件下，幂零无限维卡诺群 G同构于分层巴拿赫-李群？

例如，或许只需 $[G, G]$ 与某个巴拿赫空间同胚即可。 [20] 中关于非巴拿赫流形无限维卡诺群的例子，其换位子子群并不同胚于某个巴拿赫空间。

8.3. **Aronszajn 零集及其紧子集**。 由于无限维卡诺群 G 是一个波兰空间， G 上的每个博雷尔概率测度都是 Radon 测度 [3, （定理 7.1）， 7],因此，博雷尔集 $E \subset G$ 是 CAC 零集，当且仅当 E 的每个紧子集都是 CAC 零集。于是，定理 5.3 有如下有趣的推论：

推论 8.3. 博雷尔集 $E \subset G$ 是 *Aronszajn* 零集，当且仅当E 的每个紧子集都是 *Aronszajn* 零集。

如果能够先验地证明推论 8.3，那么在证明定理 5.5 时，我们便可不失一般性地假设集合 E 是紧的。在这种情况下，定理 5.5 的证明可以略作简化，而且不再需要技术性引理 5.9。

问题 8.4。 推论 8.3 是否有自洽的证明？

即使在巴拿赫空间的情形下，这也会很有趣。

8.4. **高阶中的热核零测集**。 定理 7.3 之所以仅限于无限维海森堡型群，唯一原因是正则性结果定理 7.4 和 7.6 迄今为止只在这一情形下得到证明。然而，我们猜想它们应当具有更广泛的适用性；例如，应当适用于每个具有有限维交换子子群的分层巴拿赫-李群（即第 6 节所讨论的情形）。我们不知道有什么根本性的障碍会阻止这一结果；主要问题在于，在第 3 步或更高阶情形下进行研究会带来技术困难，并需要大量得多的计算。因此，我们提出如下猜想。

猜想 8.5。 在每个具有有限维交换子子群的分层巴拿赫-李群 G 中，*Aronszajn* 零集类与热核零测集类相同。

事实上，有限维交换子子群这一假设，甚至可能并非必要；幂零性这一假设也可能并非必要，但这些情形似乎更加难以处理。

参考文献

[1] Fabrice Baudoin、Maria Gordina 和 Tai Melcher。次黎曼无限维海森堡群上热核测度的准不变性。《美国数学学会汇刊》，365(8):4313–4350，2013。[2] Patrick Billingsley。概率测度的收敛性。Wiley 概率与统计丛书：概率与统计。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，第二版，1999。Wiley-Interscience 出版物。[3] V. I. Bogachev。测度论。第 I、II 卷。Springer-Verlag，柏林，2007。[4] Vladimir I. Bogachev。高斯测度，数学调查与专著第 62 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，1998。[5] A. Bonfiglioli、E. Lanconelli 和 F. Uguzzoni。分层李群及其次拉普拉斯算子的位势理论。Springer 数学专著丛书。Springer，柏林，2007。[6] Nicolas Bourbaki。拓扑向量空间。第 1 至 5 章。Masson，巴黎，新版，1981。数学原理。[数学原理]。[7] Emmanuel Breuillard。多项式增长局部紧群的几何与大球的形状。《群、几何与动力学》，8(3):669–732，2014。[8] Marianna Csornyei。Aronszajn 零集与高斯零测集的一致性。《以色列数学杂志》，111:191–201，1999。[9] Bruce K. Driver、NATHANIEL ELDREDGE 和 Tai Melcher。无限维海森堡群上的次椭圆热核。《美国数学学会汇刊》，368(2):989–1022，2016。[10] Bruce K. Driver 和 Maria Gordina。无限维海森堡群上的热核分析。《泛函分析杂志》，255(9):2395–2461，2008。[11] Gerald B. Folland。抽象调和分析教程。高等数学研究丛书。CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，1995。[12] Maria Gordina。无限维群上的热核分析与 Cameron-Martin 子群。《泛函分析杂志》，171(1):192–232，2000。[13] Maria Gordina。无穷维复正交群上的全纯函数与热核测度。《位势分析》，12(4):325–357，2000。[14] Maria Gordina。无限维群上的热核分析。载于《无限维调和分析 III》，第 71–81 页。World Sci. Publ.，哈肯萨克，新泽西州，2005。[15] Maria Gordina。泛函不等式在无限维空间准不变性中的应用，第 251–266 页。Springer 纽约，纽约州，2017。[16] Leonard Gross。抽象 Wiener 空间。载于《第五届伯克利数学、统计学与概率研讨会论文集》（伯克利，加利福尼亚州，1965/66），第二卷：概率论贡献，第 1 部分，第 31–42 页。加利福尼亚大学出版社，伯克利，加利福尼亚州，1967。[17] Yves Guivarc'h。调和函数的多项式增长与周期。《法国数学学会通报》，101:333–379，1973。[18] Enrico Le Donne。卡诺群入门：齐次群、卡诺-卡拉西奥多里空间及其等距变换的正则性。《度量空间的分析与几何》，5(1):116–137，2017。[19] Enrico Le Donne 和 Sebastiano Nicolussi Golo。容许膨胀的度量李群。《数学档案》，59(1):125–163，2021。[20] Enrico Le Donne、Sean Li 和 Terhi Moisala。无限维 Carnot 群与 Gâteaux 可微性。《几何分析杂志》，31(2):1756–1785，2021。[21] Enrico Le Donne 和 Séverine Rigot。关于第 3 步及更高步卡诺群中的 Besicovitch 覆盖性质的评注。《美国数学学会会刊》，144(5):2003–2013，2016。[22] J. Lindenstrauss 和 D. Preiss。Lipschitz 函数的 Fréchet 可微性（综述）。载于《泛函分析的最新进展》（瓦伦西亚，2000），北荷兰数学研究丛书第 189 卷，第 19–42 页。North-Holland，阿姆斯特丹，2001。[23] Valentino Magnani 和 Tapio Rajala。Banach 齐次群目标中的 Radon-Nikodym 性质与面积公式。《国际数学研究通知》IMRN，2014(23):6399–6430，2014。[24] Tai Melcher。半无穷维李群上的热核分析。《泛函分析杂志》，257(11):3552–3592，2009。[25] K. R. Parthasarathy。度量空间上的概率测度。AMS Chelsea 出版社，普罗维登斯，罗德岛州，2005。1967 年原版的重印本。

[26] R. R. Phelps. 巴拿赫空间上的高斯零测集与利普希茨映射的可微性。《太平洋数学杂志》，77(2):523–531，1978年。[27] Georg Pólya. 从函数方程推导高斯误差定律。《数学杂志》，18(1):96–108，1923年。[28] S. M. Srivastava.《博雷尔集教程》，第180卷，收录于《数学研究生教材》。Springer-Verlag，纽约，1998年。N. Eldredge；北科罗拉多大学数学科学系，美国科罗拉多州格里利，邮编80369。电子邮箱：neldredge@unco.edu M. Gordina；康涅狄格大学数学系，美国康涅狄格州斯托斯，邮编06269。电子邮箱：maria.gordina@uconn.edu E. Le Donne；弗里堡大学，博物馆路23号，1700弗里堡，瑞士 & 于韦斯屈莱大学数学与统计系，邮政信箱35号，FI-40014，芬兰电子邮箱：enrico.ledonne@unifr.ch S. Li；康涅狄格大学数学系，美国康涅狄格州斯托斯，邮编06269。电子邮箱：sean.li@uconn.edu