arXiv:2304.14527v2 [math.LO] 8 May 2023

关于 o-极小二分图中可定义匹配的札记

Jana Mař́ıkov´a

2023年5月10日

摘要

我们研究可定义于 o-极小结构中的二分图，其中边关系 G 是若干保持测度的映射之图的有限并。

我们证明了一个关于存在具有少量短增广路径的可定义匹配的事实。在额外假设 $G \subseteq [0,1]^n$ 和 2-正则性的条件下，这意味着存在可定义匹配，能够覆盖除一个测度任意小的正测度集合（标准部分的勒贝格测度）之外的所有顶点。作为应用，我们为 $[0,1]^n$ 的可定义子集构成的半群，模去由保测映射诱导的等价关系，得到一个近似 2-消去结果。

1 引言

本文是理解 o-极小结构中可定义二分图里的可定义匹配的初步尝试。匹配在数学的许多领域中都发挥着重要作用，例如等分解理论；我们相信，在 o-极小的背景下，匹配也将证明具有重要意义。

这里，图由一个非空顶点集 V 和一个对称、反自反的关系 $E \subseteq V^2$ 构成，其元素称为边。因此，图中没有环，也没有重边，且边没有方向。二分图是指其顶点集可以划分为两个不相交的集合 A 和 B，使得每条边的一个顶点属于 A，另一个顶点属于 B。二分图 $(A \dot\cup B, E)$ 中的匹配是 E 的一个子集，它是 A 的一个子集与 B 的一个子集之间某个双射的图像。若一个匹配覆盖所有顶点，即它是从 A 到 B 的双射，则称其为完美匹配。

全文中，设 R 是有序域的一个 o-极小扩张。可定义的表示在 R 中可定义。图 (V, E) 是可定义的，当且仅当 $V \subseteq R^n$ 和 $E \subseteq R^{2n}$ 都是可定义的。可定义二分图 $(A \dot\cup B, E)$ 是具有可定义二分划分的可定义图，即 A 和 B 都是可定义的。

在不作任何可定义性假设的情况下，（无限）二分图中的完美匹配情况如何？根据 K¨onig 定理，每个 k-正则

二分图都存在完美匹配。这是无限（双侧）霍尔–拉多–霍尔定理的一个特例。该定理指出，局部有限的二分图若在任一侧都满足有限集的婚姻条件（对于每个 k，每个含 k个顶点的集合都有至少 k 个邻点），则存在完美匹配。然而，这两个定理的可定义版本都不成立，Laczkovich [2]的一个例子便证明了这一点。Laczkovich 构造了一个半线性图，其边关系 E 是单位正方形的闭子集，由有限条斜率为 ± 1 的线段组成（事实上， E 作为配备归一化线性测度的空间，除去一个保测同胚外，就是单位圆）。虽然根据 K¨onig 定理， E 包含完美匹配，但 Laczkovich 证明它不含博雷尔匹配，也不含勒贝格可测匹配。粗略地说，这是因为匹配 M 在 E 中的归一化线性测度为$_1$ $_2$， M还必须在某个映射下保持不变，而该映射本质上是圆上的无理旋转，因此是遍历的。鉴于 E 尤其是在一个 o-极小结构中可定义的，这打消了人们对 K¨onig 定理乃至霍尔–拉多–霍尔定理的可定义类比的希望。

在存在测度的情况下，解决这一问题的一种方法是放宽匹配必须为完美匹配的要求，只要求它在一个小集合之外是完美匹配。Lyons 和 Nazarov 已在博雷尔情形中这样做，见 [3]，第 8 页，注 2.6。（有关证明的详细阐述，见 Wang [7]。）Lyons 和 Nazarov 证明了以下结论。下文中，如果一个顶点集合中的任意两个顶点都不是邻点，即它们不与同一条边关联，则称该集合为独立的。对于顶点集合 Y 和边关系 G，

$$N_G(Y) = \{x \colon \exists y \in Y \ (x, y) \in G\}.$$

定理 1.1 ([3]) 设 $\mathcal{G} = (X, G)$ 是定义在标准博雷尔空间上的博雷尔图，配有一个局部有限、 ν-保持、二分且满足以下扩张条件的博雷尔概率测度 ν：

$$\exists c > 1 \ \textit{such that for all independent } Y \subseteq X, \ \nu N_G(Y) \geq c \cdot \nu Y.$$

那么 $\mathcal{G}$ 存在一个几乎处处（相对于 ν）的博雷尔完美匹配。

我们对该定理的 o-极小对应版本感兴趣。虽然在 o-极小图中存在可定义匹配本身就很有意义，但还有另一个原因。保持 ν 的条件，在我们的设定中对应于边关系是有限个同构的图像之并（大致而言，是雅可比行列式等于 ± 1 的可定义 C^1-微分同胚）。在研究由同构诱导的等价关系下有界可定义集构成的商半群时，会遇到这类图像及其中是否存在完美匹配的问题，其运算由不交并给出。这些半群又与一个长期悬而未决的问题密切相关：o-极小结构中的可定义集上是否存在不变测度。

当所考虑的测度是标准部分的勒贝格测度，且我们将范围限制在 2-正则图时，可得到下文的定理 1.2，它是定理 1.1 的近似版本。2-正则性的假设取代了定理 1.1 中的扩张条件；在有界可定义情形下，该扩张条件永远无法满足，因为可定义二分图的二部划分被假定为可定义的。

定理 1.2 设 $\mathcal{G} = (A \dot\cup B, G)$ 是一个可定义的二分 μ-保持图，且为 2-正则，并满足 $A, B \subseteq [0,1]^n$。那么对于每个 $\epsilon \in \mathbb{R}^{>0}$，都存在一个可定义匹配 $M \subseteq G$，覆盖 $\mathcal{G}$ 的所有顶点，但可能有一个测度为 $< \epsilon$ 的 μ 集除外。

证明沿用 [7] 中证明的大致思路。具体而言，我们首先证明存在短增广路较少的匹配，并改编 Elek 和 Lippner 的一个论证 [1]。我们从阿基米德情形开始。这就是命题 2.6——这里考虑的测度是勒贝格测度，无需使用 2-正则性。随后，利用 Maˇrıkovˊa [4], [5] 的结果推导一般情形（定理 3.5）；这些结果涉及标准部分映射在剩余类域上诱导的结构。定理 1.2 则通过与 [7], 中类似的论证得出，但其中 2-正则性给出了一个扩张条件。

我们指出，由于 [2] 中的例子，定理 4.2 无法改进为得到一个在 μ 几乎处处成立的可定义匹配。

定理 1.2 的一个应用涉及有界可定义集在由同构诱导的等价关系下构成的半群中的消去律。更确切地说，设 $B[n]$ 是 R^n 的有界可定义子集构成的格，并令

$$SB[n] = \{X \in B[n] \colon X \subseteq [-m, m]^n \text{ for some } m \in \mathbb{N}\},$$

R^n 是其强有界可定义子集构成的格。对于 X、$Y \in SB[n]$ 和 $\epsilon \in \mathbb{R}^{>0}$，若 $\mu(X \triangle Y) < \epsilon$，则记作 $X =_\epsilon Y$；其中 μ 是由勒贝格测度复合得到的标准部分映射，而 $\triangle$ 表示对称差。若对所有 $\epsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ 均有 $X =_\epsilon Y$，则记作 $X =_a Y$。令 $\sim$ 为由同构在 $B[n]$ 上诱导的等价关系（见定义 5.1）。于是 $\mathcal{T}_n = B[n]/\sim$ 是一个以不交并为加法的半群。对于 α、$\beta \in \mathcal{T}_n$，若存在 $X \in \alpha$、$Y \in \beta$ 使得 X、$Y \in SB[n]$ 且 $X =_a Y$，则记作 $\alpha =_a \beta$。于是定理 1.2 得出以下结果。

定理 1.3 设 $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_n$。那么 $2\alpha =_a 2\beta$ 意味着 $\alpha =_a \beta$。

一些进一步的约定和定义。令 $\mathcal{O}$ 为 R 中 $\mathbb{Q}$ 的凸包。于是 $\mathcal{O}$ 是 R 中的一个赋值环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，剩余映射为 $\mathrm{st} : \mathcal{O} \to \mathrm{k}$，其中 $\mathrm{k} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ 是有序剩余域。剩余映射逐坐标扩展为 $\mathrm{st}\colon \mathcal{O}^n \to \mathrm{k}^n$。如果 R 充分饱和，那么 $\mathcal{O}/\mathfrak{m} = \mathbb{R}$，且该剩余映射称为标准部分映射。在这种情况下，我们用 $\mathbb{R}_{ind}$ 表示由以下内容生成的 $\mathbb{R}$ 上的 o-极小结构：

标准部分映射，即由关系 st X 扩张的有序域 $\mathbb{R}$，其中 $X \in \mathrm{Def}^n(R)$ 且 $\mathrm{st}\, X := \mathrm{st}(X \cap R^n)$。

定义 1.4 1. 我们称 $SB[n]$ 上的测度为有限可加映射μ: $SB[n] \to \mathbb{R}^{\geq 0}$（$SB[n]$ 上的加法由不交并给出），使得$\mu(\emptyset) = 0$。2. n-同构是一个可定义的 C^1-微分同胚 f: $U \to f(U)$，其中$U \subseteq R^n$是可定义的开集，并且对所有 $x \in U$，$|Jf(x)| = 1$。3. 给定 $SB[n]$上的测度 μ，若每当 $X \in SB[n]$ 且 f 是一个 n-同构时，$\mu(X) = \mu(f(X))$，我们就称 μ 是不变的。4. 设 $SB[n]$上的不变测度为 ν。若 $\mathcal{G}$ 是可定义的，$V \subseteq \mathcal{O}^n$，且存在一个将 V 划分为胞腔的划分，使得该划分中的每个开胞腔 C 都满足：$G \cap (C \times R^n)$是一个 n-同构的图，则称 $\mathcal{G} = (V, G)$是 ν-保持的。

对于 R 充分饱和的情形，我们通过将 $X \in SB[n]$ 赋予其标准部分的 n维勒贝格测度，定义 $SB[n]$ 上的不变测度 μ（关于不变性的证明，参见 [4], 第 18 页引理 6.4 的证明）。

注 1.5 容易看出，若将定义 1.4 中的 2.-4. 替换为以下或许更自然的概念，则定理 3.5、4.2 和 5.2 仍然成立。

定义 1.6 1. n-同构是一个可定义的 C^1-微分同胚 f: $R^n \to R^n$，且对所有 $x \in R^n$都有 $|Jf(x)| = 1$。

2. 给定 $SB[n]$上的测度 μ，若 $X \in SB[n]$ 且 f 是一个 n-同构时，$\mu(X) = \mu(f(X))$，则称 μ 是不变的。3. 设 ν 是 $SB[n]$上的不变测度。若存在对 V 的一个胞腔划分，使得对于该划分中的每个开胞腔 C，$G \cap (C \times R^n)$都是一个 n-同构在 C上的限制，则称具有 $V \subseteq \mathcal{O}^n$ 的可定义图$\mathcal{G} = (V, G)$是 ν-保持的。

对于 x、$y \in R^n$ 和可定义的有界 $X \subseteq R^n$，我们令 $d(x, y)$ 表示 x 与 y 之间的欧几里得距离，并设

$$d(X, y) = \inf\{d(x, y) \colon x \in X\}.$$

对于 $x \in R^n$ 和 $r > 0$，我们用 $B_r(x)$ 表示以 x 为中心、半径为 r 的开球，即集合 $\{y \in R^n \colon d(x, y) < r\}$。

2 阿基米德情形

本节中，我们假设 R 的底集是 $\mathbb{R}$。那么 $SB[n] = B[n]$，且勒贝格测度 λ 是 $B[n]$上的不变测度。

2.1 着色

定义 2.1 设 $\mathcal{G} = (V, G)$ 是一个可定义图。若可定义映射 $c\colon V \to X$ 是 $\mathcal{G}$ 的可定义着色，且 X 是有限集，并且只要 $(v, w) \in G$，就有 $c(v) \neq c(w)$，则称之为可定义着色。

引理 2.2 设 $\mathcal{G} = (V, G)$ 带有 $V \in B[n]$ 是一个可定义图，使得每个顶点的度有限。那么，在顶点集的一个任意小的正 λ-测度可定义子集之外，存在一种可定义着色；也就是说，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个可定义的 $V' \subseteq V$，满足 $\lambda(V \setminus V') < \epsilon$，以及一种可定义着色 $\mathcal{G}' := (V', G \cap (V')^2)$。

Proof: 令 $\mathcal{C}$ 为将 $\mathbb{R}^{2n}$ 分解为胞腔并划分 G的一种分解，并令

$$\mathcal{D} = \{\pi_n^{2n} C\colon C \in \mathcal{C} \,\&\, C \subseteq G \,\&\, \dim C = n\}.$$

然后，由于 $\mathcal{G}$ 中的每个顶点的度数都是有限的，我们可以假设，对于每个$D \in \mathcal{D}$，$G \cap (D \times \mathbb{R}^n)$ 都是可定义连续函数的图像的有限不交并。令 $\mathcal{F}_D$ 为这些函数的集合。

Claim 令 $\epsilon > 0$、$D \in \mathcal{D}$ 和 $f \in \mathcal{F}_D$。我们用 $\mathcal{G}_f$ 表示图 $(D \cup f(D)\ \Gamma f)$。于是，在 $D \cup f(D)$ 的一个 λ-测度为 $< \epsilon$ 的可定义子集之外，存在 $\mathcal{G}_f$ 的可定义着色。

Proof of Claim: 我们设

$$D_\delta := \{x \in D\colon d(x, \partial D) \geq \delta\},$$

其中 $\partial D := \mathrm{cl}(D) \setminus \mathrm{int}(D)$，且 $\delta > 0$ 满足 $\lambda(D \setminus D_\delta) < \frac{\epsilon}{2}$ 且$\lambda(f(D \setminus D_\delta)) < \frac{\epsilon}{2}$（此类 δ 的存在性由顶点集的有界性保证）。定义

$$F\colon D_\delta \to \mathbb{R}^{\geq 0}\colon x \mapsto d(x, f(x)).$$

于是，由于 $\Gamma f|_{D_\delta} \subseteq G$, G 是反自反的，f 连续且 D_δ 闭，F 与 0 保持正距离，设该距离为 $r > 0$。由于 D_δ 紧，我们可以找到一个有限覆盖 $\mathcal{B}$，用半径为$\frac{r}{2}$ 的开球覆盖 D_δ。对于 $x \in D_\delta$，定义 $c(x) = i$，其中 i 是 $\mathcal{B}$ 中包含 x 的开球的最小编号。若 $x, y \in D_\delta$ 满足 $c(x) = c(y)$，则对于某个 $B \in \mathcal{B}$，有 $x, y \in B$，因此 $d(x, y) < r$，且 x, y 不可能是邻点。□ (Claim)

设 $\epsilon > 0$。现在，我们将定义带有 $\lambda(V' \setminus V) < \epsilon$ 的 $V' \subseteq V$，并为图 $(V', G \cap (V')^2)$ 找到一种可定义着色。

设 $|\mathcal{D}| = N$，并令 M 为 $\mathcal{G}$ 中顶点度数的一个上界。由于度数为 0 的顶点可以着任意颜色，我们不妨假设对每个 $D \in \mathcal{D}$，都有 $\mathcal{F}_D \neq \emptyset$。对于每个 $D \in \mathcal{D}$ 和每个 $f \in \mathcal{F}_D$，利用断言可找到一个可定义着色 c_f，它定义在 $\mathcal{G}_f$ 上，且位于一个可定义的 $S_f \subseteq D \cup f(D)$ 之外，该集合的 λ- 测度为 $< \frac{\epsilon}{MN}$。我们设 $V' := V \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \bigcup_{f \in \mathcal{F}_D} S_f$。注意，

$$\lambda\Big(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} \bigcup_{f \in \mathcal{F}_D} S_f\Big) < M \cdot N \cdot \frac{\epsilon}{MN} = \epsilon.$$

定义一个映射 c，其定义域为c) $= V'$，值域为 $\bigcup$的幂集 rng(c_f)，其中并集遍历所有 $D \in \mathcal{D}$ 和所有 $f \in \mathcal{F}_D$，如下所示。对于 $x \in V'$，令 $c(x)$ 由所有满足 $x \in$ domain(c_f) 的 $c_f(x)$ 组成。假设 $x, y \in V'$，且 $(x, y) \in G \cap (V')^2$。那么，对于某个满足 $x \in D$ 的 $f \in \mathcal{F}_D$，有 $f(x) = y$。因此 $c_f(x) \neq c_f(y)$，于是 $c(x) \neq c(y)$。由此可得， c 正如所需。□

给定一个可定义图 $\mathcal{G} = (V, G)$，以及 V 上的一个测度，我们称 $\mathcal{G}$ 为可定义地几乎可着色的，如果对于每个 $\epsilon \in \mathbb{R}^{>0}$，都存在 $V_\epsilon \subseteq V$，使得 $V \setminus V_\epsilon$ 的测度小于 ϵ，并且存在 $(V_\epsilon, G \cap (V_\epsilon)^2)$ 的一个可定义着色。

注 2.3 引理 2.2 对 R 非阿基米德的情形不成立：令 ϵ 为 R 中一个正的无穷小量，并考虑图 $\mathcal{G} = ([0,1]_R, G)$，其中 $(x, y) \in G$ 当且仅当 $y = x + \epsilon$ 且 $0 \leq x \leq 1 - \epsilon$。那么 $\mathcal{G}$ 不是可定义地几乎可着色的。

2.2 少短增广路径的匹配

这里，我们令 $\mathcal{G} = (A \cup B, G)$ 为一个可定义的、 λ-保持的二分图，其中 $A, B \in B[n]$，且 $M \subseteq G$ 是一个可定义匹配。我们固定 $K \geq 0$。

我们称可定义 $X \subseteq R^n$ 的一个子集有限集为 X的开分划，如果其中每个成员都是包含于 X中的开胞腔，且它们的并在一个 λ-测度为 0 的集合之外覆盖 X。我们称 X的一个开分划 $\{X_i\}$ 划分一个可定义的 $Y \subseteq X$，如果 $\{X_i\}$ 的一个子集构成 Y的开分划。若 $\{Y_j\}$ 的一个开分划 X 划分 X，且 $\{Y_j\}$ 划分每个 X_i，则称它是 X 的另一个开分划$\{X_i\}$ 的细化。

路径生成序列。我们将定义一个序列

$$\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{2K+2}$$

由 A的开分划组成，另一个序列

$$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3, \ldots, \mathcal{B}_{2K+1}$$

由 B的开分划组成。在每个序列中，每个开分划都是其前一个开分划的细化。

设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的一个胞腔分解，它同时划分 G 和 M。令

$$\mathcal{A}_0 = \{\pi_n^{2n} C \colon C \in \mathcal{C} \,\&\, \dim \pi_n^{2n} C = n \,\&\, \pi_n^{2n} C \subseteq A\}.$$

由于 $\mathcal{G}$ 是 λ-保持的，我们可以假设，对于每个$A_{0,i} \in \mathcal{A}_0$, $G|_{A_{0,i}} := G \cap (A_{0,i} \times \mathbb{R}^n)$都是有限个 n-同构图的并。我们用$\mathcal{F}_{0,i}$表示这些同构所构成的集合。

假设对每个 $A_{2m,i} \in \mathcal{A}_{2m}$，其中 $0 \leq m \leq K$, $\mathcal{A}_{2m}$ and $\mathcal{F}_{2m,i}$ 已定义，我们令 $\mathcal{B}_{2m+1}$ 为 B 的一个开分划，将$f(A_{2m,i})$ 划分开来；对每个 $f \in \mathcal{F}_{2m,i}$ 和每个 $A_{2m,i} \in \mathcal{A}_{2m}$ 都如此。对于 $B_{2m+1,j} \in \mathcal{B}_{2m+1}$，令 $\mathcal{F}_{2m+1,j}$ 为所有满足 $f \in \bigcup_i \mathcal{F}_{2m,i}$ 的 $f^{-1}|_{B_{2m+1,j}}$ 的集合，其中求和遍历所有满足 $A_{2m,i} \in \mathcal{A}_{2m}$ 的 i，且 $B_{2m+1,j} \subseteq$ rng(f)。

定义 $\mathcal{A}_{2m+2}$ 时，其中 $0 \leq m \leq K$，假设 $\mathcal{B}_{2m+1}$ 和 $\mathcal{F}_{2m+1}$已定义。令 $\mathcal{A}_{2m+2}$ 为 A 的一个开划分，该划分将$f^{-1}(B_{2m+1,j})$ 划分为若每个 $f^{-1} \in \mathcal{F}_{2m+1,j}$ 和每个 $B_{2m+1,j} \in \mathcal{B}_{2m+1}$】【。

现在令

$$\mathcal{C}_i = \begin{cases} \mathcal{A}_i & \text{if } i \text{ is even} \\ \mathcal{B}_i & \text{if } i \text{ is odd.} \end{cases}$$

令 $\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{G}$ 中长度为 $l \leq 2K+1$ 的路径 p 的集合，使得若 $p_0 \in A$，则对每个 $i = 0$, ..., l，都有 $p_i \in \bigcup \mathcal{C}_i$；若 $p_0 \in B$，则对每个 $i = 0$, ..., l，都有 $p_i \in \bigcup \mathcal{C}_{i+1}$。

定义 2.4 给定一条长度为 $l \leq 2K+1$ 的路径 $p \in \mathcal{P}$，p 的生成序列是满足下述条件的唯一同构序列 $(g_0, \ldots\ldots, g_{l-1})$：

1. 若 $p_0 \in \bigcup \mathcal{A}_0$，则对某个 j，每个 $g_i \in \mathcal{F}_{i,j}$，且
2. 若 $p_0 \in \bigcup \mathcal{B}_1$，则对某个 j，每个 $g_i \in \mathcal{F}_{i+1,j}$，且
3. 对所有 $i \in \{0, \ldots, l-1\}$，$p_{i+1} = g_i(p_i)$。

令 s 为路径 $p \in \mathcal{P}$ 的生成序列。我们用 $\mathcal{S}_s$ 表示 $\mathcal{P}$ 中生成序列为 s 的路径的所有可能起始顶点的集合。注意，$\dot{,}_j$ 或 $\mathcal{S}_s \subseteq B_{1\,,\,j}$ 对某个 j 成立，并且我们可以将 $\mathcal{P}$ 与 $\bigcup_s \mathcal{S}_s$ 等同，其中不交并取遍 $\mathcal{P}$ 中路径的所有生成序列 s。

现在我们在 $\mathcal{P}$ 的可定义子集 $\mathcal{P}'$ 上定义一个测度 ν。我们有 . $\mathcal{P}' = \bigcup_s \mathcal{S}'_s$，其中 $\mathcal{S}'_s \subseteq \mathcal{S}_s$，而 s 遍历 $\mathcal{P}$ 中路径的生成序列。令

$$\nu(\mathcal{P}') := \sum_s \lambda \mathcal{S}'_s,$$

$\dot{,}$ 因此 $\mathcal{P}$ 上的 ν 就是$\bigcup_s \mathcal{S}_s$ 上的勒贝格测度。

令 $\mathcal{H} = (\mathcal{P}, H)$ 为顶点集为 $\mathcal{P}$ 的可定义图，并且当且仅当 $p \neq q$ 且对某个 $0 \leq k$、$l \leq 2K+1$，p 与 q 满足 $\in H$。由于 $\mathcal{H}$ 的每个顶点都具有有限度，由引理 2.2 可得以下结论。

引理 2.5 图 $\mathcal{H}$ 是可定义地几乎可着色的（相对于 ν）。

增广路径。我们现在的目标是定义一个匹配 M'，使其覆盖 M所覆盖的顶点，但只有少量“短”增广路径。

我们将使用以下术语。若 p 是匹配 $\mathcal{M}$ 的一条长度为 l的增广路（因此，p_0 和 p_l 未被 $\mathcal{M}$ 覆盖，并且每个（p_{2i}，p_{2i+1}）$\notin \mathcal{M}$，每个（p_{2i+1}，p_{2i+2}）$\in \mathcal{M}$），那么我们所说的翻转 p，是指从 $\mathcal{M}$ 中移除边（p_{2i+1}，p_{2i+2}），并将边（p_{2i}，p_{2i+1}）加入 $\mathcal{M}$。注意，翻转一条增广路径会得到一个新的匹配，它覆盖与 $\mathcal{M}$ 相同的顶点（以及另外两个顶点）。

命题 2.6 令 $\delta \in \mathbb{R}^{>0}$。存在一个可定义匹配 $M' \subseteq G$，覆盖由 M覆盖的顶点，并且在 $\mathcal{P}$ 的 ν-测度 $< \delta$ 的可定义子集之外不存在长度为 $\leq 2K+1$ 的任何增广路径。

Proof: 由于 $\mathcal{G}$ 是 λ-保持的，维数 A = 维数 B，因此我们可以假设维数 $A = n$。根据引理 2.5，我们可以找到一个可定义的 $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$，满足 $\nu(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}') < \frac{\delta}{2}$，以及图 $(\mathcal{P}', H \cap \mathcal{P}'^2)$ 的一个可定义着色 c，使得 $\mathrm{rng}(c) = \{0, 1, \ldots, C-1\}$，其中 $C \in \mathbb{N}$。令 $a = (a_k)$ 为满足每个 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $a_k = (k \bmod C)$ 的序列。

我们将把所需的匹配 M' 构造为一列可定义匹配 M_0、M_1、M_2、.....中的一个成员。令 $M_0 := M$。要从 M_k 得到 M_{k+1}，翻转包含在 $c^{-1}(a_k)$ 中的所有关于 M_k 的增广路径。由于我们每次只翻转颜色相同的路径，因此每一步确实都会得到一个新的匹配。注意，每个 M_{k+1} 都覆盖了 M_k 所覆盖的顶点。现在只需证明下面的断言。

Claim 存在 k，使得 M_k 在 $\mathcal{P}$ 的一个可定义子集之外，不存在长度为 $\leq 2K+1$ 的增广路径；该子集的 ν-测度为 $< \delta$。

Proof of Claim: 首先注意，边 $(a, b) \in G$ 只能在有限多个 k 中通过翻转而属于 M_k。这可由类似于 [7], 第 12 页中的论证得出：令

$$R_a := \{x \colon x \text{ is reachable from } a \text{ in } \leq 2K+1 \text{ many steps}\}.$$

于是 $b \in R_a$，且 R_a 是有限的，因为 $\mathcal{G}$ 的每个顶点都具有有限度。每次我们翻转 (a, b)，都是因为 (a, b) 是长度为 $\leq 2K+1$ 的一条增广路径的一部分，而翻转该路径会增加 R_a 中被覆盖的顶点数。但由于 R_a 是有限的，这种情况只能发生有限次。

还要注意，由于 $\mathcal{G}$ 是可定义的，存在一个一致上界，记作 N，来限制一条边翻转的次数（例如，取 $N = d^{2K+1}$，其中 d 是 $\mathcal{G}$ 中度数的上界）。

只需证明，对于 $i \in \{0, \ldots, C-1\}$，存在 k_i，使得对每个 $m \geq k_i$，$c^{-1}(i)$ 都不包含长度为 $\leq 2K+1$、对应于 M_{i+mC} 的增广路径，除非这些路径属于 $\mathcal{P}$ 的一个可定义子集，且其 ν-测度为 $< \frac{\delta}{2C}$。

令 $AP_{i+mC} \subseteq \mathcal{P}$ 为 $c^{-1}(i)$ 中关于 M_{i+mC} 的增广路径集合，并反设存在任意大的 k，使得 $\nu(AP_{i+kC}) \geq \epsilon$。要构造 M_{i+kC+1}，需翻转 AP_{i+mC} 中的路径；但由于每条边最多翻转 N 次，这种情况至多发生 $\frac{\nu(c^{-1}(i))}{\epsilon} \cdot N$ 次，矛盾。□（Claim）

令 $k := \max\{k_0, \ldots, k_{C-1}\}$。那么，$M_k$ 长度为 $\leq 2K+1$ 的增广路径集合的测度为 $< \frac{\delta}{2} + C \cdot \frac{\delta}{2C} = \delta$。

□

3 归约到阿基米德情形

在本节中，我们不再假设 R 的底集是 $\mathbb{R}$。相反，我们假设 R 是 $(2^{\aleph_0})^+$-饱和的。我们将使用来自 [4] 的以下定义和引理。

我们所说的 R^n 中的 $\mathbb{Q}$-开球，是指有理半径的开球，即形如以下形式的球

$$B_r(x) = \{y \in R^n \colon d(x,y) < r,\ x \in R^n,\ r \in \mathbb{Q}^{>0}\}.$$

下面的引理是 [4] 中的引理 4.1，第183页（这里，我们更倾向于用 $\mathbb{Q}$-球而不是 $\mathbb{Q}$-盒来表述它）。

引理 3.1（[4]）设 $X \subseteq R^n$ 是可定义的，且 $\dim(\mathrm{st}\, X) = n$。那么 X包含一个 $\mathbb{Q}$-球。

下面的定义（定义3.1，第179, [4]页）和定理（ [4]中推论6.2（第191页）的一个略弱版本）将至关重要。

定义3.2（[4]）给定函数 $f\colon\ X \to R$、 $X \subseteq R^n$，以及 $F\colon\ Y \to \mathbb{R}$，满足 $Y \subseteq \mathbb{R}^n$，我们称 f 诱导了 F，如果 f 是可定义的（因此 X 是可定义的），$Y^h \subseteq X$， $f|C^h$是连续的，$f(C^h) \subseteq \mathcal{O}$，并且 $\Gamma F = \mathrm{st}(\Gamma f) \cap (Y \times \mathbb{R})$。

对于 $f\colon\ X \to R^n$ 和 $F\colon\ Y \to \mathbb{R}^n$，其中 $X \subseteq R^n$ 和 $Y \subseteq \mathbb{R}^n$，我们称f诱导 F，如果 f 的坐标函数诱导 F的相应坐标函数。

定理3.3（[4]）如果 $f\colon\ Y \to R$，其中 $Y \subseteq R^n$ 和 $\Gamma f \subseteq \mathcal{O}^{n+1}$，是可定义的，那么存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个分解 $\mathcal{C}$，将$\mathrm{st}\, Y$ 划分为胞腔，并且满足：若 $C \in \mathcal{C}$ 是开集且 $C \subseteq \mathrm{st}\, Y$，则 f在包含$\mathrm{st}^{-1}(C)$的某个开集 $X \subseteq Y$上连续可微；此外，作为定义在 X上的函数， f、$\frac{\partial f}{\partial x_1}$、.....、 $\frac{\partial f}{\partial x_n}$诱导函数 g、 g_1、.....、 g_n： $C \to \mathbb{R}$，使得 g是 C^1，并且对每个 i，$g_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}$。

此外，我们将使用 [5], 中的以下结果，其中 1. 是命题5.1，2. 摘自引理2.15的证明。

命题3.4 1. 若 $C \in \mathrm{Def}^n(\mathbb{R}_{ind})$ 是闭的，则存在一个 $Z \in \mathrm{Def}^n(R)$，使得 $\mathrm{st}\, Z = \mathrm{cl}(C)$。

2. 若 $X, Y \in Def^n(R)$ 和 $X, Y \subseteq \mathcal{O}^n$，则存在 $\epsilon > 0$，使得 $\mathrm{st}\ X \cap \mathrm{st}\ Y = \mathrm{st}(X \cap Y^\epsilon)$，其中 $Y^\epsilon = \{x \in R^n\colon\ d(x,Y) < \epsilon\}$。

下文中， ν-测度的定义与结构的底集为 $\mathbb{R}$ 时的情形相同，只是使用 μ 而非 λ。

定理 3.5 设 $\mathcal{G} = (A \dot\cup B, G)$ 是一个可定义的二部 μ-保持图， d 是其顶点度数的一个上界，且 $M \subseteq G$ 是一个可定义匹配。再设 $K \in \mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{R}^{>0}$ 和 $\epsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ 满足 $\epsilon < \frac{\delta}{d^{2K+2}}$。那么存在一个可定义匹配 $X \subseteq G$，使得除一个 μ- 测度为 $< \epsilon$ 的可定义集合外， X 覆盖 M 所覆盖的所有顶点；并且除一个 ν-测度为 $< \delta$ 的集合外， X 没有长度为 $\leq 2K+1$ 的增广路径。

Proof: 不妨设 $\dim(\mathrm{st}\, A) = n = \dim(\mathrm{st}\ B)$。令 $\mathcal{D}$为将 R^{2n} 分解为胞腔的划分，并将 G 和 M划分开。置

$$\mathcal{D}_0 = \{\pi_n^{2n} D\colon\ D \in \mathcal{D}\ \&\ D \subseteq G\ \&\ \dim \pi_n^{2n} D = n\}.$$

不妨设，若 $D \in \mathcal{D}, D \subseteq G$ 满足 $\pi_n^{2n} D \in \mathcal{D}_0$，则 D 是有限个 Γf的并，其中每个 f 都是一个 n-同构，并将这些 n-同构在 $\pi_n^{2n} D$ 上的集合记为 $\mathcal{F}_{\pi_n^{2n} D}$。

Set

$$G_1 = G \cap \bigcup_{D \in \mathcal{D}_0} (D \times R^n) \text{ and } M_1 = M \cap \bigcup_{D \in \mathcal{D}_0} (D \times R^n),$$

并令 $\mathcal{C}$ 为 $\mathbb{R}^{2n}$ 的一个分解，将其划分为胞腔，使其划分 $\mathrm{st}\ G_1$ 和 $\mathrm{st}\, M_1$，且满足 $\{\pi_n^{2n} C\colon\ C \in \mathcal{C}\}$ 将每个 $\mathrm{st}\, D$ 划分，其中 $D \in \mathcal{D}_0$。令

$$\mathcal{C}_0 = \{\pi_n^{2n} C \colon C \in \mathcal{C} \,\&\, C \subseteq \mathrm{st}\, G_1 \,\&\, \dim C = n\}.$$

假设 $D \in \mathcal{D}_0$ 和 $f \in \mathcal{F}_D$，并令 $C \in \mathcal{C}_0$ 满足 $C \subseteq \mathrm{st}\, D$。那么根据定理3.3，我们可以假设 f 诱导出一个 n-同构 $g\colon\ C \to g(C)$。对于 $C \in \mathcal{C}_0$，令 $\mathcal{F}_C$ 为所有 g 的集合：$C \to \mathbb{R}^n$ 是由某个 $f \in \mathcal{F}_D$ 诱导的，其中 $D \in \mathcal{D}_0$ 且 $C \subseteq \mathrm{st}\, D$。

我们定义

$$G' = \mathrm{st}\, G_1 \cap \bigcup_{C \in \mathcal{C}_0} (C \times \mathbb{R}^n).$$

那么 G' 是该 $\mathbb{R}_{ind}$-可定义、保持 λ 的二分图$\mathcal{G}'$ 的边关系，其二分划分为 A'，B'，其中 $A' = \pi_n^{2n} G'$ 和 B' 是 G' 在最后 n 个坐标上的投影。

Claim 关系 $M' = \mathrm{st}\ M_1 \cap G'$ 是 G'中的一个可定义匹配。

Proof of Claim: 为证明 M' 是某个函数的图，反设 (X, Y)、$(X, Y') \in M'$ 且 $Y \neq Y'$。于是，对于某个$C \in \mathcal{C}_0$，有 $X \in C$；并且对于某个 $D \in \mathcal{D}$，有 $C \subseteq \mathrm{st}\, D$。由于 C 是开集，$\mathrm{st}^{-1}(X) \subseteq D$，且存在 x_1、$x_2 \in D$ 使得 $\mathrm{st}\ x_1 = \mathrm{st}\ x_2 = X$，并且对于满足 $\Gamma f \subseteq M_1$的唯一 $f \in \mathcal{F}_D$，$\mathrm{st}\ f(x_1) = Y$且 $\mathrm{st}\ f(x_2) = Y'$，这与 f 导出一个函数$C \to \mathbb{R}^n$相矛盾。

现在假设 (X, Y)、$(X', Y) \in M'$ 且满足 $X \neq X'$。如果存在 $C \in \mathcal{C}_0$使得 $X, X' \in C$，那么对于某个 $D \in \mathcal{D}$，有 $\mathrm{st}^{-1} X$、$\mathrm{st}^{-1} X' \subseteq D$；并且对于满足 $\Gamma f \subseteq M_1$的 $f \in \mathcal{F}_D$，我们有 $\mathrm{st}\ f(x) = \mathrm{st}\ f(x')$，其中某个 $x \in$ 满足 $\mathrm{st}^{-1} X$, $x' \in \mathrm{st}^{-1} X'$，这与 f 导出同构 $C \to \mathbb{R}^n$相矛盾。

因此，假设 $X \in C_1$, $X' \in C_2$，其中 $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_0$, $C_1 \neq C_2$。令 $F\colon\ C_1 \to \mathbb{R}^n$，$G\colon\ C_2 \to \mathbb{R}^n$ 分别由 $f \in \mathcal{F}_{D_1}$ 和 $g \in \mathcal{F}_{D_2}$ 诱导，其中 $\Gamma f, \Gamma g \subseteq M_1$，且 $F(X) = Y = G(X')$。于是存在 $\delta > 0$，使得$B_\delta(X) \subseteq C_1$，且 $B_\delta(X') \subseteq C_2$；又因为 F, G 是同胚，$F(B_\delta(X))$、$G(B_\delta(X'))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集。

由于 $\mathrm{st}^{-1}(B_\delta(X)) \subseteq D_1$ 且 $\mathrm{st}^{-1}(B_\delta(X')) \subseteq D_2$，我们有 $B_{\frac{\delta}{2}}(x) \subseteq D_1$且 $B_{\frac{\delta}{2}}(x') \subseteq D_2$，其中 x, x'满足 $\mathrm{st}\ x = X$且 $\mathrm{st}\ x' = X'$。因此，$F(B_{\frac{\delta}{2}}(X)) \subseteq \mathrm{st}\ f(B_{\frac{\delta}{2}}(x))$，且 $G(B_{\frac{\delta}{2}}(X')) \subseteq \mathrm{st}\ g(B_{\frac{\delta}{2}}(x'))$。由于 $Y \in F(B_{\frac{\delta}{2}}(X)) \cap G(B_{\frac{\delta}{2}}(X'))$，存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$B_\epsilon(Y) \subseteq F(B_{\frac{\delta}{2}}(X)) \cap G(B_{\frac{\delta}{2}}(X')),$$

因此 $B_\epsilon(Y) \subseteq \mathrm{st}\ f(B_{\frac{\delta}{2}}(x)) \cap \mathrm{st}\ g(B_{\frac{\delta}{2}}(x'))$——这与之矛盾。

$$f(B_{\frac{\delta}{2}}(x)) \cap\ g(B_{\frac{\delta}{2}}(x')) = \emptyset$$

以及引理 3.1。

□ (Claim)

根据命题 2.6，我们可以找到一个 $\mathbb{R}_{ind}$-可定义匹配 $M'' \subseteq G'$，使得在一个可定义的 $P \subseteq \mathcal{P}$ 之外、其 ν-测度为$< \frac{\delta}{2}$ 的所有增广路径长度均为 $> 2K+1$。

令 $\mathcal{C}'$ 为 $\mathbb{R}^{2n}$ 的一个胞腔分解，它是 $\mathcal{C}$ 的细化并划分 M''；令 $\mathcal{C}'_0$ 由维数为 n 且满足$C \in \mathcal{C}'$ 和 $C \subseteq M''$的胞腔 $\pi_n^{2n} C$ 组成。求 $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ 使得

$$\Sigma_{C \in \mathcal{C}'_0} \lambda(C \setminus C_\alpha) < \frac{\delta}{4 \cdot d^{2K+1}} < \frac{\epsilon}{2},$$

其中

$$C_\alpha = \{x \in C \colon d(\partial C, x) \geq \alpha\}.$$

根据 3.4，对于每个 $C \in \mathcal{C}'_0$ 和满足 $C \subseteq \mathrm{st}\, D$ 的 $D \in \mathcal{D}_0$，我们可以找到一个可定义的$D_C \subseteq D$，使得 $\mathrm{st}\, D_C = \mathrm{cl}(C_\alpha)$。注意，

$$M''' := M'' \cap \bigcup_{C \in \mathcal{C}'_0} (C_\alpha \times \mathbb{R}^n)$$

在集合 $< \epsilon$ 的测度之外，它覆盖了与 M'' 相同的顶点，因此 M' 也如此。此外，在 $\mathcal{P}$ 的一个 ν-测度为 $< d^{2K+1} \cdot \frac{\delta}{2 \cdot d^{2K+1}} + \frac{\delta}{2} = \delta$ 的子集之外，M''' 没有长度为 $\leq 2K+1$ 的增广路径。

现在，我们将所需的匹配 $X \subseteq G$ 定义为以下集合的子集

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}'_0} (D_C \times R^n) \cap G.$$

对于上述每个 $C \in \mathcal{C}'_0$、D 和 D_C，令 f_{D_C} 为 $\mathcal{F}_D$ 中第一个函数在 D_C 上的限制，该函数诱导出图为 $M'' \cap (C \times \mathbb{R}^n)$ 的函数。于是

$$X = \bigcup \{\Gamma f_{D_C} \colon C \in \mathcal{C}'_0\}.$$

剩下的工作是检查 X 满足所需的性质。

$X \subseteq G$ 是一个匹配：X 唯一可能不是匹配的情形是，存在 $x_1 \in D_{C_1}$ 和 $x_2 \in D_{C_2}$，使得 $C_1 \neq C_2$ 且 (x_1, y)、$(x_2, y) \in X$。但此时 $(\mathrm{st}\ x_1, \mathrm{st}\ y)$、$(\mathrm{st}\ x_2, \mathrm{st}\ y) \in M''$，因此 $\mathrm{st}\ x_1 = \mathrm{st}\ x_2$，这与 $d(D_{C_1}, D_{C_2}) > \mathfrak{m}$ 矛盾。

X 有长度为 $\leq 2K+1$ 的 $< \delta$ 条增广路径：设 P 是由 X 中的长度为 $\leq 2K+1$ 的增广路径构成的集合，生成序列为 s。那么，我们可以将 P 视为 P中各路径的起始顶点集合。假设

$\mu(P_0) = \rho > 0$。只需证明，那么 P 会导出一个由 M''' 中的长度为 $\leq 2K+1$ 的增广路径构成的集合，且 λ的起始顶点集合具有 $\geq \rho$测度。注意，我们可以假设 P 是 G_1中的路径集。根据 G_1、 G'、 X、 M''' 的定义以及引理 3.1，可以直接推出：对 P上几乎处处的 μ，若 $p = (p_0, \ldots, p_l) \in P$，则每个 st p_i 都是 G'的顶点；st p_0、st p_l未被 M'''覆盖；(st p_i, st p_{i+1}) $\in G'$；并且 $(p_i, p_{i+1}) \in X$ 当且仅当 (st p_i, st p_{i+1}) $\in M'''$。

X 覆盖了与 M 相同的顶点，但不包括一个 μ-测度为 $< \epsilon$ 的集合：证 t
$V \subseteq A \dot\cup B$ 可定义，且被 M 覆盖但不被 X覆盖，并且 $\mu(V) \geq \epsilon$。于是，V几乎处处被 M_1 覆盖，因此，除了一个 λ-测度为 0 的集合外，st V被 M' 覆盖。由于 λ(st V) $> \epsilon$，这与 st $X = \mathrm{cl}(M''')$ 和 M'''覆盖与 M'相同的顶点（除一个测度为 $< \epsilon$ 的集合外）相矛盾。

□

4 二正则二分图中的匹配

设 R 是实闭域的一个充分饱和扩张。除非另有说明，我们假设 $\mathcal{G} = (A \dot\cup B, G)$ 是一个 μ-保持且二正则的可定义二分图。我们将证明， $\mathcal{G}$ 中存在一个可定义匹配，覆盖除一个任意小正 μ-测度集合之外的所有顶点。

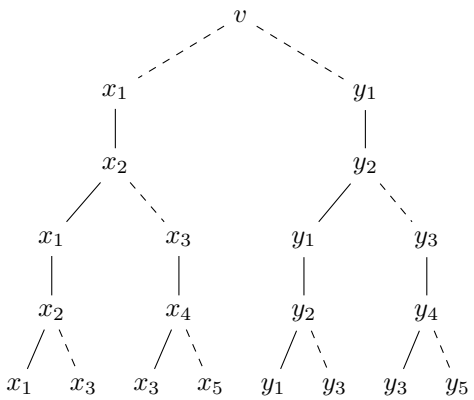
我们首先考虑这样一种情况：给定一个没有短增广路径的可定义匹配：设 K 为偶整数， $M \subseteq G$ 为一个不存在长度为 $\leq 2K+1$的增广路径的可定义匹配。令 $Y_0 \subseteq A \dot\cup B$由未被 M覆盖的顶点组成。对于 $k = 0, 1, \ldots, \frac{K-2}{2}$，我们设$Y_{2k+1} := N_G(Y_{2k})$ 和 $Y_{2k+2} := N_M(Y_{2k+1})$。

引理 4.1 $\mu Y_K = K \cdot \mu Y_0$。

Proof: 我们简要说明此引理的证明；读者可以利用归纳法和不存在短增广路径这一条件，轻松补全细节。

设 $v \in Y_0$。我们将 T_v 记为以下以 v为根的树。从现在起，我们假设 $l \in \{0, \ldots, \frac{K-2}{2}\}$。如果 x 是 T_v中深度为 $2l$的顶点，那么x 有两个子节点，分别标记为在 $\mathcal{G}$中与 x 关联的两个顶点。如果 x 的深度为 $2l+1$，那么 x 有一个子节点，标记为通过 M 中的一条边与 x 关联的顶点（其存在性由 M 不存在长度为 $\leq 2K+1$ 的增广路径以及 $\mathcal{G}$ 不存在奇圈推出）。为简单起见，我们假设对于 $l > 0$，深度为 $2l$ 的 x 的左子节点已匹配，右子节点未匹配。此外，如果 x 是 T_v中的一个顶点，那么我们将以 x为根的 T_v 的最大子树记为 T_x 。我们将 T_v 中深度为 l的顶点的标签集合记为 X_l ；这里的深度始终指相对于 T_v而言的深度（即使讨论子树时也是如此）。我们用 $d(x)$ 表示顶点x的深度。注意，我们有 $|X_{2l+1}| = |X_{2l+2}|$。

令 x_1 为 v 的左子节点， y_1 为其右子节点——见下图。



断言 1。 T_{x_1} 的标签集合与 T_{y_1} 的标签集合不相交。证明。设 $x_i = y_j$，其中 $d(x_i) \leq d(y_j)$，且 T_{x_1} 中没有任何标签出现在 T_{y_1} 中，同时也是深度为 $\leq d(x_i)$ 的顶点的标签。由于 $\mathcal{G}$ 没有奇圈， $d(x_i)$ 和 $d(y_j)$ 要么均为偶数，要么均为奇数。不妨设二者均为奇数。现在， x_i、 y_j 分别是其对应父节点的匹配子节点或未匹配子节点，但任何可能的组合都会与 $d(x_i)$ 的极小性矛盾。

断言 2. 假设 $l > 0$。则 $|X_{2l}| = 2$ l.
证明。注意，在 T_{x_1} 和 T_{y_1} 中，分别在每个深度将标签相同的顶点视为同一顶点（因此标签只能在不同深度重复），在深度 $2l+1$ 处恰有两个入度为 1 的顶点（因此所有其他顶点的入度均为 2）。

引理现由下一个断言得出。
断言 4. 设 v、 $v' \in Y_0$、 $v \neq v'$。则树 T_v 在深度 l 处的标签集合与树 $T_{v'}$ 在该深度处的标签集合不相交。

□

定理 4.2 设 $\epsilon \in \mathbb{R}^{>0}$。则存在一个可定义匹配 $M \subseteq G$，使得 M 覆盖除测度为 $< \epsilon$ 的集合之外的所有顶点。

Proof: 设 $\epsilon \in \mathbb{R}^{>0}$，且 K 为偶数，并满足 $\frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{2}$。根据定理 3.5，我们可以找到一个可定义匹配 $M \subseteq G$，其中有 $< \frac{\epsilon}{2}$ 条长度为 $\leq 2K+1$ 的增广路径。令 Y_0 为未被 M 覆盖的顶点集合，并令 $Z \subseteq Y_0$ 为长度为 $\leq 2K+1$ 的增广路径的起始顶点集合。于是，根据引理 4.1 的证明，

$$K \cdot \mu(Y_0 \setminus Z) = \mu(Y_0 \setminus Z)_K,$$

其中 $(Y_0 \setminus Z)_K$ 的定义与 Y_K 完全相同，只是在归纳定义中以 $Y_0 \setminus Z$ 代替 Y_0 作为起始项。由于 $\mu(Y_0 \setminus Z)_K$ 的上界为 1，因此 $\mu(Y_0 \setminus Z) \leq \frac{1}{K}$。所以

$$\mu Y_0 < \frac{1}{K} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

□

对于下一节中的应用，我们需要一个适用于图的定理 4.2 的版本，其中 2-正则性的条件放宽为：除一个正测度集合外均为 2-正则（在该应用中，可以假设这个正测度任意小）。

推论 4.3 设 $\mathcal{G} = (A \dot\cup B, G)$ 是一个可定义二分图，并且保持 μ；除一个测度为 μ measure $< \delta \in \mathbb{R}^{>0}$ 的集合外，其顶点的度数均为 2，而该集合中的顶点度数为 1。那么对于每个 $\epsilon \in \mathbb{R}^{>\delta}$，$\mathcal{G}$ 都存在一个可定义匹配，覆盖除一个测度为 $< \epsilon$ 的集合外的所有顶点。

Proof: 设 $\epsilon \in \mathbb{R}^{>\delta}$，并设 $K \in \mathbb{N}^{>0}$ 满足 $\frac{1}{K} < \frac{\epsilon-\delta}{2}$。设 M 是 $\mathcal{G}$ 中一个可定义匹配，其中长度为 $\leq 2K+1$ 的增广路径少于 $\frac{\epsilon-\delta}{2}$ 条。定理 4.2 的证明可以作如下调整。设 Y_0 和 T_v 对于 $v \in Y_0$ 如引理 4.1 中所述。

Claim 对于互不相同的 v、$w \in Y_0$、T_v 和 T_w，其度为 1 的顶点集彼此不相交。

Proof: 在构造 T_v 和 T_w 时，顶点首次出现在从 v 开始的某条增广路的可能初始段上。假设 $x_i = y_j$，$\deg x_i = 1$，其中 x_i 是 T_v 的一个顶点，首次出现在深度 i，而 y_j 是 T_w 的一个顶点，首次出现在深度 j。不妨假设 $i \leq j$。如果 $i = 0$，那么 T_w 包含一条长度为 $\leq K$ 的增广路。因此假设 $i > 0$。那么 x_i 和 y_j 要么都已匹配，要么都未匹配，但此时 $x_{i-1} = y_{j-1}$，这与 i 的极小性矛盾。□

由于同一个度为 1 的顶点不可能出现在多于一个 T_v 中，因此存在一个测度为 $< \delta$ 的 $Y \subseteq Y_0$，它由含有度为 1 的顶点的树的树根组成。令 $Z \subseteq Y_0$ 为长度为 $\leq 2K+1$ 的增广路的起始顶点集合。那么，根据定理 4.2 的证明，

$$K \cdot (\mu Y_0 - \delta - \frac{\epsilon - \delta}{2}) = \mu\big((Y_0 \setminus (Y \cup Z))_K\big).$$

So

$$\mu Y_0 < \frac{1}{K} + \delta + \frac{\epsilon - \delta}{2} < \epsilon.$$

□

5 消去定理

设 R 是实闭域的一个充分饱和扩张。我们如下定义 $\sim$ 上的等价关系：

定义 5.1 设 $X, Y \in B[n]$。当且仅当存在 X 和 Y 的可定义开分划 $\{X\}_{1=1}^{k}$, $\{Y_i\}_{i=1}^{k}$，并且存在 n-同构 $f_1, \ldots, f_k$，使得对每个 i 都有 $Y_i = f(X_i)$。

令 $\mathcal{B}$ 为半群 $(B[n]/\sim, +)$，其中二元运算 $+$ 由 $a + b = c$给出，且 c 是包含 a与 b的不交并的等价类。

下一个定理的证明基于 Tomkowicz 和 Wagon 关于消去律的证明，见 [6], 第 177 页。虽然 [6] 使用了 Hall-Rado-Hall 无限婚姻定理，但我们手头只有定理 4.2。

定理 5.2 设 $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ 有强有界代表元，并假设$\alpha + \alpha =_a \beta + \beta$ 属于 $\mathcal{B}$。那么 $\alpha =_a \beta$。

Proof: 设 $\epsilon \in \mathbb{R}^{>0}$，并设 A, A' 和 B, B' 分别是 α 和 β 的两对彼此不交的强有界代表元副本。设 $\phi\colon A \to A'$, $\psi\colon B \to B'$ 和 $\theta\colon A \dot\cup A' \to B \dot\cup B'$ 分别见证 $A \sim A'$, $B \sim B'$ 和$A \dot\cup A' \sim_{\frac{\epsilon}{2}} B \dot\cup B'$。

我们如下定义二分图 $\mathcal{H}$。其二分划分由两个集合组成

$$\bar{A} = \{(a, \phi(a))\colon a \in A)\} \text{ and } \bar{B} = \{(b, \psi(b))\colon b \in B\},$$

当且仅当 $\theta(a) = b$或 $\theta(\phi(a)) = b$或 $\theta(a) = \psi(b)$ 或 $\theta(\phi(a)) = \psi(b)$ 时，$(a, \phi(a))$ 与 $(b, \psi(b))$ 相邻。于是， $\mathcal{H} = (A \cup B, H)$ 是可定义的二分图且保持μ，并且每个顶点的度数均为 ≤ 2. 。为了构造一个见证 $\alpha =_\epsilon \beta$的映射，只需找到一个可定义匹配 $M \subseteq H$，使其覆盖 $A \cup B$，但允许遗漏一个 μ-测度为 $< \epsilon$ 的集合。

Let A_0 和 B_0 分别是度为 0 的顶点集合。注意， $\mu(A_0 \cup B_0) < \frac{\epsilon}{2}$，并在$\mathcal{H}$中用 $A \setminus A_0$ 替换 A，用 $B \setminus B_0$ 替换 B。

令 $A_1 \subseteq A$ 和 $B_1 \subseteq B$ 为与另一个度为 1 的顶点相连的度为 1 的顶点集合。则 $H \cap (A_1 \times B_1)$ 是一个双射 $A_1 \to B_1$的图，因此将 $\mathcal{H}$ 替换为该图并无妨

$$\big((\bar{A} \setminus \bar{A}_1) \dot\cup (\bar{B} \setminus \bar{B}_1)\big), H \cap \big((\bar{A} \setminus \bar{A}_1) \times (\bar{B} \setminus \bar{B}_1)\big).$$

那么， A 中其余度为 1 的顶点为（$a, \phi(a)$），满足 $\theta(a) \uparrow$ 且 $\theta(\phi(a)) \downarrow$，或反之；$B$中度为 1 的顶点也同理。因此，除去一个测度为 $< \frac{\epsilon}{2}$ 的集合， $\mathcal{H}$ 是 2-正则的。

根据推论 4.3， H 包含一个可定义匹配 M，它覆盖除一个 μ-测度为 $< \frac{\epsilon}{2}$ 的集合以外的所有顶点，因此也覆盖原始 $\mathcal{H}$中除一个 μ-测度为 $< \epsilon$ 的集合以外的所有顶点。

□

参考文献

[1] G. Elek 和 G. Lippner，博雷尔预言机：一种研究常数时间算法的分析方法，美国数学会会刊 138 (8)：2939–2947 (2010)。

[2]M. Laczkovich，没有可测匹配的闭集，美国数学会会刊 103 (3): 894-896 (1988)。[3] R. Lyons, F. Nazarov，完美匹配作为非均质群的独立同分布因子。欧洲组合学杂志 32(7): 1115–1125 (2011)。[4] J. Maˇr´ıkov´a，由实闭域的 o-极小扩张上的标准部分映射生成的实数域上的结构，以色列数学杂志 171, 175–195 (2009)。[5] J. Maˇr´ıkov´a，带标准部分映射的 o-极小域。基础数学 209 (2010)，第 2 期，115-132。[6] G. Tomkowicz, S. Wagon，《巴拿赫-塔斯基悖论》，第二版，数学及其应用百科全书 163，2016 剑桥大学出版社。[7] A. Y. Wang，《博雷尔匹配与霍尔定理的类似结果》，本科毕业论文（主修），加州理工学院，2020 年。