arXiv:2304.14536v1 [math.NA] 27 Apr 2023

使用哈尔小波处理微分方程的严格计算方法框架

Guilherme Nakassima*, †, Marcio Gameiro‡

摘要

本文提出了一种后验误差估计算法框架，用于求解微分方程，并将半径多项式方法与Haar小波相结合。借助Haar小波，我们为微分算子和二次非线性项的矩阵表示构造了递归结构，可将其用于半径多项式方法以获得 L^2 意义下的误差估计。这使得该方法在系统或解不连续时仍然适用，而这是其他基于半径多项式的方法的局限所在。数值例子展示了该方法在实践中的实现方式。

关键词：严格计算、计算机辅助证明、Haar小波、非线性动力系统。

2020年数学学科分类：34A34, 34L30, 65G20, 65H10, 65T60。

1 引言

严格计算自 20 世纪 80 年代以来一直是一个积极发展的领域 [18]。随着计算能力不断提升，数值方法逐渐成为分析微分方程并深入了解不变对象等结构的可行工具。然而，标准数值方法只能提供近似结果；其结果并不严格，无法用于形式化证明，只能帮助我们了解系统的真实结构。此外，即使采用非常精确的数值方法，某些结构（如分岔）仍可能难以发现。

严格计算方法旨在弥补这些不足，为截断误差和舍入误差提供数学上有效的估计与界，并严格证明此类隐藏结构的存在。多年来，人们开发了多种此类方法，例如严格积分 [29, 8, 17]，Conley指标方法 [4, 14]，自洽界 [30, 28]以及离散化方法 [19, 9]。更全面的综述可见 [20] 及其中所引文献。

我们尤其感兴趣的是半径多项式 方法 [5, 7, 27, 13, 11, 6, 2, 22,26]。这些方法将研究某种结构是否存在的问题转化为求解函数方程，通常通过基展开解。然后，采用常规数值方法求出这些方程的近似解。最后，利用不动点定理，我们可以保证在数值解的某个范围内，函数方程存在一个真正且严格的解。不动点定理的

*通讯作者

†圣保罗大学数学与计算机科学研究所。圣卡洛斯市圣卡洛斯工人大道 400 号，圣保罗州，邮编 13566-590，巴西。电子邮箱：gknakassima@gmail.com

‡罗格斯大学新泽西州立大学数学系，美国新泽西州皮斯卡塔韦市美国 1 号公路 57 号，邮编 08854。电子邮箱：marciogameiro@gmail.com

假设条件则借助所谓的半径多项式证明其成立。

本文提出了一种采用哈尔小波的新型半径多项式方法。尽管这种方法此前已采用过许多其他基，例如泰勒级数 [22], 傅里叶级数 [27] 以及切比雪夫多项式 [13], 据我们所知，尚无人尝试将小波方法与严格计算相结合。我们还认为，该方法可以作为构建其他方法的框架，例如严格延拓方法以及偏微分方程方法。

小波是构成 L^2 函数空间标准正交基的函数。尽管小波理论直到相对较近的时期才被正式确立，但小波的特殊性质——例如时频局部化——使其广泛应用于许多领域，如信号处理和压缩算法。这构成了一个有趣的情形，因为前文提到的大多数半径多项式方法都是为处理光滑函数而提出的，而我们基于小波的半径多项式方法则适用于更一般的情形。

本文提出的半径多项式方法基于一种求解微分方程的数值方法——哈尔小波方法，该方法最早于[3]提出。该方法假设最高阶导数以小波表示，并通过对级数积分得到解，实质上是将微分方程改写为积分形式。这使得该方法只需使用最简单的小波——哈尔小波，并由此得到积分算子的矩阵表示。哈尔小波的简洁性使得该矩阵可以轻松地递归计算。原始的哈尔小波方法随后在多篇出版物中得到了进一步分析、发展和应用 [12, 21, 1, 24, 16, 15]。

在我们的方法中，我们使用与哈尔小波方法相同的展开，构造半径多项式方法所需的函数方程。这实质上将微分方程转化为积分方程，使我们能够使用类似于 [25] 中的半径多项式定理。此外，利用哈尔小波，可以用无限但递归的矩阵表示积分算子和非线性项，从而得出半径多项式方法所需的估计。

本文的组织结构如下。第 2 节介绍哈尔小波及其积分，并回顾它们的一些性质。第3 节介绍半径多项式方法，并证明保证真实解存在的定理，前提是满足某些估计。第4节研究二次非线性项，以证明该方法所需的估计。第5节给出一些示例，说明所提出方法的应用。

2 哈尔小波及其积分

这里介绍哈尔小波及其积分，它们是所提出方法的基石之一。考虑平方可积函数 f 的空间 $L^2([0,1])$: $[0,1] \to \mathbb{R}$，其测度为通常的勒贝格测度。Haar小波是一族函数 $\{\phi, \psi_{j,k}\} \subset L^2([0,1])$, 定义如下：对于 $j = 0, 1, \ldots\ldots$以及 $k = 0, 1, \ldots\ldots, 2^j - 1$, 有

$$\phi(t) := \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases} \quad , \qquad \psi_{j,k}(t) := \begin{cases} 2^{j/2} & , \quad \frac{k}{2^j} \le t < \frac{k+0.5}{2^j} \\ -2^{j/2} & , \quad \frac{k+0.5}{2^j} \le t < \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

哈尔小波构成了 $L^2([0,1])$ 的标准正交基；其证明可见于许多小波理论的标准教材，例如 [10]。因此，任意函数 $y(t) \in L^2([0,1])$ 都可以展开为

唯一的 Haar小波级数

$$y(t) = c_1\phi(t) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k}\psi_{j,k}(t),$$

其中 $c_1 = \int_0^1 y(t)\phi(t)\,dt$, $c_{j,\,k} = \int_0^1 y(t)\psi_{j,\,k}(t)\,dt$，且该级数在 $L^2([0,1])$ 中收敛。若令 $i = 2^j + k + 1$，则序列 $(c_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{R})$。

记号。 根据具体情况，哪种方式更方便，我们可以在“单指标”和“双指标”记号之间转换。通过对所有$i > 2$作如下定义，便可将一种记号转换为另一种:

$$i = 2^j + k + 1 \iff \begin{matrix} j = \lfloor \log_2 i \rfloor \\ k = i - 2^j - 1 \end{matrix}$$

其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 是向下取整函数。指标 $i = 1$ 专用于尺度函数 ϕ。

反过来，任意一个 $(c_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{R})$ 都唯一确定一个 $f(t) \in L^2([0,1])$，定义如下:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\psi_i(t) = c_1\phi(t) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k}\psi_{j,k}(t).$$

这意味着我们可以定义一个可逆算子 $\mathcal{H}:\ L^2([0,1]) \to \ell^2(\mathbb{R})$，其定义逐元素为

$$(\mathcal{H}f)_i := \int_0^1 f(t)\psi_i(t)\,dt.$$

逆哈尔变换 $\mathcal{H}^{-1}$ 定义为

$$(\mathcal{H}^{-1}\mathbf{c})(t) := \mathbf{h}^T(t)\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\psi_i(t) \quad , \quad \mathbf{h}(t) := (\psi_1(t), \psi_2(t), ...)$$

值得注意的是，哈尔变换是一种等距变换，因为哈尔小波系统是 $L^2([0,1])$ 的标准正交基。

哈尔小波的另一个有趣且实用的性质，是我们所说的“嵌套性质”:

命题 2.1 (嵌套性质)。 设 $\psi_{j,k}$ 和 $\psi_{m,n}$ 是两个满足 $j < m$ 的哈尔小波。如果 $\overline{\textit{supp}\ \psi_{j,k}} \cap \textit{supp}\ \psi_{m,n} \neq \emptyset$，那么 $\textit{supp}\ \psi_{m,n} \subseteq [\frac{k}{2^j}, \frac{k+0.5}{2^j}]$ 或 $\textit{supp}\ \psi_{m,n} \subseteq [\frac{k+0.5}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$。

证明很简单，故略去；只需比较小波$\phi_{j,k}$的支撑即可。对于不同的 j，这些支撑都是长度为 2^{-j} 的二进区间。直观地说，这意味着：如果两个不同分辨率的小波的支撑相交，那么“较精细”小波（即分辨率较高的小波）的支撑完全包含在“较粗糙”小波的正部或负部之中。

在本研究中，我们还关注 Haar小波的积分，以及该积分与小波本身的关系。在区间 $[0,1]$ 内，哈尔小波族的积分是如下所示的三角函数:

$$w_1(t) = t \qquad , \qquad w_{j,k}(t) = \begin{cases} 2^{j/2}\left(t - \frac{k}{2^j}\right) & , \quad \frac{k}{2^j} \le t \le \frac{k+0.5}{2^j} \\ 2^{j/2}\left(\frac{k+1}{2^j} - t\right) & , \quad \frac{k+0.5}{2^j} \le t \le \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & , \quad \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

我们还将单指标记号扩展到 Haar小波积分 w_i。

Haar小波积分在 $[0,1]$ 上是连续函数；因此，它们在该区间上平方可积，并且自身可以展开为Haar小波级数：

$$w_i(t) = \sum_{l=1}^{\infty} P_{i,l}\psi_l(t) = P\mathbf{h}^T(t)\ ,\ P_{i,l} := \int_0^1 \psi_l(t)w_i(t)\,dt. \tag{3}$$

虽然 P 由一个无限矩阵表示，但可以通过递归公式计算。我们首先定义小波系统的 Haar矩阵：

定义 2.1。 对于给定的分辨率 J， H_M 阶的***Haar***矩阵 的各元素定义如下：

$$(H_M)_{p,q} := \psi_p(t_q) \tag{4}$$

其中 $t_q = \frac{q-0.5}{M}$，对于 $q = 1, \ldots, M$。

阶为 $M = 2^{J+1}$ 的离散*Haar*变换矩阵 HT_M 定义为

$$HT_M := \frac{1}{\sqrt{M}} H_M \tag{5}$$

一个特别重要的事实是，对于所有 J， HT_M 都是酉的，因此 H_M 可逆，且 $(H_M)^{-1} = \frac{1}{M} H_M^T$。 —

定理 2.1。 无限矩阵 P 可递归地计算为

$$P_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad P_{2m} = \begin{bmatrix} P_m & -\frac{1}{4\sqrt{m^3}} H_m \\ \frac{1}{4\sqrt{m^3}} H_m^T & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \tag{6}$$

对于 $m = 2^j$ 和 $j = 0$， 1、2、.....。

这个公式的证明见 [3], ，并做了些修改，以说明我们使用的是归一化小波。

我们来证明，对于所有 $\mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{R})$， $P^T\mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{R})$。首先需要定义一些投影。给定分辨率级别 J，令 $M = 2^{J+1}$ 与前文相同，并将投影 Π_M 定义为

$$\begin{aligned} \Pi_M : \ell^2(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^M \\ \mathbf{c} &\mapsto (c_1, ..., c_M). \end{aligned} \tag{7}$$

我们将向量 $(c_1, ..., c_M) \in \mathbb{R}^M$ 视为其无限维对应向量 $(c_1, ..., c_M, 0, 0, ...) \in \ell^2(\mathbb{R})$。我们还将投影 $\Pi_\infty \in B(\ell^2(\mathbb{R}))$定义为

$$\Pi_\infty \mathbf{c} := (I - \Pi_M)\mathbf{c}.$$

记号。 给定 $\mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{R})$，我们有时将其分成长度为 2^n 的块， $n = 0,1,2, ...$ 如下：

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_0^*, \mathbf{c}_1^*, \mathbf{c}_2^*, \mathbf{c}_4^*, ...)^T \ , \text{ where } \mathbf{c}_0^* = c_1 \ , \ \mathbf{c}_{2^n}^* = (c_{2^{n-1}+1}, c_{2^{n-1}+2}, ..., c_{2^n})^T. \tag{8}$$

此外，给定矩阵 A，我们将 $A_{m_1:\ m_2,\ n_1:\ n_2}$ 表示为由 A 给出的子矩阵

$$A_{m_1:m_2, n_1:n_2} = \begin{bmatrix} A_{m_1,n_1} & \cdots & A_{m_1,n_2} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m_2,n_1} & \cdots & A_{m_2,n_2} \end{bmatrix}$$

若要取出 A的所有行或所有列，我们分别记作$A_{*,n_1:n_2}$ 和$A_{m_1:m_2,*}$。 最后，为了简化记号，我们记作 $\mathbf{c}_M = \Pi_M\mathbf{c}$ 和$\mathbf{c}_\infty = \Pi_\infty\mathbf{c}$。

命题2.2。 对于$\mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{R})$， $M = 2^{J+1}$、 $J = 0$、1、2、.....以及前文定义的投影，

$$\left\|\Pi_M P^T \mathbf{c}\right\|_{\ell^2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(4 - \frac{1}{2^{2J+2}}\right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{c}\|_{\ell^2} \quad , \quad \left\|\Pi_\infty P^T \mathbf{c}\right\|_{\ell^2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}^2}{2^{J+1}}$$

特别地，令 $J \to \infty$, $P^T\mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{R})$ 且 P^T: $\ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$ 是有界线性算子 .

证明。 由 P 在定理2.1 中的结构以及 $\mathbf{c}$的分块表示，可得

$$\left(P^T\mathbf{c}\right)_{2^j}^* = -\frac{1}{2^{\frac{3j}{2}+2}} H_{2^j}^T (\Pi_{2^j}\mathbf{c}) + \sum_{q=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{3q}{2}+2}} H_{2^q}\mathbf{c}_{2^q}^* \tag{9}$$

回忆 $H_M = \sqrt{M} H T_M$ 和 HT_M 是酉矩阵，我们可以对上述项作如下界定。

$$\begin{aligned}\left\|\left(P^T\mathbf{c}\right)_{2^j}^*\right\|_{\ell^2} &\leq \frac{1}{2^{j+2}} \left\|HT_{2^j}^T(\Pi_{2^j}\mathbf{c})\right\|_{\ell^2} + \sum_{q=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{q+2}} \left\|HT_{2^q}\mathbf{c}_{2^q}^*\right\|_{\ell^2} \\ &\leq \frac{\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}}{2^{j+2}} + \sum_{q=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{q+2}} \|\mathbf{c}_{2^q}^*\|_{\ell^2} \leq \frac{\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}}{2^{j+1}}\end{aligned} \tag{10}$$

剩下的唯一一项是 $\left(P^{T^-}\mathbf{c}\right)_1$。我们可以用以下方式对其进行估界。

$$\left|\left(P^T\bar{\mathbf{c}}\right)_1\right| = \left|\frac{1}{2}c_1 - \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{3q}{2}+2}} H_{2^q}\mathbf{c}_{2^q}^*\right| \leq \frac{1}{2}|c_1| + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^{q+2}} \left\|HT_{2^q}\mathbf{c}_{2^q}^*\right\|_{\ell^2} \leq \|\mathbf{c}\|_{\ell^2} \tag{11}$$

因此， $\Pi_M P^T\mathbf{c}$的范数可估计为

$$\left\|\Pi_M P^T\mathbf{c}\right\|_{\ell^2}^2 \leq \left|\left(P^T\mathbf{c}\right)_1\right|^2 + \sum_{j=0}^{J} \left\|\left(P^T\mathbf{c}\right)_{2^j}^*\right\|_{\ell^2}^2 = \left(4 - \frac{1}{2^{2J+2}}\right) \frac{\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}^2}{3}$$

类似地， $\Pi_\infty P^T\mathbf{c}$的范数有界于

$$\left\|\Pi_\infty P^T\mathbf{c}\right\|_{\ell^2}^2 \leq \sum_{j=J+1}^{\infty} \left\|\left(P^T\bar{\mathbf{c}}\right)_{2^j}^*\right\|_{\ell^2}^2 \leq \sum_{j=J+1}^{\infty} \frac{\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}^2}{2^{2j+2}} = \frac{1}{3} \frac{\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}^2}{2^{2J+2}}$$

□

3 半径多项式方法

本节介绍用于 [5, 7, 27, 13, 11, 6] 严格计算的半径多项式方法。考虑一个初值问题

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u,t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{12}$$

并假设我们找到一个数值近似解 $\bar{u}(t)$。我们的目标是证明在 $\bar{u}(t)$ 的某个邻域内存在一个真解 $\tilde{u}(t)$。这可以通过半径多项式方法实现。

对于我们的工作，假设 $\dot{u}(t) \in L^2([0,1])$。那么，我们可以利用哈尔小波及其积分将 $\dot{u}$ 和 u 写成

$$\dot{u}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(t) \quad , \quad u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i w_i(t) + u_0 \tag{13}$$

代回微分方程（12）并进行哈尔变换，

$$F(\mathbf{c}) := \mathbf{c} - \mathcal{H}\left(f\left(t, \sum_{i=1}^{\infty} c_i w_i(t) + u_0\right)\right) = 0 \tag{14}$$

因此，我们得到一个映射 $F:\ \ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R}$，使得求解该微分方程意味着寻找 F的零点。反之，由于表示$\dot{u}$ 的小波级数的唯一性——因而表示 $u(t)$ 的级数也具有唯一性——寻找 F 的零点等价于求解（12）。

现在，我们将寻找 F 的零点问题转化为寻找映射$T:\ \ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$在数值解 $\bar{u}$附近的不动点问题。具体而言，我们证明 T在 $\bar{u}$附近是一个压缩映射。首先，将算子 $A:\ \ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$定义为

$$A\mathbf{x} = A_M \Pi_M \mathbf{x} + \Pi_\infty \mathbf{x},$$

其中，$A_M:\ \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ 是逆$D(\Pi_M F(\bar{\mathbf{x}}))^{-1}$的有限维计算近似，其中 $\bar{\mathbf{x}}$为通过数值方法得到的解。然后，我们可以将不动点映射 $T:\ \ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$定义为

$$T(\mathbf{x}) := \mathbf{x} - AF(\mathbf{x}) = (\Pi_M - A_M \Pi_M F)(\mathbf{x}) + \Pi_\infty(\mathbf{x} - F(\mathbf{x})) \tag{15}$$

其导数用于半径多项式方法，表达式为

$$DT(\mathbf{x}) = \Pi_M - A_M \Pi_M DF(\mathbf{x}) + \Pi_\infty(I - DF(\mathbf{x})) \tag{16}$$

注释 3.1. 由于本文中的许多矩阵都是分块矩阵，因此可以计算它们的逆为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

前提是矩阵 A 和 $D - CA^{-1}B$ 可逆。使用此公式计算逆矩阵，可能比直接求整个矩阵 $D(\Pi_M F(\bar{\mathbf{x}}))$的逆更快。

记号。 为了帮助直观地呈现算子并减少记号繁杂，在方便时我们对算子 C 采用以下“分块矩阵”记号：$\ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$ 马会用到：

$$C\mathbf{x} = \begin{bmatrix} C_M & C_{M,\infty} \\ C_{\infty,M} & C_\infty \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_M \mathbf{x} \\ \Pi_\infty \mathbf{x} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

我们将此称为**有限-无限分解**。

直观地说，(15) 的第一项是我们通过数值计算得到的有限项的牛顿型映射。在第二项中，我们希望 F 的“尾部”能够自行收缩至零——这正是二次非线性项所产生的效果。这一切的依据在于，随着 M增大，矩阵 P_M 中的新元素会变得越来越小。

现在我们正式证明，T 的不动点对应于 F的零点：

命题 3.1。 假设映射 T 如上文 (15) 中所定义，在 $\ell^2(\mathbb{R})$的某个闭邻域内是压缩映射。那么 T 在该邻域内有唯一的不动点 $\tilde{\mathbf{c}}$ 。此外，$\tilde{\mathbf{c}}$ 是 T 的不动点，当且仅当它是 F 在前文 (14)中所定义的零点。

证明。 由于 T 在 $\ell^2(\mathbb{R})$的一个闭邻域内是压缩映射，巴拿赫不动点定理保证它在同一邻域内有一个不动点 $\tilde{\mathbf{c}}$ 。此外，如果 $\tilde{\mathbf{c}}$ 是F的零点，那么通过直接计算可知，它是 T的不动点。

还需证明不动点 $\tilde{\mathbf{c}}$ 是 F的零点。由（15）

$$T(\tilde{\mathbf{c}}) - \tilde{\mathbf{c}} = 0 = A_M \Pi_M F(\tilde{\mathbf{c}}) + \Pi_\infty F(\tilde{\mathbf{c}}).$$

由于 $A_M \Pi_M F(\tilde{\mathbf{c}}) \in \Pi_M(\ell^2(\mathbb{R}))$，我们有

$$\Pi_\infty F(\tilde{\mathbf{c}}) = 0 \quad , \quad A_M \Pi_M F(\tilde{\mathbf{c}}) = 0$$

并且由于 A_M可逆，那么 $\Pi_M F(\tilde{\mathbf{c}}) = 0$也成立。因此 $F(\tilde{\mathbf{c}}) = 0$。 □

为了证明 T 确实是在我们的数值解 $\bar{\mathbf{c}}$附近的压缩映射，我们使用半径多项式。首先，我们定义闭邻域。

$$\overline{B_\omega(\bar{\mathbf{c}}, r)} = \left\{ \mathbf{y} \in \ell^2(\mathbb{R}) : \|\Pi_M(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{c}})\| \le \omega r \text{ and } \|\Pi_\infty(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{c}})\| \le (1-\omega) r \right\} \tag{18}$$

其中 T 将是一个压缩映射。 $\omega \in (0,1)$ 是一个“权衡参数”：我们可以放宽无限部分的半径，但代价是收紧有限部分的半径，反之亦然。对于接下来的计算，我们假设 ω 固定不变，不过在实际应用中会稍后再选定。

接下来，我们需要确定界 Y_M 和 Y_∞，以及多项式 $Z_M(r)$ 和 $Z_\infty(r)$，使得

$$\|\Pi_M(T(\bar{\mathbf{c}}) - \bar{\mathbf{c}})\|_{\ell^2} \le Y_M \tag{19}$$

$$\|\Pi_\infty(T(\bar{\mathbf{c}}) - \bar{\mathbf{c}})\|_{\ell^2} \le Y_\infty \tag{20}$$

$$\sup_{x_1, x_2 \in \overline{B(r)}} \|\Pi_M(DT(\bar{\mathbf{c}} + x_1)x_2)\| \le Z_M(r) r \tag{21}$$

$$\sup_{x_1, x_2 \in \overline{B(r)}} \|\Pi_\infty(DT(\bar{\mathbf{c}} + x_1)x_2)\| \le Z_\infty(r) r \tag{22}$$

然后，我们可以将半径多项式定义为

$$p_M(r) := Z_M(r) r - \omega r + Y_M \quad , \quad p_\infty(r) \quad := Z_\infty(r) r - (1-\omega) r + Y_\infty \tag{23}$$

定理3.1。 考虑式 (23)中定义的半径多项式。如果存在一个 $r_0 > 0$ 使得 $p_M(r_0) < 0$且 $p_\infty(r_0) < 0$，那么存在唯一的 $\tilde{\mathbf{c}} \in B_\omega(\bar{\mathbf{c}}\ r_0)$使得 $T(\tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{\mathbf{c}}$。

证明。 根据巴拿赫不动点定理，我们只需证明 $T\left(B_\omega(\bar{\mathbf{c}}\ r_0)\right) \subseteq B_\omega(\bar{\mathbf{c}}\ r_0)$，并证明当限制在 ~~$B_\omega(\bar{\mathbf{c}}\ r_0)$~~ 上时， T 是压缩映射。

我们首先证明，将 T 限制在 $B_\omega(\bar{\mathbf{c}}\ r_0)$ 上时，它是压缩映射。若 $y_1,\ y_2 \in B_\omega(\bar{\mathbf{c}}\ r_0)$，则根据中值定理

$$\|T(y_1) - T(y_2)\|_{\ell^2} \le \sup_{x \in \overline{B_\omega(\bar{\mathbf{c}}, r_0)}} \|DT(x)\| \|y_1 - y_2\|_{\ell^2} = \sup_{x_1 \in \overline{B(r_0)}} \|DT(\bar{\mathbf{c}} + x_1)\| \|y_1 - y_2\|_{\ell^2}$$

因此，我们必须证明，对于 $x_1 \in B(r_0)$， $\|DT(\bar{\mathbf{c}} + x_1)\| < 1$。注意到

$$\begin{aligned}
\sup_{x_1 \in \overline{B(r_0)}} \|DT(\bar{\mathbf{c}} + x_1)\| &= \frac{1}{r_0} \sup_{x_1, x_2 \in \overline{B(r_0)}} \|DT(\bar{\mathbf{c}} + x_1)x_2\|_{\ell^2} \\
&\le \frac{1}{r_0} \left(\sup_{x_1, x_2 \in \overline{B(r_0)}} \|\Pi_M DT(\bar{\mathbf{c}} + x_1)x_2\|_{\ell^2} + \sup_{x_1, x_2 \in \overline{B(r_0)}} \|\Pi_\infty DT(\bar{\mathbf{c}} + x_1)x_2\|_{\ell^2} \right) \\
&\le Z_M(r_0) + Z_\infty(r_0)
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\|T(y_1) - T(y_2)\|_{\ell^2} \le (Z_M(r_0) + Z_\infty(r_0)) \|y_1 - y_2\|_{\ell^2}$$

但由于 $p_M(r_0) < 0$ 和 $p_\infty(r_0) < 0$,

$$\begin{aligned} Z_M(r_0)r_0 + Z_\infty(r_0)r_0 - r_0 &\le (Z_M(r_0)r_0 - \omega r_0 + Y_M) + (Z_\infty(r_0)r_0 - (1-\omega)r_0 + Y_\infty) \\ &= p_M(r_0) + p_\infty(r_0) < 0 \end{aligned}$$

因此 $Z_M(r_0) + Z_\infty(r_0) < 1$，且将 T 限制在 $B_\omega(\bar{\mathbf{c}}, r_0)$ 上是一个压缩映射。

现在我们必须证明 $T\left(B_\omega(\bar{\mathbf{c}}, r_0)\right) \subseteq B_\omega(\bar{\mathbf{c}}, r_0)$。若 $y \in B_\omega(\bar{\mathbf{c}}, r_0)$，则

$$\begin{aligned} \|\Pi_M(T(y) - \bar{\mathbf{c}})\|_{\ell^2} &\le \|\Pi_M(T(y) - T(\bar{\mathbf{c}}))\|_{\ell^2} + \|\Pi_M(T(\bar{\mathbf{c}}) - \bar{\mathbf{c}})\|_{\ell^2} \\ &\le Z_M(r_0)\|y - \bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2} + Y_M \le Z_M(r_0)r_0 + Y_M < \omega r_0 \end{aligned}$$

对于 $\Pi_\infty(T(y) - \bar{\mathbf{c}})$，类似地可得

$$\begin{aligned} \|\Pi_\infty(T(y) - \bar{\mathbf{c}})\|_{\ell^2} &\le \|\Pi_\infty(T(y) - T(\bar{\mathbf{c}}))\|_{\ell^2} + \|\Pi_\infty(T(\bar{\mathbf{c}}) - \bar{\mathbf{c}})\|_{\ell^2} \\ &\le Z_\infty(r_0)\|y - \bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2} + Y_\infty \le Z_\infty(r_0)r_0 + Y_\infty < (1-\omega)r_0 \end{aligned}$$

因此 $T(y) \in B_\omega(\bar{\mathbf{c}}, r_0)$。 □

因此，若半径多项式方法成功找到一个 r_0，那么数值方法得到的解 $\bar{\mathbf{c}}$ 与真解 $\tilde{\mathbf{c}}$ 的小波系数在 $\ell^2(\mathbb{R})$ 意义下“接近”，也就是说，$\|\bar{\mathbf{c}} - \tilde{\mathbf{c}}\|_{\ell^2} \le r_0$。或者等价地，数值近似 $\bar{u}(t) = \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{h}(t)$ 与真解 $\tilde{u}(t)$ 在 $L^2([0,1])$ 意义下“接近”，也就是说，$\|\bar{u} - \tilde{u}\|_{L^2} \le r_0$。

4 非线性项

本节将更加深入地研究二次非线性项。这一限制看似严格，但有许多涉及这些非线性项的有趣系统，例如洛伦兹系统。此外，我们认为，可以使用类似的技术计算更高阶非线性项的估计。

考虑两个函数 u 和 v，使得 $\dot{u}$，$\dot{v} \in L^2([0,1])$。它们按照（13）展开为 Haar小波积分

$$u(t) = u_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i w_i(t) = u_0 + \mathbf{w}^T(t)\mathbf{c}\ ,\ v(t) = v_0 + \sum_{i=1}^{\infty} d_i w_i(t) = v_0 + \mathbf{w}^T(t)\mathbf{d}$$

因此，考虑乘积 $u(t)v(t)$，我们有

$$u(t)v(t) = u_0v_0 + u_0\mathbf{w}^T(t)\mathbf{d} + v_0\mathbf{w}^T(t)\mathbf{c} + (W(t))(\mathbf{c},\mathbf{d})$$

其中，对于 $t \in [0,1]$，$(W(t))(\mathbf{c},\mathbf{d}) := \mathbf{c}^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{d}$。一个关键观察是，对于任意给定的$t \in [0,1]$，$W(t)$ 是一个对称双线性形式。

下一个定理表明，$W(t) \in L^2([0,1])$ 对于任意一对$\mathbf{c},\mathbf{d} \in \ell^2(\mathbb{R})$，这使我们能够计算其哈尔变换，并使用第3节中 वकिसति的半径多项式方法。然而，为了清晰起见，其证明较为冗长，将留给A 。

定理 4.1. 双线性型 $(W(\mathbf{c},\mathbf{d}))(t) := \mathbf{c}^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(t)\mathbf{d}$ 在 $L^2([0,1])$ 中有界，对所有$\mathbf{c},\mathbf{d} \in \ell^2(\mathbb{R})$均成立，也就是说，存在 $C > 0$ 使得

$$\|W(\mathbf{c},\mathbf{d})\|_{L^2} \le C\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}\|\mathbf{d}\|_{\ell^2} \ \textit{for all}\ \mathbf{c},\mathbf{d} \in \ell^2(\mathbb{R}).$$

此外，令$\mathbf{a} := P^T\mathbf{c}$和$\mathbf{b} := P^T\mathbf{d}$，我们可以写成

$$\mathbf{c}^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(t)\mathbf{d} = \mathbf{a}^T\Omega(t)\mathbf{b} + \mathbf{a}^T\Omega^T(t)\mathbf{b} + \mathbf{a}^T\Theta(t)\mathbf{b} \tag{24}$$

其中，算子$\Omega(t)$ 可以递归定义为

$$\Omega_1(t) = 0 \quad , \quad \Omega_{2m}(t) = \begin{bmatrix} \Omega_m(t) & \Upsilon_m(t) \\ 0_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \tag{25}$$

其中 $\Upsilon_m(t)$ 是一个按元素定义的 $m \times m$ 矩阵，定义如下

$$(\Upsilon_m)_{i,l}(t) = (H_m)_{i,l}\psi_{m+l}(t),$$

而算子 $\Theta(t)$ 可表示为如下的无限对角矩阵

$$\Theta(t) = \begin{bmatrix} \psi_1^2(t) & & & \\ & \psi_2^2(t) & & \\ & & \psi_3^2(t) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{26}$$

为清晰起见，省略了零元素。以上述方式定义各项后，

$$\mathcal{H}(\mathbf{c}^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(t)\mathbf{d}) = \mathcal{H}(\mathbf{a}^T\Omega(t)\mathbf{b}) + \mathcal{H}(\mathbf{a}^T\Omega(t)\mathbf{b}) + \mathcal{H}(\mathbf{a}^T\Omega(t)\mathbf{b})$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{a}^T\Omega(t)\mathbf{b}) &= (\tilde{\Omega}^T\mathbf{a}) \odot \mathbf{b} \\ \mathcal{H}(\mathbf{a}^T\Omega^T(t)\mathbf{b}) &= (\tilde{\Omega}^T\mathbf{b}) \odot \mathbf{a} \\ \mathcal{H}(\mathbf{a}^T\Theta(t)\mathbf{b}) &= \Gamma^T(\mathbf{a} \odot \mathbf{b}) \end{aligned} \tag{27}$$

其中 $\tilde{\Omega}^T$ 和 $\tilde{\Gamma}^T$ 按如下方式递归定义

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1 = 0 \quad , \quad \tilde{\Omega}_{2m} &= \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_m & H_m \\ 0_m & 0_m \end{bmatrix} \\ \Gamma_1 = 1 \quad , \quad \Gamma_{2m} &= \begin{bmatrix} \Gamma_m & 0_m \\ H_m^T & 0_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad , \; for\ m = 2^j \ and\ j = 0, 1, 2, 3, ...$$

下面给出半径多项式方法所需的一些估计。这些估计的完整证明篇幅较长，因此省略B。主要思路是利用定理 2.1 和 4.1 中的矩阵递归块结构，以及式（17）中的有限-无限分解。这些估计可提供更紧的界，从而提高找到满足定理 r_0 的3.1的解的可能性。我们认为，类似的估计也可用于更高次数的多项式非线性项。

命题 4.1. 给定 $\bar{\mathbf{c}}\ \bar{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^M$, $M = 2^{J+1}$ 其中 $J \geq 0$为某个值，且 $\bar{\mathbf{a}} = P^T\bar{\mathbf{c}}$、 $\bar{\mathbf{b}} = P^T\bar{\mathbf{d}}$, 以下估计成立：

i) $\Pi_M P^T\bar{\mathbf{c}} = P_M^T\bar{\mathbf{c}}$ *ii)* $\Pi_M\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)\bar{\mathbf{b}}) = (\tilde{\Omega}_M^T P_M^T\bar{\mathbf{c}}) \odot (P_M^T\bar{\mathbf{d}})$

iii) $\Pi_M\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Theta(t)\bar{\mathbf{b}}) = \Gamma_M^T(\bar{\mathbf{a}}_M \odot \bar{\mathbf{b}}_M) + \Gamma_{\infty,M}^T(\bar{\mathbf{a}}_\infty \odot \bar{\mathbf{b}}_\infty)$；此外，

$$\left\|\Gamma_\infty^T(\bar{\mathbf{a}}_\infty \odot \bar{\mathbf{b}}_\infty)\right\|_{\ell^2} \leq \frac{\sqrt{2}\,\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}\|\bar{\mathbf{d}}\|_{\ell^2}}{(4-\sqrt{2})\,2^{\frac{3J}{2}+3}}.$$

命题 4.2. 给定 $\bar{\mathbf{c}}\ \bar{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^M$, $M = 2^{J+1}$ 对于某个 $J \geq 0$，且 $\bar{\mathbf{a}} = P^T\bar{\mathbf{c}}$, $\bar{\mathbf{b}} = P^T\bar{\mathbf{d}}$，以下估计成立：

i) $\left\|\Pi_\infty P^T \bar{\mathbf{c}}\right\|_{\ell^2} \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \dfrac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}}{2^{J+2}}$

ii) $\left\|\Pi_\infty \mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T \Omega(t) \bar{\mathbf{b}})\right\|_{\ell^2} \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \dfrac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2} \left\|\bar{\mathbf{d}}\right\|_{\ell^2}}{2^{2J+4}}$

iii) $\left\|\Pi_\infty \mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T \Theta(t) \bar{\mathbf{b}})\right\|_{\ell^2} \le \dfrac{1}{21\sqrt{7}} \dfrac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2} \left\|\bar{\mathbf{d}}\right\|_{\ell^2}}{2^{3J+6}}.$

命题 4.3. 给定 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2(\mathbb{R})$ 和 $\bar{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^M$,

i) $\left\|(P_{\infty,M}^T \mathbf{y}_\infty)\right\|_{\ell^2} \le \dfrac{\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{J+2}}$

ii) $\left\| \left(\tilde{\Omega}^T P^T\right)_{M,\infty} \mathbf{y}_\infty \right\|_{\ell^2} \le \left(1+\sqrt{2}\right) \dfrac{\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{J+3}{2}}}$

iii) $\left\|\Gamma_{\infty,M}^T (\bar{\mathbf{a}}_\infty \odot \Pi_\infty P^T \mathbf{y})\right\|_{\ell^2} \le \dfrac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} \dfrac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2} \|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3J}{2}+3}}$

iv) $\left\|A_M \Pi_M \mathcal{H}(\mathbf{x}^T P\, \Omega(t) P^T \mathbf{y})\right\|_{\ell^2} \le K_1 \|\mathbf{x}\|_{\ell^2} \|\mathbf{y}\|_{\ell^2}$

v) $\left\|A_M \Pi_M \mathcal{H}(\mathbf{x}^T P \Theta(t) P^T \mathbf{y})\right\|_{\ell^2} \le K_2 \|\mathbf{x}\|_{\ell^2} \|\mathbf{y}\|_{\ell^2}$

其中

$$K_1 = \left\|A_M \operatorname{diag}\left(\|(P_M^T)_{i,*}\|_{\ell^2}\right) \tilde{\Omega}_M^T P_M^T\right\| + \frac{\|A_M \tilde{\Omega}_M^T P_M^T\|}{2^{J+2}} + \frac{(1+\sqrt{2})\|A_M P_M^T\|}{2^{\frac{J+3}{2}}} + \frac{(1+\sqrt{2})\|A_M\|}{2^{\frac{3J+7}{2}}}$$

$$K_2 = \left\|A_M \Gamma_M^T \operatorname{diag}(\|(P_M^T)_{i,*}\|_\ell^2) P_M^T\right\| + \frac{\left\|A_M \Gamma_M^T P_M^T\right\|}{2^{J+1}} + \frac{\left\|A_M \Gamma_M^T\right\|}{2^{2J+4}} + \frac{\sqrt{2}\|A_M\|}{(4-\sqrt{2})2^{\frac{3J}{2}+4}}$$

命题 4.4。 给定$\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \ell^2(\mathbb{R})$ 和 $\bar{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^M$，以下估计成立：

i) $\left\|\Pi_\infty \mathcal{H}(\bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{w}(t) \mathbf{w}^T(t) \mathbf{y})\right\|_{\ell^2} \le D_1 \dfrac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2} \|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3J}{2}}} \quad , \quad D_1 = \dfrac{1}{8\sqrt{7}} \left(3 + \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{4}{4-\sqrt{2}}\right);$

ii) $\left\|\Pi_\infty \mathcal{H}(\mathbf{x}^T \mathbf{w}(t) \mathbf{w}^T(t) \mathbf{y})\right\|_{\ell^2} \le D_2 \dfrac{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2} \|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3J}{2}+2}} \quad , \quad D_2 = \dfrac{8+6\sqrt{2}}{\sqrt{7}\left(4-\sqrt{2}\right)}.$

5 示例

本节通过三个示例说明我们的方法的实现：逻辑斯蒂方程、具有不连续强迫项的逻辑斯蒂方程，以及洛伦兹系统。该方法使用 MATLAB R2021b 和用于区间算术的 INTLAB 软件包实现 [23]。这些示例的文件可在 https://github.com/gknakassima/RigComp-HaarWavelet 获取。

5.1 逻辑斯蒂方程

作为第一个简单示例，我们来考察逻辑斯蒂方程

$$\dot{u} = \lambda u(1-u) \quad , \quad u(0) = u_0 \tag{28}$$

由于它具有多项式非线性，且其解析解为 $u(t) = \frac{u_0 e^{\lambda t}}{1-u_0+u_0 e^{\lambda t}}$。利用式（13）中的展开式，可得与式（28）等价的函数方程：

$$\mathbf{c}^T \mathbf{h}(t) - \lambda \left(\mathbf{c}^T \mathbf{w}(t) + u_0 - u_0^2 - 2u_0 \mathbf{c}^T \mathbf{w}(t) - (W(t))(\mathbf{c}, \mathbf{c})\right) = 0. \tag{29}$$

5.1.1 获取数值近似

为了获得解的有限维近似 $\bar{\mathbf{c}}$，我们首先考虑矩阵方程的截断形式。给定分辨率级别 $J > 0$ 并令 $M = 2^{J+1}$，将投影 Π_M 应用于式（29）中的所有序列，得到

$$\mathbf{c}_M^T \mathbf{h}_M(t) - \lambda \left(\mathbf{c}_M^T \mathbf{w}_M(t) + u_0 - u_0^2 - 2u_0 \mathbf{c}_M^T \mathbf{w}_M(t) - (W_M(t))(\mathbf{c}_M, \mathbf{c}_M) \right) = 0$$

其中，对于 $\mathbf{a}_M$，$\mathbf{b}_M \in \mathbb{R}^M$，$(W_M(t))(\mathbf{a}_M, \mathbf{b}_M) := \mathbf{a}_M^T \mathbf{w}_M(t) \mathbf{w}_M^T(t) \mathbf{b}_M$。由于该方程对所有 $t \in [0,1]$ 均成立，我们在时刻 $t_l = \frac{l-0.5}{2^J}$ 对其进行采样，其中 $l = 1, ..., M$。回想一下，

$$H_M = [\mathbf{h}_M(t_1), \mathbf{h}_M(t_2), ..., \mathbf{h}_M(t_l), ..., \mathbf{h}_M(t_{2^{J+1}})],$$

我们可以将时间采样整理成矩阵形式：

$$\mathbf{c}_M^T H_M + \lambda(2u_0 - 1)\mathbf{c}_M^T P_M H_M + \lambda(u_0^2 - u_0)\mathbf{e}^T + \lambda(\mathbf{W}_M(\mathbf{c}_M, \mathbf{c}_M))^T = 0$$

其中，$\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{W}_M(\mathbf{c}_M, \mathbf{c}_M)$ 是给定的 $M \times 1$ 维向量，定义如下：

$$\mathbf{e} := (1, 1, ..., 1)^T \quad , \quad \left(\mathbf{W}_M(\mathbf{c}_M, \mathbf{c}_M)\right)_i := (W_M(t_i))(\mathbf{c}_M, \mathbf{c}_M).$$

通过转置该系统并乘以 $(H_M^T)^{-1} = \frac{1}{M} H_M$，我们最终得到需要数值求解的方程：

$$\mathbf{c}_M + \lambda(2u_0 - 1)P_M^T \mathbf{c}_M + \frac{\lambda(u_0^2 - u_0)}{M} H_M \mathbf{e} + \frac{\lambda}{M} H_M \mathbf{W}_M(\mathbf{c}_M, \mathbf{c}_M) = 0. \tag{30}$$

由于这是一个非线性方程，我们使用牛顿法。定义 $F_M : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ a s

$$F_M(\mathbf{c}_M) := \mathbf{c}_M + \lambda(2u_0 - 1)P_M^T \mathbf{c}_M + \frac{\lambda(u_0^2 - u_0)}{M} H_M \mathbf{e} + \frac{\lambda}{M} H_M \mathbf{W}_M(\mathbf{c}_M, \mathbf{c}_M) \tag{31}$$

因此，我们通过迭代计算来应用牛顿法

$$\mathbf{c}_M^{p+1} = \mathbf{c}_M^p - A_M(\mathbf{c}_M^p) F_M(\mathbf{c}_M^p) \tag{32}$$

其中 $A_M(\mathbf{c}_M^p)$ 是 $\left(DF_M(\mathbf{c}_M^p)\right.$ 的数值近似$\left.\right)^{-1}$，而 $\mathbf{c}_M^p$ 是第p次迭代的结果。

5.1.2 半径多项式的估计

这里，我们给出定理 3.1 的界。用于不动点定理的映射 T 和 DT 分别由 (15) 和 (16) 给出。对于此例，映射 F： $\ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$ 定义为

$$F(\mathbf{x}) := \lambda(u_0^2 - u_0)e_1 + \mathbf{x} + \lambda(2u_0 - 1)P^T \mathbf{x} + \lambda \mathcal{H}\left(\mathbf{x}^T \mathbf{w}(t) \mathbf{w}^T(t) \mathbf{x}\right). \tag{33}$$

其导数 $DF(\mathbf{x})$ 作用于 $\mathbf{y} \in \ell^2(\mathbb{R})$ 后为

$$(DF(\mathbf{x}))\mathbf{y} = \mathbf{y} + \lambda(2u_0 - 1)P^T \mathbf{y} + 2\lambda \mathcal{H}(\mathbf{x}^T \mathbf{w}(t) \mathbf{w}^T(t) \mathbf{y}). \tag{34}$$

其中最后一个等号来自双线性型的对称性。

在继续之前，值得先概述一下估计的一般策略。我们根据式（17）中的有限-无限分解，将算子矩阵分开。然后，将所有有限维部分汇总起来，交由计算机计算，而无限部分则使用第4节中的解析估计。

- Y_M: Using the decomposition of $\lambda \mathcal{H}\left(\bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{w}(t) \mathbf{w}^T(t) \bar{\mathbf{c}}\right)$ and Proposition 4.1,

$$\begin{aligned}\Pi_M(T(\bar{\mathbf{c}})-\bar{\mathbf{c}}) &= -A_M\Pi_M\mathcal{H}F(\bar{\mathbf{c}})\\ &= -A_M\Big[\lambda(u_0^2-u_0)\mathbf{e}+\bar{\mathbf{c}}+\lambda(2u_0-1)P_M^T\bar{\mathbf{c}}+2\lambda\big((\tilde{\Omega}_M^TP_M^T\bar{\mathbf{c}})\odot(P_M^T\bar{\mathbf{c}})\big)\\ &\qquad +\lambda\Gamma_M^T(\bar{\mathbf{a}}_M\odot\bar{\mathbf{a}}_M)\Big]-\lambda A_M\Pi_M\Gamma_{\infty,M}^T(\bar{\mathbf{a}}_\infty\odot\bar{\mathbf{a}}_\infty),\end{aligned}$$

其中 $\bar{}$一个 $=P^T\bar{}\mathbf{c}$。注意，方括号中的项可以通过计算求得。对最后一项使用命题 4.1 （iii）中的界，我们可以将 Y_M 定义为

$$\begin{aligned}Y_M := &\left\|A_M\Big[\lambda(u_0^2-u_0)\mathbf{e}+\bar{\mathbf{c}}+\lambda(2u_0-1)P_M^T\bar{\mathbf{c}}+2\lambda\big((\tilde{\Omega}_M^TP_M^T\bar{\mathbf{c}})\odot(P_M^T\bar{\mathbf{c}})\big)+\lambda\Gamma_M^T(\bar{\mathbf{a}}_M\odot\bar{\mathbf{a}}_M)\Big]\right\|_{\ell^2}\\ &+\frac{|\lambda|\|A_M\|\sqrt{2}}{\left(4-\sqrt{2}\right)2^{\frac{3J}{2}+3}}\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}^2\end{aligned} \tag{35}$$

- Y_∞：注意到

$$\Pi_\infty(T(\bar{\mathbf{c}})-\bar{\mathbf{c}})=\Pi_\infty\left(\lambda(2u_0-1)P^T\bar{\mathbf{c}}+\lambda\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{a}}^T\Omega^T(t)\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{a}}^T\Theta(t)\bar{\mathbf{a}}\right).$$

利用命题中的估计4.2，我们可以使 Y_∞ 成为

$$Y_\infty := \frac{|\lambda(2u_0-1)|}{\sqrt{3}}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}}{2^{J+2}}+\frac{|\lambda|}{\sqrt{3}}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}^2}{2^{2J+3}}+\frac{|\lambda|}{21\sqrt{7}}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}^2}{2^{3J+6}}. \tag{36}$$

- Z_M：利用有限-无限分解以及 $\bar{}\mathbf{c}\in\mathbb{R}^M$ 的事实，

$$\begin{aligned}\Pi_M(DT(\bar{\mathbf{c}}+\mathbf{x}))\mathbf{y} = &\left(I_M-A_MB_1\right)\mathbf{y}_M-A_MB_2P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty-2\lambda A_M\mathrm{diag}(P_M^T\bar{\mathbf{c}})\left(\tilde{\Omega}^TP^T\right)_{M,\infty}\mathbf{y}_\infty\\ &-2\lambda A_M\Gamma_{\infty,M}^T\Pi_\infty\left(P^T\bar{\mathbf{c}}\odot P^T\mathbf{y}\right)-2\lambda A_M\Pi_M\mathcal{H}(\mathbf{x}^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{y})\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}B_1 := &I_M+\lambda(2u_0-1)P_M^T+2\lambda\mathrm{diag}\left(\bar{\mathbf{c}}^TP_M\tilde{\Omega}_M\right)P_M^T\\ &+2\lambda\mathrm{diag}(P_M^T\bar{\mathbf{c}})\tilde{\Omega}_M^TP_M^T+2\lambda\Gamma_M^T\mathrm{diag}\left(P_M^T\bar{\mathbf{c}}\right)P_M^T\\ B_2 := &\lambda(2u_0-1)I_M+2\lambda\mathrm{diag}\left(\bar{\mathbf{c}}^TP_M\tilde{\Omega}_M\right)+2\lambda\mathrm{diag}(P_M^T\bar{\mathbf{c}})+2\lambda\Gamma_M^T\mathrm{diag}\left(P_M^T\bar{\mathbf{c}}\right)\end{aligned}$$

且 I_M 是 $M\times M$ 单位矩阵。虽然 B_1 和 B_2 的表达式看起来复杂，但所有项都是有限维的，因此可以通过计算求得它们的范数。因此，使用命题4.3 中的估计以及 DT 的表达式来界定那些无法轻易通过计算估计的项，

$$\|\Pi_M(DT(\bar{\mathbf{c}}+\mathbf{x}))\mathbf{y}\|_{\ell^2}\le\left(C_1+C_2\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}\right)\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}$$

其中

$$\begin{aligned}C_1 := &\|I_M-A_MB_1\|+\frac{\|A_MB_2\|}{2^{J+2}}+\frac{(1+\sqrt{2})\left\|\lambda A_M\mathrm{diag}(P_M^T\bar{\mathbf{c}})\right\|}{2^{\frac{J+1}{2}}}+\frac{\sqrt{2}\|\lambda A_M\|\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}}{\left(4-\sqrt{2}\right)2^{\frac{3J}{2}+2}}\\ C_2 := &2|\lambda|\left(2K_1+K_2\right)\end{aligned}$$

且 K_1 且 K_2 与命题4.3中的定义相同。因此，我们可以将 $Z_M(r)$ 写成

$$Z_M(r) := C_1+C_2r \tag{37}$$

- Z_∞：我们有

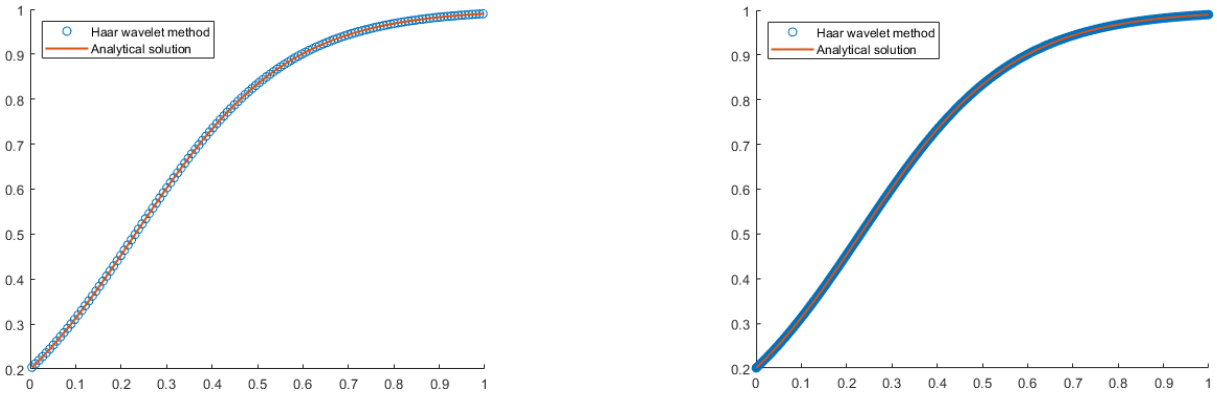
$\Pi_\infty(DT(\bar{\mathbf{c}} + \mathbf{x}))\mathbf{y} = \lambda(2u_0 - 1)\Pi_\infty P^T\mathbf{y} + 2\lambda\Pi_\infty\mathcal{H}(\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{y}) + 2\lambda\Pi_\infty\mathcal{H}(\mathbf{x}^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{y})$ 所有项都是无限维的，需要进行解析估计。利用命题 4.4 和 2.2 中的估计，我们可以将 $Z_\infty(r)$ 表示为

$$Z_\infty(r) := \left(\frac{|\lambda(2u_0 - 1)|}{2^{J+1}\sqrt{3}} + \frac{|\lambda|D_1\,\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3J}{2}}}\right) + \frac{|\lambda|D_2}{2^{\frac{3J}{2}+2}}\,r \tag{38}$$

其中 D_1 和 D_2 如命题 4.4所示。

5.1.3 结果

图 1 展示了 $J = 6$ 和 $J = 10$ 使用 $\lambda = 6$ 和 $u_0 = 0.2$ 得到的数值解，并将其与真实解进行了比较。对于这两种情况，数值解在视觉上都与真实解一致。



(a) $J = 6$　　(b) $J = 10$

图 1：逻辑斯蒂方程的数值解与真实解。

图 2 展示了随着 r_0 增加而得到的半径 J，对应不同的 ω。显然，随着 J增加，半径 r_0 会减小；这是因为计算了更多项，且计算得更加精确，而不只是用解析估计给出界限。较小的 ω 会得到更紧的半径；不过，如果 ω 过小，该方法就无法奏效，因为在$B_\omega(\bar{\mathbf{c}}\ r)$内将不存在真正的解。~~图3a 展示了~~ ω 优化至两位有效数字时得到的半径。

最后，图3b展示了半径和计算时间。随着 J 增加，预计计算时间也会增加；然而，图3b显示，超过某个点后，计算时间的增长速度会快于 r_0 的减小速度。这是预料之中的，因为每当 J增加时，矩阵的规模就会扩大四倍，因此必须在所需精度和计算时间之间仔细权衡。

5.2 含有不连续强迫项的 Logistic 方程

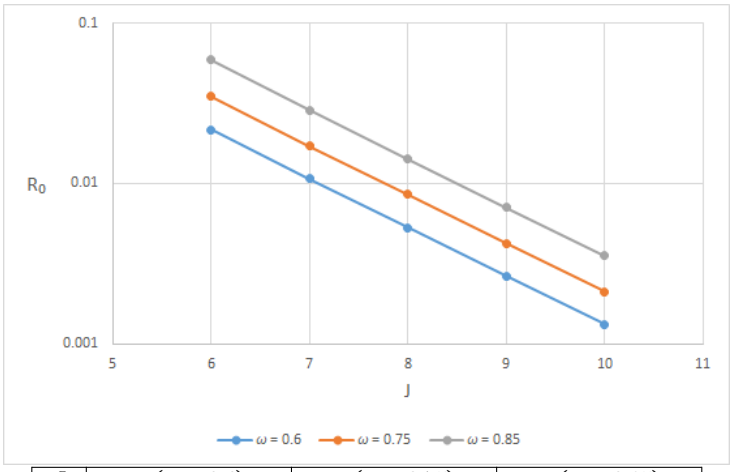
下一个例子仍然是逻辑斯蒂方程，但带有一个不连续的强迫项　　m

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \lambda u(1-u) + g(t) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \quad , \quad g(t) = \begin{cases} 1 & , \text{if } t \le \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{if } t > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{39}$$

虽然这是一个可以显式求解的 Riccati 方程，但从方程本身可以看出，解不应是光滑的，因为 g 是不连续的。尽管如此，我们仍然可以在 L^2 意义下求得一个验证半径。

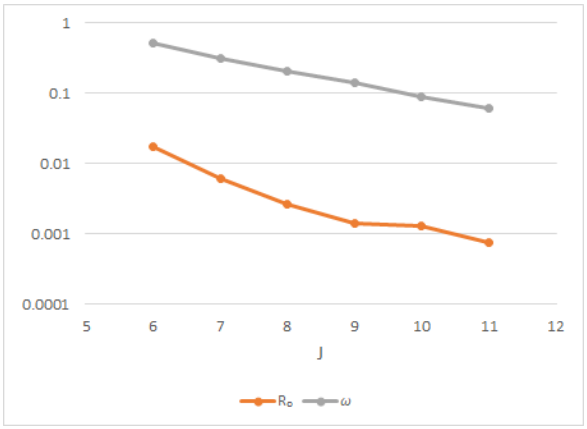
此情形下的函数方程与（28）类似；令 $\mathbf{g} = \mathcal{H}(g)$,

$$\mathbf{c}^T\mathbf{h}(t) - \lambda\left(\mathbf{c}^T\mathbf{w}(t) + u_0 - u_0^2 - 2u_0\mathbf{c}^T\mathbf{w}(t) - (W(t))(\mathbf{c},\mathbf{c})\right) - \mathbf{g}^T\mathbf{h}(t) = 0. \tag{40}$$

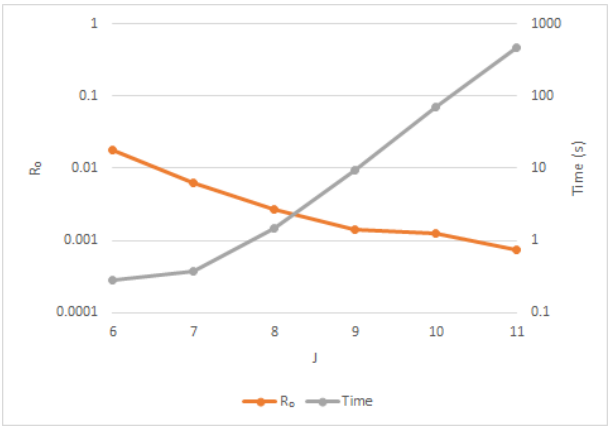


J	r_0 ($\omega = 0.6$)	r_0 ($\omega = 0.75$)	r_0 ($\omega = 0.85$)
6	2.1677704×10^{-2}	3.4976922×10^{-2}	5.9222878×10^{-2}
7	1.0690405×10^{-2}	1.7163569×10^{-2}	2.8785441×10^{-2}
8	5.3120948×10^{-3}	8.5120420×10^{-3}	1.4224769×10^{-2}
9	2.6483940×10^{-3}	4.2402808×10^{-3}	7.0756199×10^{-3}
10	1.3223867×10^{-3}	2.1164777×10^{-3}	3.5294192×10^{-3}

图2：不同 ω值下得到的半径 r_0



(a)



(b)

J	ω	r_0	Time
6	0.51	1.7651807×10^{-2}	0.283
7	0.31	6.1826325×10^{-3}	0.377
8	0.21	2.6863885×10^{-3}	1.499
9	0.14	1.4138969×10^{-3}	9.447
10	0.089	1.2789917×10^{-3}	70.958
11	0.060	7.4420035×10^{-4}	474.220

图3：(a) 对每个分辨率级别 J，采用更优化的 ω 得到的半径 r_0 。(b) r_0 与耗时的比较。

5.2.1 数值近似

应用与前一个例子相同的方法，我们得到用于求取数值有限维近似 $\bar{\mathbf{c}}$ 的方程，它与之前的情况类似：

$$\mathbf{c}_M + \lambda(2u_0 - 1)P_M^T\mathbf{c}_M + \frac{\lambda(u_0^2 - u_0)}{M}H_M\mathbf{e} + \frac{\lambda}{M}H_M\mathbf{W}_M(\mathbf{c}_M, \mathbf{c}_M) - \frac{1}{M}H_M\mathbf{g}_M = 0 \qquad (41)$$

其中 $\mathbf{g}_M := (g(t_1) \ \ldots, g(t_M))^T$。同样，由于这是一个非线性方程，我们将使用牛顿法。

5.2.2 半径多项式的估计

为了应用半径多项式方法，我们使用以下函数方程 $F:\ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$:

$$F(\mathbf{x}) := \lambda(u_0^2 - u_0)e_1 + \mathbf{x} + \lambda(2u_0 - 1)P^T\mathbf{x} + \lambda\mathcal{H}\left(\mathbf{x}^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{x}\right) - \mathcal{H}(g).$$

观察到 $g = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)$，因此 $\mathcal{H}(g) = \left(\frac{1}{2}, 12, \underline{0}, \underline{0}, \ldots\right)^T =: \mathbf{g}$；特别地，$\mathbf{g} \in \mathbb{R}^M$。因此，所使用的映射由下式给出。

$$F(\mathbf{x}) = \lambda(u_0^2 - u_0)e_1 + \mathbf{x} + \lambda(2u_0 - 1)P^T\mathbf{x} + \lambda\mathcal{H}\left(\mathbf{x}^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{x}\right) - \mathbf{g}. \tag{42}$$

半径多项式的映射 T和 DT(**x**分别与 (15) 和 (16) 相同。实际上，由于 **g** 不依赖于 **x**，导数 DF与 (34) 中非受迫逻辑方程的导数相同。

采用与之前相同的方法，我们得到半径多项式方法的以下界:

$$Y_M := C_0 + \frac{|\lambda|\|A_M\|\sqrt{2}}{\left(4-\sqrt{2}\right)2^{\frac{3J}{2}+3}}\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}^2 \tag{43}$$

$$Y_\infty := \frac{|\lambda(2u_0-1)|}{\sqrt{3}}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}}{2^{J+2}} + \frac{|\lambda|}{\sqrt{3}}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}^2}{2^{2J+3}} + \frac{|\lambda|}{21\sqrt{7}}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}^2}{2^{3J+6}} \tag{44}$$

$$Z_M(r) := C_1 + C_2 r \tag{45}$$

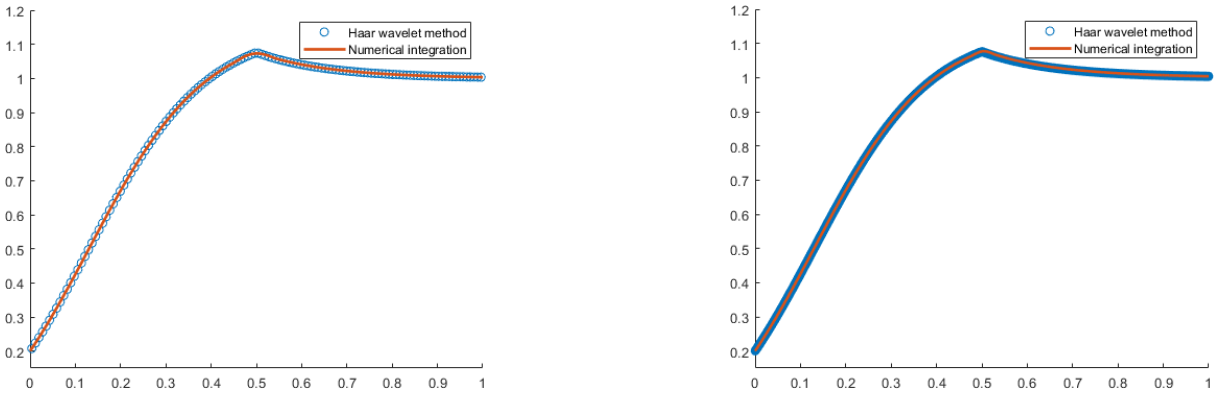
$$Z_\infty(r) := \left(\frac{|\lambda(2u_0-1)|}{2^{J+1}\sqrt{3}} + \frac{|\lambda|D_1\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3J}{2}}}\right) + \frac{|\lambda|D_2}{2^{\frac{3J}{2}+2}}\,r \tag{46}$$

其中，C_1、C_2、D_1 和 D_2 与非受迫逻辑方程的估计中相同，并且

$$C_0 = \Big\|A_M\Big[\lambda(u_0^2-u_0)\mathbf{e} + \bar{\mathbf{c}} + \lambda(2u_0-1)P_M^T\bar{\mathbf{c}} + 2\lambda\Big((\tilde{\Omega}_M^T P_M^T\bar{\mathbf{c}}) \odot (P_M^T\bar{\mathbf{c}})\Big) + \lambda\Gamma_M^T(\bar{\mathbf{a}}_M \odot \bar{\mathbf{a}}_M) - \mathbf{g}\Big]\Big\|_{\ell^2}.$$

5.2.3 结果

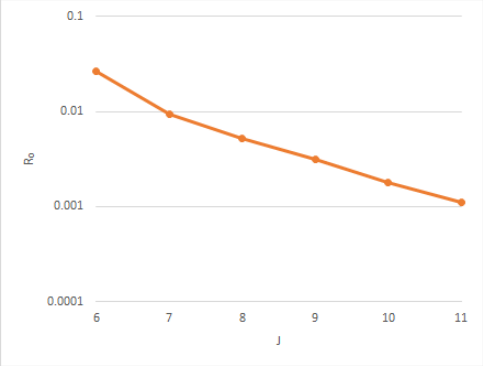
图 4 展示了使用哈尔小波方法所得结果与数值积分结果的对比，其中使用了 $\lambda = 6$ 和 $u_0 = 0.2$。数值积分使用的点数与哈尔小波方法相同，即 2^{J+1} 个点。可以看出，在 $t = 0.5$处，数值积分倾向于平滑图形，而我们的方法保留了原始形状。



(a) $J = 6$　　(b) $J = 10$

图4：含强迫项的逻辑斯蒂方程的数值解与真实解

图 5 展示了随着 J 增加，验证半径的变化情况。值得注意的是，解并不光滑；尽管如此，我们的方法得到了与非受迫逻辑方程相似的验证半径。



J	ω	r_0
6	0.53	2.6161420×10^{-2}
7	0.31	9.2508029×10^{-3}
8	0.20	5.1495598×10^{-3}
9	0.13	3.1382945×10^{-3}
10	0.086	1.7710909×10^{-3}
11	0.057	1.1107730×10^{-3}

图 5：受迫逻辑方程的验证半径

5.3 洛伦兹系统

洛伦兹系统定义如下：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{aligned} \tag{47}$$

其中，σ、ρ 和 β 为正参数，通常取为 $\sigma = 10$、$\beta = \frac{8}{3}$ 和 $\rho = 28$。这是一个经过深入研究的系统，取这些参数时，系统会表现出混沌行为，并具有一个奇异吸引子。

由于这是一个方程组，为了应用我们的方法，我们必须先给出一些定义。首先，定义空间 $X_s := \ell^2(\mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{R})$和 $X_f := L^2([0,1]) \times L^2([0,1]) \times L^2([0,1])$，并在其上赋予范数

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)\|_{X_s} &:= \max\{\|\mathbf{c}_1\|_{\ell^2}, \|\mathbf{c}_2\|_{\ell^2}, \|\mathbf{c}_3\|_{\ell^2}\} \\ \|(f_1, f_2, f_3)\|_{X_f} &:= \max\{\|f_1\|_{L^2}, \|f_2\|_{L^2}, \|f_3\|_{L^2}\} \end{aligned} \tag{48}$$

在这些范数下，X_s 和 X_f 仍是巴拿赫空间；虽然它们不再是希尔伯特空间，但第3 节的方法仍然适用。此外，算子 $A\colon X_s \to X_s$ 可以用分块矩阵记法表示为

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}$$

其中 $A_{i,j}\colon \ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$，对于 $i, j = 1,2,3$。如果这些量有界，则 A 有界且

$$\|A\|_{B(X_s)} = \max_{1 \le i \le 3} \sum_{j=1}^{3} \|A_{i,j}\|_{B(\ell^2)}. \tag{49}$$

当 $A_{i,j} \in B(\mathbb{R}^M)$ 时，也将使用类似的记号。最后，我们稍微滥用一下记号，将 $\ell^2(\mathbb{R})$ 中的算子记号（如投影 Π_M 和 Π_∞）扩展到 X_s，并逐元素地应用它们：

$$\begin{aligned} \Pi_M(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) &:= (\Pi_M \mathbf{c}_1, \Pi_M \mathbf{c}_2, \Pi_M \mathbf{c}_3) \\ \Pi_\infty(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) &:= (\Pi_\infty \mathbf{c}_1, \Pi_\infty \mathbf{c}_2, \Pi_\infty \mathbf{c}_3). \end{aligned}$$

对 (29) 中各方程应用用于推导 (47) 的相同方法，可得函数方程

$$\begin{aligned}
&\mathbf{c}_x^T\mathbf{h}(t) - \sigma\mathbf{c}_y^T\mathbf{w}(t) + \sigma\mathbf{c}_x^T\mathbf{w}(t) - \sigma(y_0 - x_0) = 0\\
&\mathbf{c}_y^T\mathbf{h}(t) + x_0\mathbf{c}_z^T\mathbf{w}(t) - (\rho - z_0)\mathbf{c}_x^T\mathbf{w}(t) + \mathbf{c}_y^T\mathbf{w}(t) - (x_0(\rho - z_0) - y_0) + W(t)(\mathbf{c}_x, \mathbf{c}_z) = 0\\
&\mathbf{c}_z^T\mathbf{h}(t) - y_0\mathbf{c}_x^T\mathbf{w}(t) - x_0\mathbf{c}_y^T\mathbf{w}(t) + \beta\mathbf{c}_z^T\mathbf{w}(t) - (x_0y_0 - \beta z_0) - W(t)(\mathbf{c}_x, \mathbf{c}_y) = 0
\end{aligned} \tag{50}$$

其中 $\mathbf{c}_x = \mathcal{H}(\dot{x})$、$\mathbf{c}_y = \mathcal{H}(\dot{y})$ 和 $\mathbf{c}_z = \mathcal{H}(\dot{z})$。

5.3.1 数值近似

对 (30) 和 (41) 中的每个方程应用推导50) 时所用的相同方法，我们得到以下需要用牛顿法进行数值求解的系统:

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathbf{c}}_x - \frac{\sigma}{M}P_M^T\bar{\mathbf{c}}_y + \frac{\sigma}{M}P_M^T\bar{\mathbf{c}}_x - \frac{\sigma}{M}(y_0 - x_0)H_M\mathbf{e} = 0\\
&\bar{\mathbf{c}}_y + \frac{1}{M}H_M\mathbf{W}_M(\bar{\mathbf{c}}_x, \bar{\mathbf{c}}_z) + x_0P_M^T\bar{\mathbf{c}}_z - (\rho - z_0)P_M^T\bar{\mathbf{c}}_x + P_M^T\bar{\mathbf{c}}_y - \frac{1}{M}(x_0(\rho - z_0) - y_0)H_M\mathbf{e} = 0\\
&\bar{\mathbf{c}}_z - \frac{1}{M}H_M\mathbf{W}_M(\bar{\mathbf{c}}_x, \bar{\mathbf{c}}_y) - y_0P_M^T\bar{\mathbf{c}}_x - x_0P_M^T\bar{\mathbf{c}}_y + \beta P_M^T\bar{\mathbf{c}}_z - \frac{1}{M}(x_0y_0 - \beta z_0)H_M\mathbf{e} = 0
\end{aligned} \tag{51}$$

注 5.1。一个有趣的观点是 [12] 可以利用较低分辨率的结果作为较高分辨率级别下牛顿法的初始猜测，而不必一开始就使用高分辨率级别。对于洛伦兹系统，这可以减少收敛问题并缩短总体计算时间。

5.3.2 半径多项式的估计

对于洛伦兹系统，映射 T 和 DT 分别如 (15) 和 (16) 所示，其中 $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_x, \mathbf{c}_y, \mathbf{c}_z) \in X_s$。映射 $F: X_s \to X_s$ 定义为

$$F(\mathbf{c}) := \begin{pmatrix}
\mathbf{c}_x - \sigma P^T\mathbf{c}_y + \sigma P^T\mathbf{c}_x - \sigma(y_0 - x_0)\mathbf{e}_1\\
\mathbf{c}_y + \mathcal{H}\left(\mathbf{c}_x^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{c}_z\right) + x_0P^T\mathbf{c}_z - (\rho - z_0)P^T\mathbf{c}_x + P^T\mathbf{c}_y - (x_0(\rho - z_0) - y_0)\mathbf{e}_1\\
\mathbf{c}_z - \mathcal{H}\left(\mathbf{c}_x^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{c}_y\right) - y_0P^T\mathbf{c}_x - x_0P^T\mathbf{c}_y + \beta P^T\mathbf{c}_z - (x_0y_0 - \beta z_0)\mathbf{e}_1
\end{pmatrix}$$

以及对于 $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z) \in X_s$,

$$DF(\mathbf{c})\mathbf{v} := \begin{pmatrix}
\mathbf{v}_x - \sigma P^T\mathbf{v}_y + \sigma P^T\mathbf{v}_x\\
\mathbf{v}_y + \mathcal{H}\left(\mathbf{c}_x^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{v}_z\right) + \mathcal{H}\left(\mathbf{c}_z^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{v}_x\right)\\
\qquad + x_0P^T\mathbf{v}_z - (\rho - z_0)P^T\mathbf{v}_x + P^T\mathbf{v}_y\\
\mathbf{c}_z - \mathcal{H}\left(\mathbf{c}_x^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{v}_y\right) - \mathcal{H}\left(\mathbf{c}_y^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{v}_x\right)\\
\qquad - y_0P^T\mathbf{v}_x - x_0P^T\mathbf{v}_y + \beta P^T\mathbf{v}_z
\end{pmatrix}.$$

对于洛伦兹系统，半径多项式方法的估计如下。使用（48）和（49）中定义的范数，并对每个方程应用与前面相同的技术，我们得到以下界:

$$\begin{aligned}
Y_M &= \|A_MF_M(\bar{\mathbf{c}})\|_{X_s} + \frac{\|A_M\|_{B(X_s)}\|\bar{\mathbf{c}}_x\|_{\ell^2}}{(4-\sqrt{2})2^{\frac{3J+5}{2}}}\max\left\{\|\bar{\mathbf{c}}_y\|_{\ell^2}, \|\bar{\mathbf{c}}_z\|_{\ell^2}\right\}\\
Y_\infty &= \max\{Y_\infty^1, Y_\infty^2, Y_\infty^3\}\\
Z_M(r) &= \alpha_1 + \alpha_2 r\\
Z_\infty(r) &= \gamma_1 + \gamma_2 r
\end{aligned} \tag{52}$$

其中，上述常数为

$$
\begin{aligned}
Y_\infty^1 &:= \frac{|\sigma|}{\sqrt{3}} \frac{\|\bar{\mathbf{c}}_x - \bar{\mathbf{c}}_y\|_{\ell^2}}{2^{J+2}} \\
Y_\infty^2 &:= \frac{\|\bar{\mathbf{c}}_x\|_{\ell^2}\|\bar{\mathbf{c}}_z\|_{\ell^2}}{\sqrt{3}\ 2^{2J+5}} + \frac{\|\bar{\mathbf{c}}_x\|_{\ell^2}\|\bar{\mathbf{c}}_z\|_{\ell^2}}{(21\sqrt{7})\ 2^{3J+6}} + \frac{\|x_0\bar{\mathbf{c}}_z - (\rho - z_0)\bar{\mathbf{c}}_x + \bar{\mathbf{c}}_y\|_{\ell^2}}{\sqrt{3}\ 2^{J+2}} \\
Y_\infty^3 &:= \frac{\|\bar{\mathbf{c}}_x\|_{\ell^2}\|\bar{\mathbf{c}}_y\|_{\ell^2}}{2^{2J+5}\ \sqrt{3}} + \frac{\|\bar{\mathbf{c}}_x\|_{\ell^2}\|\bar{\mathbf{c}}_y\|_{\ell^2}}{(21\sqrt{7})\ 2^{3J+6}} + \frac{\|\beta\bar{\mathbf{c}}_z - y_0\bar{\mathbf{c}}_x - x_0\bar{\mathbf{c}}_y\|_{\ell^2}}{\sqrt{3}\ 2^{J+2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &:= \|I_M - A_M B_1\|_{B(X_s)} + \frac{\|A_M B_2\|_{B(X_s)}}{2^{J+2}} \\
&\quad + \frac{1+\sqrt{2}}{2^{\frac{J+3}{2}}} \|A_M B_2\|_{B(X_s)} + \frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} \left\| A_M^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ \|\bar{\mathbf{c}}_x\|_{\ell^2} + \|\bar{\mathbf{c}}_z\|_{\ell^2} \\ \|\bar{\mathbf{c}}_x\|_{\ell^2} + \|\bar{\mathbf{c}}_y\|_{\ell^2} \end{pmatrix} \right\|_{X_s} \\
\alpha_2 &:= \|4C + 2D\|_{B(X_s)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &:= \max\left\{ \frac{|\sigma|}{\sqrt{3}\ 2^{J+1}}\ ,\ \frac{D_1\left(\|\bar{\mathbf{c}}_z\|_{\ell^2} + \|\bar{\mathbf{c}}_x\|_{\ell^2}\right)}{2^{\frac{3J}{2}}} + \frac{1 + |\rho - z_0| + |x_0|}{\sqrt{3}\ 2^{J+2}}\ , \right. \\
&\qquad \left. \frac{D_1\left(\|\bar{\mathbf{c}}_z\|_{\ell^2} + \|\bar{\mathbf{c}}_x\|_{\ell^2}\right)}{2^{\frac{3J}{2}}} + \frac{\beta + |x_0| + |y_0|}{\sqrt{3}\ 2^{J+2}} \right\} \\
\gamma_2 &:= \frac{D_2}{2^{\frac{3J}{2}+1}}.
\end{aligned}
$$

用于计算这些常数的辅助量给定为

$$
A_M^\dagger := \begin{bmatrix} \|A_{M_{x,x}}\|_{B(\ell^2)} & \|A_{M_{x,y}}\|_{B(\ell^2)} & \|A_{M_{x,z}}\|_{B(\ell^2)} \\ \|A_{M_{y,x}}\|_{B(\ell^2)} & \|A_{M_{y,y}}\|_{B(\ell^2)} & \|A_{M_{y,z}}\|_{B(\ell^2)} \\ \|A_{M_{z,x}}\|_{B(\ell^2)} & \|A_{M_{z,y}}\|_{B(\ell^2)} & \|A_{M_{z,z}}\|_{B(\ell^2)} \end{bmatrix}
$$

$$
B_1 := \begin{bmatrix} I_M + \sigma P_M^T & -\sigma P_M^T & 0 \\ (B_M(\bar{\mathbf{c}}_z) - (\rho - z_0) I_M) P_M^T & I_M + P_M^T & (B_M(\bar{\mathbf{c}}_x) + x_0 I_M) P_M^T \\ (-B_M(\bar{\mathbf{c}}_y) - y_0 I_M) P_M^T & -(B_M(\bar{\mathbf{c}}_x) + x_0 I_M) P_M^T & I_M + P_M^T \end{bmatrix}
$$

$$
B_M(\bar{\mathbf{c}}_i) := \mathrm{diag}(\tilde{\Omega}_M^T P_M^T \bar{\mathbf{c}}_i) + \Gamma_M^T \mathrm{diag}(P_M^T \bar{\mathbf{c}}_i)
$$

$$
B_2 := \begin{bmatrix} \sigma I_M & -\sigma I_M & 0 \\ B_M(\bar{\mathbf{c}}_z) & I_M & B_M(\bar{\mathbf{c}}_x) \\ -B_M(\bar{\mathbf{c}}_y) & -B_M(\bar{\mathbf{c}}_x) & I_M \end{bmatrix}
$$

$$
C = \begin{bmatrix} 0 & C_{x,y} & C_{x,z} \\ 0 & C_{y,y} & C_{y,z} \\ 0 & C_{z,y} & C_{z,z} \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 0 & D_{x,y} & D_{x,z} \\ 0 & D_{y,y} & D_{y,z} \\ 0 & D_{z,y} & D_{z,z} \end{bmatrix}
$$

以及对于 $i,\ \ j \in \{x, y, z\}$

$$
\begin{aligned}
C_{i,j} &:= \|A_{M_{i,j}} \mathrm{diag}\left(\|(P_M^T)_{i,*}\|_{\ell^2}\right) \tilde{\Omega}_M^T P_M^T\| + \frac{\left\|A_{M_{i,j}} \tilde{\Omega}_M^T P_M^T\right\|}{2^{J+2}} \\
&\quad + \frac{(1+\sqrt{2})\left\|A_{M_{i,j}} P_M^T\right\|}{2^{\frac{J+3}{2}}} + \frac{(1+\sqrt{2})\left\|A_{M_{i,j}}\right\|}{2^{\frac{3J+7}{2}}} \\
D_{i,j} &:= \left\|A_{M_{i,j}} \Gamma_{M_{i,j}}^T \mathrm{diag}(\|(P_M^T)_{i,*}\|_\ell^2) P_M^T\right\| + \frac{\left\|A_{M_{i,j}} \Gamma_{M_{i,j}}^T P_M^T\right\|}{2^{J+1}} \\
&\quad + \frac{\left\|A_{M_{i,j}} \Gamma_{M_{i,j}}^T\right\|}{2^{2J+4}} + \frac{\sqrt{2}}{(4-\sqrt{2})} \frac{\|A_{M_{i,j}}\|}{2^{\frac{3J}{2}+4}}
\end{aligned}
$$

且 D_1 且 D_2 与命题4.4中的相同。

5.3.3 结果

图6 展示了使用哈尔小波方法得到的近似结果，其中采用了 $J = 10$ 以及数值积分（为清晰起见，图中仅显示哈尔小波方法得到的较少几个点）；对于后者，我们使用了 $M^2 = 2^{2J+2}$ 个点，以获得精确结果。从视觉上看，两种结果似乎吻合良好。

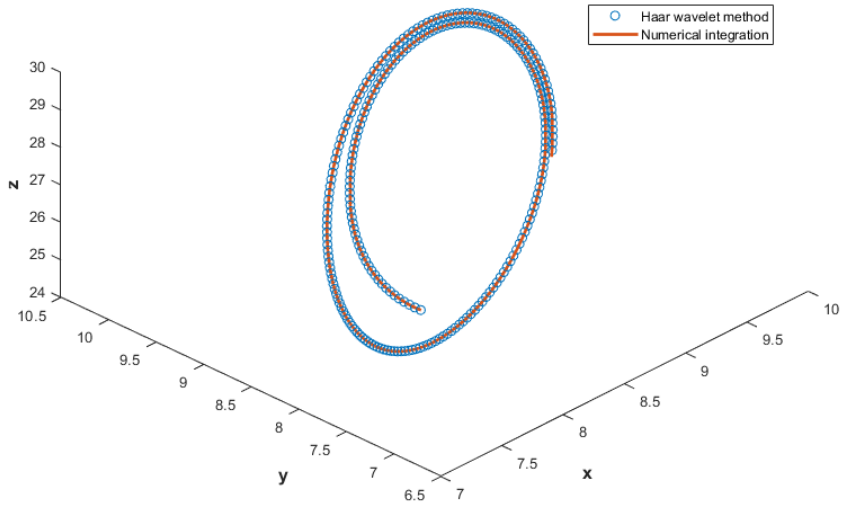


图 6：洛伦兹系统的结果

对于相同的分辨率级别，使用上述估计，通过半径多项式方法对数值结果进行了严格验证，得到一个 $r_0 = 3.9868504 \times 10^{-2}$ for$\omega = 0.45$ ，其中真解位于 X_s 内。

6 结论与未来工作

我们开发了一种基于哈尔小波方法的微分方程半径多项式方法，并将其应用于三个微分方程，以展示该方法的效果。与以往基于半径多项式方法的方法相比，我们的方法有一个优点：由于使用了 Haar小波，因此不要求解具有光滑性。

未来，我们计划推导高阶导数的估计。虽然高阶微分方程可以转换为一阶方程组，但这会增加矩阵的规模。因此，直接表示高阶导数的算子可能值得研究。尽管其中一些算子已用于常规数值方法，但我们仍需计算半径多项式方法所需的估计。

此外，我们仅给出了针对二次非线性项的半径多项式所需的估计，因为本文的主要目标是介绍这一通用方法，并说明如何计算估计以及应用该方法。未来，我们计划扩展这些估计，使其涵盖更高阶的多项式非线性项，因为这将大大拓展该方法的适用范围。

最后，我们认为，这种方法可以作为构建其他方法的基础，这些方法可采用类似的技术，例如延拓方法。

致谢

Guilherme K. Nakassima 的工作得到了巴西高等教育人员培训协调局（CAPES）—资助代码 001 的支撑。Marcio Gameiro 的工作部分得到了美国国家科学基金会的资助，资助编号为 DMS-1839294 和

HDR TRIPODS 资助 CCF-1934924、美国国防高级研究计划局合同 HR0011-16-2-0033、美国国立卫生研究院资助编号 R01 GM126555，以及 CNPq 资助编号 309073/2019-7。

附录

定理的证明4.1

这里给出定理4.1的完整证明。尽管证明过程较为冗长，但它不仅验证了允许我们处理二次非线性项的定理，也提示了如何为半径多项式寻找界。

下面概述一般策略。我们首先进行启发式计算，以求出哈尔变换的表达式；然后，通过证明它们确实属于 $\ell^2(\mathbb{R})$，哈尔小波级数的唯一性便为这些计算提供了依据。

令 $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \ell^2(\mathbb{R})$，并假设 $\mathbf{c}^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{d} \in L^2([0,1])$。我们有

$$\mathbf{c}^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{d} = \mathbf{a}^T\mathbf{h}(t)\mathbf{h}^T(t)\mathbf{b}$$

为简便起见，我们将 $= P^T\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{b} = P^T\mathbf{d}$ 记作相应符号。下面更深入地研究矩阵 $\mathbf{h}(t)\mathbf{h}^T(t)$。首先，根据定义，当且仅当 $k = q$ 时，我们有 $\psi_{j,k}(t)\psi_{j,q}(t) \neq 0$ 。对于 $\psi_{j,k}(t)\psi_{p,q}(t)$ 且 $j \neq p$ 的情形，不失一般性地，固定 p，考察 $j < p$。由于嵌套性质，$\psi_{j,k}$ 在 $\text{supp}\,\psi_{p,q}$ 中是常数（可能为零），因此我们可以假设对于 $t \in \text{supp}\psi_{p,q}$，有 $\psi_{j,k}(t) = \psi_{j,k}\left(\frac{q+0.5}{2^p}\right)$。于是，我们可以将 $\psi_{j,k}(t)\psi_{p,q}(t)$ 写成

$$\psi_{j,k}(t)\psi_{p,q}(t) = \psi_{j,k}\left(\frac{q+0.5}{2^p}\right)\psi_{p,q}(t) = (H_{m/2})_{i,l}\psi_l(t).$$

因此，在调整指标并考虑矩阵的对称性后，我们证明了以下结论：

引理 .1. 乘积 $\mathbf{h}(t)\mathbf{h}^T(t)$ 可针对 $m = 2^j$、 $j = 0$、1、2、.....递归计算如下

$$\mathbf{h}_1(t)\mathbf{h}_1^T(t) = \psi_1^2(t) = \phi^2(t) \quad , \quad \mathbf{h}_{2m}(t)\mathbf{h}_{2m}^T(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_m(t)\mathbf{h}_m^T(t) & \Upsilon_m(t) \\ \Upsilon_m^T(t) & \Delta_m(t) \end{bmatrix}$$

其中，对于 i、$l = 1$、.....、2^m、 Γ_m 和 Δ_m，它们是按元素定义的 $m \times m$ 矩阵 s

$$(\Upsilon_m)_{i,l}(t) = (H_m)_{i,l}\psi_{m+l}(t) \quad , \quad (\Delta_m)_{i,l}(t) = \begin{cases} \psi_i^2(t) & , \; if\; i = l \\ 0 & , \; otherwise. \end{cases}$$

这说明可以如定理 4.1 所示，将 $\mathbf{h}(t)\mathbf{h}^T(t)$ 分解为 $\mathbf{h}(t)\mathbf{h}^T(t) = \Omega(t) + \Omega^T(t) + \Theta(t)$。我们分别处理各项。首先，对于 $\mathbf{a}^T\Omega(t)\mathbf{b}$，将 $\mathbf{b}$ 划分为 2^j 个向量块后，乘积 $\Omega(t)\mathbf{b}$ 按元素表示为

$$\begin{aligned}(\Omega(t)\mathbf{b})_i &= \sum_{p=j}^{\infty}(\Upsilon_{2^p})_{i,*}\mathbf{b}_{2^p}^* = \sum_{p=j}^{\infty}\sum_{q=1}^{2^p}(H_{2^p})_{i,q}\,\psi_{2^p+q}(t)\,b_{2^p+q} \\ &= \sum_{p=j}^{\infty}(H_{2^p})_{i,*}\,(\mathbf{b}_{2^p}^* \odot \mathbf{h}_{2^p}^*(t)) =: (\tilde{\Omega}(\mathbf{b} \odot \mathbf{h}(t)))_i\end{aligned}$$

˜其中，$\odot$ 表示哈达玛积（即逐元素乘积），矩阵 Ω 可递归构造为

$$\tilde{\Omega}_1 = 0 \quad , \quad \tilde{\Omega}_{2m} = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_m & H_m \\ 0_m & 0_m \end{bmatrix} \quad , \text{ for } m = 2^j \text{ and } j = 0, 1, 2, ...$$

因此，乘积 $\mathbf{a}^T\Omega(t)\mathbf{b}$ 为

$$\mathbf{a}^T\Omega(t)\mathbf{b} = (\mathbf{c}^T P)\tilde{\Omega}\left(\mathbf{b}\odot\mathbf{h}(t)\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} c_i (P\tilde{\Omega})_{i,l} b_l \psi_l(t).$$

特别地，若我们假设$\mathbf{a}^T\Omega(t)\mathbf{b} \in L^2([0,1])$，则

$$\left(\mathcal{H}\left(\mathbf{a}^T\Omega(t)\mathbf{b}\right)\right)_l = b_l \sum_{i=1}^{\infty} c_i (P\tilde{\Omega})_{i,l} = (\mathbf{c}^T P\tilde{\Omega})_l b_l. \tag{53}$$

或者换一种写法，$\mathcal{H}\left(\mathbf{a}^T\Omega(t)\mathbf{b}\right) = \left(\tilde{\Omega}^T P^T\mathbf{c}\right)\odot\mathbf{b}$。

此外，由于$\mathbf{a}^T\Omega^T(t)\mathbf{b}$的输出是一个实数，因此$\mathbf{a}^T\Omega^T(t)\mathbf{b} = \left(\mathbf{a}^T\Omega^T(t)\mathbf{b}\right)^T = \mathbf{b}^T\Omega(t)\mathbf{a}$，从而 $\mathcal{H}\left(\mathbf{a}^T\Omega^T(t)\mathbf{b}\right) = \left(\tilde{\Omega}^T P^T\mathbf{d}\right)\odot\mathbf{a}$ 也成立。

对于项 $\mathcal{H}(\mathbf{a}^T\Theta(t)\mathbf{b})$，我们有

$$\mathbf{a}^T\Theta(t)\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \psi_i^2(t) \quad , \quad \psi_i^2(t) = \begin{cases} 2^j & , \text{ if } \dfrac{k}{2^j} \le t \le \dfrac{k+1}{2^j}; \\ 0 & , \text{ otherwise.} \end{cases}$$

于是 $\psi_i^2 \in L^2([0,1])$，我们可以将其写成哈尔小波级数：

$$\psi_i^2(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{i,l}\psi_l(t) = \Gamma\mathbf{h}(t) \quad , \quad \gamma_{i,l} := \int_0^1 \psi_i^2(t)\psi_l(t)\,dt.$$

与 P类似，矩阵 Γ 也具有递归结构：

引理 .2. 矩阵 Γ 可以递归计算为

$$\Gamma_1 = 1 \quad , \quad \Gamma_{2m} = \begin{bmatrix} \Gamma_m & 0_m \\ H_m^T & 0_m \end{bmatrix} \quad , \; for\; m = 2^j \; and \; j = 0,1,2,3,... \tag{54}$$

证明。Fi 首先，计算 $\Gamma_1 = \gamma_{11}$ 是简单直接的。根据定义，对于 $i,l = 1,2,...,m$，我们有 ve

$$(\Gamma_{2m})_{i,l} = \int_0^1 \psi_i^2(t)\psi_l(t)\,dt = (\Gamma_m)_{i,l}$$

现在假设 $m+1 \le l \le 2m$，并用双指标记法表示 $\psi_l = \psi_{p,\,q}$和$\psi_i = \psi_{j,\,k}$。对于 $2 \le i \le 2m$，由于嵌套性质，$\psi_{j,\,k}$ 在 supp $\psi_{p,\,q}$ 中为常数（可能为零）。然而，即使 $\psi_{j,\,k}$ 在 supp$\psi_{p,\,q}$ 中非零，

$$(\Gamma_{2m})_{i,l} = \int_0^1 \psi_i^2(t)\psi_l(t)\,dt = 2^j \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} \psi_{p,q}(t)\,dt = 2^j \int_{\frac{q}{2^p}}^{\frac{q+1}{2^p}} \psi_{p,q}(t)\,dt = 0.$$

类似的推理也适用于 $i = 1$ （在这种情况下，$\psi_1(t) = \phi(t) \equiv 1$ 在 $[0,1]$ 中）。

现在假设 $m+1 \le i \le 2m$ 且 $l \le m$。对于 $l = 1$ 直接计算可得 $(\Gamma_{2m})_{i,\,l} = 1 = (H_m)_{1,\,i}$。对于 $l > 1$，由于 $p < j$，我们可以采用引理 .1证明中的相同推理，得到

$$\gamma_{i,l} = 2^j \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} \psi_{p,q}(t)\,dt = 2^j \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} \psi_{p,q}\left(\frac{k+0.5}{2^j}\right)dt = \psi_l(t_i) = (H_m)_{l,i}.$$

□

因此，

$$\mathbf{a}^T\Theta(t)\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \psi_i^2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{i,l}\psi_l(t) = (\mathbf{a}\odot\mathbf{b})^T \Gamma\, \mathbf{h}(t)$$

因此，如果 $\Gamma^T(\mathbf{a}\odot\mathbf{b}) \in \ell^2(\mathbb{R})$，那么 $\mathcal{H}(\mathbf{a}^T\Theta(t)\mathbf{b}) = \Gamma^T(\mathbf{a}\odot\mathbf{b})$。

现在我们必须证明，我们暂定的哈尔变换确实是 $\ell^2(\mathbb{R})$的元素；定理4.1 随后由哈尔级数的唯一性得出。在此之前，我们先证明几个引理：

引理 .3. 矩阵 $P\tilde{\Omega}$ 由递归公式给出：

$$P_{2m}\tilde{\Omega}_{2m} = \begin{bmatrix} P_m\tilde{\Omega}_m & P_m H_m \\ \dfrac{1}{4\sqrt{m^3}} H_m^T\tilde{\Omega}_m & \dfrac{1}{4\sqrt{m}} I_m \end{bmatrix}. \tag{55}$$

通过将 P 和 $\tilde{\Omega}$ 的递归公式相乘即可证明这一点。

引理 .4. 矩阵 $H_m^T\tilde{\Omega}_m$ 的各元素为：

$$(H_m^T\tilde{\Omega}_m)_{i,l} = \begin{cases} 0 & , \text{ if } l = 1; \\ \psi_l^2(t_i) & , \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{56}$$

证明。 首先注意到，由于矩阵 Ω_m 的第一列为零，因此 $H_m^T\tilde{\Omega}_m$ 的第一列也为零，由此证明了情形 $l = 1$。

对于 $l \geq 2$，使用双指标记法构造 $\psi_i = \psi_{j,\,k}$ 和 $\psi_l = \psi_{p,\,q}$。由于 H_m^T 和 $\tilde{\Omega}_m$ 的结构，

$$(H_m^T\tilde{\Omega}_m)_{i,l} = \mathbf{h}_{2^p}^T(t_i)\mathbf{h}_{2^p}(t_{q+1}) = 1 + \sum_{r=0}^{p-1}\sum_{s=0}^{2^r-1} \psi_{r,s}(t_i)\psi_{r,s}(t_{q+1}).$$

其中 $t_i = 2^{-j}(k-0.5)$ 和 $t_{q+1} = 2^{-p}(q+0.5)$。由于 t_i 和 t_{q+1} 固定，对于每个 r，至多存在一个其支撑同时包含 t_i 和 t_{q+1} 的小波 $\psi_{r,\,s_r}$，因为同一分辨率级别的小波非零区间互不重叠。因此，

$$(H_m^T\tilde{\Omega}_m)_{i,l} = 1 + \sum_{r=0}^{p-1} \psi_{r,s_r}(t_i)\psi_{r,s_r}(t_{q+1})$$

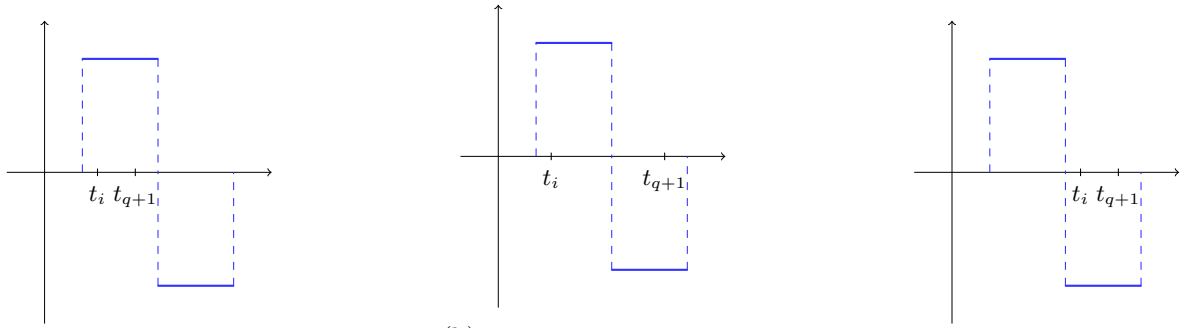
如果 $\psi_{r,s_r}(t_i)$ 和 $\psi_{r,s_r}(t_{q+1})$ 均不为零，则只可能出现两种情况：要么 $\psi_{r,s_r}(t_i) = \psi_{r,s_r}(t_{q+1})$，要么 $\psi_{r,s_r}(t_i) = -\psi_{r,s_r}(t_{q+1})$。在不失一般性的前提下，假设 $t_i \leq t_{q+1}$，可能的情况如图 7 所示。

让我们研究改变分辨率级别 r时会发生什么：

a) 假设对于每个 $r = 0, \ldots, p-1$，$\psi_{r,\,s_r}(t_i) = \psi_{r,\,s_r}(t_{q+1})$（图7中的情形 (a) 或 (c)）。那么 $t_i = t_{q+1}$，因为对于 $r = p-1$，我们只在时间 $t_1 = \frac{s_r+0.25}{2^r}$ 和 $t_2 = \frac{s_r+0.75}{2^r}$ 对 ψ_{r,s_r} 采样，并且有 $\psi_{r,s_r}(t_1) = -\psi_{r,s_r}(t_2)$。因此

$$(H_m^T\tilde{\Omega}_m)_{i,l} = 1 + \sum_{r=0}^{p-1} \psi_{r,s_r}^2(t_i) = 1 + \sum_{r=0}^{p-1} 2^r = 2^p = \psi_l^2(t_i)$$

b) 假设 $\psi_{r,\,s_r}(t_i) = -\psi_{r,\,s_r}(t_{q+1})$（图 7 中的情形 (b)）对某个 r对某个 $r \leq p-1$ 发生。那么 $t_i \in [\frac{s}{2^r}, \frac{s+0.5}{2^r}]$ 且 $t_{q+1} \in [\frac{s+0.5}{2^r}, \frac{s+1}{2^r}]$。由于其嵌套性质



(a) $\psi_{r,s_r}(t_i) = \psi_{r,s_r}(t_{q+1})$ (b) $\psi_{r,\,s_r}(t_i) = -\psi_{r,s_r}(t_{q+1})$ (c) $\psi_{r,\,s_r}(t_i) = \psi_{r,\,s_r}(t_{q+1})$

图 7：乘积 $\psi_{r,\,s_r}(t_i)\psi_{r,\,s_r}(t_{q+1})$ 的所有可能情况

哈尔小波，没有更细的小波能同时将 t_i 和 t_{q+1} 包含在其支撑中，并且对于所有较粗分辨率 $\rho < r$，我们有 $\psi_{\rho,s_\rho}(t_i) = \psi_{\rho,s_\rho}(t_{q+1})$。因此

$$(H_m^T\tilde{\Omega}_m)_{i,l} = 1 + \sum_{\rho=0}^{r-1} \psi^2_{\rho,s_\rho}(t_i) - \psi^2_{r,s_r}(t_i) = 1 + \sum_{\rho=0}^{r-1} 2^\rho - 2^r = 0$$

最后，由于 $p > r$ 和 $t_q \in$ 的支集 $\psi_{p,\,q}$，因此 $t_i \notin$ 的支集$\psi_{p,\,q}$。于是 $\psi^2_l(t_i) = \psi^2_{p,\,q}(t_i) = 0 = (H_m^T\tilde{\Omega}_m)_{i,\,l}$。

□

现在我们终于证明了 $(\tilde{\Omega}^T P^T\mathbf{c}) \odot \mathbf{b}$ 和 $\Gamma^T(\mathbf{a} \odot \mathbf{b})$ 确实属于 $\ell^2(\mathbb{R})$。

命题 .1. 序列 $(\tilde{\Omega}^T P^T\mathbf{c}) \odot \mathbf{b}$ 和 $\Gamma^T(\mathbf{a} \odot \mathbf{b})$ 属于 $\ell^2(\mathbb{R})$，并且对于某些C_1、$C_2 > 0$，满足

$$\left\|(\tilde{\Omega}^T P^T\mathbf{c}) \odot \mathbf{b}\right\|_{\ell^2} \le C_1\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}\|\mathbf{d}\|_{\ell^2}$$
$$\left\|\Gamma^T(\mathbf{a} \odot \mathbf{b})\right\|_{\ell^2(\mathbb{R})} \le C_2\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}\|\mathbf{d}\|_{\ell^2}$$

证明。对于 $(\tilde{\Omega}^T P^T\mathbf{c}) \odot \mathbf{b}$，若将 $\mathbf{c}$ 按 (8) 中的方法分解，并利用引理 .3中的块结构，则 $(\tilde{\Omega}^T P^T\mathbf{c})$ 的每个块为

$$(\tilde{\Omega}^T P^T\mathbf{c})_1 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{3r}{2}+2}} (\mathbf{c}^*_{2^r})^T H^T_{2^r}\tilde{\Omega}_{2^r}$$

$$(\tilde{\Omega}^T P^T\mathbf{c})^*_{2^j} = (c_1, ..., c_{2^j})P_{2^j}H_{2^j} + \frac{1}{2^{\frac{j}{2}+2}}(\mathbf{c}^*_{2^j})^T + \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{3r}{2}+2}} (\mathbf{c}^*_{2^r})^T H^T_{2^r}\tilde{\Omega}_{2^r}$$

我们对右端的每一项进行估计：

- $\|(c_1, ..., c_{2^j})P_{2^j}H_{2^j}\|_{\ell^2} \le \left\|H^T_{2^j}\right\| \left\|P^T_{2^j}(c_1, ..., c_{2^j})\right\|_{\ell^2} \le \frac{\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{j}{2}+1}}$
- $\left\|\frac{1}{2^{\frac{j}{2}+2}}(\mathbf{c}^*_{2^j})^T\right\|_{\ell^2} \le \frac{\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{j}{2}+2}}$
- From Lemma .4, $\max H^T_{2^j}\Omega^T_{2^j} = 2^j$; thus

$$\left\|\sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{3r}{2}+2}} (\mathbf{c}^*_{2^r})^T H^T_{2^r}\Omega^T_{2^r}\right\|_{\ell^2} \le \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{3r}{2}+2}} \|\mathbf{c}\|_{\ell^2} \left\|H^T_{2^r}\Omega^T_{2^r}\right\|_{\ell^2} \le \frac{1+\sqrt{2}}{2^{\frac{j}{2}+2}} \|\mathbf{c}\|_{\ell^2}$$

因此，

$$\left\|(\tilde{\Omega}^T P^T \mathbf{c})^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} \le \left(1+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\frac{\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{j}{2}}} \quad , \quad |(\tilde{\Omega}^T P^T \mathbf{c})_1| \le \frac{1+\sqrt{2}}{4}\|\mathbf{c}\|_{\ell^2} \tag{57}$$

此外，对于 $i = 2^j,\ 2^j+1,\ \ldots\ldots,\ 2^{2j}-1$, $|(P^T\mathbf{d})_i| \le \left\|(P^T\mathbf{d})^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} \le \frac{\|\mathbf{d}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3j}{2}+1}}$，因此

$$\left\|\left((\tilde{\Omega}^T P^T \mathbf{c})\odot \mathbf{b}\right)^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} \le \left\|(\tilde{\Omega}^T P^T \mathbf{c})^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} \max_{2^j\le i\le 2^{2j}-1}|(P^T\mathbf{d})_i| \le \left(1+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\frac{\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}\|\mathbf{d}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3j}{2}+1}}$$

因此，我们可以将 $(\tilde{\Omega}^T P^T\mathbf{c})\odot\mathbf{b}$ 估计为

$$\begin{aligned}\left\|(\tilde{\Omega}^T P^T \mathbf{c})\odot \mathbf{b}\right\|^2_{\ell^2} &= \left|\left((\tilde{\Omega}^T P^T \mathbf{c})\odot \mathbf{b}\right)_1\right|^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\left\|\left((\tilde{\Omega}^T P^T \mathbf{c})\odot \mathbf{b}\right)^*_{2^j}\right\|^2_{\ell^2} \\ &\le \frac{1}{112}(169+79\sqrt{2})\|\mathbf{c}\|^2_{\ell^2}\|\mathbf{d}\|^2_{\ell^2} = C_1^2\|\mathbf{c}\|^2_{\ell^2}\|\mathbf{d}\|^2_{\ell^2}.\end{aligned}$$

对于 $\Gamma^T(\mathbf{a}\odot\mathbf{b})$，由式（54）可得

$$\begin{aligned}\left|\left(\Gamma^T(\mathbf{a}\odot\mathbf{b})\right)_1\right| &= \left|a_1b_1 + \sum_{r=0}^{\infty} H_{2^r}\left(\mathbf{a}^*_{2^r}\odot\mathbf{b}^*_{2^r}\right)\right| \le |a_1b_1| + \sum_{r=0}^{\infty}\|H_{2^r}\|\,\|\mathbf{a}^*_{2^r}\|_{\ell^2}\max|\mathbf{b}^*_{2^r}| \\ &\le \|\mathbf{c}\|_{\ell^2}\|\mathbf{d}\|_{\ell^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}\|\mathbf{d}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3r}{2}+2}} \le \frac{18+\sqrt{2}}{14}\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}\|\mathbf{d}\|_{\ell^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|\left(\Gamma^T(\mathbf{a}\odot\mathbf{b})\right)^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} &= \left\|\sum_{r=j+1}^{\infty} H_{2^r}\left(\mathbf{a}^*_{2^r}\odot\mathbf{b}^*_{2^r}\right)\right\|_{\ell^2} \le \sum_{r=j+1}^{\infty}\|H_{2^r}\|\,\|\mathbf{a}^*_{2^r}\|_{\ell^2}\max|\mathbf{b}^*_{2^r}| \\ &\le \sum_{r=j+1}^{\infty}\frac{\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}\|\mathbf{d}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3r}{2}+2}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{4}\frac{\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}\|\mathbf{d}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3r}{2}}}\end{aligned}$$

最后，我们用以下方式估计序列 $\Gamma^T(\mathbf{a}\odot\mathbf{b})$

$$\begin{aligned}\left\|\Gamma^T(\mathbf{a}\odot\mathbf{b})\right\|^2_{\ell^2} &= \left|\left(\Gamma^T(\mathbf{a}\odot\mathbf{b})\right)_1\right|^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\left\|\left(\Gamma^T(\mathbf{a}\odot\mathbf{b})\right)^*_{2^j}\right\|^2_{\ell^2} \\ &\le \frac{1}{49}(113+23\sqrt{2})\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}\|\mathbf{d}\|_{\ell^2} = C_2^2\|\mathbf{c}\|_{\ell^2}\|\mathbf{d}\|_{\ell^2}\end{aligned}$$

□

B 第 4 节二次估计的证明

这里我们证明命题 4.1—4.4中的二次估计。如文中所述，主要策略是同时运用定理 2.1和4.1 中的矩阵递归块结构，以及式（17）中的有限-无限分解。为清晰起见，图 8 展示了它们对于算子 P 的重叠方式；其他矩阵也遵循类似的模式。我们还借鉴 A 中的思路来估计证明中出现的求和。我们认为，类似的步骤也可用于更高次数的多项式非线性项。

B.1 命题的证明4.1

*i)*对于 $i \le M$，由于 $\bar{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^M$， $\Pi_M P^T \bar{\mathbf{c}}$的第 i 个元素为

$$\left(P^T\bar{\mathbf{c}}\right)_i = \sum_{l=1}^{M}\left(P^T\right)_{i,l}c_l = \left(P_M^T\bar{\mathbf{c}}\right)_i.$$

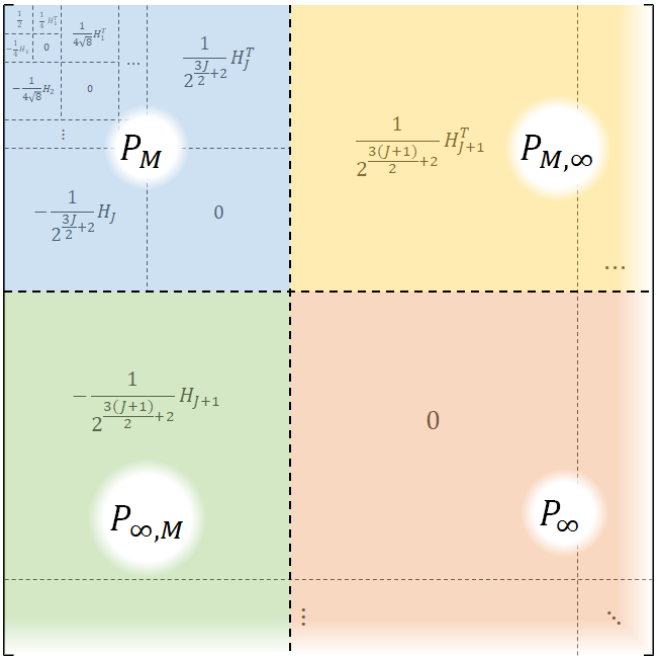


图8： P 的块结构与有限-无限分解叠加图

ii) 对于 $i \le M$,

$$\left(\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)\bar{\mathbf{b}})\right)_i = (\bar{\mathbf{c}}^T P\,\tilde{\Omega})_i\bar{\mathbf{b}}_i = \sum_{l=1}^{M} c_l (P\,\tilde{\Omega})_{l,i}\bar{\mathbf{b}}_i = (\bar{\mathbf{c}}^T P_M\tilde{\Omega}_M)_i\bar{\mathbf{b}}_i.$$

最后一个等式由引理 .3. 因此，根据第 *(i)*

$$\Pi_M\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)\bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{c}}^T P_M\tilde{\Omega}_M)^T \odot \Pi_M\bar{\mathbf{b}} = (\tilde{\Omega}_M^T P_M^T\bar{\mathbf{c}}) \odot (P_M^T\bar{\mathbf{d}}).$$

iii) 利用有限-无限分解，我们可以将 $\Pi_M\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Theta(t)\bar{\mathbf{b}})$ 分离为

$$\Pi_M\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Theta(t)\bar{\mathbf{b}}) = \Gamma_M^T(\bar{\mathbf{a}}_M \odot \bar{\mathbf{b}}_M) + \Gamma_{\infty,M}^T(\bar{\mathbf{a}}_\infty \odot \bar{\mathbf{b}}_\infty)$$

现在我们需要对第二项中的无穷级数进行界定。通过调整命题 $\bar{\mathbf{b}} = P^T\bar{\mathbf{d}}$ 的证明中 2.2 关于 $2^j + l > M$ 和 $\bar{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^M$ 的表达式,

$$\bar{b}_{2^j+l} = -\frac{1}{2^{\frac{3j}{2}+2}}\sum_{q=1}^{M}\left(H_{2^j}^T\right)_{l,q}\bar{c}_q,$$

因此，利用 Γ的结构、（58）以及 $H_{2^j}H_{2^j}^T = 2^j I_{2^j}$ 这一事实,

$$\begin{aligned}
\left|\left(\Gamma_\infty^T(\Pi_\infty\bar{\mathbf{a}} \odot \Pi_\infty\bar{\mathbf{b}})\right)_i\right| &= \left|\sum_{j=J+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2^j}(H_{2^j})_{i,l}\,\bar{a}_{2^j+l}\bar{b}_{2^j+l}\right| \\
&\le \sum_{j=J+1}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{2^j} -(H_{2^j})_{i,l}\left(\frac{1}{2^{\frac{3j}{2}+2}}\sum_{q=1}^{M}\left(H_{2^j}^T\right)_{l,q}c_q\right)\bar{b}_{2^j+l}\right| \\
&\le \sum_{j=J+1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{3j}{2}+2}}\left|\left(\sum_{q=1}^{M}\sum_{l=1}^{2^j}(H_{2^j})_{i,l}\left(H_{2^j}^T\right)_{l,q}c_q\right)\right|\frac{\|\bar{\mathbf{d}}\|_{\ell^2}}{2^{j+1}} = \frac{\sqrt{2}\,\|\bar{\mathbf{d}}\|_{\ell^2}}{\left(4-\sqrt{2}\right)2^{\frac{3J}{2}+3}}|c_i|
\end{aligned}$$

从而

$$\|\Gamma_\infty^T(\Pi_\infty\bar{\mathbf{a}} \odot \Pi_\infty\bar{\mathbf{b}})\|_{\ell^2} \le \frac{\sqrt{2}\,\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}\|\bar{\mathbf{d}}\|_{\ell^2}}{\left(4-\sqrt{2}\right)2^{\frac{3J}{2}+3}}.$$

B.2 命题4.2的证明

i) 利用有限-无限分解、 P 的递归块结构以及 $\bar{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^M$这一事实，对于 $j > J$，我们有

$$\left\|\left(P^T\bar{\mathbf{c}}\right)^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} = \left\|-\frac{1}{2^{\frac{3j}{2}+2}}H^T_{2^j}\bar{\mathbf{c}}\right\|_{\ell^2} \le \frac{1}{2^{\frac{3j}{2}+2}}\left\|H^T_{2^j}\right\|\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2} = \frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}}{2^{j+2}} \tag{58}$$

按照定理.1中的方法进行估计，

$$\left\|\Pi_\infty\left(P^T\bar{\mathbf{c}}\right)\right\|_{\ell^2} = \sqrt{\sum_{j=J+1}^{\infty}\left\|\left(P^T\bar{\mathbf{c}}\right)^*_{2^j}\right\|^2_{\ell^2}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}}{2^{J+2}}.$$

*ii)*对于 $j > J$，将 $\Pi_\infty\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)\bar{\mathbf{b}})$ 分成块，

$$\begin{aligned}\left\|\left(\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)\bar{\mathbf{b}})\right)^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} &= \left\|-\frac{1}{2^{\frac{3j}{2}+2}}\left(H^T_{2^j}P^T_{2^j}\bar{\mathbf{c}}\right)\odot\left(H^T_{2^j}\bar{\mathbf{d}}\right)\right\|_{\ell^2} \le \frac{1}{2^{\frac{3j}{2}+2}}\left(\max_{1\le k\le 2^j}\left|\left(H^T_{2^j}\bar{\mathbf{c}}\right)_k\right|\right)\left\|H^T_{2^j}P^T_{2^j}\bar{\mathbf{d}}\right\|_{\ell^2}\\ &\le \frac{1}{2^{\frac{3j}{2}+2}}\left\|H^T_{2^j}\bar{\mathbf{c}}\right\|_{\ell^2}\left\|H^T_{2^j}P^T_{2^j}\bar{\mathbf{d}}\right\|_{\ell^2} \le \frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}\left\|\bar{\mathbf{d}}\right\|_{\ell^2}}{2^{j+4}}\end{aligned}$$

因此

$$\left\|\Pi_\infty\left(\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)\bar{\mathbf{b}})\right)\right\|_{\ell^2} = \sqrt{\sum_{j=J+1}^{\infty}\left\|\left(\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)\bar{\mathbf{b}})\right)^*_{2^j}\right\|^2_{\ell^2}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}\left\|\bar{\mathbf{d}}\right\|_{\ell^2}}{2^{2J+4}}.$$

iii) 为了估计 $\Pi_\infty\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Theta(t)\bar{\mathbf{a}})$，利用（54）中针对 $i > M$的块矩阵结构，

$$\begin{aligned}\left|\left(\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Theta(t)\bar{\mathbf{b}})\right)_i\right| = \left|\Gamma^T_{i,*}(\bar{\mathbf{a}}\odot\bar{\mathbf{b}})\right| &= \left|\sum_{p=j+1}^{\infty}\frac{1}{2^{3p+4}}\sum_{q=1}^{2^p}(H_{2^p})_{i,q}\left(\left(H^T_{2^p}\right)_{q,*}\bar{\mathbf{c}}\right)\left(\left(H^T_{2^p}\right)_{q,*}\bar{\mathbf{d}}\right)\right|\\ &\le \sum_{p=j+1}^{\infty}\frac{1}{2^{3p+4}}\max_{1\le q\le 2^p}\left|\left(\left(H^T_{2^p}\right)_{q,*}\bar{\mathbf{d}}\right)\right|\sum_{q=1}^{2^p}\left|(H_{2^p})_{i,q}\left(\left(H^T_{2^p}\right)_{q,*}\bar{\mathbf{c}}\right)\right|\\ &\le \sum_{p=j+1}^{\infty}\left|(I_{2^p})_{i,*}\bar{\mathbf{c}}\right|\frac{\|\bar{\mathbf{d}}\|_{\ell^2}}{2^{3p+6}} = \frac{|c_i|}{2^{3j+6}}\frac{\|\bar{\mathbf{d}}\|_{\ell^2}}{7}\end{aligned}$$

因此

$$\left\|\Pi_\infty\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Theta(t)\bar{\mathbf{b}})\right\|_{\ell^2} \le \frac{1}{21\sqrt{7}}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}\|\bar{\mathbf{d}}\|_{\ell^2}}{2^{3J+6}}.$$

B.3 命题的证明4.3

下面的引理有助于估计形如 $A_M(B_M\bar{\mathbf{x}}\odot C_M\bar{\mathbf{y}})$ 的项，其中 $\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}} \in\mathbb{R}^M$ 为任意值，否则处理起来会比较棘手。

引理 .5. 给定 $\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^M$ 以及 $M \times M$ 矩阵 A_M、 B_M、 C_M，则

$$\|A_M(B_M\bar{\mathbf{x}}\odot C_M\bar{\mathbf{y}})\|_{\ell^2} \le \|A_M\,\mathrm{diag}(\|(C_M)_{l,*}\|_{\ell^2})B_M\|\,\|\bar{\mathbf{x}}\|_{\ell^2}\|\bar{\mathbf{y}}\|_{\ell^2}, \tag{59}$$

其中

$$\mathrm{diag}(\bar{\mathbf{x}}) := \begin{bmatrix} x_1 & & & 0\\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x_n\end{bmatrix}, \quad (\|(C_M)_{l,*}\|_{\ell^2}) = \begin{pmatrix}\|(C_M)_{1,*}\|_{\ell^2}\\ \|(C_M)_{2,*}\|_{\ell^2}\\ \vdots\\ \|(C_M)_{M,*}\|_{\ell^2}\end{pmatrix}.$$

证明。 对于 $A_M(B_M\bar{}\mathbf{x} \odot C_M\bar{}\mathbf{y})$ 的每个元素

$$|(A_M(B_M\bar{\mathbf{x}} \odot C_M\bar{\mathbf{y}}))_i| = \left|\sum_{l=1}^{M}(A_M)_{i,l}(B_M\bar{\mathbf{x}})_l(C_M\bar{\mathbf{y}})_l\right|$$
$$\leq \left|\sum_{l=1}^{M}(A_M)_{i,l}(B_M\bar{\mathbf{x}})_l\|(C_M)_{l,*}\|_{\ell^2}\|\bar{\mathbf{y}}\|_{\ell^2}\right| = |(A_M)_{i,*}\mathrm{diag}\left(\|(C_M)_{l,*}\|_{\ell^2}\right)B_M\bar{\mathbf{x}}|\,\|\bar{\mathbf{y}}\|_{\ell^2}.$$

取 ℓ^2 范数，即可得到结论。 □

i) 对 P 应用有限-无限分解，并观察其块结构，如图 8所示，可得

$$\left\|(P^T_{\infty,M}\,\mathbf{y}_\infty)\right\|_{\ell^2} = \left\|\sum_{q=J+1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{3q}{2}+2}}(H_{2^q})_{1:M,*}\,\mathbf{y}^*_{2^q}\right\|_{\ell^2} \leq \sum_{q=J+1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{3q}{2}+2}}\left\|(H_{2^q})_{1:M,*}\right\|\|\mathbf{y}^*_{2^q}\|_{\ell^2}$$
$$\leq \sum_{q=J+1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{3q}{2}+2}}\|H_{2^q}\|\,\|\mathbf{y}^*_{2^q}\|_{\ell^2} \leq \frac{\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{J+2}}. \tag{60}$$

ii) 固定 $j > J$，并令 $\mathbf{z}_{2^j} := H_{2^j}\mathbf{y}^*_{2^j}$。由引理 .3,

$$\left(\tilde{\Omega}^T P^T\right)_{M,\infty}\mathbf{y}_\infty = \sum_{j=J+1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{3j}{2}+2}}\left(\tilde{\Omega}^T_{2^j}H_{2^j}\right)_{1:M,*}\mathbf{y}^*_{2^j}$$
$$= \sum_{j=J+1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{3j}{2}+2}}\left(\tilde{\Omega}^T_{2^j}\right)_{1:M,*}H_{2^j}\mathbf{y}^*_{2^j} = \sum_{j=J+1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{3j}{2}+2}}\left(\tilde{\Omega}^T_{2^j}\right)_{1:M,*}\mathbf{z}_{2^j}$$

注意，对于 $p = 0,\ 1,\ .....,\ J$,

$$\left(\tilde{\Omega}^T_{2^j}\mathbf{z}_{2^j}\right)_1 = 0 \quad , \quad \left\|\left(\tilde{\Omega}^T_{2^j}\mathbf{z}_{2^j}\right)^*_{2^p}\right\|_{\ell^2} = \left\|H^T_{2^p}(z_1,...,z_{2^p})^T\right\|_{\ell^2} \leq 2^{\frac{p}{2}}\|\mathbf{z}_{2^j}\|_{\ell^2}$$

因此，对于每个 $j > J$,

$$\left\|\tilde{\Omega}^T_{2^j}\mathbf{z}_{2^j}\right\|_{\ell^2} = \sqrt{\sum_{p=0}^{j}\left\|\left(\tilde{\Omega}^T_{2^j}\mathbf{z}_{2^j}\right)^*_{2^p}\right\|^2_{\ell^2}} \leq 2^{\frac{j+1}{2}}\|\mathbf{z}_{2^j}\|_{\ell^2} \leq 2^{j+\frac{1}{2}}\left\|\mathbf{y}^*_{2^j}\right\|_{\ell^2}.$$

因此，我们可以用以下方式估计 $\left(\tilde{}\Omega^T P^T\right)_{M',\ \infty}\mathbf{y}_\infty$ 的
范数

$$\left\|\left(\tilde{\Omega}^T P^T\right)_{M,\infty}\mathbf{y}_\infty\right\|_{\ell^2} \leq \sum_{j=J+1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{3j}{2}+2}}\left\|\left(\tilde{\Omega}^T_{2^j}\right)_{1:M,*}\mathbf{z}_{2^j}\right\|_{\ell^2}$$
$$\leq \sum_{j=J+1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{j+3}{2}}}\left\|\mathbf{y}^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} \leq \left(1+\sqrt{2}\right)\frac{\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{J+3}{2}}}$$

iii) 根据54的块结构，并利用10和58,

$$\left\|\Gamma^T_{\infty,M}(\bar{\mathbf{a}}_\infty \odot \Pi_\infty P^T\mathbf{y})\right\|_{\ell^2} = \left\|\sum_{q=J+1}^{\infty}(H_{2^q})_{1:M,*}\left(\bar{\mathbf{a}}^*_{2^q} \odot (P^T\mathbf{y})^*_{2^q}\right)\right\|_{\ell^2}$$
$$\leq \sum_{q=J+1}^{\infty}\|(H_{2^q})\|\left(\max_{1\leq r\leq 2^q}|(\bar{\mathbf{a}}^*_{2^q})_r|\right)\left\|(P^T\mathbf{y})^*_{2^q}\right\|_{\ell^2}$$
$$\leq \sum_{q=J+1}^{\infty}2^{\frac{q}{2}}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}}{2^{q+2}}\frac{\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{q+1}} = \frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}\,\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3J}{2}+3}}$$

iv) 对 $A_M\Pi_M\mathcal{H}(\mathbf{x}^T P\Omega(t)P^T\mathbf{y})$ 应用有限-无限分解，可得

$$\Pi_M\mathcal{H}(\mathbf{x}^T P\,\Omega(t)P^T\mathbf{y}) = \left(\mathbf{x}_M^T P_M\tilde{\Omega}_M\right)^T \odot \left(P_M^T\mathbf{y}_M\right) + \left(\mathbf{x}_M^T P_M\tilde{\Omega}_M\right)^T \odot \left(P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right) + \left(\mathbf{x}_\infty^T(P\,\tilde{\Omega})_{M,\infty}\right)^T \odot \left(P_M^T\mathbf{y}_M\right) + \left(\mathbf{x}_\infty^T(P\,\tilde{\Omega})_{M,\infty}\right)^T \odot \left(P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right).$$

利用（59），我们可以用引理 .5 对第一项进行界定：

$$\left\|A_M\left(\left(\mathbf{x}_M^T P_M\tilde{\Omega}_M\right)^T \odot \left(P_M^T\mathbf{y}_M\right)\right)\right\|_{\ell^2} \le \left\|A_M\,\mathrm{diag}\left(\|(P_M^T)_{i,*}\|_{\ell^2}\right)\,\tilde{\Omega}_M^T P_M^T\right\|\,\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}.$$

对于第二项，利用（60）中的界，

$$\left|\left(A_M\left(\left(\mathbf{x}_M^T P_M\tilde{\Omega}_M\right)^T \odot \left(P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right)\right)\right)_i\right| = \left|\sum_{l=1}^M (A_M)_{i,l}\left(\mathbf{x}_M^T P_M\tilde{\Omega}_M\right)_l\left(P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right)_l\right| \le \left|\sum_{l=1}^M (A_M)_{i,l}\left(\mathbf{x}_M^T P_M\tilde{\Omega}_M\right)_l\right|\frac{\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{J+2}} = \left|\left(A_M\tilde{\Omega}_M^T P_M^T\mathbf{x}_M\right)_i\right|\frac{\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{J+2}}$$

因此

$$\left\|A_M\left(\left(\mathbf{x}_M^T P_M\tilde{\Omega}_M\right)^T \odot \left(P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right)\right)\right\|_{\ell^2} \le \frac{\left\|A_M\tilde{\Omega}_M^T P_M^T\right\|}{2^{J+2}}\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}.$$

对于第三项，采用与前一项类似的方法，并利用 $\mathbf{x}_\infty^T(P\tilde{\Omega})_M$ 的估计，∞，

$$\left|\left(A_M\left(\left(\mathbf{x}_\infty^T(P\,\tilde{\Omega})_{M,\infty}\right)^T \odot \left(P_M^T\mathbf{y}_M\right)\right)\right)_i\right| = \left|\sum_{q=1}^M (A_M)_{i,q}\left(P_M^T\mathbf{y}_M\right)_q\left(\mathbf{x}_\infty^T(P\,\tilde{\Omega})_{M,\infty}\right)_q\right| \le \left(\max_{1\le q\le M}\left|\left(\mathbf{x}_\infty^T(P\,\tilde{\Omega})_{M,\infty}\right)_q\right|\right)\left|\sum_{q=1}^M (A_M)_{i,q}\left(P_M^T\mathbf{y}_M\right)_q\right| \le \left\|\mathbf{x}_\infty^T(P\,\tilde{\Omega})_{M,\infty}\right\|_{\ell^2}\left|\left(A_M P_M^T\mathbf{y}_M\right)_i\right| \le \left(1+\sqrt{2}\right)\frac{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{J+3}{2}}}\left|\left(A_M P_M^T\mathbf{y}_M\right)_i\right|$$

因此

$$\left\|A_M\left(\left(\mathbf{x}_\infty^T(P\,\tilde{\Omega})_{M,\infty}\right)^T \odot \left(P_M^T\mathbf{y}_M\right)\right)\right\|_{\ell^2} \le \left(1+\sqrt{2}\right)\frac{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{J+3}{2}}}\left\|A_M P_M^T\mathbf{y}_M\right\|_{\ell^2} \le \left(1+\sqrt{2}\right)\left\|A_M P_M^T\right\|\frac{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}\,\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{J+3}{2}}}$$

对于第四项，利用 $\mathbf{x}_\infty^T\left((P\tilde{\Omega})_{M,\infty}\right)$、$P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty$ 的估计，我们得到

$$\left\|A_M\left(\left(\mathbf{x}_\infty^T(P\,\tilde{\Omega})_{M,\infty}\right)^T \odot \left(P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right)\right)\right\|_{\ell^2} = \left\|A_M\,\mathrm{diag}\left(P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right)\left(\mathbf{x}_\infty^T(P\,\tilde{\Omega})_{M,\infty}\right)^T\right\|_{\ell^2} \le \|A_M\|\left\|P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right\|_{\ell^2}\left\|\mathbf{x}_\infty^T(P\,\tilde{\Omega})_{M,\infty}\right\|_{\ell^2} \le \|A_M\|\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}\,\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3J+7}{2}}}$$

最后，将四个界相加，我们得到所需的界。

v) 对 P^T 和 Γ^T 应用有限-无限分解，我们有

$$\begin{aligned} A_M\Pi_M\mathcal{H}(\mathbf{x}^T P\Theta(t)P^T\mathbf{y}) = A_M\Gamma_M^T\Big[&\left(P_M^T\mathbf{x}_M\right)\odot\left(P_M^T\mathbf{y}_M\right) + \left(P_M^T\mathbf{x}_M\right)\odot\left(P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right) \\ &+ \left(P_{\infty,M}^T\mathbf{x}_\infty\right)\odot\left(P_M^T\mathbf{y}_M\right) + \left(P_{\infty,M}^T\mathbf{x}_\infty\right)\odot\left(P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right)\Big] \\ &+ A_M\Gamma_{\infty,M}^T\Pi_\infty\left(P^T\mathbf{x}\odot P^T\mathbf{y}\right). \end{aligned}$$

我们再次逐项估计。对于第一项，利用引理.5,

$$\left\|A_M\Gamma_M^T\left(\left(P_M^T\mathbf{x}_M\right)\odot\left(P_M^T\mathbf{y}_M\right)\right)\right\|_{\ell^2} \le \left\|A_M\Gamma_M^T\mathrm{diag}(\|(P_M^T)_{i,*}\|_{\ell^2})P_M^T\right\|\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}.$$

对于第二项，我们可以利用（60）逐元素地对其进行界定，得到

$$\begin{aligned} \left|\left(A_M\Gamma_M^T\left(\left(P_M^T\mathbf{x}_M\right)\odot\left(P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right)\right)\right)_i\right| &= \left|\sum_{l=1}^M (A_M\Gamma_M^T)_{i,l}\left(P_M^T\mathbf{x}_M\right)_l\left(P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right)_l\right| \\ &\le \left|\sum_{l=1}^M (A_M\Gamma_M^T)_{i,l}\left(P_M^T\mathbf{x}_M\right)_l\right|\frac{1}{2^{J+2}}\|\mathbf{y}\|_{\ell^2} = \frac{\left|(A_M\Gamma_M^T P_M^T\mathbf{x}_M)_i\right|}{2^{J+2}}\|\mathbf{y}\|_{\ell^2} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \left\|A_M\Gamma_M^T\left(\left(P_M^T\mathbf{x}_M\right)\odot\left(P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right)\right)\right\|_{\ell^2} &= \left(\sum_{i=1}^M\left|\left(A_M\Gamma_M^T\left(\left(P_M^T\mathbf{x}_M\right)\odot\left(P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right)\right)\right)_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(\sum_{i=1}^M\left|(A_M\Gamma_M^T P_M^T\mathbf{x}_M)_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{J+2}} = \left\|A_M\Gamma_M^T P_M^T\mathbf{x}_M\right\|_{\ell^2}\frac{\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{J+2}} \\ &\le \frac{\left\|A_M\Gamma_M^T P_M^T\right\|}{2^{J+2}}\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}\|\mathbf{y}\|_{\ell^2} \end{aligned}$$

对第三项应用相同的过程，可得到与上述相同的界。对于第四项，利用之前的估计，

$$\begin{aligned} \left\|A_M\Gamma_M^T\left(\left(P_{\infty,M}^T\mathbf{x}_\infty\right)\odot\left(P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right)\right)\right\|_{\ell^2} &\le \left\|A_M\Gamma_M^T\right\|\left\|P_{\infty,M}^T\mathbf{x}_\infty\right\|_{\ell^2}\left\|P_{\infty,M}^T\mathbf{y}_\infty\right\|_{\ell^2} \\ &\le \left\|A_M\Gamma_M^T\right\|\frac{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{2J+4}}. \end{aligned}$$

对于第五项，利用 Γ^T 在（54）中的块结构以及先前的估计，

$$\begin{aligned} \left\|A_M\Gamma_{\infty,M}^T\Pi_\infty\left(P^T\mathbf{x}\odot P^T\mathbf{y}\right)\right\|_{\ell^2} &= \left\|A_M\sum_{p=J+1}^\infty (H_{2^p})_{1:M,*}\left(\mathrm{diag}\left(P^T\mathbf{x}\right)_{2^p}^*\right)\left(P^T\mathbf{y}\right)_{2^p}^*\right\|_{\ell^2} \\ &\le \|A_M\|\sum_{p=J+1}^\infty\|H_{2^p}\|\left\|\left(P^T\mathbf{x}\right)_{2^p}^*\right\|_{\ell^2}\left\|\left(P^T\mathbf{y}\right)_{2^p}^*\right\|_{\ell^2} \\ &\le \|A_M\|\sum_{p=J+1}^\infty 2^{\frac{p}{2}}\frac{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}}{2^{p+2}}\frac{\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{p+2}} = \frac{\sqrt{2}\,\|A_M\|}{4-\sqrt{2}}\frac{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3J}{2}+4}} \end{aligned}$$

因此，将这些估计相加即可得出结论。

B.4 命题的证明4.4

i) 为了估计 $\mathcal{H}(\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T\mathbf{y})$，我们再次将其分解为三部分，并分别估计每一部分：

$$\mathcal{H}(\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{y}) = \mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)P^T\mathbf{y}) + \mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega^T(t)P^T\mathbf{y}) + \mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Theta(t)P^T\mathbf{y}).$$

- $\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)P^T\mathbf{y})$：由于 $\bar{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^M$，$\left(\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)P^T\mathbf{y})\right)_i = (\bar{\mathbf{c}}^T P_{2^j} H_{2^j})_i (P^T\mathbf{y})_{i\circ}$ 因此，对 $\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)P^T\mathbf{y})$ 应用分块分解，并结合由 (10) 和 (58) 得到的一些先前计算的估计，

$$\begin{aligned}\left\|\left(\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)P^T\mathbf{y})\right)^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} &= \left\|\left(H^T_{2^j}P^T_{2^j}\bar{\mathbf{c}}\right)^*_{2^j} \odot \left(P^T\mathbf{y}\right)^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} \le \left\|\mathrm{diag}\left((P^T\mathbf{y})^*_{2^j}\right)\right\| \left\|\left(H^T_{2^j}P^T_{2^j}\bar{\mathbf{c}}\right)^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} \\ &= \max_{2^j+1\le i\le 2^{j+1}} \left|\left(P^T\mathbf{y}\right)_i\right| \left\|\left(H^T_{2^j}P^T_{2^j}\bar{\mathbf{c}}\right)^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} \le \frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3j}{2}+3}}\end{aligned}$$

从而

$$\left\|\Pi_\infty\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)P^T\mathbf{y})\right\| = \sqrt{\sum_{j=J+1}^{\infty}\left\|\left(\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega(t)P^T\mathbf{y})\right)^*_{2^j}\right\|^2} \le \frac{1}{\sqrt{7}}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3J}{2}+3}}.$$

- $\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega^T(t)P^T\mathbf{y})$：由于 $\bar{\mathbf{a}}^T\Omega^T(t)P^T\mathbf{y} = (\bar{\mathbf{a}}^T\Omega^T(t)P^T\mathbf{y})^T = (P^T\mathbf{y})^T\Omega(t)\bar{\mathbf{a}}$，因此使用 (57) 中的估计，

$$\begin{aligned}\left\|\left(\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega^T(t)P^T\mathbf{y})\right)^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} &= \left\|\mathrm{diag}\left((P^T\bar{\mathbf{c}})^*_{2^j}\right)\left(\tilde{\Omega}^TP^T\mathbf{y}\right)^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} \\ &\le \max_{2^j+1\le i\le 2^{j+1}}\left|(P^T\bar{\mathbf{c}})_i\right|\left(1+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\frac{\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{j}{2}}} \le \left(1+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3j}{2}+2}},\end{aligned}$$

而 $\Pi_\infty\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega^T(t)P^T\mathbf{y})$ 的界变为

$$\left\|\Pi_\infty\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Omega^T(t)P^T\mathbf{y})\right\|_{\ell^2} \le \frac{1}{\sqrt{7}}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3J}{2}+2}}.$$

- $\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Theta(t)P^T\mathbf{y})$：利用 Γ^T中（54）的块结构以及估计（58）和（10），可得

$$\begin{aligned}\left\|\left(\Gamma^T\left(\bar{\mathbf{a}}\odot P^T\mathbf{y}\right)\right)^*_{2^j}\right\|_{\ell^2} &= \left\|\sum_{p=j+1}^{\infty}(H_{2^p})_{2^j+1:2^{j+1},*}\left(\bar{\mathbf{a}}^*_{2^p}\odot(P^T\mathbf{y})^*_{2^p}\right)\right\|_{\ell^2} \\ &\le \sum_{p=j+1}^{\infty}\left\|(H_{2^p})_{2^j+1:2^{j+1},*}\right\|\left\|\mathrm{diag}(\bar{\mathbf{a}}^*_{2^p})\right\|\left\|(P^T\mathbf{y})^*_{2^p}\right\|_{\ell^2} \\ &\le \sum_{p=j+1}^{\infty}\|H_{2^p}\|\max_{2^p+1\le i\le 2^{p+1}}\left|(P^T\bar{\mathbf{c}})_i\right|\left\|(P^T\mathbf{y})^*_{2^p}\right\|_{\ell^2} \\ &\le \sum_{p=j+1}^{\infty}2^{\frac{p}{2}}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}}{2^{p+2}}\frac{\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{p+1}} = \frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3j}{2}+3}},\end{aligned}$$

因此

$$\left\|\Pi_\infty\mathcal{H}(\bar{\mathbf{a}}^T\Theta(t)P^T\mathbf{y})\right\|_{\ell^2} \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}(4-\sqrt{2})}\frac{\|\bar{\mathbf{c}}\|_{\ell^2}\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3J}{2}+3}}.$$

该结果由对这些估计求和得出。

ii) 我们按照处理 $\Pi_\infty \mathcal{H}(\bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{y})$ 的相同方式进行，也就是说，将其分成三部分

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}^T \mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{y}) = \mathcal{H}(\mathbf{x}^T \Omega(t) P^T \mathbf{y}) + \mathcal{H}(\mathbf{x}^T \Omega^T(t) P^T \mathbf{y}) + \mathcal{H}(\mathbf{x}^T \Theta(t) P^T \mathbf{y})$$

并分别对每一部分进行估计。

- $\mathcal{H}(\mathbf{x}^T \Omega(t) P^T \mathbf{y})$：将分块分解应用于 $\mathcal{H}(\mathbf{x}^T \Omega(t) P^T \mathbf{y})$ 的表达式，并利用 (10) 和 (58) 中的估计，

$$\begin{aligned}\left\| \left(\mathcal{H}(\mathbf{x}^T \Omega(t) P^T \mathbf{y})\right)^*_{2^j} \right\|_{\ell^2} &= \left\| (\tilde{\Omega}^T P^T \mathbf{x})^*_{2^j} \odot (P^T \mathbf{y})^*_{2^j} \right\|_{\ell^2} \le \left\| \operatorname{diag}\left(P^T \mathbf{y}\right)^*_{2^j} \right\| \left\| (\tilde{\Omega}^T P^T \mathbf{x})^*_{2^j} \right\|_{\ell^2} \\ &\le \frac{\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{j+1}} \left(3 + 2\sqrt{2}\right) \frac{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{j}{2}+2}} = \frac{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)}{2^{\frac{3j}{2}+3}} \|\mathbf{x}\|_{\ell^2} \|\mathbf{y}\|_{\ell^2}\end{aligned}$$

然后

$$\left\| \Pi_\infty \mathcal{H}(\mathbf{x}^T \Omega(t) P^T \mathbf{y}) \right\|_{\ell^2} \le \frac{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)}{\sqrt{7}} \frac{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2} \|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3J}{2}+3}}$$

- $\mathcal{H}(\mathbf{x}^T \Omega^T(t) P^T \mathbf{y})$：由于 $\mathbf{x}^T \Omega^T(t) P^T \mathbf{y} = (\mathbf{x}^T \Omega^T(t) P^T \mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T \Omega^T(t) P^T \mathbf{x}$，对上一项重复相同的过程，我们也有

$$\left\| \Pi_\infty \mathcal{H}(\mathbf{x}^T \Omega^T(t) P^T \mathbf{y}) \right\|_{\ell^2} \le \frac{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)}{\sqrt{7}} \frac{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2} \|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3J}{2}+3}}$$

- $\mathcal{H}(\mathbf{x}^T \Theta(t) P^T \mathbf{y})$：利用分块分解以及 Γ 的块结构，

$$\begin{aligned}\left\| \left(\Gamma^T \left(P^T \mathbf{x} \odot P^T \mathbf{y}\right)\right)^*_{2^j} \right\|_{\ell^2} &= \left\| \sum_{p=j+1}^{\infty} (H_{2^p})_{2^j+1:2^{j+1},*} \left((P^T \mathbf{x})^*_{2^p} \odot (P^T \mathbf{y})^*_{2^p}\right) \right\|_{\ell^2} \\ &\le \sum_{p=j+1}^{\infty} \|(H_{2^p})\| \left\| \operatorname{diag}((P^T \mathbf{x})^*_{2^p}) \right\| \left\| (P^T \mathbf{y})^*_{2^p} \right\|_{\ell^2} \\ &\le \sum_{p=j+1}^{\infty} 2^{\frac{p}{2}} \frac{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}}{2^{p+1}} \frac{\|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{p+1}} = \frac{\sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}} \frac{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2} \|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3j}{2}+2}}\end{aligned}$$

因此

$$\left\| \Pi_\infty \mathcal{H}(\mathbf{x}^T \Theta(t) P^T \mathbf{y}) \right\|_{\ell^2} \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}\left(4 - \sqrt{2}\right)} \frac{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2} \|\mathbf{y}\|_{\ell^2}}{2^{\frac{3J}{2}+2}}$$

综合这些估计，我们得到所需的结果。

参考文献

[1] I. Aziz 和 Siraj ul Islam. 使用 Haar 小波数值求解非线性 Fredholm 积分方程和沃尔泰拉积分方程的新算法。计算与应用数学杂志，239：333–345，2013年。[2] M. Breden 和 C. Kuehn. 随机跃迁路径的严格验证。纯粹与应用数学杂志，131：88–129，2019年。[3] C. F. Chen 和 C. H. Hsiao. 用哈尔小波方法求解集总参数和分布参数系统。*IEE Proceedings*——控制理论与应用，144(1)：87–94，1997年。

[4] S. Day、Y. Hiraoka、K. Mischaikow 和 T. Ogawa. 整体动力学的严格数值计算：Swift-Hohenberg 方程研究。SIAM 应用动力系统杂志，4(1)：1–31，2005年。[5] S. Day、J. Lessard 和 K. Mischaikow. 偏微分方程平衡解的经验证的延拓。SIAM 数值分析杂志，45(4)：1398–1424，2007年。[6] J.-L. Figueras、M. Gameiro、J.-P. Lessard 和 R. de la Llave. 演化方程不变对象的数值计算与后验验证框架。SIAM 应用动力系统杂志，16(2)：1070–1088，2017年。[7] M. Gameiro、J.-P. Lessard 和 K. Mischaikow. 偏微分方程平衡解在大范围参数范围内的经验证延拓。数学与计算机仿真，79(4)：1368–1382，2008年。[8] CAPD 小组. 动力系统计算机辅助证明小组。http://capd.ii.uj. edu.pl. 访问日期：2022年4月13日。[9] K. Hashimoto、T. Kinoshita 和 M. T Nakao. 非线性抛物型问题解的数值验证。数值泛函分析与优化，41(12)：1495–1514，2020年。[10] Eugenio Hern´ández 和 Guido Weiss. 小波入门。高等数学研究。CRC 出版社，2000 N.W. Corporate Blvd., 博卡拉顿，佛罗里达州 33431，第1版，1996年。[11] A. Hungria、J.-P. Lessard 和 J. D. Mireles James. 微分方程解析解的严格数值计算：半径多项式方法。《计算数学》，85(299)：1427–1459，2016年。.[12] U. Lepik. 用哈尔小波方法求解分数阶积分方程。应用数学与计算，214(2)：468–478，2009年。[13] J.-P. Lessard 和 C. Reinhardt. 使用切比雪夫级数对非线性微分方程进行严格数值计算。SIAM 数值分析杂志，52(1)：1–22，2014年。[14] S. Maier-paape、U. Miller、K. Mischaikow 和 T. Wanner. 单位正方形上 Cahn-Hilliard 方程的严格数值计算。Revista Matem´ática Complutense，21(2)：351–426，2008年。[15] J. Majak、B. Shvartsman、K. Karjust、M. Mikola、A. Haavaj˜oe 和 M. Pohlak. 关于 Haar 小波离散方法的精度。《复合材料B辑》，80：321–327，2015年。[16] V. Mehandiratta、M. Mehra 和 G. Leugering. 一种基于哈尔小波的分数阶微积分近似方法及其在初边值问题中的应用。《应用科学中的数学方法》特刊论文，页码 1–20，2020年。[17] T. Miyaji、P. Pilarczyk、M. Gameiro、H. Kokubu 和 K. Mischaikow. 多尺度集导向计算中严格常微分方程积分器的研究。应用数值数学，107：34–47，2016年。[18] M. T. Nakao. 非线性椭圆方程解存在性的计算验证方法。北荷兰数学研究丛书，160：101–120，1989年。[19] M. T. Nakao、T. Kimura 和 T. Kinoshita. 热方程全离散近似的构造性先验误差估计。SIAM 数值分析杂志，51(3)：1525–1541，2013年。

[20] M. T. Nakao、M Plum 和 Y. Watanabe。《偏微分方程的数值验证方法与计算机辅助证明》，《计算数学丛书》第53卷。Springer Nature Singapore Pte Ltd.，152 Beach Road, # 21-01/04 Gateway East, 新加坡 189721，第1版，2019年。.[21] O. Oru̧c. 一种用于数值求解二维对流占优方程和二维近奇异椭圆方程的非均匀Haar小波方法。《计算机与应用数学》，77(7):1799–1820，2019年。[22] C. Reinhardt 和 J. D. Mireles James。抛物型偏微分方程不稳定流形的傅里叶–泰勒参数化：形式体系、实现与严格验证。《数学研究》，30(1):39–80，2019年。[23]S.M. Rump。INTLAB——区间实验室。载于 Tibor Csendes 编，《可靠计算的发展》，第77–104页。Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，1999年。http://www.ti3.tuhh.de/rump/.[24] Siraj ul Islam、I. Aziz 和 M. Ahmad。带非局部边界条件的二维椭圆型偏微分方程的数值解。《计算机与应用数学》，69(1):180–205，2015年。[25] J. B. Van Den Berg、C. M. Groothedde 和 J. F. Williams。金兹堡–朗道问题中径向对称局域解的严格计算。SIAM 应用动力系统杂志，14(1):423–447，2015年。[26] J. B. van den Berg 和 R. Sheombarsing。多项式向量场中连接轨道的验证计算。《数学研究》，31(2):310–373，2020年。[27] J. B. van der Berg、J.-P. Lessard 和 K. Mischaikow。利用严格分支跟踪求得全局光滑解曲线。《计算数学》，79(271):1565–1584，2010年。[28] P. Zgliczy´nski。Kuramoto-Sivashinsky方程的吸引不动点：一项计算机辅助证明。SIAM 应用动力系统杂志，1(2):215–235，2002年。[29] P. Zgliczy´nski。C^1 Lohner算法。《计算数学基础》，2(4):429–465，2002年。[30] P. Zgliczy´nski 和 K. Mischaikow。偏微分方程的严格数值计算：Kuramoto-Sivashinsky方程。《计算数学基础》，1(3):255–288，2001年。