arXiv:2304.14558v1 [math.DS] 27 Apr 2023

可测多分辨率系统、端同态与 Cuntz 关系的表示

SERGEY BEZUGLYI 与 PALLE E.T. JORGENSEN

Abstract. 本文旨在介绍作为多分辨率分析组成部分的新型函数系统。我们采用表示论方法，并运用广义多分辨率函数系统（MRS）。此外，本文还引入了可测端同态动力学中的新思想。我们的结果带来了传统度量空间技术无法处理的应用。作为本文方法的主要工具，我们精确定义了新型广义 MRS；这些系统直接源于一种动力学理论方法，该方法用于研究测度空间上的满射端同态。具体而言，我们给出了一个函数族能够定义 Cuntz 关系生成元的充要条件，并明确描述了广义小波滤波器的集合。我们的研究部分受到信号/图像处理中子带滤波器分析的启发，但其适用范围更广，还涵盖可测动力系统和复动力学等领域。

我们研究成果中的一个统一主题，是对一般测度空间中的端同态进行新的分析，并探讨其与多分辨率、表示论及广义小波系统之间的联系。

Contents

1. 引言 2 2. 端同态基础 5 2.1. 测度空间的端同态 5 2.2. 可测划分 6 2.3. Radon–Nikodym 导数与马尔可夫函数 8 2.4. 端同态的性质 9 2.5. 马尔可夫函数 12 3. 由端同态生成的算子 14 3.1. 传递算子与端同态 14 3.2. 复合算子与马尔可夫函数 16 3.3. Radon–Nikodym 导数与条件期望 20 4. 不变测度与准不变测度的 Cuntz 关系 23

Date: 2023年5月1日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 46G12, 37D45, 20K30, 22E66。*Key words and phrases.* 测度空间、端同态、多分辨率、小波滤波器、Cuntz 关系、拉东-尼科迪姆导数、马尔可夫函数。

4.1. 准不变测度 23 4.2. 不变测度 28 5. 小波滤波器集合 29 5.1. 环群在小波滤波器上的作用 29 5.2. 端同态、小波滤波器与循环表示 33 参考文献 35

1. Introduction

本文聚焦于以下对象之间的关系：测度空间（$X, \mathcal{B}, \mu$）上的满射端同态、 $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$中的传递算子、广义小波滤波器、马尔可夫函数，以及 Cuntz 关系的表示。

我们对测度空间变换、与之关联的传递算子以及 Cuntz 代数表示的分析，源自本文所提出的对一般测度空间上端同态的一种新分析。尽管以往的研究已探讨了端同态的各种特殊情形，但我们在此着重指出三个新要素：(i) 我们所处的背景是对测度空间最一般的变换；(ii) 我们通过 Cuntz 代数表示，将一种新的调和分析引入这一问题；(iii) 为此构造的 Cuntz 代数表示直接源自所研究的端同态 σ 以及对准不变测度 μ 的选取。由此，我们进而确定了一种广义小波滤波器无限维流形 $\mathfrak{M}$ 的新构造，以及典范群 $\mathcal{G}$ 在 $\mathfrak{M}$ 上的传递作用；该作用仅取决于给定的这一对 σ （端同态）和 μ （测度）。反过来，特定 Cuntz 代数（取决于 σ）的表示定义了 $B(L^2(\mu))$ 上的端同态，即 C^* 代数—— $L^2(\mu)$ 中所有有界算子构成的代数；其中每个非交换端同态都扩展了初始端同态 σ。

我们提出一类新的函数系统 $\mathfrak{M}$，作为多分辨率分析（MRA）的一部分，其动机部分源于 [ACSS22], [PR22], [CD22]。我们的方法基于表示论中的方法，并运用与测度空间上的满射端同态相关的广义迭代函数系统。关于表示论的背景知识，请参阅 [Jor18], [DJS12], [JS18]。我们关于这些广义 MRS的结果还引出了可测动力系统中的新思想，参见例如 [AJL17], [AJL 18], [And22], [BD22]。尽管我们总体上关注可测范畴中的分支系统，但我们的应用并不适用于更传统的度量方法，例如 [FS22], [RR22], [MV23]。我们转而研究一类新的广义迭代函数系统；这类系统直接源自一种更一般的动力系统理论方法，该方法通过系统研究测度空间上的端同态展开。我们的部分动机来自信号/图像处理中的子带滤波器分析，参见例如 [DJ07], [AJL 18], [BLP+10], [BMPR12]。但本文的研究更进一步，并涵盖此类。

在更广泛的背景下，这些领域可被视为可测动力系统和复动力学。关于小波滤波器、Cuntz 代数的表示、迭代函数系统、传递算子以及其他相关领域的文献十分丰富；此处列出以下参考文献，读者可从中了解更多详细信息及其他研究方法： [BJ97a], [BJ99][BJ97b], [JT19], [BJ97c], [Jor96], [Jor01], [DJ07], [DJ14b], [DJ14a], [DJ06],[DJ14b], [DJ15], [JP11], [JKS07], [JKS11], [JT17]。

正如上述论文中所指出的，对迭代函数系统，或更一般地对半分支函数系统，传统方法通常从一个固定的映射系统出发，并证明该系统存在以吸引子和关于迭代函数系统不变的测度形式表示的极限。这些构造通常以度量考量为基础，在分形调和分析、图拉普拉斯算子、边界以及对由自相似性类别给出的几何结构的分析等各种应用中发挥着重要作用。Cantor 和 Sierpinski 构造就是典型案例。相应的迭代函数系统继而可以证明能够在移位动力系统中实现。

我们目前采用的方法正好相反：我们从考察测度空间中的端同态（定义见第 2.1 小节）及其相关的可测划分（第 2.2 小节）入手。以此为起点，我们随后引入若干有界算子，用它们来定义由生成元与关系给出的非阿贝尔 C^* 代数——称为 Cuntz 代数——的表示，见第 3 节和第 4 节。这种方法有两点优势：(i) 它适用于范围广得多的（广义）MRS；(ii) 它还为解决相应的调和分析问题提供了新的直接工具。最后，我们明确描述广义小波滤波器的集合，见第 5 节。

标准测度空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 的可测变换是遍历理论的核心概念。可逆变换（自同构）及其性质已从各种角度得到广泛研究。尽管不可逆变换（端同态）在动力学及相关领域中发挥着极其重要的作用，对它们的研究却不如对自同构的研究那样受到关注。特别是，它们用于构造迭代函数系统（IFS）、传递算子和小波滤波器。这里我们提及几本近期出版的、探讨端同态及其在算子理论中应用的著作[Jor06], [PU10], [BJ18], [Haw21], [EFHN15], [Bru22], [URM22]。

通过分析标准测度空间的端同态，我们为每个端同态关联了几个作用于$L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$中的有界算子。测度空间$(X, \mathcal{B}, \mu)$的非奇异端同态 σ 自然分为两类：如果 $\mu = \mu \circ \sigma^{-1}$，则称 σ 为保测；如果 $\mu \sim \mu \circ \sigma^{-1}$，则称测度 μ 相对于 σ是准不变的。此外，如果 $\mu \circ \sigma \sim \mu$ 在 $\sigma^{-1}(\mathcal{B})$上成立，则称 σ 为前向准不变。在这种情况下，存在博雷尔函数 φ,

称为马尔可夫函数，使得

$$\int_X (f\circ\sigma)\varphi\, d\mu = \int_X f\, d\mu. \tag{1.1}$$

这一关系是定义等距算子的基础：在不变测度 μ 的情形下，复合算子 S_σ：$f \mapsto f\circ\sigma$ ；对于准不变测度 μ，则为加权复合算子 $S_\varphi : f \mapsto \sqrt{\varphi}($ $f\circ\sigma)$（此处 φ 是马尔可夫的）。这些算子与传递算子将在我们的构造中发挥关键作用。

现在我们陈述主要结果，并概述本文的组织结构。第 2 节定义本文的主要研究对象，包括：标准测度空间、可测划分、典范测度系、主观端同态、不变测度和准不变测度，以及马尔可夫函数。下一节将用到所有这些概念。第 2 节可视为关于端同态及相关概念的简要综述。第 3 节重点研究由测度空间端同态生成的线性算子。我们定义作用于有界博雷尔函数的抽象传递算子，并考察其性质。若在 $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 中考虑算子 S_σ，其中 μ 是 σ-不变的，那么 S_σ^* 就是一个具有有趣性质的传递算子，参见定理 3.9、3.14、3.15 和 3.16。特别地，算子 S_σ^* 与由 σ 的原像可测划分定义的传递算子 R_σ 相同。我们还证明了加权复合算子的类似结果。第 4 节包含将小波滤波器与 Cuntz 关系的表示联系起来的主要定理。我们回顾一下：一族等距算子 $\{T_i : i\in\Lambda\}$ 定义 Cuntz 关系，当且仅当 $\sum_{i\in\Lambda} T_iT_i^* = \mathbb{I}$，且当指标不同时，投影 $T_iT_i^*$ 两两正交，其中 Λ 为有限或可数。令 φ 为马尔可夫函数，m 为复值函数，满足 $S_\varphi^*(\sqrt{\varphi}|m|^2) = \mathbb{I}$。定义 $T_m(f) = mS_\varphi(f)$。则 T_m 是 $L^2(\mu)$ 中的一个等距算子。我们证明以下结果（见定理 4.11）。

定理 1.1. 设 σ 是 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的满端同态，其中 μ 相对于 σ 准不变。设 $\{m_i : i\in\Lambda\}$ 是一族复值函数。当且仅当 $\{T_{m_i}, i\in\Lambda\}$ 生成 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_{|\Lambda|}$ 的一个表示时，蕴含】【。

$$(i)\quad S_\varphi^*(\sqrt{\varphi}\,\overline{m}_j m_i) = \delta_{ij}\mathbb{I},$$

$$(ii)\quad \sum_{i\in\Lambda} m_i\mathbb{E}_\varphi(\overline{m}_i f) = f,\quad f\in L^2(\mu).$$

这里，$\mathbb{E}_\varphi = S_\varphi S_\varphi^*$ 是从 $L^2(\mu)$ 到子空间$\mathcal{H}_\varphi$的正交投影。

因此，在 σ-不变测度 μ的情形下，我们得到 $L^2(\mu)$的如下分解：

$$L^2(\mu) = \bigoplus_{i\in\Lambda} m_i L^2(X,\sigma^{-1}(\mathcal{B}),\mu).$$

在第 5 节中，我们着重寻找满足上述定理的函数族$\underline{m}=(m_i)\in\mathfrak{M}_\varphi$ 的描述。令 $\mathcal{G}$ 为取值于 $\ell^2(\Lambda)$上酉算子的博雷尔函数群。接下来我们证明:

定理 1.2（定理 5.5）。（1）集合 $\mathfrak{M}_\varphi$ （作为集合）同构于环群 $\mathcal{G}$。

（2）对于环群中的每个元素 $G=(g_{ij})$，都存在一个小波滤波器 $\underline{m}$，使得 $g_{ij}=S_\varphi^*(\sqrt{\varphi}\,m_i\overline{m}_j)$。

设函数 $(m_i:i\in\Lambda)$ 满足该性质。

$$S_\sigma^*(|m_i|^2)=\mathbb{I} \tag{1.2}$$

且 $S_i(f)=m_i(f\circ\sigma)$ 是 $L^2(\mu)$ 上的等距算子。

定理 1.3（定理 5.8）。设 $(m_i:i\in\Lambda)$ 是 $L^\infty(X,\sigma^{-1}(\mathcal{B}),\mu)$ 在 $L^2(\mu)$ 上的一个表示的循环向量集合，且满足 (1.2)。那么 $\underline{m}=(m_i)$ 是小波滤波器，当且仅当 $\sum_{i\in\Lambda}S_i^*S_i=\mathbb{I}$。换句话说，$\underline{m}\in\mathfrak{M}$ 当且仅当算子 S_i 是 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_{|\Lambda|}$的一个表示的生成元。

2. Basics on endomorphisms

本节将介绍标准测度空间（X、$\mathcal{B}$、μ）端同态理论中的基本定义和事实。端同态的概念是遍历理论的核心概念之一；关于端同态的基础理论和更深入的研究成果，可参见遍历理论领域的一些先驱性论文以及较新的论文和著作，例如，[Roh61], [Haw94], [CFS82], [HS91], [B´en96], [BH09], [PU10], [Haw21], 以及其中引用的论文。端同态的研究主要建立在测度空间的可测划分及其关联的博雷尔集合子代数这一概念之上。Rokhlin 在[Roh49a、Roh49b、Roh61]中率先开展了基于可测划分应用的可测动力系统系统性研究。

2.1. 测度空间的端同态。

我们首先给出本文所研究的主要对象的定义。

设 $(X,\mathcal{B})$ 是一个标准博雷尔空间，即 $(X,\mathcal{B})$ 与一个配备博雷尔集 σ-代数的波兰空间博雷尔同构。若 μ 是 $(X,\mathcal{B})$ 上的非原子博雷尔正测度，则 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 称为标准博雷尔空间。

我们将 $(X,\mathcal{B},\mu)$（或 $(X,\mathcal{B})$）的端同态 σ 定义为从 X 到其自身的可测（或博雷尔）映射（σ 是满射）。下面我们将讨论端同态的各种性质。特别地，σ 将 X 划分为子集 $\{\sigma^{-1}(x):x\in X\}$。根据集合 $\sigma^{-1}(x)$ 的基数，我们将 σ 称为有限对一、可数对一或连续统对一。无损一般性地，我们可以假设基数 $|\sigma^{-1}(x)|$是常数。集合 $\sigma^{-1}(A)$ $A\in\mathcal{B}$构成博雷尔集合的一个 σ-子代数，记为 $\sigma^{-1}(\mathcal{B})$（下文中也记为 $\mathcal{A}$，以

缩短公式）。一般而言，对于每个 $A \in \mathcal{B}$，集合 $\sigma(A)$ 并非博雷尔集合；但如果 σ 至多是可数对一的，则 $\sigma(A)$ 自动是博雷尔集合。

记 $End(X,\mathcal{B})$ 为标准博雷尔空间 $(X,\mathcal{B})$ 上所有满射端同态构成的集合（半群）。用 $M_1(X)$ 表示所有博雷尔概率无原子测度构成的集合。本文中，$M_1(X)$ 的元素将简称为测度。对于 $\sigma \in End(X,\mathcal{B})$ 和 $\mu \in M_1(X)$，我们定义测度 $\mu\circ\sigma^{-1}$ 其中 $\mu\circ\sigma^{-1}(A) := \mu(\sigma^{-1}(A))$。于是，映射 $\mu \mapsto \mu\circ\sigma^{-1}$定义了 $End(X,\mathcal{B})$ 在 $M_1(X)$ 上的一个作用。我们将关注以下两种情形：(i) 测度 $\mu\circ\sigma^{-1}$ 与 μ 等价；(ii) μ 是 σ-不变的。在情形 (i) 下，我们称端同态 σ 为非奇异的，即，

$$\mu(A) = 0 \iff \mu(\sigma^{-1}(A)) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{B}. \tag{2.1}$$

换言之，测度 μ 称为（反向） σ-准不变，记作 $\mu\circ\sigma^{-1} \sim \mu$。我们用记号 $End(X,\mathcal{B},\mu)$表示所有满射端同态 σ 所构成的半群，其中 μ 关于 σ准不变。对于固定的 μ，集合 $End(X,\mathcal{B},\mu)$包含由保持 μ的端同态构成的子半群 End_μ ，即，$\mu(A) = \mu\circ\sigma^{-1}(A)$。集合 End_μ 可视为 μ处 $End(X,\mathcal{B})$在 $M_1(X)$上的作用的稳定子。

我们还需要引入（正向）准不变测度 μ 的概念。这意味着，对于每一个 μ-可测集 A，集合 $\sigma(A)$ 都是可测的，并且 $\mu(A) = 0 \iff \mu(\sigma(A)) = 0$。

引理 2.1. 设 σ 是标准博雷尔空间 $(X,\mathcal{B})$ 上的满射端同态。那么 $M_1(X)$ 总是包含一个 σ-准不变测度 μ。

证明。每个端同态 σ 都会生成一个可数的博雷尔等价关系 $E(\sigma)$，其等价类就是 σ的轨道。根据定义，$(x,y) \in E(\sigma)$，当且仅当存在 $m,n \in \mathbb{N}_0$ 使得 $\sigma^n(x) = \sigma^m(y)$。 σ 的准不变测度与 $E(\sigma)$的准不变测度相同。于是我们可以使用 [DJK94, 命题 3.1] ，其中证明了存在 $E(\sigma)$-准不变测度。□

例2.2。设 $(X,\mathcal{B},\mu) = \prod_{i\in\mathbb{N}}(X_i,\mathcal{B}_i,\mu_i)$。定义 X上的左移位 σ： $\sigma(x_1,x_2,x_3,\cdots) = (x_2,x_3,\cdots)$。那么 σ是一个端同态。若$|X_i| = N$ 对所有 i都成立，则 σ 是 N对一映射。显然，这种构造可以得到其他类型的端同态，其分类依据是 $\sigma^{-1}(x)$的基数。若所有的 $(X_i,\mathcal{B}_i,\mu_i) = (Y,\mathcal{C},\nu)$ 都相同，且 μ是乘积测度 $\otimes_i\nu$，则 μ 是 σ-不变的。若使用不同的测度 μ_i，则测度 μ 可以相对于左移位 σ 准不变。更多细节见 [HS91], [DH94], 以及这些作者的其他论文。

2.2. 可测划分。关于可测划分的定义，参见 [Roh49b]（或 [CFS82]）。

设 $\xi = \{C_\alpha : \alpha \in I\}$ 是标准概率测度空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的一个划分，其中 $C_\alpha \in \mathcal{B}$（指标集 I可以是可数的，也可以是

不可数的；我们着重讨论指标集不可数的情形）。形如 $\bigcup_{\alpha\in I'} C_\alpha$, $I'\subset I$ 的博雷尔集合 A 称为 ξ-集。令 $\mathcal{B}(\xi)$ 表示由所有 ξ-集生成的 σ-代数。

一个划分 ξ 被称为可测的，如果 $\mathcal{B}(\xi)$ 包含一个可数子集 $\{D_j\}$，该子集由 ξ-集合构成，并且能够区分 ξ 中任意两个元素 C、C'。这意味着存在 D_i，使得 $C\subset D_i$ 和 $C'\subset X\setminus D_i$，或者 $C'\subset D_i$ 和 $C\subset X\setminus D_i$。令 π 为从 X 到 X/ξ 的自然投影，即 $\pi(x)=C_x$，其中 C_x 是 ξ 中包含 x 的元素。利用投影 $\pi\colon X\to X/\xi$，可以定义一个测度空间 $(X/\xi,\mathcal{B}/\xi,\mu_\xi)$，其中 $E\in\mathcal{B}/\xi$ 当且仅当 ξ-集合 $\pi^{-1}(E)$ 属于 $\mathcal{B}$ 且 $\mu_\xi=\mu\circ\pi^{-1}$。

以下结果已在 [Roh49b]中证明。

引理 2.3. 标准测度空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的一个划分 ξ 是可测的，当且仅当 $(X/\xi,\mathcal{B}/\xi,\mu_\xi)$ 是一个标准测度空间。

若划分 ζ 的每个元素 C 都是 ξ 的 ζ-集合，则称划分 ζ 加细 ξ（记作 $\xi\prec\zeta$）。事实证明，每个划分 ζ 都有一个可测外壳，即存在一个可测划分 ξ，使得 $\xi\prec\zeta$，且 ξ 是具有此性质的最大可测划分。若 ξ_α 是可测划分族，则它们的乘积 $\bigvee_\alpha\xi_\alpha$ 是一个可测划分 ξ，由以下条件唯一确定：(i) 对所有 α，$\xi_\alpha\prec\xi$；(ii) 若 η 是一个可测划分且 $\xi_\alpha\prec\eta$，则 $\xi\prec\eta$。类似地，可定义可测划分的交 $\bigwedge_\alpha\xi_\alpha$。标准测度空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的可测划分集合与 $\mathcal{B}$ 的完备 σ-子代数 $\mathcal{B}'$ 的集合之间存在一一对应关系。

下面给出的定理 2.5 清楚地展现了可测划分的作用。这一著名结果运用了测度解体的概念。

定义 2.4. 对于标准概率测度空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 以及 X 的可测划分 ξ，若一族测度 $(\mu_C)_{C\in X/\xi}$ 满足以下条件，则称其为关于 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 和 ξ 的条件测度系统：

(i) 对每个 $C\in X/\xi$，μ_C 是 σ-代数 $\mathcal{B}_C:=\mathcal{B}\cap C$ 上的测度，使得 $(C,\mathcal{B}_C,\mu_C)$ 是标准概率测度空间；

(ii) 对任意 $B\in\mathcal{B}$，函数 $C\mapsto\mu_C(B\cap C)$ 是 μ_ξ-可测的；

(iii) 对任意 $B\in\mathcal{B}$，

$$\mu(B)=\int_{X/\xi}\mu_C(B\cap C)\,d\mu_\xi(C). \tag{2.2}$$

条件（2.2）可以改写为以下等价形式：

$$\int_X f(x)\,d\mu(x)=\int_{X/\xi}\left(\int_C f(y)\,d\mu_C(y)\right)\,d\mu_\xi(C). \tag{2.3}$$

可测划分由以下结果刻画。

定理 2.5（[Roh49b]）。对于标准概率测度空间（$X, \mathcal{B}, \mu$）上的任意可测划分 ξ，都存在唯一的条件测度系统（μ_C）。反之，若（μ_C）$_{C\in X/\xi}$是关于（（$X, \mathcal{B}, \mu$） ξ）的条件测度系统，则 ξ是可测划分。

我们将定理 2.5 应用于端同态 $\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$ 的情形。令 ξ_σ为 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 的可测划分，其划分为点 $x \in X$ 的原像 $\sigma^{-1}(x) = C_x$。令 (μ_C) 为由 ξ_σ 定义的条件测度系统。当 $(X/\xi, \mu_\xi)$ 与 (X, μ) 同构时（例如，当 σ为左移位或 $\sigma: z \mapsto z^N, z \in \mathbb{T}^1$ 时），我们看到关系 (2.2) 和 (2.3) 具有如下形式

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X \left(\int_C f(y)\, d\mu_x(y) \right) d\mu(x). \tag{2.4}$$

这种分解是我们表示由 σ生成的传递算子的关键事实。

在大多数重要情形中，测度的解体适用于概率（有限）测度。许多书籍和文章都讨论了测度解体问题。这里我们参考 [Bog07], [CFS82], [Fab87, Fab00], [Kec95]。一些作者研究了无限的 σ-有限测度情形，例如参见 [Sim12]。

定理 2.6（[Sim12]）。设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{A}, \nu)$ 是带有 σ-有限测度的标准测度空间，并设 $\pi : X \to Y$ 是一个可测映射。设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{A}, \nu)$ 如上所述。假设 $\widehat{\mu} = \mu \circ \pi^{-1} \ll \nu$。那么存在唯一的条件测度系统 $(\nu_y)_{y\in Y}$，对应于 μ。对于 ν-几乎处处的情形，ν_y 是一个 σ-有限测度。

2.3. Radon-Nikodym 导数与马尔可夫函数。设$\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$。回想在这种情况下，$\mu \circ \sigma^{-1} \sim \mu$。于是我们可以定义拉东-尼科迪姆导数 $\rho_\mu(x) := \frac{d\mu\circ\sigma^{-1}}{d\mu}(x)$，它是一个博雷尔函数，满足

$$\int_X f(\sigma x)\, d\mu = \int_X f(x)\rho_\mu(x)\, d\mu, \quad f \in L^1(\mu). \tag{2.5}$$

令 $\rho_n(x) = \frac{d\mu\circ\sigma^{-n}}{d\mu}(x)$，我们得到满足方程 $\rho_{n+m}(x) = \rho_m(\sigma^n(x))\rho_n(x)$ 的拉东–尼科迪姆余循环。

注 2.7。假设 $\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$，且 ν是一个与 μ等价的测度，即存在一个博雷尔函数 ξ，使得 $d\nu(x) = h(x)d\mu(x)$。那么σ 相对于 ν也是非奇异的，并且 $\rho_\nu(x) = h(\sigma x)\rho_\mu(x)h^{-1}(x)$。

每个 $\sigma \in End(X, \mathcal{B})$都定义了一个线性算子 S_σ，称为有界博雷尔函数空间上的复合算子：

$$S_\sigma(f) = f \circ \sigma, \qquad f \in \mathcal{F}(X, \mathcal{B}).$$

当在 a L^2 空间中考虑时，这个算子也称为 Koopman 算子。

映射 $A \mapsto \mu(\sigma(A))$ $A \in \mathcal{B}$ 在子代数$\sigma^{-1}(\mathcal{B})$上定义了一个测度。如果 μ 是前向准不变测度，那么存在唯一一个$\sigma^{-1}(\mathcal{B})$-可测函数 $\omega_\mu(x) = \frac{d\mu\circ\sigma}{d\mu}(x)$，使得

$$\int_X f(\sigma x)\omega_\mu(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu, \quad f \in L^1(\mu). \tag{2.6}$$

根据拉东-尼科迪姆导数的唯一性可推得

$$\omega_\mu(x) = \rho_\mu(\sigma(x))^{-1}$$

将这些函数视为关于 $\sigma^{-1}(\mathcal{B})$ 可测的函数时。

以下陈述众所周知，证明从略。

引理 2.8. (1) 复合算子 S_σ: $L^2(X,\mathcal{B},\mu) \to L^2(X,\sigma^{-1}(\mathcal{B})\ \mu)$ 是等距算子，当且仅当 $\mu\circ\sigma^{-1} = \mu$。

(2) 算子 S_σ on $L^2(\mu)$ 有界，当且仅当存在常数 $k > 0$，使得

$$\frac{\mu(\sigma^{-1}(A))}{\mu(A)} \le k, \quad A \in \mathcal{B}.$$

(3) 若 μ 是正向准不变测度，则

$$T_\sigma : f \longmapsto \sqrt{\omega_\mu}(f\circ\sigma)$$

是从 $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 到 $L^2(X,\sigma^{-1}(\mathcal{B})\ \mu)$ 上的等距算子。

2.4. 端同态的性质。本小节为方便读者，汇总了测度空间端同态的性质。下文中我们默认采用模零约定，即某个性质（公式、关系等）相对于固定测度几乎处处成立。

定义 2.9. 设 σ 是 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上具有准不变测度 μ 的满射端同态。

(i) 若对任意正测度集合 A，都存在 $n > 0$ 使得 $\mu(\sigma^n(A)\cap A) > 0$，则称端同态 σ 为保守的。

(ii) 若 A 为 σ-不变集，即 $\sigma^{-1}(A) = A$，且 A 或 $X\setminus A$ 的测度为零，则称端同态 σ 为遍历的。等价地，若对于有界博雷尔函数 f，条件 $f\circ\sigma = f$ 蕴含 f 模零意义下为常数，则称 σ 为遍历的。

(iii) 任意端同态 $\sigma \in End(X,\mathcal{B},\mu)$ 都会生成如下子代数序列:

$$\mathcal{B} \supset \sigma^{-1}(\mathcal{B}) \ \cdots\ \supset \sigma^{-i}(\mathcal{B}) \supset \ \cdots$$

那么，如果 $\sigma \in End(X,\mathcal{B},\mu)$ 满足精确性，则称其为精确的。

$$\mathcal{B}_\infty := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \sigma^{-k}(\mathcal{B}) = \{\emptyset, X\} \mod 0.$$

(iv) 如果对于每个非负博雷尔函数 f，函数 $\sigma(X,\mathcal{B},\mu)$ 的非奇异端同态称为 μ-常返的，如果该函数

$$\Sigma(f)=\sum_{n\geq 0} f(\sigma^n(x))\omega_n(x)$$

只取 0 和 ∞ μ 的值，几乎处处成立，其中 $\omega_n(x) = \dfrac{d\mu\circ\sigma^n}{d\mu}(x)$。

在下一条评注中，我们列举若干结果，以说明定义（2.9）中给出的端同态的性质。我们使用了来自 [Sil88],[HS91], [Haw94] 的一些结果。

评注 2.10。（1）每个精确的端同态都是遍历的。存在遍历但不精确的端同态的例子。按照遍历理论中的惯例，我们总可以不失一般性地假设端同态是遍历的。

（2）存在非精确的单侧移位（n 对一端同态）的例子。

（3）我们注意到，存在不保守的遍历端同态。

(4) 如果一个端同态 σ 关于有限测度 μ 是递归的，当且仅当 $\sum_{n\geq 0}\omega_n(x) = \infty$。

(5) μ-循环端同态是保守的。

由于每个满射端同态都定义了一个等距算子 S_σ（或 T_σ），见引理 2.8，因此我们可以将 Wold定理应用于这些对象。

定理 2.11（Wold定理）。设 S 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的等距算子。定义

$$\mathcal{H}_\infty=\bigcap_n S^n\mathcal{H},$$

and

$$\mathcal{H}_{shift}=N_{S^*}\oplus SN_{S^*}\oplus\cdots\oplus S^kN_{S^*}\oplus\cdots.$$

那么，以下结论成立。

(1) 空间 $\mathcal{H}$ 被分解为正交直和

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_\infty\oplus\mathcal{H}_{shift}.$$

(2)

$$\mathcal{H}_\infty=\{x\in\mathcal{H}:\|(S^*)^nx\|=\|x\|,\ \forall n\in\mathbb{N}\}.$$

（3）限制在 $\mathcal{H}_\infty$ 上的算子 S 是一个酉算子，而 S 是空间 $\mathcal{H}_{shift}$ 中的单边移位算子。

对于 $\sigma\in End(X,\mathcal{B},\mu)$，定义

$$\mathcal{B}_\infty=\bigcap_{n=0}^{\infty}\sigma^{-n}(\mathcal{B}),$$

并令 $\mathcal{A}_\sigma = \{A\in\mathcal{B}:\ \sigma^{-1}(A) = A\}$ 为 X 中 σ-不变子集构成的子代数。

令 ζ 为 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的一个划分，其划分为 σ 的轨道（回忆一下，如果存在 n,m 使得 $\sigma^n(x)=\sigma^m(y)$，则 $x \overset{\zeta}{\sim} y$）。令 η 为 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的划分，使得如果存在 n 使得 $\sigma^n(x)=\sigma^n(y)$，则 $x \overset{\eta}{\sim} y$。我们分别用 ζ' 和 η' 表示 ζ 和 η 的可测横截集。

如果 ϵ 表示将 X 划分为点，那么我们有递减的可测划分序列 $\{\sigma^{-i}(\epsilon)\}_{i=0}^{\infty}$:

$$\epsilon \succeq \sigma^{-1}(\epsilon) \succeq \sigma^{-2}(\epsilon)\cdots.$$

如 [Roh61], 所示，以下结果成立。

$$\zeta' \preceq \eta', \qquad \eta' = \bigwedge_n \sigma^{-n}(\epsilon)$$

and

$$\mathcal{A}(\zeta') = \mathcal{A}_\sigma, \qquad \mathcal{A}(\eta') = \mathcal{B}_\infty.$$

特别地，如果划分 ζ' 是平凡的，则 σ 是遍历的；如果划分 η' 是平凡的，则 σ 是精确的。

由于 η' 是可测划分，我们可以定义商测度空间 $(Y,\nu)=(X/\eta',\mathcal{B}/\eta',\mu_{\eta'})$，其中 $\mathcal{B}/\eta'=\mathcal{B}_\infty$。

以下结果由 Wold定理 推导得出，详情见 [BJ18]。

推论2.12. (1) 设 $\pi: X\to Y$ 为自然投影。则存在一个保测自同构 $\widetilde{\sigma}:(Y,\nu)\to(Y,\nu)$，使得 $\widetilde{\sigma}$ 是 σ 的自同构因子，即

$$\widetilde{\sigma}\circ\pi = \pi\circ\sigma.$$

(2) 设 $S_\sigma: f\to f\circ\sigma$ 为 $\mathcal{H}=L^2(\mu)$上的等距算子。则对于 S_σ的 Wold分解 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_\infty\oplus\mathcal{H}_\infty^\perp$，有

$$\mathcal{H}_\infty = L^2(Y,\nu),$$

而 S_σ 在 $\mathcal{H}_\infty$ 上的限制对应于由 $\widetilde{\sigma}$, $U(f)=f\circ\widetilde{\sigma}$定义的酉算子 U。

事实证明，每个非奇异端同态都是某个可逆动力系统的因子。若存在映射 $\tau:(Y,\mathcal{C},\nu)\to(X,\mathcal{B},\mu)$，使得.....，则称自同构 $T\in Aut(Y,\mathcal{C},\nu)$ 是端同态 $\sigma\in End(X,\mathcal{B},\mu)$ 的自然扩张。

(i) $\mathcal{C}=\bigvee_{n=0}^{\infty}T^n(\tau^{-1}\mathcal{B})$，模零，
(ii) 存在一个测度 $\nu'\sim\nu$，使得 $\omega_{\nu'}=\omega_\mu\circ\tau$。

我们回顾一个重要事实：每个 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的非奇异端同态σ 都存在一个自然扩张，参见 [Roh49a], [Sil88], [B´en96],以及例 2.13。

例 2.13. 设 σ 是标准博雷尔空间 $\widehat{\qquad}$ $\widehat{\qquad}(X,\mathcal{B})$ 上的一个满端同态。定义集合 X 如下： X 是 $X\times X\times X\times\cdots$ 的子集，使得

$$\widehat{x}=(x_i)_{i\geq 0}\in\widehat{X} \iff \sigma(x_{i+1})=x_i \ \ \forall i\geq 0.$$

$\widehat{}$集合 X 通常称为由 (X,σ) 构造的螺旋体，记作 $\backsim Sol_{(X,\sigma)}$。注意， X 是乘积空间 $X\times X\times\cdots$ 中的闭子集。$\widehat{}$ $\widehat{}$由于 X 是博雷尔集，它继承了乘积空间上的博雷尔结构 $\mathcal{B}$。

$\widehat{}$ $\widehat{}$通过如下定义映射 $\widehat{\sigma}: X\to X$

$$\widehat{\sigma}(x_0,x_1,x_2,\dots)=(\sigma(x_0),x_0,x_1,\dots).$$

$\widehat{}$那么很容易验证， $\widehat{\sigma}$ 是从 X 到其自身的一一博雷尔映射，而移位

$$\tau:(x_0,x_1,x_2,\dots)\mapsto(x_1,x_2,x_3,\dots)$$

是 $\widehat{\sigma}$, $\tau=\widehat{\sigma}^{-1}$ 的逆映射。

$\widehat{}$设 $\pi_n: X\to X$ 是从 X 到第 n 个坐标的投影：对于 $\widehat{x}=(x_n)$，令 $\pi_n(\widehat{x})=x_n$, $n\geq 0$。于是， π_n 可以扩展为映射$\frown$ $\frown$ $f\mapsto f\circ\pi_n$，将 $\mathcal{F}(X,\mathcal{B})$ 映到 $\mathcal{F}(X,\mathcal{B})$。根据上述定义$\widehat{}$，可得 $\pi_{n+1}\widehat{\sigma}(\widehat{x})=\pi_n(\widehat{x})$, 并且 π_0 是从 $(X,\widehat{\sigma})$ 到 (X,σ) 的因子映射，即，

$$\pi_0\widehat{\sigma}=\sigma\pi_0.$$

命题 2.14. 设 μ 是标准博雷尔空间 $(X,\mathcal{B})$ 上的博雷尔连续测度，且关于端同态 σ 准不变。设 $(\widehat{X},\widehat{B})$ 上的测度 $\mathbb{P}$ 由关系 $\mathbb{P}\circ\pi_0^{-1}=\mu$ 定义。那么映射

$$L^2(\mu)\ni f\xrightarrow{V_0} f\circ\pi_0\in L^2(\mathbb{P})$$

是一个等距算子。此外，算子 $U:\ L^2(\mathbb{P})\to L^2(\mathbb{P})$ 由以下公式定义

$$U=V_0S_\sigma V_0^*$$

是一个等距算子。

2.5. 马尔可夫函数。本小节中，我们考虑由端同态 $\sigma\in End(X,\mathcal{B},\mu)$ 定义的一类函数。以下定义的提出受关系 (2.6) 的启发。

定义 2.15. 设 σ 是 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上的满端同态。满足以下条件的函数 $\varphi\in\mathcal{F}(X,\mathcal{B})$

$$\int_X(f\circ\sigma)\varphi\,d\mu=\int_X f\,d\mu \tag{2.7}$$

对所有 $f\in L^1(\mu)$ 均成立的函数称为马尔可夫函数。所有马尔可夫函数构成的集合记为 $M(\sigma,\mu)$。我们记 $M_2(\sigma,\mu)=M(\sigma,\mu)\cap L^2(\mu)$。

Haw94]{HS91], [DH94], 等人曾在一系列论文 [中研究马尔可夫函数。

注 2.16. (1) 集合 $M(\sigma,\mu)$ 是凸的。

(2) 假设 μ 是 $\sigma\in End(X,\mathcal{B},\mu)$ 的正向准不变测度。那么马尔可夫函数集合 $M(\sigma,\mu)$ 非空，因为根据关系 (2.6)， $\omega_\mu\in M(\sigma,\mu)$。

(3) 对于两个等价测度 μ 和 ν，我们讨论定理 3.15 中函数ω_μ 和 ω_ν 之间的关系。如上所述，通过令 $\omega_n(x) = \frac{d\mu\circ\sigma^n}{d\mu}(x)$（其中 $\omega_1 = \omega_\mu$），函数 ω_μ 生成一个余循环。

（4）设 g 是从 $L^1(\mu)$ 到 [Haw94] 的一个函数。已有研究表明，对于测度 $d\nu = gd\mu$，以下结论成立：

$$\int_X f(\sigma x)\frac{g\omega_\nu}{g\circ\sigma}(x)\,d\mu = \int_X f(x)\,d\mu, \quad f \in L^1(\mu).$$

这意味着函数 $\frac{g\omega_\nu}{g\circ\sigma}$ 关于（σ， μ）是马尔可夫的。

基于注 2.16 中的事实，我们证明以下结果。

命题 2.17. 设 $\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$。假设测度 ν 与 μ 和 $g = \frac{d\nu}{d\mu}$ 等价。那么

$$M(\sigma,\nu) = g^{-1}M(\sigma,\mu)(g\circ\sigma).$$

证明. 对于函数 $\varphi \in M(\sigma, \mu)$，证明 $h = g^{-1}\varphi(g\circ\sigma) \in M(\sigma, \nu)$。对于任意 $f \in L^1(\nu)$，我们有

$$\begin{aligned}\int_X (f\circ\sigma)g^{-1}\varphi(g\circ\sigma)\,d\nu &= \int_X (fg)\circ\sigma\varphi\,d\mu\\ &= \int_X fg\,d\mu\\ &= \int_X f\,d\nu.\end{aligned}$$

这表明函数 h 属于 $M(\sigma,\nu)$。

反之，设 φ 是来自 $M(\sigma,\nu)$ 的马尔可夫函数。由于 $d\nu = gd\mu$,

$$\begin{aligned}\int_X fg\,d\mu &= \int_X (f\circ\sigma)\varphi g\,d\mu\\ &= \int_X (f\circ\sigma)(g\circ\sigma)[(g\circ\sigma)^{-1}\varphi g]\,d\mu.\end{aligned}$$

后者意味着 $(g\circ\sigma)^{-1}\varphi g \in M(\sigma,\mu)$。 □

引理 2.18. 设 $\varphi_1, ..., \varphi_k$ 是来自 $M(\sigma,\mu)$ 的马尔可夫函数。那么函数 $\psi = (\varphi_k\circ\sigma^{k-1})\cdots(\varphi_2\circ\sigma)\varphi_1$ 属于 $M(\sigma^k,\mu)$。

证明。我们计算

$$\begin{aligned}\int_X (f\circ\sigma^k)\psi\,d\mu &= \int_X [(f\circ\sigma^{k-1})\circ\sigma(\varphi_k\circ\sigma^{k-2})\circ\sigma\cdots(\varphi_2\circ\sigma)]\varphi_1\,d\mu\\ &= \int_X (f\circ\sigma^{k-1})(\varphi_k\circ\sigma^{k-2})\cdots(\varphi_3\circ\sigma)\varphi_2\,d\mu\\ &\quad\cdots\cdots\\ &= \int_X f\,d\mu.\end{aligned}$$

□

3. Operators generated by endomorphisms

本节考察由 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的满射端同态自然定义的若干线性算子。这些算子作用于 $L^2(\mu)$ 及其他函数空间中。

3.1. 传递算子与端同态。我们在一般情形下定义传递算子，只用到空间（$X,\mathcal{B}$）的博雷尔结构。传递算子已广泛应用于各种动力系统的研究，并利用了相空间的性质。

定义 3.1. 设 $\mathcal{F}(X,\mathcal{B})$ 为所有有界博雷尔函数[1]的集合，并设 $R\colon \mathcal{F}(X,\mathcal{B}) \to \mathcal{F}(X,\mathcal{B})$ 是一个线性算子。若 R满足以下性质，则称其为传递算子：

(i) $f \geq 0 \implies R(f) \geq 0$（即 R 是一个正算子）；
(ii) 对任意博雷尔函数 $f,g \in \mathcal{F}(X,\mathcal{B})$，提出性质成立

$$R((f\circ\sigma)g) = fR(g). \tag{3.1}$$

为了强调传递算子 R 是由满端同态σ定义的，我们也将 R 写作 (R,σ)。

设 $\mathbb{I}$ 为定义在 $(X,\mathcal{B})$ 上且仅取值为 1 的函数。若对于所有 $x\in X$， $R(\mathbb{I})(x) > 0$，则称 R 为严格传递算子。若 $R(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$，则称传递算子 R 为归一化的。

每个传递算子 R 都会在概率测度集合 $M_1(X)$ 上定义一个作用：给定 $\mu\in M_1(X)$，令

$$(\mu R)(f) = \int_X R(f)\, d\mu, \quad f\in\mathcal{F}(X,\mathcal{B}).$$

若 $\mu = \mu R$，则称 μ 为 R-不变的。若测度 $\mu\in M_1(X)$满足 μ σ-不变性且 $\mu R = \mu$，则称其相对于传递算子（R,σ）是强不变的。

将传递算子在巴拿赫空间或希尔伯特空间上的限制，为研究其性质提供了更多可能性。

引理 3.2. 设 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 是一个概率标准测度空间。假设 (R,σ) 是作用于 $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 中的归一化传递算子，其中$\mu\in M_1(X)$。那么，当且仅当 $R^*(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ 时， μ 关于 (R,σ) 强不变。

证明。此处及下文中，我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mu$ 表示 $L^2(\mu)$ 中的内积。由于 R 已归一化，我们可以写成

$$\langle f,\mathbb{I}\rangle_{\mu\circ\sigma^{-1}} = \langle f\circ\sigma, R^*(\mathbb{I})\rangle_\mu = \langle R(f\circ\sigma),\mathbb{I}\rangle_\mu = \langle fR(\mathbb{I}),\mathbb{I}\rangle_\mu = \langle f,\mathbb{I}\rangle_\mu,$$

即 μ 是 σ 不变的，如果 $R^*(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$。

[1]在本节中，为明确起见，我们将考虑实值函数；复值函数的情形也可以类似地处理。

类似地，我们看到条件 $R^*(\mathbb{1}) = 1$ 等价于 $\mu = \mu R$:

$$\langle f, \mathbb{1}\rangle_{\mu R} = \langle R(f), \mathbb{1}\rangle_\mu = \langle f, R^*(\mathbb{1})\rangle_\mu = \langle f, \mathbb{1}\rangle_\mu.$$

□

例 3.3。设 $\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$、 $\mu(X) = 1$，并设 ξ_σ 为 X 的划分，由原像 $\{\sigma^{-1}(x): x \in X\}$ of σ 定义。我们给出一个传递算子的例子 R_σ，它由 X 上关于划分 ξ_σ 的条件测度系统 $\{\mu_C\}$（见第 2.2 小节）确定。在标准概率测度空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上定义一个作用于有界博雷尔函数的线性算子 R_σ，令

$$R_\sigma(f)(x) := \int_{C_x} f(y)\, d\mu_{C_x}(y) \tag{3.2}$$

其中 $C_x = \sigma^{-1}(x)$。

引理 3.4。由 (3.2) 定义的算子 R_σ: $\mathcal{F}(X, \mathcal{B}) \to \mathcal{F}(X, \mathcal{B})$ 是一个传递算子。

证明。显然， R_σ 是一个正归一化算子。为验证 (3.1) 成立，我们计算

$$\begin{aligned} R_\sigma((f \circ \sigma)g)(x) &= \int_{C_x} (f \circ \sigma)(y) g(y)\, d\mu_{C_x} \\ &= f(x) \int_{C_x} g(y)\, d\mu_{C_x}(y) \\ &= f(x)(R_\sigma g)(x). \end{aligned}$$

这里我们用到了以下事实：对于 $y \in C_x = \sigma^{-1}(x)$， $f(\sigma(y)) = f(x)$。 □

对于作用于空间（$X, \mathcal{B}, \mu$）上的满端同态 σ，我们考虑 $\mathcal{B}$ 的子代数 $\mathcal{A} = \{\sigma^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$。众所周知，存在条件期望 $\mathbb{E}_\sigma$: $L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \to L^2(X, \sigma^{-1}(\mathcal{B}), \mu)$。为简化公式，我们还将使用以下记号： $\mathcal{A} = \sigma^{-1}(\mathcal{B})$, $L^2(\mu) = L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$，以及 $L^2(\mu_\mathcal{A}) = L^2(X, \sigma^{-1}(\mathcal{B}), \mu)$。下面，我们将用复合算子$S_\sigma$显式描述算子 $\mathbb{E}_\sigma$。

事实证明，对于每个传递算子 R，都可以定义另一个算子，它在某种意义上类似于条件期望。为此，设 (R, σ) 是一个归一化传递算子。我们定义

$$E : \mathcal{F}(X, \mathcal{B}) \to \mathcal{F}(X, \sigma^{-1}(\mathcal{B})) : f \mapsto R(f) \circ \sigma. \tag{3.3}$$

我们讨论命题 3.5 中算子 E 的性质。其中一些性质已在 [BJ18] 中得到证明。

命题 3.5. 设 R 是一个归一化传递算子，且 $E(f) = R(f) \circ \sigma$。则以下性质成立:

(1) E 为正，且 $E^2 = E$,

$E(\mathcal{F}(X,\mathcal{B})) = \mathcal{F}(X,\sigma^{-1}(\mathcal{B}))$,
$E|_{\mathcal{F}(X,\sigma^{-1}(\mathcal{B}))} = id$,$R\circ E\circ R = R^2$ 和
$R\circ E = R$。

(2) 对于 $S_\sigma(f) = f\circ\sigma$，我们有

$$(RS_\sigma)(f) = f, \qquad (S_\sigma R)(f) = E(f).$$

(3) 有界博雷尔函数 f属于 $\mathcal{F}(X,\sigma^{-1}(\mathcal{B}))$，当且仅当存在函数 $g\in\mathcal{F}(X,\mathcal{B})$ 使得 $f = g\circ\sigma$。

证明。这些性质可直接证明。我们只需验证 $R\circ E\circ R = R^2$。事实上，

$$R[E(R(f))] = R[R(R(f)\circ\sigma] = R^2(f)R(\mathbb{I}) = R^2(f).$$

□

推论 3.6。设 R 为 (3.2) 中定义的传递算子。则条件期望 $E\colon \mathcal{F}(X,\mathcal{B}) \to \mathcal{F}(X,\sigma^{-1}(\mathcal{B}))\colon f\mapsto R(f)\circ\sigma$由下式给出

$$E(f) = R(f)\circ\sigma = \int_{\sigma^{-1}(\sigma(x))} f(y)\, d\mu_{C_{\sigma(x)}}(y).$$

3.2. 复合算子与马尔可夫函数。我们回顾一下记号：σ 是概率测度空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上的满射端同态，$S_\sigma\colon f\mapsto f\circ\sigma$是复合算子，而 $M(\sigma,\mu)$ 是马尔可夫函数的集合。

设 $t = t(x)$ 是一个有界博雷尔函数，μ 是 $(X,\mathcal{B})$ 上的一个 σ-不变概率测度。我们通过如下定义在 $L^2(\mu)$ 上的算子 P_t：

$$P_t(f) = t(f\circ\sigma), \quad f\in L^2(\mu).$$

我们称算子 P_t a 为加权复合算子。显然，P_t 是 $L^2(\mu)$ 中的一个有界算子。

定理 3.7. (1) 对于上述的 $\sigma\in End(X,\mathcal{B},\mu)$，考虑希尔伯特空间 $L^2(\mu)$ 上的复合算子 S_σ。那么伴随算子 S_σ^* 的作用公式为：

$$S_\sigma^*(g) = \frac{(gd\mu)\circ\sigma^{-1}}{d\mu}, \quad g\in L^2(\mu_{\mathcal{A}}). \tag{3.4}$$

(2) 伴随算子 S_σ^* 是一个传递算子

$$S_\sigma^*(g(f\circ\sigma)) = fS_\sigma^*(g).$$

当且仅当 μ 是 σ-不变的，传递算子 S_σ^* 才是归一化的。

(3) 对于函数 $t\in\mathcal{F}(X,\mathcal{B})$，伴随算子 P_t^* 是一个非归一化传递算子。

证明。（1）对于函数 f、$g \in L^2(\mu)$，我们有

$$\begin{aligned}\langle S_\sigma f, g\rangle_\mu &= \int_X (f\circ\sigma) g \, d\mu \\ &= \int f \ (gd\mu)\circ\sigma^{-1} \\ &= \int f \frac{(gd\mu)\circ\sigma^{-1}}{d\mu} \, d\mu \\ &= \langle f, S_\sigma^* g\rangle_\mu\end{aligned}$$

这就证明了（3.4）。

(2) 为了证明提出性质，我们对任意函数$f, g, h \in L^2(\mu)$进行计算，

$$\begin{aligned}\int_X h S_\sigma^*((f\circ\sigma)g) \, d\mu &= \int_X S_\sigma(h)(f\circ\sigma) g \, d\mu \\ &= \int_X ((hf)\circ\sigma) \ g \, d\mu \\ &= \int_X hf S_\sigma^*(g) \, d\mu.\end{aligned}$$

最后，我们看到，

$$\int_X f \ d\mu\circ\sigma^{-1} = \int_X (f\circ\sigma)_{\mathbb{I}} \ d\mu = \int_X f S_\sigma^*(_{\mathbb{I}}) \, d\mu,$$

以及 $S_\sigma^*(\mathbb{I}) = {}_{\mathbb{I}} \iff \mu\circ\sigma^{-1} = \mu$。

(3) 与（1）中的证明相同，可得公式

$$P_t^*(g) = \frac{(tgd\mu)\circ\sigma^{-1}}{d\mu}, \quad g \in L^2(\mu_{\mathcal{A}}).$$

这表明 P_t^*未经过归一化。

为证明 P_t^*满足提出性质，我们写作

$$\begin{aligned}\langle h, P_t^*(g(f\circ\sigma))\rangle_\mu &= \langle P_t(h), g(f\circ\sigma)\rangle_\mu \\ &= \langle t(h\circ\sigma), g(f\circ\sigma)\rangle_\mu \\ &= \langle P_t(hf), g\rangle_\mu \\ &= \langle h, f P_t^*(g)\rangle_\mu.\end{aligned}$$

□

推论 3.8。（1）设 $\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$ 满足 $\mu = \mu\circ\sigma^{-1}$。则条件期望 $\mathbb{E}_\sigma$: $L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \to L^2(X, \mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ 可表示为 $S_\sigma S_\sigma^*$。

(2) 如果 μ 是前向准不变的，那么条件期望 $\mathbb{E}_\sigma$ 与 $T_\sigma T_\sigma^*$ 一致，其中等距算子 $T_\sigma(f) = \sqrt{\omega_\mu}(f\circ\sigma)$ 在引理 2.8 中定义。

证明。由恒等式 $S_\sigma^* S_\sigma = \mathbb{I}$ 可知 $(S_\sigma S_\sigma^*)^2 = S_\sigma S_\sigma^*$。

接下来，我们验证 $\langle f, S_\sigma S_\sigma^*(h)\rangle_\mu = \langle f, h\rangle_\mu$ 对于 $h \in L^2(\mu_{\mathcal{A}})$。回想一下，如果 $f \in L^2(\mu_{\mathcal{A}})$，那么存在 $g \in L^2(\mu)$ 使得 $f = g \circ \sigma$。然后，利用 S_σ^* 是一个归一化传递算子（定理 3.7）这一事实，我们有

$$\begin{aligned}\langle g\circ\sigma, S_\sigma S_\sigma^*(h)\rangle_\mu =& \langle S_\sigma^*(g\circ\sigma), S_\sigma^*(h)\rangle_\mu\\ =& \langle g S_\sigma^*(\mathbb{I}), S_\sigma^*(h)\rangle_\mu\\ =& \langle g, S_\sigma^*(h)\rangle_\mu\\ =& \langle g\circ\sigma, h\rangle_\mu\\ =& \langle f, h\rangle_\mu\end{aligned}$$

投影 $S_\sigma S_\sigma^*$ 的正交性由关系

$$\langle S_\sigma S_\sigma^* f, g\circ\sigma\rangle_\mu = \langle S_\sigma^* f, g\rangle_\mu = \langle f, g\circ\sigma\rangle_\mu.$$

这证明了 $\mathbb{E}_\sigma = S_\sigma S_\sigma^*$。

（2）准不变测度 μ 的情形可以类似地处理。注意，ω_μ 是一个关于 $\sigma^{-1}(\mathcal{B})$ 可测的博雷尔函数。因此，对于每个函数 $f \in L^2(\mu_{\mathcal{A}})$，都存在一个函数 $g \in L^2(\mu)$，使得 $f = \sqrt{\omega_\mu}(g\circ\sigma)$。然后重复上述计算。细节留给读者。□

我们为每个端同态 $\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$ 关联了两个传递算子 R 和 S_σ^*。结果表明，它们在 $L^2(\mu)$ 中是相同的。

定理 3.9. 设 $\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$。则传递算子 R_σ 和 S_σ^* 在 $L^2(\mu)$ 中重合，其中 R_σ 由 (3.2) 定义，且 S_σ^* 满足 (3.4)。

证明。我们使用关于条件测度 μ_x 的解体来计算 $S_\sigma^*(f)$，其中条件测度定义在 $C_x = \sigma^{-1}(x)$ 上：

$$\begin{aligned}\langle S(g), f\rangle_\mu =& \int_X (g\circ\sigma) f \, d\mu\\ =& \int_X \left(\int_{C_x} g(\sigma(y)) f(y)\, d\mu_x(y)\right) d\mu(x)\\ =& \int_X g(x)\left(\int_{C_x} f(y)\, d\mu_x(y)\right) d\mu(x)\\ =& \langle g, S_\sigma^*(f)\rangle_\mu\end{aligned}$$

由后者可知，

$$S_\sigma^*(f) = \int_{C_x} f(y)\, d\mu_x(y) = R_\sigma(f).$$

□

注 3.10. (1) 由引理 3.2 和定理 3.9 可知，对于传递算子 S_σ^* in $L^2(\mu)$，测度 μ is 强不变，当且仅当它是 σ-不变的。

(2) 定理 3.9 意味着 $E(f) = R(f) \circ \sigma$ 与 $\mathbb{E}_\sigma$ for$R = S_\sigma^*$ 重合。

现在我们考虑权函数为马尔可夫函数的加权复合算子；为保持一致，我们将此类加权复合算子记作 P_φ 。下一节将继续讨论加权复合算子的性质。

设 $\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个满射端同态，且 μ 是一个前向准不变测度。考虑算子

$$P_\varphi : f \to \varphi(f \circ \sigma) \tag{3.5}$$

其形式定义见 $\mathcal{F}(X, \mathcal{B})$。它也可以写作

$$P_\varphi(f) = M_\varphi S_\sigma(f), \quad f \in \mathcal{F}(X, \mathcal{B})$$

其中 M_φ 是乘法算子。

引理 3.11. 设 σ、φ 和 P_φ 如上所述。则 φ 是一个马尔可夫函数（$\varphi \in M(\sigma, \mu)$），当且仅当 μ 是 P_φ-不变的，即 $\mu P_\varphi = \mu$ 其中

$$\mu P_\varphi(f) = \int_X P_\varphi(f)\, d\mu.$$

特别是，$\mu = \mu P_{\omega_\mu}$。

证明。事实上，如果 φ 是马尔可夫的，那么

$$\int_X P_\varphi(f)\, d\mu = \int_X (f \circ \sigma)\varphi\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

这意味着 μ 是 P_φ-不变的。反向结论也可由上述关系推出。□

引理 3.12. 设 $\varphi \in M(\sigma, \mu)$ 和 P_φ 为加权复合算子。那么 $P_\varphi : L^1(\mu) \to L^1(\mu_{\mathcal{A}})$ 和 $P_{\sqrt{\varphi}} : L^2(\mu) \to L^2(\mu_{\mathcal{A}})$ 是等距算子。

证明。显然。 □

命题 3.13。设 $\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$ 且 φ 是从 $L^2(\mu)$ 到 φ 的函数。那么 S_σ^* 是马尔可夫函数，当且仅当 $\varphi \overset{=}{} \mathbb{I}$。

证明。令 $f \in L^2(\mu)$。于是，由以下关系可得结论：

$$\begin{aligned} \int_X f\, d\mu &= \int_X (f \circ \sigma)\varphi\, d\mu \\ &= \int S_\sigma(f)\varphi\, d\mu \\ &= \int_X f S_\sigma^*(\varphi)\, d\mu. \end{aligned}$$

□

定理 3.14。设 P_φ 按照 (3.5) 在 $L^2(\mu)$ 中定义，其中 $\varphi > 0$。(1) 以下陈述等价：(i) P_φ 是 $L^2(\mu)$中的等距算子；(ii) 复合算子 S_σ 是 $L^2(\varphi\mu)$中的等距算子；(iii) $S_\sigma^*(\varphi) = \mathbb{I}$；(iv)

$$\frac{(\varphi d\mu)\circ\sigma^{-1}}{d\mu} = 1 \quad \text{a.e.}$$

(2) 若 φ 是从 $L^2(\mu)$到某处的正博雷尔函数，则伴随算子 P_φ^*是传递算子，且 P_φ^* 是归一化的，当且仅当 φ 是马尔可夫的。

证明。(1) 第一个陈述的证明采用了定理 3.13 和定理 3.7 的证明中给出的论证。细节留给读者。

(2) 显然， P_φ^* 是正的，因为我们有 P_φ^*的如下公式：

$$P_\varphi^*(g) = \frac{(\varphi g d\mu)\circ\sigma^{-1}}{d\mu}.$$

证明它满足提出性质。由于 $P_\varphi = M_\varphi S_\sigma$ 和 S_σ^* 是传递算子，我们得到

$$\begin{aligned} P_\varphi^*((f\circ\sigma)g) &= S_\sigma^* M_\varphi^*[(f\circ\sigma)g] \\ &= S_\sigma^*[\overline{\varphi}g(f\circ\sigma)] \\ &= f S_\sigma^*(\overline{\varphi}g) \\ &= f S_\sigma^* M_\varphi^*(g) \\ &= f P_\varphi^*(g). \end{aligned}$$

为完成证明，我们注意到

$$\begin{aligned} \int_X (f\circ\sigma)\varphi_{\mathbb{I}}\, d\mu &= \int_X P_\varphi(f)_{\mathbb{I}}\, d\mu \\ &= \int_X f P_\varphi^*(_{\mathbb{I}})\, d\mu. \end{aligned}$$

因此

$$\int_X (f\circ\sigma)\varphi\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

当且仅当 $P_\varphi^*(_{\mathbb{I}}) = \mathbb{I}$。 □

3.3. 拉东-尼科迪姆导数与条件期望。如上所述， $\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个具有准不变测度 μ的满端同态。方程 (2.6) 定义了一个唯一确定的 Radon–Nikodym 导数ω_μ ，它是 $\sigma^{-1}(\mathcal{B})$-可测函数。

令 $\mathbb{E}_\sigma$ 表示从 $L^2(\mu)$ 到 $L^2(\mu_\mathcal{A})$ 的条件期望，其中 $\mathcal{A} = \sigma^{-1}(\mathcal{B})$，且 $\mu_\mathcal{A}$ 是 μ 在 σ-代数 $\mathcal{A}$ 上的投影。回顾一下，对于 σ-不变测度 μ，有 $\mathbb{E}_\sigma = S_\sigma S_\sigma^*$；对于 σ-拟不变测度 μ，有 $\mathbb{E}_\sigma = T_\sigma T_\sigma^*$，参见推论 3.8。

假设 ν 是 $(X,\mathcal{B})$ 上另一个与测度 μ 等价的测度。在下一个定理中，我们将说明关于测度 μ 和 ν 的马尔可夫函数之间的关系（另见注 2.7）。

定理 3.15. 设 $\sigma \in End(X,\mathcal{B},\mu)$ 且 $d\nu(x) = h(x)d\mu(x)$，其中 $h(x) > 0$ μ-几乎处处成立。令 $\psi \in M(\sigma,\nu)$ 且 $\varphi \in M(\sigma,\mu)$。则

$$\mathbb{E}_\sigma(h)\psi = \varphi(h\circ\sigma). \tag{3.6}$$

因此，关系 (3.6) 在马尔可夫函数集合 $M(\sigma,\mu)$ 与 $M(\sigma,\nu)$ 之间建立了一一对应。

证明. 由于 (3.6) 的两边均关于 $\sigma^{-1}(\mathcal{B})$ 可测，只需证明对于每个函数 $g \in \mathcal{F}(X,\mathcal{B})$，

$$\int_X (g\circ\sigma)\mathbb{E}_\sigma(h)\ \psi\ d\mu = \int_X (g\circ\sigma)(h\circ\sigma)\ \varphi\ d\mu. \tag{3.7}$$

我们利用马尔可夫函数的定义和条件期望的性质，分别计算 (3.7) 中的左侧和右侧。对于右侧：

$$\begin{aligned}\int_X (g\circ\sigma)(h\circ\sigma)\ \varphi\ d\mu &= \int_X (gh)\circ\sigma\ \varphi\ d\mu\\ &= \int_X gh\ d\mu\\ &= \int_X g\ d\nu.\end{aligned}$$

对于左侧，我们利用 $\mathbb{E}_\sigma$ 是条件期望，且函数 $(g\circ\sigma)\psi$ 关于 $\sigma^{-1}(\mathcal{B})$ 可测这一事实：

$$\begin{aligned}\int_X (g\circ\sigma)\mathbb{E}_\sigma(h)\ \psi\ d\mu &= \int_X (g\circ\sigma)h\ \psi\ d\mu\\ &= \int_X (g\circ\sigma)\ \psi\ d\nu\\ &= \int_X g\ d\nu.\end{aligned}$$

□

设 $R = (R,\sigma)$ 是一个传递算子，其中 σ 是 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的满端同态。回顾一下，我们在 (3.3) 中定义了算子 $E = R(f)\circ\sigma{:}\mathcal{F}(X,\mathcal{B}) \to \mathcal{F}(X,\sigma^{-1}(\mathcal{B}))$，它是条件期望$\mathbb{E}_\sigma$的一种类似物。在下面的命题中，我们将探讨测度 μ和传递算子 R 需满足什么条件，才能使算子 E 与真正的条件期望 $\mathbb{E}_\sigma$一致。

定理 3.16. 在上述设定下，算子 $E = R(f)\circ\sigma$ 与 $\mathbb{E}_\sigma = S_\sigma S_\sigma^*$ 在 $L^2(\mu)$ 中重合，当且仅当

$$R(f)\frac{d\mu\circ\sigma^{-1}}{d\mu} = \frac{(f\,d\mu)\circ\sigma^{-1}}{d\mu}, \quad f \in L^2(\mu). \tag{3.8}$$

关系 (3.8) 也可以写作 $\rho_\mu R(f) = S_\sigma^*(f)$】【。

证明。命题 3.5 已表明 $E^2 = E$。接下来要确定关系 $E = E^*$ 在什么条件下成立。显然，这等价于以下性质

$$\int_X gE(f)\, d\mu = \int_X gf\, d\mu, \quad \forall g \in \mathcal{F}(X, \sigma^{-1}(\mathcal{B})). \tag{3.9}$$

将 g 表示为 $h \circ \sigma (h \in \mathcal{F}(X, \mathcal{B}))$，我们得到 (3.9) 等价于

$$\int_X (h \circ \sigma) R(f) \circ \sigma\, d\mu = \int_X (h \circ \sigma) f\, d\mu$$

or

$$\int_X hR(f)\, d\mu \circ \sigma^{-1} = \int_X h\, (fd\mu) \circ \sigma^{-1}.$$

这意味着

$$R(f) = \frac{(fd\mu) \circ \sigma^{-1}}{d\mu \circ \sigma^{-1}}$$

这等价于 (3.8)。由此证明，$E = \mathbb{E}_\sigma$ 当且仅当 $S_\sigma^*(f) = \rho_\mu R(f)$。

我们注意到，若 μ 是一个 σ-不变测度，则

$$R(f) = \frac{(fd\mu) \circ \sigma^{-1}}{d\mu}$$

根据 (3.4)，它与 $S_\sigma^*(f)$ 一致。因此，在 σ-不变测度 μ 的情形下，$\mathbb{E}_\sigma = E = R(f) \circ\sigma$ 。此外，显然条件 $R(f) = S_\sigma^*(f)$ 蕴含 μ 关于 σ 的不变性。□

推论 3.17. 用上述记号，算子 $E_{\rho_\mu} = (\rho_\mu R) \circ \sigma$ 与 $\mathbb{E}_\sigma$ 一致。

证明. 我们注意到，$\rho_\mu R$ 是一个与 S_σ^* 一致的传递算子，因此可以定义 $E_{\rho_\mu} = S_\sigma R_{\rho_\mu}$。由推论 3.8 可得$S_\sigma R_{\rho_\mu} = S_\sigma S_\sigma^* = \mathbb{E}_\sigma$，这就证明了该结论。□

注 3.18. 命题 2.17 和定理 3.15 的结果可以作如下解释。

令 G 表示博雷尔有界严格正函数的群 $\mathcal{F}_+(X, \mathcal{B})$。然后 G 在集合 $\{M(\sigma, \nu) : \nu \sim \mu\}$ 上作用。此作用 $\alpha = \{\alpha_f : f \in G\}$ 按如下规则定义：

$$\alpha_f(\varphi) = \frac{f \circ \sigma}{f}\varphi, \quad \varphi \in M(\sigma, \mu).$$

显然，

$$\alpha_f(M(\sigma, \mu)) = M(\sigma, \nu),$$

其中 $d\nu = fd\mu$，且 $\alpha_f\alpha_g = \alpha_{fg}$。作用 α是自由的，即满足性质 $M(\sigma, \mu) \cap M(\sigma, \nu) = \emptyset$，当且仅当 $\nu \sim \mu$。此外，α 是传递的。

4. Cuntz relations for invariant and quasi-invariant measures

从可测范畴以及适当测度的解体入手，我们在上文展示了，精心选择希尔伯特空间，能够为分析端同态和分支系统（在可测情形下）提供强有力的工具。更具体地说，从测度空间中的变换到 L^2 空间和算子的步骤，通常称为“转向 Koopman 算子”。在我们的语境中，Cuntz 关系，或者更确切地说，它们的表示，能够很好地刻画所考虑算子的非交换性；参见 [Cun77], [JT20], [BJ15]。回想一下，按照 J. Cuntz 的做法，对于每个 n，都会引入一个 C^*代数 $\mathcal{O}_{|\Lambda|}$，它由一组$|\Lambda|$ 生成元 T_i定义。这些生成元可以如下实现为希尔伯特空间中的算子，例如 H：Cuntz 关系表明，T_i系统由等距算子表示，且这些算子在 H 中具有正交值域，其值域之和为 H。（可以把这些子空间想象成若干子频带。）换言之，通过这些等距算子，H 可表示为自身多个副本的正交和。作为一个 C^*代数，$\mathcal{O}_{|\Lambda|}$ 是简单的。它的表示十分重要，在自相似动力学和自相似几何的研究中发挥着关键作用。

4.1. 准不变测度。设 $\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$，其中 μ 是一个正向和反向准不变测度。我们回顾一下，在这种情况下，相应的拉东-尼科迪姆导数 ω_μ 和 ρ_μ 是定义良好的函数，并满足 (2.6) 和 (2.5)。在本文接下来的各节中，我们将考虑复值函数的 L^2-空间。

设 φ 是一个正马尔可夫函数，$\varphi \in M(\sigma, \mu)$。于是我们定义一个作用于 $L^2(\mu)$ 上的加权复合算子 S_φ，其定义为

$$S_\varphi(f) = \sqrt{\varphi}(f \circ \sigma) \tag{4.1}$$

等价地，$S_\varphi = M_{\sqrt{\varphi}} S_\sigma$，其中 $M_{\sqrt{\varphi}}$ 表示乘法算子，而 S_σ 是复合算子。

我们指出 (4.1) 的两个重要特例：(a) $\varphi = \omega_\mu$ 和 (b) $\varphi = \mathbb{I}$。当且仅当 $\mu \circ \sigma^{-1} = d\mu$ 时，情形 (b) 才会出现。

引理 4.1. (1) 设 φ 是从 $M_2(\sigma, \mu) = M(\sigma, \mu) \cap L^2(\mu)$ 的马尔可夫函数，且 S_σ 为复合算子。则 $S_\sigma^*(\varphi) =$。

(2) 函数 φ 关于 σ 和 μ 是马尔可夫的，当且仅当 $(\varphi d\mu) \circ \sigma^{-1} = \mu$。

证明。第一个结论由马尔可夫函数的定义可得：

$$\int_V f \, d\mu = \int_X (f \circ \sigma)\varphi \, d\mu = \int_X S_\sigma(f)\varphi \, d\mu = \int_V f S_\sigma^*(\varphi) \, d\mu.$$

第二个结论是关系 (2.7) 的另一种表述。 □

引理 4.2。算子 S_φ 是 $L^2(\mu)$ 中的等距算子。

证明。由（2.7）可知，当 $f \in L^2(\mu)$ 时，函数 $\sqrt{\varphi}(f\circ\sigma) \in L^2(\mu)$。由于 φ 是马尔可夫的，我们有

$$\begin{aligned}\langle S_\varphi(f), S_\varphi(g)\rangle_\mu &= \int_X \sqrt{\varphi}(f\circ\sigma)\sqrt{\varphi}(\overline{g}\circ\sigma)\, d\mu \\ &= \int_X (f\overline{g}\circ\sigma)\varphi\, d\mu \\ &= \int_X f\overline{g}\, d\mu, \qquad f, g \in L^2(\mu).\end{aligned}$$

□

定理 4.3. (1) 对于上述的 $\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$ 和算子 S_φ，其伴随算子 S_σ^* 按以下公式作用：

$$S_\varphi^*(g) = \frac{(g\sqrt{\varphi}d\mu)\circ\sigma^{-1}}{d\mu}, \quad g \in L^2(\mu). \tag{4.2}$$

(2) 伴随算子 S_φ^* 是满足提出性质的传递算子：

$$S_\varphi^*(g(f\circ\sigma)) = fS_\varphi^*(g). \tag{4.3}$$

算子 S_φ^* 是归一化的，当且仅当 μ 是 σ-不变的。

证明. (1) 对于函数 $f, g \in L^2(\mu)$，我们有

$$\int_X \sqrt{\varphi}(f\circ\sigma)g\, d\mu = \int f\, (\sqrt{\varphi}gd\mu)\circ\sigma^{-1} = \int f\frac{(gd\mu)\circ\sigma^{-1}}{d\mu}\, d\mu$$

这证明了 (4.2)。

(2) 算子 S_φ^* 显然是正的。为了证明提出性质，对于任意函数 f、g、$h \in L^2(\mu)$，我们计算：

$$\begin{aligned}\int_X hS_\varphi^*((f\circ\sigma)g)\, d\mu &= \int_X S_\varphi(h)(f\circ\sigma)g\, d\mu \\ &= \int_X \sqrt{\varphi}(hf)\circ\sigma\ g\, d\mu \\ &= \int_X S_\varphi(hf)g\, d\mu \\ &= \int_X hfS_\varphi^*(g)\, d\mu.\end{aligned}$$

这证明了 (4.3) 成立。

我们看到，

$$S_\varphi^*(\mathbb{1}) = \frac{(\sqrt{\varphi}d\mu)\circ\sigma^{-1}}{d\mu}.$$

因此，当且仅当 $\mu = \mu\circ\sigma^{-1}$ 和 $\varphi = \mathbb{1}$ 时，S_φ^* 是归一化的。这可以证明如下

$$\int_X f\, d\mu\circ\sigma^{-1} = \int_X (f\circ\sigma)\mathbb{1}\, d\mu = \int_X fS_\sigma^*(\mathbb{1})\, d\mu,$$

且 $S_\sigma^*(\mathbb{I}) = \mathbb{I} \iff \mu \circ \sigma^{-1} = \mu$。 □

注 4.4。容易验证，对于 $\varphi = \omega_\mu$，

$$S_{\omega_\mu}^*(\frac{1}{\sqrt{\omega_\mu}}) = \rho_\mu.$$

回顾一下， $\mathcal{A}$表示子代数 $\sigma^{-1}(\mathcal{B})$，而 $\mu_\mathcal{A}$ 表示将 μ 限制到 $\mathcal{A}$。一个重要的观察是，函数 f是 $\mathcal{A}$-可测的，当且仅当存在一个 $\mathcal{B}$-可测函数 g，使得 $f = g \circ \sigma$。

对于固定的马尔可夫函数 φ，考虑由 $\sqrt{\varphi}$ 和 $\mathcal{A}$-可测函数张成的函数子空间 $\mathcal{H}_\varphi$：

$$\mathcal{H}_\varphi = \{\sqrt{\varphi}(f \circ \sigma) : f \in L^2(\mu)\}$$

命题 4.5。设 σ、φ和 S_φ 如上所述。则

(1) $\mathbb{E}_\varphi := S_\varphi S_\varphi^*$ 是从 $L^2(\mu)$到 $\mathcal{H}_\varphi$的正交投影；(2) $\mathbb{E}_\varphi((f \circ \sigma)g) = (f \circ \sigma)\mathbb{E}_\varphi(g)$ (3) $S_\varphi^*(f\mathbb{E}_\varphi(g)) = S_\varphi^*(g)S_\varphi^*(f\sqrt{\varphi})$。

证明。(1) 设 $f, g \in L^2(\mu)$。于是我们写作

$$\begin{aligned}\langle S_\varphi S_\varphi^* f, \sqrt{\varphi}(g \circ \sigma)\rangle_\mu &= \langle S_\varphi S_\varphi^* f, S_\varphi g\rangle_\mu \\ &= \langle S_\varphi^* f, g\rangle_\mu \\ &= \langle f, S_\varphi g\rangle_\mu \\ &= \langle f, \sqrt{\varphi}(g \circ \sigma)\rangle_\mu.\end{aligned}$$

因此，$(f - S_\varphi S_\varphi^* f) \perp \mathcal{H}_\varphi$。

对于 (2)，我们首先注意到 $S_\varphi(fg) = \sqrt{\varphi}(g \circ \sigma)(f \circ \sigma) = S_\varphi(g)S_\sigma(f)$，然后

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\varphi((f \circ \sigma)g) &= S_\varphi S_\varphi^*((f \circ \sigma)g) \\ &= S_\varphi(S_\varphi^*(g)f) \\ &= (S_\varphi S_\varphi^*)(g)S_\sigma(f) \\ &= (f \circ \sigma)\mathbb{E}_\varphi(g).\end{aligned}$$

对于 (3)，我们使用 S_φ^* 的提出性质：

$$\begin{aligned}S_\varphi^*(f\mathbb{E}_\varphi(g)) &= S_\varphi^*(fS_\varphi S_\varphi^*(g)) \\ &= S_\varphi^*(f\sqrt{\varphi}(S_\varphi^*(g) \circ \sigma)) \\ &= S_\varphi^*(g)S_\varphi^*(f\sqrt{\varphi}).\end{aligned}$$

□

设 $\{m_i : i \in \Lambda\}$ 是来自 $L^2(\mu)$ 的一组复值函数。我们固定一个马尔可夫函数 φ。对于每个 $i \in \Lambda$，我们定义

$$T_{m_i}(f) = m_i\sqrt{\varphi}(f \circ \sigma) = M_{m_i}S_\varphi(f) \tag{4.4}$$

其中 M_{m_i} 是乘法算子。于是， T_{m_i} 是一个从 $L^2(\mu)$映到 $m_i\mathcal{H}_\varphi$上的算子。

引理 4.6。算子 $T_m(f) = m\sqrt{\varphi}(f\circ\sigma)$在 $L^2(\mu)$上有界，当且仅当 $|m|^2 \in L^\infty(\mu)$。

证明。对于 $f \in L^2(\mu)$，有

$$\begin{aligned}||T_m(f)||^2 &= \int_X (m\sqrt{\varphi}(f\circ\sigma))(\overline{m}\sqrt{\varphi}(\overline{f}\circ\sigma)\, d\mu \\ &= \int_X |m|^2(|f|^2\circ\sigma)\varphi\, d\mu \\ &\le \sup|m|^2 \int_X (|f|^2\circ\sigma)\varphi\, d\mu \\ &= \sup|m|^2||f||^2.\end{aligned}$$

□

引理 4.7。算子 T_m 在 $L^2(\mu)$ 中是等距算子，当且仅当

$$S_\varphi^*(\sqrt{\varphi}|m|^2) = \mathbb{I}.$$

证明。注意到 $T_m^*(f) = S_\varphi^* M_{\overline{m}}(f)$。利用关于$S_\varphi^*$的提出性质，我们可以写成

$$T_m^* T_m(f) = S_\varphi^* M_{\overline{m}}(m_i\sqrt{\varphi}(f\circ\sigma)) = fS_\varphi^*(|m|^2\sqrt{\varphi})$$

其中 $f \in L^2(\mu)$。这就证明了该引理。 □

注 4.8。由引理 4.7 可知， T_m 是等距算子，当且仅当

$$\mathbb{E}_\varphi(\sqrt{\varphi}|m|^2) = \sqrt{\varphi}.$$

引理 4.9. 算子 T_m、 S_φ 和 $\mathbb{E}_\varphi$ 满足以下性质：

$$T_{m_1}^* T_{m_2}(f) = fS_\varphi^*(\sqrt{\varphi}\,\overline{m}_1 m_2), \tag{4.5}$$

$$T_{m_1} T_{m_2}^*(f) = m_1\mathbb{E}_\varphi(\overline{m}_2 f). \tag{4.6}$$

证明。事实上，我们有

$$\begin{aligned}T_{m_1}^* T_{m_2}(f) =& T_{m_1}^*(\sqrt{\varphi}\, m_2(f\circ\sigma)) \\ =& S_{m_2}^* M_{\overline{m}_1}(\sqrt{\varphi}\, m_2(f\circ\sigma)) \\ =& fS_{m_2}^*(\sqrt{\varphi}\,\overline{m}_1 m_2),\end{aligned}$$

and

$$T_{m_1} T_{m_2}^*(f) = M_{m_1} S_\varphi S_\varphi^* M_{\overline{m}_2}(f) = m_1\mathbb{E}_\varphi(\overline{m}_2 f).$$

□

注 4.10. 设 g 是一个有界正博雷尔函数。取一个马尔可夫函数 $\varphi \in M(\sigma,\mu)$，并考虑 $\psi = (g\circ\sigma)\varphi g^{-1}$。由命题 2.17 可知 $\psi \in M(\sigma,\nu)$，其中 $d\nu = gd\mu$。于是

$$S_\psi = M_{\sqrt{g}}^{-1} S_\varphi M_{\sqrt{g}}.$$

于是，直接计算可得 S_ψ 是 $L^2(\nu)$ 中的一个等距算子，其中$d\nu = g\,d\mu$。

记T_m 为作用于 $L^2(\nu)$ 的算子： $f \mapsto mS_\psi(f)$。根据引理 4.7， $\widetilde{T}_m$ 是 $L^2(\nu)$ 中的等距算子，当且仅当 $S_\psi^*(\sqrt{\psi}|m|^2) = \mathbb{I}$。由算子 T_m 和 T_m 的定义可得，

$$\widetilde{T}_m = M_{\sqrt{g}}^{-1} T_m M_{\sqrt{g}}.$$

定理 4.11. 设 σ 是 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 的满端同态，其中 μ 关于 σ 准不变。设 $\{m_i : i \in \Lambda\}$ 是一族复值函数。当且仅当满足以下条件时，算子 $\{T_{m_i}, i \in \Lambda\}$ 生成 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_{|\Lambda|}$ 的表示

$$(i)\quad S_\varphi^*(\sqrt{\varphi}\,\overline{m}_j m_i) = \delta_{ij}\mathbb{I},$$
$$(ii)\quad \sum_{i\in\Lambda} m_i \mathbb{E}_\varphi(\overline{m}_i f) = f, \quad f \in L^2(\mu).$$

证明。首先注意，定理的条件 (i) 蕴含算子 T_{m_i} 是等距算子，这是由引理 4.7 得出的。等距算子 $\{T_{m_i}\}_{i\in\Lambda}$ 的 Cuntz 关系意味着

$$\sum_{i\in\Lambda} T_{m_i} T_{m_i}^* = \mathbb{I}$$

且这些投影 $T_{m_i}T_{m_i}^*$ 两两正交。

我们将证明，对于 f、$g \in L^2(\mu)$ 和 $i \neq j$，向量 $T_{m_i}T_{m_i}^*(f)$ 与 $T_{m_j}T_{m_j}^*(g)$ 正交，当且仅当定理的条件 (i) 成立。在以下计算中，我们使用 (4.5)。

$$\begin{aligned}\langle T_{m_i}T_{m_i}^*(f), T_{m_j}T_{m_j}^*(g)\rangle_\mu &= \langle (T_{m_j}^* T_{m_i}) T_{m_i}^*(f)), T_{m_j}^*(g)\rangle_\mu \\ &= \langle S_\varphi^*(\sqrt{\varphi}\,\overline{m}_j m_i)(\xi), \eta\rangle_\mu\end{aligned}$$

其中 $\xi = T_{m_i}^*(f)$ 且 $\eta = T_{m_j}^*(g)$。由于 f、g 是任意函数，左边为零当且仅当 $S_\varphi^*(\sqrt{\varphi}\,\overline{m}_j m_i) = \delta_{ij}\mathbb{I}$。

接下来，我们利用 (4.6) 来考察恒等算子何时可分解为正交投影 $T_{m_i}T_{m_i}^*$ 之和。由引理 4.9 可知，对于任意 $f \in L^2(\mu)$，

$$\sum_{i\in\Lambda} T_{m_i}T_{m_i}^*(f) = \sum_{i\in\Lambda} m_i \mathbb{E}_\varphi(\overline{m}_i f)$$

因此，性质 $\sum_{i\in\Lambda} T_{m_i}T_{m_i}^* = \mathbb{I}$ 等价于定理的条件 (ii)。□

推论 4.12。 由定理 4.11 可得，

$$L^2(\mu) = \bigoplus_{i\in\Lambda} m_i \mathcal{H}_\varphi.$$

换言之， $\{m_i : i \in \Lambda\}$ 是 $L^2(\mu)$在$\mathcal{H}_\varphi = \sqrt{\varphi}\,L^2(\mu_\mathcal{A})$上的正交模基，其中 $\mathcal{A} = \sigma^{-1}(\mathcal{B})$。

4.2. 不变测度。在下文中，我们将考虑σ-不变测度 μ的情形。

引理 4.13. 设 $\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个满端同态。那么，如果 μ 是 σ-不变概率测度，则唯一的 $\sigma^{-1}(\mathcal{B})$-可测马尔可夫函数是常值函数 $\mathbb{I}$。

证明. 事实上，设 φ 是一个马尔可夫函数。那么我们有

$$\int_X (f \circ \sigma)\varphi \, d\mu = \int_X f \, d\mu = \int_X f \, d(\mu \circ \sigma)^{-1} = \int_X (f \circ \sigma) \, d\mu.$$

由于 f 是任意的，我们得到 $\varphi = \mathbb{I}$ 在 $\sigma^{-1}(\mathcal{B})$ 上。 □

我们将把第 4.1 小节中的构造应用于 $\varphi = \mathbb{I}$ 的情形。由于第 4.1 小节的结果是在更一般的情形下证明的，我们这里只陈述相应的事实，不给出证明。

设 $\underline{m} = \{m_i : i \in \Lambda\}$ 是一族取复数值的有界函数，并设

$$S_{m_i}(f) = m_i(f \circ \sigma), \quad f \in L^2(\mu)$$

是相应的加权复合算子。

在这个引理中，我们汇总了 S_{m_i} 的性质。

引理 4.14. 设 $f, g \in L^2(\mu)$。

(1) S_m^* 在 $L^2(\mu)$ 上是等距算子，当且仅当 $S_\sigma^*(|m|^2) = \mathbb{I}$。(2) $\mathbb{E}_\sigma := S_\sigma S_\sigma^*$ 是从 $L^2(\mu)$ 到 $L^2(\mu_\mathcal{A})$ 的条件期望。(3) $E_\sigma((f \circ \sigma)g) = (f \circ \sigma)\mathbb{E}_\sigma(g)$。(4) $S_\sigma^*(f\mathbb{E}_\sigma(g)) = S_\sigma^*(f)S_\sigma^*(g)$。(5) $S_{m_1}^* S_{m_2}(f) = S_\sigma^*(\overline{m}_1 m_2)f$。(6) $S_{m_1} S_{m_2}^*(f) = m_1 \mathbb{E}(\overline{m}_2 f)$。

下面给出定理 4.11 的修订版本。

定理 4.15. 设 σ 是 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 的一个满射端同态，具有 σ 不变测度 μ。设 $\{m_i : i \in \Lambda\}$ 是一族有界复值函数。当且仅当，算子 $\{S_{m_i}, i \in \Lambda\}$ 生成 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_{|\Lambda|}$ 的一个表示。

$$(i) \quad S_\sigma^*(\overline{m}_j m_i) = \delta_{ij}\mathbb{I},$$
$$(ii) \quad \sum_{i \in \Lambda} m_i \mathbb{E}_\sigma(\overline{m}_i f) = f, \quad f \in L^2(\mu).$$

由定理 4.15 可知，希尔伯特空间 $L^2(\mu)$ 允许作如下分解。

$$L^2(\mu) = \bigoplus_{i \in \Lambda} m_i L^2(\mu_\mathcal{A})$$

当且仅当算子 S_{m_i} 是 Cuntz 代数表示的生成元。换言之，$\{m_i : i \in \Lambda\}$ 是 $L^2(\mu)$ 在 $L^2(\mu_\mathcal{A})$ 上的正交模基，其中 $\mathcal{A} = \sigma^{-1}(\mathcal{B})$。

我们以讨论算子 S_σ、 S_φ 与 $\mathbb{E}_\sigma$、 $\mathbb{E}_\varphi$ 之间的关系结束本节，其中 φ 是一个马尔可夫函数。

命题 4.16。以下公式成立：对于 $g \in L^2(\mu)$

$$(1)\quad S_\varphi^*(g) = S_\sigma^*(\sqrt{\varphi}\, g), \quad (2)\quad \mathbb{E}_\varphi(g) = \sqrt{\varphi}\, \mathbb{E}_\sigma(\sqrt{\varphi}\, g).$$

证明。对于（1），取任意函数 f、 $g \in L^2(\mu)$ 并计算

$$\begin{aligned}\langle f, S_\varphi^*(g)\rangle_\mu &= \langle S_\varphi^*(f), g\rangle_\mu \\ &= \langle \sqrt{\varphi}\,(f\circ\sigma), g\rangle_\mu \\ &= \langle S_\sigma(f), \sqrt{\varphi}\, g\rangle_\mu \\ &= \langle f, S_\sigma^*(\sqrt{\varphi}\, g)\rangle_\mu.\end{aligned}$$

为说明（2）成立，我们回顾 $S_\varphi(f) = \sqrt{\varphi}\, S_\sigma(f)$，于是可以写成

$$\mathbb{E}_\varphi(f) = S_\varphi S_\varphi^*(f) = S_\varphi S_\sigma^*(\sqrt{\varphi}\, f) = \sqrt{\varphi}\, S_\sigma S_\sigma^*(\sqrt{\varphi}\, f) = \sqrt{\varphi}\, \mathbb{E}_\sigma(\sqrt{\varphi}\, f).$$

□

命题 4.16 的结果将在下一节中使用。

5. The set of wavelet filters

本节回答关于小波滤波器集合结构的问题，即描述满足定理 4.11 条件的函数集合。我们考虑两种不同的方法：(i) 将证明该集合 $\mathfrak{M}$ 同构于所谓的环群 $\mathcal{G}$；(ii) 利用分解为循环表示，我们将元素 $\underline{m} \in \mathfrak{M}$ 描述为表示 $L^\infty(\mathcal{A})$ 在$L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$中的循环向量集合。

5.1. 环群对小波滤波器的作用。考虑希尔伯特空间 $l^2(\Lambda)$ 中的有界算子 $B(l^2(\Lambda))$，其中 Λ 是可数无限集。若 $\{e_i : i \in \Lambda\}$ 是 $l^2(\Lambda)$ 中的典范正交归一基，那么我们通过设定 $a_{ij} = \langle e_i, Ae_j\rangle$ 来定义无限 $|\Lambda| \times |\Lambda|$矩阵 $A = (a_{ij})$。这一观察使我们能够在下面的计算中使用矩阵记号。

令 $\mathcal{U}$ 为 $B(l^2(\Lambda))$ 中所有酉算子构成的群。记 $\mathcal{G}$ 为从 $(X, \mathcal{B})$ 到 $\mathcal{U}$ 取值的博雷尔函数所构成的群（回顾一下， $\mathcal{U}$ 是一个波兰群）。对于 $\mathcal{G}$中的元素，我们使用记号 $G = (g_{ij}(x))$。于是，每个项 $g_{ij}(x)$ 都是一个博雷尔复值矩阵。群 $\mathcal{G}$ 称为环群。我们注意到，对于 $G \in \mathcal{G}$、 $G^*G = \mathbb{I}$，其中矩阵为 $G^* = \overline{G}^T$。我们将使用关系

$$\sum_{l\in\Lambda} \overline{g}_{li} g_{lj} = \delta_{ij} \tag{5.1}$$

其中 $G = (g_{ij}) \in \mathcal{G}$。

设 φ 为马尔可夫函数。我们回顾一下，在这种情况下，算子 S_φ 是等距的。我们将广义小波滤波器的集合记为

$$\mathfrak{M}_\varphi := \{\underline{m} = (m_i)_{i\in\Lambda} : S_\varphi^*(\sqrt{\varphi}\, m_i\overline{m}_j) = \delta_{ij}\,\mathbb{I},\ \ \sum_{i\in\Lambda} m_i\mathbb{E}_\varphi(\overline{m}_j f) = f\}. \tag{5.2}$$

我们同时考虑 σ-不变测度 μ 和相应的算子 S_σ 和 $\mathbb{E}_\sigma$；这些算子的性质见第 4 节。在这种情况下，我们使用集合

$$\mathfrak{M}_\sigma := \{\underline{m} = (m_i)_{i\in\Lambda} : S_\sigma^*(m_i\overline{m}_j) = \delta_{ij}\,\mathbb{I},\quad \sum_{i\in\Lambda} m_i\mathbb{E}_\sigma(\overline{m}_j f) = f\}. \tag{5.3}$$

事实证明，群 $\mathcal{G}$ 作用于集合 $\mathfrak{M}_\varphi$ 和 $\mathfrak{M}_\sigma$ 上。确实，对于固定的 $\underline{m} \in \mathfrak{M}_\varphi$（或 $\underline{m} \in \mathfrak{M}_\sigma$）和 $G \in \mathcal{G}$，我们按以下公式定义 $\underline{m}^G := (m_i^G(x) : i \in \Lambda)$:

$$m_i^G(x) = \sum_{j\in\Lambda} (\overline{g}_{ji}\circ\sigma)(x) m_j(x) \tag{5.4}$$

或者简写为 $\underline{m}^G = (G^*\circ\sigma)\underline{m}$ 。

在接下来的论述中，我们将研究这一作用于小波滤波器集合上的 $\mathcal{G}$ 的作用的性质。为明确起见，我们对集合 $\mathfrak{M}_\varphi$ 表述这些结果。对于 $\mathcal{G}$ 在 $\mathfrak{M}_\sigma$ 上的作用，同样的证明也适用，这里不再赘述。我们将在接下来的引理中证明：(i) 集合 $\mathfrak{M}_\varphi$ 在群 $\mathcal{G}$ 的作用下是不变的；(ii) 公式 (5.4) 在 $\mathfrak{M}_\varphi$ 上定义了一个群作用；(iii) $\mathcal{G}$ 的这一作用是自由且传递的。

引理 5.1。如果 $\underline{m} \in \mathfrak{M}_\varphi$，那么 $\underline{m}^G \in \mathfrak{M}_\varphi$。

证明。我们将验证函数族 $\underline{m}^G = (m_i^G(x) : i \in \Lambda)$ 满足定理 4.11 的条件 (i) 和 (ii)。对于 (i)，我们利用 (5.1) 以及这样一个事实： S_φ^* 是一个满足提出性质的传递算子:

$$\begin{aligned}
S_\varphi^*(\sqrt{\varphi}\, m_i^G\overline{m}_j^G) =& S_\varphi^*\left(\sqrt{\varphi}\sum_{k\in\Lambda}(\overline{g}_{ki}\circ\sigma)m_k \cdot \sum_{l\in\Lambda}\overline{(\overline{g}_{jl}\circ\sigma)m_l}\right)\\
=& \sum_{k\in\Lambda}\sum_{l\in\Lambda}\overline{g}_{ki}g_{lj}S_\varphi^*(\sqrt{\varphi}\overline{m}_l m_k)\\
=& \sum_{k\in\Lambda}\sum_{l\in\Lambda}\overline{g}_{ki}g_{lj}\delta_{kl}\\
=& \sum_{k\in\Lambda}\overline{g}_{ki}g_{kj}\\
=& \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

对于 (ii)，令 $f \in L^2(\mu)$，则

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\Lambda} m_i^G \mathbb{E}_\varphi(\overline{m}_i^G f) &= \sum_{i\in\Lambda}\sum_{k\in\Lambda} (\overline{g}_{ki}\circ\sigma) m_k \mathbb{E}_\varphi\left(\sum_{l\in\Lambda}(g_{li}\circ\sigma)\overline{m}_l f\right)\\ &= \sum_{i\in\Lambda}\sum_{k\in\Lambda}\sum_{l\in\Lambda} (\overline{g}_{ki}\circ\sigma)(g_{li}\circ\sigma) m_k \mathbb{E}_\varphi(\overline{m}_l f)\\ &= \sum_{i\in\Lambda}\sum_{k\in\Lambda}\sum_{l\in\Lambda} ((\overline{g}_{ki} g_{li})\circ\sigma) m_k \mathbb{E}_\varphi(\overline{m}_l f)\\ &= \sum_{i\in\Lambda}\sum_{k\in\Lambda} \delta_{kl} m_k \mathbb{E}_\varphi(\overline{m}_l f)\\ &= \sum_{k\in\Lambda} m_k \mathbb{E}_\varphi(\overline{m}_l f)\\ &= f.\end{aligned}$$

这里我们用到了等式 $GG^* = \mathbb{I}$ 或 $\sum_i \overline{g}_{ki} g_{li} = \delta_{kl}$。 □

在下一个引理中，我们证明 (5.4) 定义了群 $\mathcal{G}$在 $\mathfrak{M}$上的一个作用。

引理 5.2. 对每个 $\underline{m} \in \mathfrak{M}_\varphi$ 以及每个 $G, H \in \mathcal{G}$,

$$(\underline{m}^G)^H = \underline{m}^{GH}, \quad \underline{m}^{\mathbb{I}} = \underline{m}. \tag{5.5}$$

证明。事实上，若 $\mathbb{I}$ 是单位矩阵，则对每个 $\underline{m} \in \mathfrak{M}_\varphi$都有 $\underline{m}^{\mathbb{I}} = \underline{m}$。令 $G, H \in \mathfrak{M}_\varphi$。证明 (5.5) 成立：

$$\begin{aligned}(m^G)_i^H &= \sum_{j\in\Lambda} (\overline{h}_{ji}\circ\sigma) m_j^G\\ &= \sum_{j\in\Lambda} (\overline{h}_{ji}\circ\sigma) \sum_{k\in\Lambda} (\overline{g}_{kj}\circ\sigma) m_k\\ &= \sum_{k\in\Lambda}\sum_{j\in\Lambda} ((\overline{g}_{ij}\overline{h}_{jk})\circ\sigma) m_k\\ &= \sum_{k\in\Lambda} (\overline{f}_{ik}\circ\sigma) m_k\\ &= m_i^{GH},\end{aligned}$$

其中， GH 的各项记作 (f_{ik})。 □

引理 5.3. 设 φ 是一个正马尔可夫函数。

(1) 映射 Φ: $\underline{m} \mapsto \sqrt{\varphi}\ \underline{m}$ 在集合 $\mathfrak{M}_\varphi$ 和 $\mathfrak{M}_\sigma$ 之间定义了一个同构。

(2) 映射 Φ 实现了 $\mathcal{G}$ 在集合 $\mathfrak{M}_\sigma$ 和 $\mathfrak{M}_\varphi$ 上的作用的共轭。

证明。 (1) 我们将证明，如果 $\underline{m}$ 满足 (5.2)，那么 $\sqrt{\varphi}\underline{m}$ 属于 $\mathfrak{M}_\sigma$，即 (5.3) 成立。为此，我们检查 that

$$S_\sigma^*(\sqrt{\varphi} m_i\ \sqrt{\varphi}\overline{m}_j) = S_\varphi^*(\sqrt{\varphi}\ m_i \overline{m}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j \in \Lambda,$$

并且，利用命题 4.16,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\Lambda}\sqrt{\varphi}m_i\mathbb{E}_\sigma(\sqrt{\varphi}\overline{m}_i f) &= \sum_{i\in\Lambda}\sqrt{\varphi}m_i S_\sigma S_\sigma^*(\sqrt{\varphi}\overline{m}_i f)\\ &= \sum_{i\in\Lambda} m_i S_\varphi S_\varphi^*(\overline{m}_i f)\\ &= f.\end{aligned}$$

(2) 可以直接验证，对于每一对 $G\in\mathcal{G}$ 和 $\underline{m}\in\mathfrak{M}_\varphi$,

$$\Phi\underline{m}^G = (\Phi\underline{m})^G.$$

□

引理 5.4. 设 φ 是一个正马尔可夫函数。$\mathcal{G}$ 在 $\mathfrak{M}_\varphi$ 上由 (5.4) 定义的作用是自由且传递的。

证明。由引理 5.3 可知，只需证明 $\mathcal{G}$ 在 $\mathfrak{M}_\sigma$ 上的作用是自由且传递的。

设 $\underline{m}=(m_i)$ 和 $\underline{n}=(n_j)$ 为集合 $\mathfrak{M}_\sigma$ 中的两个元素。通过如下方式定义一个无限矩阵 G：

$$g_{ij} = S_\varphi^*(m_i\overline{n}_j),\quad i,j\in\Lambda.$$

我们证明 $\underline{m}^G=\underline{n}$，从而证明该作用是传递的。事实上,

$$\begin{aligned}m_i^G &= \sum_{k\in\Lambda}(\overline{g}_{k,i}\circ\sigma)m_k\\ &= \sum_{k\in\Lambda}(S_\sigma^*(\overline{m}_k n_i)\circ\sigma)m_k\\ &= \sum_{k\in\Lambda} S_\sigma S_\sigma^*(\overline{m}_k n_i)m_k\\ &= \sum_{k\in\Lambda}\mathbb{E}_\sigma(\overline{m}_k n_i)m_k\\ &= n_i.\end{aligned}$$

这里我们用到了关系 (5.3)。

为了证明这个作用是自由的，我们假设对于某个 $\underline{m}\in\mathfrak{M}_\sigma$ 和 $G\in\mathcal{G}$，有 $\underline{m}^G=\underline{m}$。于是

$$\sum_{k\in\Lambda}(\overline{g}_{ki}\circ\sigma)m_k = m_i,\quad i\in\Lambda.$$

两边同时乘以 $\overline{m}_j$，并应用算子 S_σ^*:

$$\sum_{k\in\Lambda} S_\sigma^*((\overline{g}_{ki}\circ\sigma)m_k\overline{m}_j) = S_\sigma^*(m_i\overline{m}_j)$$

利用提出性质和（5.3）：

$$\sum_{k\in\Lambda}\overline{g}_{ki}S_\sigma^*(m_k\overline{m}_j) = \delta_{ij}.$$

因此，

$$\sum_{k\in\Lambda}\overline{g}_{ki}\delta_{kj}=\delta_{ij}$$

以及 $\overline{g}_{li}=\delta_{ij}$。这证明了 $G=\mathbb{I}$，且该作用是自由的。

□

下列定理完整描述了集合 $\mathfrak{M}_{\varphi}$。该结果可由已证明的引理 5.1–5.4 立即推出。

定理 5.5。(1) 集合 $\mathfrak{M}_{\varphi}$（作为集合）与环群 $\mathcal{G}$ 同构。

(2) 对环群中的每个元素 $G=(g_{ij})$，都存在一个小波滤波器 $\underline{m}$，使得 $g_{ij}=S_{\varphi}^{*}(\sqrt{\varphi}\,m_i\overline{m}_j)$。

5.2. 自同态、小波滤波器与循环表示。本小节将采用另一种方法来描述与 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的端同态 σ 相关联的小波滤波器集合 $\mathfrak{M}$。这里我们假设 σ 是保测的。

设 $\mathcal{A}=\sigma^{-1}(\mathcal{B})$，且 $\mu_{\mathcal{A}}$ 是 μ 在 σ-子代数 $\mathcal{A}$ 上的限制。记 $\mathfrak{A}$ 为集合 $L^{\infty}(\mu_{\mathcal{A}})$，其中的元素是有界的 $\sigma^{-1}(\mathcal{B})$-可测函数。$*$-代数 $\mathfrak{A}$ 通过乘法算子作用于 $L^{2}(\mu)$：对每个 $f\in L^{2}(\mu)$ 和 $\gamma\in\mathfrak{A}$

$$f\longmapsto\gamma f=M_{\gamma}(f).$$

该公式定义了 $L^{2}(\mu)$ 中 $\mathfrak{A}$ 的一个表示 π。利用关于将非退化表示分解为正交循环表示的定理，我们可以写成

$$L^{2}(\mu)=\bigoplus_{i\in\Lambda}\mathcal{H}_i,\quad \pi=\bigoplus_{i\in\Lambda}\pi_i \tag{5.6}$$

其中 π_i 是一个循环表示，而 $\mathcal{H}_i$ 是 $\{\pi_i(\gamma)h_i$ 的闭包：$\gamma\in\mathfrak{A}\}$。向量 h_i、$i\in\Lambda$ 被称为循环向量。指标集合 Λ 是可数无限的。

我们将利用循环向量（h_i）构造一个满足定理 4.15 条件的小波滤波器 $\underline{m}=(m_i)$。

引理 5.6. 存在函数（g_i），使得 $\mathfrak{A}$ 的表示的循环向量（$m_i=h_i(g_i\circ\sigma)$）具有如下性质

$$S_{\sigma}^{*}(|m_i|^{2})=\mathbb{I}. \tag{5.7}$$

证明。注意，对于每个函数 $\gamma\in\mathfrak{A}$，都存在一个函数 $g\in L^{\infty}(\mu)$，使得 $\gamma=g\circ\sigma$。因此，如果 h_i 是 $\mathfrak{A}$的一个表示的循环向量，那么 m_i 也是循环向量。

我们将确定函数 g_i，使得 $m_i=h_i(g_i\circ\sigma)$ 满足引理的陈述。为此，我们计算

$$S_{\sigma}^{*}(|m_i|^{2})=S_{\sigma}^{*}(|h_i(g_i\circ\sigma)|^{2})=|g_i|^{2}S_{\sigma}^{*}(|h_i|^{2}),$$

并取 g_i，使上述表达式几乎处处等于 1。 □

对于函数 $f \in L^2(\mu)$，我们定义算子

$$S_i(f) = m_i(f \circ \sigma) = M_{m_i} S_\sigma(f). \tag{5.8}$$

引理 5.7. 设函数 (m_i) 满足 (5.7)。那么算子 $S_i, i \in \Lambda$, 是等距算子，并满足性质

$$S_\sigma^*(m_i \overline{m}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j \in \Lambda. \tag{5.9}$$

证明. 首先注意到 $S_i^* = S_\sigma^* M_{\overline{m}_i}$, 和

$$S_i^* S_i = \mathbb{I} \iff S_\sigma^*(|m_i|^2) = \mathbb{I}.$$

接下来，我们利用以下事实：由不同向量 m_i 和 m_j定义的循环表示彼此正交。利用传递算子 S_σ^* 具有提出性质这一事实，我们对任意$\gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{A}$ 计算得,

$$\begin{aligned}\langle \gamma_1 m_i, \gamma_2 m_j \rangle_\mu &= \langle (g_1 \circ \sigma)\, m_i, (g_2 \circ \sigma)\, m_j \rangle_\mu \\ &= \langle (g_1 \circ \sigma) m_i \overline{m}_j, S_\sigma(g_2) \rangle_\mu \\ &= \langle S_\sigma^*((g_1 \circ \sigma) m_i \overline{m}_j), g_2 \rangle_\mu \\ &= \langle g_1 S_\sigma^*(m_i \overline{m}_j), g_2 \rangle_\mu.\end{aligned}$$

因此，当且仅当 (5.9) 成立时，内积为零。 □

定理 5.8. 设 $(m_i : i \in \Lambda)$ 是满足 (5.7) 的循环向量集合。那么 $\underline{m} = (m_i)$ 是小波滤波器，当且仅当 $\sum_{i \in \Lambda} S_i^* S_i = \mathbb{I}$。换言之， $\underline{m} \in \mathfrak{M}$ 当且仅当算子 S_i 是 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_{|\Lambda|}$的一个表示的生成元。

证明。为证明该定理，我们使用定理（4.15）的结果。为此，我们应检查 $\{S_i : i \in \Lambda\}$ 是否为满足定理（4.15）的条件（i）和（ii）的算子。条件（i）已在引理（5.7）中证明。为验证（ii），我们注意到，对于任意的 $f \in L^2(\mu)$ 和 $i \in \Lambda$,

$$\mathbb{E}_\sigma(f \overline{m}_i) m_i = S_i S_i^*(f).$$

事实上,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\sigma(f \overline{m}_i) m_i = S_i S_i^*(f) &= S_\sigma S_\sigma^*(f \overline{m}_i) m_i = S_i S_i^*(f) \\ &= S_i(S_\sigma^* M_{\overline{m}_i}(f)) \\ &= S_i S_i^*(f).\end{aligned}$$

由此可知，$\sum_{i \in \Lambda} S_i^* S_i = \mathbb{I}$ 当且仅当条件（ii）成立。定理得证。□

推论 5.9。设 $\sigma \in End(X, \mathcal{B}, \mu)$，其中 μ 是概率测度。设 $(m_i : i \in \Lambda)$ 是满足 (5.6) 和 (5.7) 的循环向量集合。那么，对于几乎处处的 $x \in X$,

$$\sum_{i \in \Lambda} |m_i(x)|^2 < \infty.$$

证明。该结果由以下事实得出。

$$\sum_{i\in\Lambda} ||m_i||_\mu^2 = 1.$$

实际上，将函数 $_{\mathbb{I}}(x)$ 代入循环分解 (5.6) 即可得到这一关系。□

References

[ACSS22] Daniel Alpay、Fabrizio Colombo、Irene Sabadini 和 Baruch Schneider。Beurling-Lax 型定理与 Cuntz 关系。 *Linear Algebra Appl.*，633 152 212，2022 : – 。[AJL17] Daniel Alpay、Palle Jorgensen 和 Izchak Lewkowicz。矩形有限冲激响应酉模系统族的刻画。 *J. Appl.*，(-): – *Math. Comput.* 54 1 2 395 423, 2017 。[AJL18] Daniel Alpay 、 Palle Jorgensen 和 Izchak Lewkowicz。 W- 马尔可夫测度、传递算子、小波与多分辨率。载于 *Frames and harmonic analysis* 706 *Contemp. Math.* 293 343 ，第 卷，页码 –。美国数学会，[普罗维登斯], RI， [2018] ©2018。[And22] P. A. Andrianov。多维周期离散小波。 *Int. J. Wavelets*，( ):论文编号。[*Multiresolut. Inf. Process.* 20 2 2150053, 20, 2022 BD22] M. Younus Bhat 和 Aamir H. Dar。 $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^M)$ 上的分数阶向量值非均匀多分辨率分析及相关小波包。 *Fract. Calc. Appl. Anal.*，25 2 687 719，2022 ( ): –。[B´en96] Catherine B´en´eteau。测度空间上非奇异自同态的自然扩张。 *Rocky Mountain J. Math.*，26(4):1261–1273，1996。[BH09] Henk Bruin 和 Jane Hawkins。光滑单边伯努利端同态的刚性。 *New York J. Math.*，15:451–483，2009。[BJ97a] O. Bratteli 和 P. E. T. Jorgensen。 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的端同态。II。 $\mathcal{O}_n$ 上有限相关态。 *J. Funct. Anal.*，145(2):323–373，1997。[BJ97b] Ola Bratteli 和 Palle E. T. Jorgensen。尺度 N 的多分辨率小波理论与 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_N$ 的表示之间的联系。载于 *Operator algebras and quantum field theory (Rome, 1996)*，第151–163页。Int. Press，马萨诸塞州剑桥，1997。[BJ97c] Ola Bratteli 和 Palle E. T. Jorgensen。等距算子、移位、Cuntz 代数与尺度 N *Integral Equations Operator* 的多分辨率小波 *Theory* 28 4 382 443, 1997 分析。 ，( ): – 。[BJ99] Ola Bratteli 和 Palle E. T. Jorgensen。迭代函数系统与 Cuntz 代数的置换表示。 *Mem. Amer. Math. Soc.*, 139 663 +89 1999 ( ):x , 。[BJ15] Sergey Bezuglyi 和 Palle E. T. Jorgensen。Cuntz-Krieger 关系的表示、Bratteli 图上的动力系统与路径空间测度。载于 *Trends in harmonic analysis and its applications* 650 *Contemp. Math.* ，第 卷，页码 57–88。美国数学会，普罗维登斯，RI，2015。[BJ18] Sergey Bezuglyi 和 Palle E. T. Jorgensen。 *Transfer operators, endomorphisms and measurable partitions* 2217 *Lecture Notes in Mathematics* 2018 ， ，第 卷。施普林格，尚，。[BLP+10] Lawrence W. Baggett、Nadia S. Larsen、Judith A. Packer、Iain Raeburn 和 Arlan Ramsay。直极限、多分辨率分析与小波。 *J. Funct. Anal.* ，( ): – 。[*Anal.* 258 8 2714 2738, 2010 BMPR12] Lawrence W. Baggett、Kathy D. Merrill、Judith A. Packer 和 Arlan B. Ramsay。与分形小波对应的螺旋群上的概率测度。*Trans. Amer. Math. Soc.*，364(5):2723–2748，2012。

[Bog07] Vladimir I. Bogachev。 *Measure theory. Vol. I, II*。施普林格出版社，柏林，2007年。[Bru22] Henk Bruin。 *Topological and ergodic theory of symbolic dynamics*, *Graduate Studies in Mathematics*第228卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州， [2022] ©2022。[CD22] Nicholas J. Christoffersen 和 Dorin Ervin Dutkay。与图上的随机游走相关的 Cuntz代数表示。 *J. Operator Theory*，88(1)：139–170，2022。[CFS82] Isaac P. Cornfeld、Sergei V. Fomin 和 Yakov G. Sinaĭ。 *Ergodic theory*, 245 *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Prin-* 卷，载于 。施普林格 *ciples of Mathematical Sciences]* 1982 出版社，纽约，。由 A. B. Sosinskiĭ 从俄文译出。[Cun77] Joachim Cuntz。由等距算子生成的简单 C^* *Comm. Math.* -代数。，( )：–。[*Phys.* 57 2 173 185, 1977 DH94] Karma G. Dajani 和 Jane M. Hawkins。非奇异端同态的自然扩张示例。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，120(4)：1211–1217，1994。[DJ06] Dorin Ervin Dutkay 和 Palle E. T. Jorgensen。基于相似变换和动力学重整化构造的希尔伯特空间。 *J. Math. Phys.*，47 053504，20，2006 5( )：。[DJ07] Dorin Ervin Dutkay 和 Palle E. T. Jorgensen。希尔伯特空间中的鞅、端同态与算子的协变系统。 *J. Operator Theory*，58 2 269( )：–310，2007。[DJ14a] Dorin Ervin Dutkay 和 Palle E. T. Jorgensen。Cuntz 代数的单循环表示与马尔可夫测度。 *J. Funct. Anal.*，267(4)：1011–1034，2014。[DJ14b] Dorin Ervin Dutkay 和 Palle E. T. Jorgensen。传递算子与移位在分形研究中的作用：编码模型、分析与几何，交换与非交换。载于 *Geometry and analysis of fractals*, *Springer Proc. Math. Stat.*第88卷，页码65–95。施普林格，海德堡，2014。[DJ15] Dorin Ervin Dutkay 和 Palle E. T. Jorgensen。与拟平稳马尔可夫测度相关的 Cuntz 代数表示。 *Ergodic Theory Dynam.* , ( )：–。[DJK94] R. *Systems* 35 7 2080 2093, 2015 Dougherty、S. Jackson 和 A. S. Kechris。超有限博雷尔等价关系的结构。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，341(1)：193–225，1994。[DJS12] Dorin Ervin Dutkay、Palle E. T. Jorgensen 和 Sergei Silvestrov。小波表示的分解与马丁边界。 *J. Funct. Anal.*，262 3 1043 1061，2012( )：–。[EFHN15] Tanja Eisner、B ´ *Operator theo-* alint Farkas、 *retic aspects of ergodic theory* 272 *Graduate Texts in Mathematics* Markus Haase 和 Rainer Nagel。 ´ *Operator theo-* , *retic aspects of ergodic theory* 272 *Graduate Texts in Mathematics* ´ *Operator theo-* 卷，载于 。施普林格， *retic aspects of ergodic theory* 272 *Graduate Texts in Mathematics* 尚，2015。[Fab87] Raymond C. Fabec。诱导群作用、表示与纤维化斜积扩张。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，301(2)：489–513，1987。[Fab00] Raymond C. Fabec。 *Fundamentals of infinite dimensional representation the-* *ory* 114 *Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure* , *and Applied Mathematics* 2000 *ory* 114 *Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure* 卷，载于 。 *and Applied Mathematics* 2000 Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，。[FS22] De-Jun Feng 和 K´aroly Simon。 C^1 迭代函数系统与排斥子的维数估计。第二部分。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*，42(11)：3357–3392，2022。[Haw94] Jane M. Hawkins。端同态的可 amenable 关系。 *Trans. Amer. Math.* , ( )：–。[Haw21] *Soc.* 343 1 169 191, 1994 Jane Hawkins。 *Ergodic dynamics—from basic theory to applications*, *Graduate Texts in Mathematics*第289卷。施普林格，尚， [2021] ©2021。[HS91] Jane M. Hawkins 和 Cesar E. Silva。不存在绝对连续 σ-有限不变测度的不可逆变换。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，111 2 455 463，1991( )：–。

[JKS07] Palle E. T. Jorgensen、Keri Kornelson 和 Karen Shuman。具有重叠的迭代函数系统的调和分析。 *J. Math. Phys.*，48 083511，35，2007 8( ): 。[JKS11] Palle E. T. Jorgensen、Keri A. Kornelson 和 Karen L. Shuman。迭代函数系统、矩与无限矩阵变换。

Mem. , ( ):x , 。[Jor96]

Amer. Math. Soc. 213 1003 +105 2011
Palle E. T. Jorgensen。冯·诺伊曼代数端同态的对偶性。*J. Math. Phys.*，37(3):1521–1538，1996。[Jor01] Palle E. T. Jorgensen。Ruelle算子：关于传递算子调和的函数。 *Mem. Amer. Math. Soc.*，152(720):viii+60，2001。[Jor06] Palle E. T. Jorgensen。 *Analysis and probability: wavelets, signals, fractals*，*Graduate Texts in Mathematics*第234卷。施普林格，纽约，2006。[Jor18] Palle E. T. Jorgensen。

Harmonic analysis 128 *CBMS Regional Con-* , 第 卷，。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2018。平滑与非平滑，由数学科学会议委员会出版。[JP11] P. E. T. Jorgensen 和 A. M. Paolucci。Cuntz代数上的状态与p-进随机游走。 *J. Aust. Math. Soc.*，90(2):197–211，2011。[JS18] Palle E. T. Jorgensen 和 Myung-Sin Song。马尔可夫链与广义小波多分辨率。 *J. Anal.*，26(2):259–283，2018。[JT17] P. Jorgensen 和 F. Tian。传递算子、诱导概率空间与随机游走模型。 *Markov Process. Related Fields*，23(2):187–210，2017。[JT19] Palle Jorgensen 和 Feng Tian。端同态的动力学性质、多分辨率、相似变换与正交关系。

Discrete Contin. Dyn. , ( ): – 。[JT20]

Syst. Ser. S 12 8 2307 2348, 2019
Palle Jorgensen 和 James Tian。动力学与 Cuntz 关系表示中产生的非交换边界。

Numer. Funct. Anal. Op- , ( ): – 。[Kec95]

tim. 41 5 571 620, 2020
Alexander S. Kechris。

Classical descriptive set theory 156 *Graduate* , 第 卷，。

Texts in Mathematics 1995
Springer-Verlag，纽约，。[MV23] R. Medhi 和 P. Viswanathan。关于由循环

ϕ *Chaos* -压缩构成的可数迭代

Solitons Fractals 167 113011, 2023
函数系统的编码空间与Hutchinson测度。，：论文编号 。[PR22] Matthew J. Picklo 和 Jennifer K. Ryan。利用线滤波技术增强多维数据的多分辨率分析。

SIAM J. Sci. , ( ):A –A 。[PU10]

Comput. 44 4 2628 2650, 2022
Feliks Przytycki 和 Mariusz Urba

´ *Conformal fractals: ergodic theory* nski。

methods 371
*London Mathematical Society Lecture Note Series*第 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2010。[Roh49a] V. A. Rohlin。动力系统的测度理论选题。*Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*，4(2(30)):57–128，1949。[Roh49b] Vladimir A. Rohlin。关于测度论的基本思想。

Mat. Sbornik , ( ): – 。[Roh61]

N.S. 25 67 107 150, 1949
Vladimir A. Rohlin。Lebesgue空间的精确端同态。

Izv. Akad. , : – 。[RR22]

Nauk SSSR Ser. Mat. 25 499 530, 1961
Lakshmi Roychowdhury 和 Mrinal Kanti Roychowdhury。由无限迭代函数系统生成的概率分布的量化。*Commun. Korean Math. Soc.*，37(3):765–800，2022。[Sil88] Cesar E. Silva。关于 μ-循环非奇异端同态。 *Israel J. Math.*，61 1 1 13，1988 ( ): – 。[Sim12] David Simmons。条件测度与条件期望；Rohlin分解定理。 *Discrete Contin. Dyn. Syst.*，32(7):2565–2582，2012。

[URM22] Mariusz Urba ´ nski、 Mario Roy 和 Sara Munday。*Non-invertible dynamical systems. Vol. 1. Ergodic theory—finite and infinite thermodynamic formalism symbolic dynamics and distance expanding maps* 69 *De Gruyter Expositions in Mathematics* [2022] 2022 第 卷，。德古意特，柏林，©。

University of Iowa, Iowa City, Iowa, USA
Email address: sergii-bezuglyi@uiowa.edu
Email address: palle-jorgensen@uiowa.edu