arXiv:2304.14565v3 [math.SP] 7 Nov 2023

无穷体积与谱底原子

SAM EDWARDS、MIKOLAJ FRACZYK、MINJU LEE*、HEE OH

摘要。设 G 是一个高秩半单实代数群，或更一般地，任意一个不含秩一因子的半单实代数群，并设 X 为与之关联的黎曼对称空间。对于任意扎里斯基稠密离散子群 $\Gamma < G$，我们证明，$\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash X) = \infty$ 当且仅当没有正拉普拉斯特征函数属于 $L^2(\Gamma\backslash X)$；等价地， L^2-谱的底不是负拉普拉斯算子的谱测度的一个原子。这与秩一情形形成对比：在秩一情形中，基特征函数的平方可积性由临界指数相对于 X 的体积熵的大小决定。

无穷体积与谱底原子

摘要。设 G 为一个高秩实代数单群，或更一般地，设其为一个不含秩一因子的实半单代数群，并设 X 为与之对应的黎曼对称空间。对于任意在扎里斯基意义下稠密的离散子群 $\Gamma < G$，我们证明：$\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash X) = \infty$ 当且仅当不存在属于 $L^2(\Gamma\backslash X)$的正拉普拉斯特征函数；等价地，负拉普拉斯算子的谱测度在谱底 L^2 处没有原子。这与秩一情形形成对比：在秩一情形中，基态特征函数是否平方可积，取决于临界指数相对于 X的体积熵的大小。

Oh 部分由美国国家科学基金会资助项目 DMS-1900101 支撑。

1. 引言

设 $\mathcal{M}$ 为一个完备的黎曼流形，并设 Δ 表示 $\mathcal{M}$上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子。定义实数 $\lambda_0(\mathcal{M}) \in [0, \infty)$如下：

$$\lambda_0(\mathcal{M}) := \inf \left\{ \frac{\int_{\mathcal{M}} \|\operatorname{grad} f\|^2 \, d\operatorname{vol}}{\int_{\mathcal{M}} |f|^2 \, d\operatorname{vol}} \, : \, f \in C_c^\infty(\mathcal{M}) \right\}, \tag{1.1}$$

其中， $C_c^\infty(\mathcal{M})$表示所有具有紧支集的光滑函数构成的空间。这个数值 $\lambda_0(\mathcal{M})$称为负拉普拉斯算子 $-\Delta$ 的 L^2-谱底，并将 L^2-谱与正谱 [24, p分隔开来。329] （图1）。更准确地说，令 $L^2(\mathcal{M})$表示

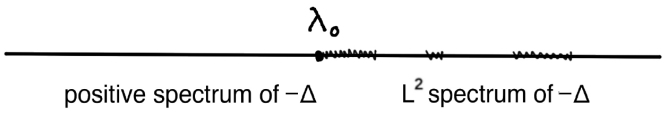


图1. λ_0 将 L^2 与正谱分隔开来

关于内积 $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathcal{M}} f_1 f_2 \, d\operatorname{vol}$平方可积的所有函数构成的空间。令 $W^1(\mathcal{M}) \subset L^2(\mathcal{M})$表示$C_c^\infty(\mathcal{M})$在以下范数下的闭包

$$\|f\|_{W^1} = \left(\int_{\mathcal{M}} f^2 \, d\operatorname{vol} + \int_{\mathcal{M}} \|\operatorname{grad} f\|^2 \, d\operatorname{vol} \right)^{1/2}.$$

在空间 $W^1(\mathcal{M})$ 上存在唯一一个自伴算子，它是 $C_c^\infty(\mathcal{M})$ 上拉普拉斯算子 Δ 的延拓，我们也将其记作 Δ （参见 [11, 第 4 章2]）。 $-\Delta$ 的 L^2-谱是所有满足 $\Delta + \lambda$ 没有有界逆算子（$\Delta + \lambda$）$^{-1}$ 的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的集合：$L^2(\mathcal{M}) \to W^1(\mathcal{M})$。Sullivan 证明了 $-\Delta$ 的 L^2-谱包含 $\lambda_0(\mathcal{M})$，且包含于正射线 $[\lambda_0(\mathcal{M}) \, \infty)$，也就是说， $\lambda_0(\mathcal{M})$ 是 L^2-谱的底端；此外，不存在特征值严格大于 $\lambda_0(\mathcal{M})$ 的正特征函数 [24, 定理 2.1 和 2.2] （见图 1）。我们将称一个

特征值为 $\lambda_0(\mathcal{M})$ 的特征函数为基特征函数。注意，在 $L^2(\mathcal{M})$ 中不存在基特征函数，与在 $L^2(\mathcal{M})$ 中不存在正特征函数是一回事 [24, 推论 2.9]。

本文研究局部对称空间。设 G为一个连通半单实代数群，(X, d)为相应的黎曼对称空间。设 $\Gamma < G$ 为一个离散无挠子群，$\mathcal{M} = \Gamma\backslash X$ 为相应的局部对称流形。

对于秩一局部对称流形 $\mathcal{M} = \Gamma\backslash X$，$\lambda_0(\mathcal{M})$与临界指数[1] δ_Γ 之间的关系是众所周知的：若记$D = D_X$ 为 X的体积熵，则

$$\lambda_0(\mathcal{M}) = \begin{cases} D^2/4 & \text{if } \delta_\Gamma \le D/2 \\ \delta_\Gamma(D - \delta_\Gamma) & \text{otherwise} \end{cases}$$

([6]-[8], [18]-[20], [24], [3])。关于这些结果向高秩情形的推广，参见([16], [1], [2], [9], [28])。我们指出，当 G 具有Kazhdan的性质（T）（参见 [29, 定理 7.4.2]）时，$\mathrm{Vol}(\mathcal{M}) = \infty$ 当且仅当$\lambda_0(\mathcal{M}) > 0$ ([3], [16])。

本文旨在研究局部对称流形上基特征函数的平方可积性。平方可积基特征函数空间至多为一维，且在非平凡时由一个正函数生成 [24]。基于这一正性，并运用他们关于几何边界上共形测度的理论，Patterson 和 Sullivan 证明，若 $\mathcal{M}$ 是一个几何有限实双曲（$n+1$）流形，则 $\mathcal{M}$ 存在平方可积基特征函数，当且仅当临界指数 δ_Γ 严格大于 $n/2$ （[21], [25], [24, 定理 2.21]）。更一般地，上文给出的 λ_0（$\mathcal{M}$）公式与 [12,

[1] 庞加莱级数的收敛横坐标 $s \mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(o,\gamma o)}$, $o \in X$。

推论 3.2] （另见 [17]）和 [27, 定理 1.1], 表明，任意秩一几何有限流形 $\mathcal{M}$ 存在平方可积基特征函数，当且仅当临界指数 δ_Γ 严格大于 $D_X/2$。

本文的主定理是以下令人惊讶的高秩现象，它与秩一情形形成对比：

定理 1.1。设 G 是一个不含秩一因子的连通半单实代数群。对于任意扎里斯基稠密离散无挠子群 $\Gamma < G$，当且仅当 $\Gamma\backslash X$ 不具有平方可积的正拉普拉斯特征函数，即 $\lambda_0(\Gamma\backslash X) > 0$ 不是 $-\Delta$ 的谱测度的原子时，我们有 $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash X) = \infty$ 。

换言之，当 $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash X) = \infty$，时，不存在平方可积的基特征函数（另见定理 4.3，其中给出了更一般的版本）。对于高秩半单李群中的阿诺索夫子群，该定理的一个特殊情形已在 [9, 定理 1.8] 中得到证明。更一般的版本请参见定理 4.3。

我们对定理 1.1 的证明基于 Quint 提出的 Patterson- Sullivan 理论的高秩版本 [22], ，其中一项主要的新输入是 Fraczyk 和 Lee 最近证明的定理（定理 4.1, [10]）。假设 $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash X) = \infty$ 且一个基特征函数是平方可积的。利用 Sullivan 的工作 [24], ，Edwards 和 Oh [9]证明了存在一个 Γ-共形密度 $\{\nu_x : x \in X\}$ 定义在 G 的富斯滕堡边界上（见定义 2.1），使得任意这样的基特征函数都与函数 E_ν 成比例，该函数由下式给出

$$E_\nu(x) = |\nu_x| \quad \text{for all } x \in X. \tag{1.2}$$

此外，Edwards-Oh [9] 还得到了 Thurston 和 Sullivan 的涂抹定理的以下高秩版本（[25], [26]）（参见

定理 3.1）：

$$|\mathsf{m}_{\nu,\nu}| \ll \int_{\Gamma\backslash X} |E_\nu|^2 dx,$$

其中，$\mathsf{m}_{\nu,\ \nu}$ 是一个广义 Bowen-Margulis-Sullivan 测度，对应于 $\Gamma\backslash G$ 上的一对（ν，ν）；参见定义 3.3。另一方面，Fraczyk 和 Lee 最近的定理（定理 4.1, [10]）描述了所有具有有限 BMS 测度的离散子群，该定理意味着 $|\mathsf{m}_{\nu,\ \nu}| = \infty$，因此 $E_\nu \notin L^2(\Gamma\backslash X)$，这就导出了矛盾。我们指出，式 (1.2) 右侧的被积函数可以替换为 $\mathsf{m}_{\nu,\ \nu}$ 的支撑的一个 $O(1)$-邻域；Sullivan 利用这一结论的秩一版本，根据 Γ 几何有限 [25]的基特征函数的增长控制，推导出与（唯一的）Patterson-Sullivan 测度 ν 相对应的 BMS 测度 $\mathsf{m}_{\nu,\ \nu}$ 有限。

我们在引言末尾提出两个与 L^2-谱相关的问题。当 $\Gamma < G$ 在秩一李群中几何有限，且不存在正的平方可积特征函数时，$L^2(\Gamma\backslash X)$中不存在拉普拉斯特征函数，并且准正则表示 $L^2(\Gamma\backslash G)$是温和的[2][18], [25], [4], [15]。鉴于此，我们提出以下问题：设 G 为一个没有秩一因子的半单实代数群，$\Gamma < G$为一个扎里斯基稠密离散子群。

问题 1.1. 当 $\Gamma < G$ 不是格时，$L^2(\Gamma\backslash X)$中是否可能存在拉普拉斯特征函数?

致谢 我们感谢 PeterSarnak 和 David Fisher 的关注与有益评论。我们感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。

[2]这意味着 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 弱包含于 $L^2(G)$，或者等价地，对于任意 $\varepsilon > 0$，$L^2(\Gamma\backslash G)$ 的每个矩阵系数都是 $L^{2+\varepsilon}(G)$-可积的。

2. 正特征函数与共形测度

设 G 是一个连通半单实代数群。我们固定 G的李代数 $\mathfrak{g}$ 上的一个嘉当对合 θ，并将 $\mathfrak{g}$ 分解为$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$，其中 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{p}$ 分别是 θ的 $+1$ 和 -1 特征子空间。我们用 K 表示 G 的极大紧子群，其李代数为$\mathfrak{k}$。我们还选取 $\mathfrak{p}$的一个极大阿贝尔子代数 $\mathfrak{a}$ 。我们分别用$\langle \cdot, \ \cdot \rangle$ 和 $\| \cdot \|$ 表示由 $\mathfrak{g}$上的基灵形式诱导的 $\mathfrak{a}$ 上的 Weyl 群不变内积和范数。我们用 $X = G/K$ 表示相应的黎曼对称空间，并赋予其由 $\mathfrak{g}$上的基灵形式诱导的黎曼度量 d 。X 上的黎曼体积形式记作 $d$vol。我们也用 dx 表示这一体积形式，同时也表示 G 上的哈尔测度。

设 $A := \exp \mathfrak{a}$。选取 $\mathfrak{a}$ 的一个闭正韦伊室 $\mathfrak{a}^+$，令$A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$。$A$ 在 K 中的中心化子记为 M，并设 N 为 A 对应的极大视界子群，使得 $\log(N)$ 是我们所选 $\mathfrak{a}^+$ 的所有正根子空间之和。设 $P = MAN$，它是 G 的一个极小抛物子群。商空间

$$\mathcal{F} = G/P$$

称为 G 的富斯滕堡边界。由于 K 在 $\mathcal{F}$ 和 $K \cap P = M$ 上传递作用，我们可以将 $\mathcal{F}$ 与 K/M 等同起来。

令 Σ^+ 表示 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}^+)$ 的所有正根的集合。我们也用$\Pi \subset \Sigma^+$ 表示所有单根的集合。对于任意 $g \in G$，存在唯一的元素 $\mu(g) \in \mathfrak{a}^+$，使得 $g \in K \exp \mu(g) K$。映射 $\mu : G \to \mathfrak{a}^+$ 称为嘉当投影。令 $o = [K] \in X$，则对所有 $g \in G$，有 $\|\mu(g)\| = d(go, o)$。在全文中，我们将 X 上的函数视为 G 上右 K-不变的函数。对于每个 $g \in G$，我们定义如下

可视映射：

$$g^+ := gP \in \mathcal{F} \quad \text{and} \quad g^- := gw_0P \in \mathcal{F}, \tag{2.1}$$

其中 w_0 表示最长的韦伊群元素，即满足 $\mathrm{Ad}_{w_0}\mathfrak{a}^+ = -\mathfrak{a}^+$ 的韦伊群元素。对角 G-作用下，$\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ 中唯一的开 G-轨道 $\mathcal{F}^{(2)}$ 由 $\mathcal{F}^{(2)} = G(e^+, e^-) = \{(g^+, g^-) \in \mathcal{F}\times\mathcal{F} \text{ 给出：} g \in G\}$. 设 $G = KAN$ 为伊wasawa分解，并通过以下关系定义伊wasawa余循环 $H: G \to \mathfrak{a}$

$$g \in K \exp\big(H(g)\big)N.$$

$\mathfrak{a}$ 值的布塞曼映射使用伊wasawa余循环定义如下：对于所有满足 $k \in K$ 的 $g \in G$ 和 $[k] \in \mathcal{F}$，定义

$$\beta_{[k]}(g(o), h(o)) := H(g^{-1}k) - H(h^{-1}k) \in \mathfrak{a} \quad \text{for all } g, h \in G.$$

共形测度。我们用 $\mathfrak{a}^*$ 表示 $\mathfrak{a}$ 上所有实值线性形式构成的空间。在本节余下部分，设 $\Gamma < G$ 为一个离散子群。以下共形密度的概念由 Quint 在 [22, 第 1 节中引入，2], 推广了秩一群的帕特森–沙利文密度（[21, 第 3], [23, 节 1]）。

定义 2.1. 令 $\psi \in \mathfrak{a}^*$。

(1) 若有限博雷尔测度 ν 定义在 $\mathcal{F} = K/M$ 上，且对所有 $\gamma \in \Gamma$ 和 $\xi = [k] \in K/M$，均满足下式，则称其为（Γ, ψ）-共形测度（基点为 o）：

$$\frac{d\gamma_*\nu}{d\nu}(\xi) = e^{-\psi(\beta_\xi(\gamma o, o))},$$

其中，对于任意博雷尔子集 $Q \subset \mathcal{F}$，$\gamma_*\nu(Q) = \nu(\gamma^{-1}Q)$。

(2) $\mathcal{F}$ 上的有限博雷尔测度族 $\{\nu_x : x \in X\}$，称为 (Γ, ψ)-共形密度，如果对于所有的 $x, y \in X$、$\xi \in \mathcal{F}$和 $\gamma \in \Gamma$，

$$\frac{d\nu_x}{d\nu_y}(\xi) = e^{-\psi(\beta_\xi(x,y))} \quad \text{and} \quad d\gamma_*\nu_x = d\nu_{\gamma(x)}. \tag{2.2}$$

一个 (Γ, ψ)-共形测度 ν 通过下式定义一个 (Γ, ψ)-共形密度 $\{\nu_x : x \in X\}$

$$d\nu_x(\xi) = e^{-\psi(\beta_\xi(x,o))} d\nu(\xi),$$

反过来，任意 (Γ, ψ)-共形密度 $\{\nu_x\}$ 都由其成员 ν_o 通过 (2.2) 唯一确定。我们将 $\mathcal{F}$ 上的某个 Γ-共形测度称为 (Γ, ψ)-共形测度，其中 $\psi \in \mathfrak{a}^*$ 取某个值。

定义 2.2。设 $\psi \in \mathfrak{a}^*$。对于 $\mathcal{F}$ 上的 (Γ, ψ)-共形测度 ν，我们在 G 上定义如下函数 E_ν：对于 $g \in G$,

$$E_\nu(g) := |\nu_{g(o)}| = \int_{\mathcal{F}} e^{-\psi\left(H(g^{-1}k)\right)} \, d\nu([k]). \tag{2.3}$$

我们指出，这与 [13] 中引入的变换相同。由于对所有 $\gamma \in \Gamma$ 和 $x \in X$ 均有 $|\nu_{\gamma(x)}| = |\nu_x|$，$E_\nu$ 的左 Γ-不变性和右 K-不变性显然成立。因此，我们可以将 E_ν 视为 $\Gamma\backslash G$ 上的 K-不变函数，或者等价地，视为 $\Gamma\backslash X$ 上的函数。

令 $\mathcal{D} = \mathcal{D}(X)$ 表示 X 上所有 G-不变微分算子构成的环。对于每个 (Γ, ψ)-共形测度 ν，E_ν 是 $\mathcal{D}$的联合特征函数；反之，$\Gamma\backslash X$ 上的任意正联合特征函数都可表示为某个 (Γ, ψ)-共形测度 ν [9, 的形式。命题 3.3]。

令 Δ 表示作用于 X 或 $\Gamma\backslash X$ 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。由于 Δ 是椭圆微分算子，特征函数总是光滑的。我们称光滑函数 f 为 λ-调和函数，如果

$$-\Delta f = \lambda f.$$

将实数 $\lambda_0 = \lambda_0(\Gamma\backslash X) \in [0,\infty)$ 定义如下：

$$\lambda_0 := \inf\left\{ \frac{\int_{\Gamma\backslash X} \|\mathrm{grad}\, f\|^2 \, d\,\mathrm{vol}}{\int_{\Gamma\backslash X} |f|^2 \, d\,\mathrm{vol}} \;:\; f \in C_c^\infty(\Gamma\backslash X),\ f \neq 0 \right\}. \tag{2.4}$$

我们将 λ_0 上的 $\Gamma\backslash X$ 调和函数称为基特征函数。一般而言， λ 调和函数未必是环 $\mathcal{D}(X)$ 的联合特征函数。然而，一个平方可积的 λ_0 调和函数最终会被证明是一个正联合特征函数，差一个常数倍。以下结果由[9,推论 6.6、定理 6.5] 以及 Sullivan 的工作 [24]和 [14]得到。

定理 2.3。 [9] 如果一个基特征函数 ϕ_0 属于 $L^2(\Gamma\backslash X)$，那么存在 $\psi \in \mathfrak{a}^*$ 以及一个在 $\mathcal{F}$ 上的 (Γ,ψ)-共形测度 ν，使得 ϕ_0 与 E_ν成比例。

这里，空间 $L^2(\Gamma\backslash X)$ 由关于内积 $\langle f_1, f_2\rangle = \int_{\Gamma\backslash X} f_1 f_2 \, d\mathrm{vol}$ 的平方可积函数组成。

—

3. 高秩涂抹定理

设 G 是一个连通半单实代数群， $\Gamma < G$ 是一个离散子群。我们回顾广义 Bowen-Margulis-Sullivan 测度的定义，该定义见 [5, 第 3] 节。

固定一对线性形式 ψ_1， $\psi_2 \in \mathfrak{a}^*$。令 ν_1 和 ν_2 分别为 $\mathcal{F}$ 上的 $(\Gamma,\ \psi_1)$ 共形测度和 $(\Gamma,\ \psi_2)$ 共形测度。利用由 $gM \mapsto (g^+,\ g^-,\ b = \beta_{g^-}(o,\ go))$ 给出的同胚（称为 Hopf 参数化） $G/M \to \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$，定义 G/M 上如下的局部有限博雷尔测度 $\tilde{\mathfrak{m}}_{\nu_1,\ \nu_2}$： 对于 $g = (g^+,\ g^-,\ b) \in \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$,

$$d\tilde{\mathfrak{m}}_{\nu_1,\nu_2}(g) = e^{\psi_1(\beta_{g^+}(o,go)) + \psi_2(\beta_{g^-}(o,go))}\, d\nu_1(g^+) d\nu_2(g^-) db, \tag{3.1}$$

其中， $db = d\ell(b)$ 是由内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 在 $\mathfrak{a}$ 上诱导的勒贝格测度。测度 $\tilde{\mathfrak{m}}_{\nu_1,\ \nu_2}$ 是左 Γ-不变且右 A-半不变的：

对所有 $a \in A$,

$$a_* \tilde{\mathsf{m}}_{\nu_1,\nu_2} = e^{(-\psi_1+\psi_2\circ \mathrm{i})(\log a)}\, \tilde{\mathsf{m}}_{\nu_1,\nu_2}, \tag{3.2}$$

其中，i 表示对向对合[3] $\mathrm{i}: \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ （参见 [5, 引理 3.6]）。测度 $\tilde{\mathsf{m}}_{\nu_1,\ \nu_2}$ 通过相对于 M 上的哈尔测度沿 $G \to G/M$ 的纤维积分，在 G 上诱导出一个左 Γ-不变且右 M-不变的测度。为简便起见，我们也将此测度记为$\tilde{\mathsf{m}}_{\nu_1,\ \nu_2}$。我们记

$$\mathsf{m}_{\nu_1,\nu_2} \tag{3.3}$$

$\Gamma\backslash G$ 上由 $\tilde{\mathsf{m}}_{\nu_1,\ \nu_2}$ 诱导的测度，并称其为与数对 $(\nu_1,\ \nu_2)$ 相关联的广义 BMS 测度。

以下定理已在 [9, 定理 7.4], 中证明，它将 Sullivan 和 Thurston 提出的涂抹论证（[25, 命题 5], [4,定理 4.1] 的证明）推广到了高秩情形。

定理 3.1 (Edwards-Oh, [9])。设 $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{a}^*$。存在常数$c = c(\psi_1, \psi_2) > 0$，使得对于任意一对$(\nu_1, \nu_2)$ $\Gamma, \psi_1)$ 上的(共形测度，以及(Γ, ψ_2)共形测度，分别有 $\mathcal{F}$

$$|\mathsf{m}_{\nu_1,\nu_2}| \le c \int_{1\text{-}neighborhood\ of\ \operatorname{supp} \mathsf{m}_{\nu_1,\nu_2}} E_{\nu_1}(x) E_{\nu_2}(x)\, dx.$$

尽管 [9, 定理 7.4] 的陈述使得 c 取决于 ν_1, ν_2，但其证明中给出的 c 公式表明, c 仅取决于相应的线性形式 ψ_1, ψ_2。

一个直接推论如下:

推论 3.2。设 ν是 $\mathcal{F}$上的 Γ共形测度。若 $|\mathsf{m}_{\nu,\nu}| = \infty$，则

$$E_\nu \notin L^2(\Gamma\backslash X).$$

[3]它由 $\mathrm{i}(u) = -\mathrm{Ad}_{w_0}(u)$，定义，其中 w_0 是最长的魏尔元。

4. 主定理的证明

如定理 1.1 所述，设 G 是一个不含秩一因子的连通半单实代数群，且 $\Gamma < G$ 是一个扎里斯基稠密离散无挠子群。我们回顾以下近期定理：

定理 4.1 (Fraczyk-Lee, [10])。假设$\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash X)=\infty$。那么，对于某个 $\psi\in\mathfrak{a}^*$，任意一对(ν_1,ν_2) 的(Γ,ψ) 共形测度以及$(\Gamma,\psi\circ\mathrm{i})$共形测度，

$$\mathsf{m}_{\nu_1,\nu_2}(\Gamma\backslash G)=\infty.$$

推论 4.2。若$\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash X)=\infty$，则对于任意一对$(\nu_1,\nu_2)$ Γ-共形测度，$\mathsf{m}_{\nu_1,\nu_2}(\Gamma\backslash G)=\infty$。

证明。对于 $k=1,2$，令 ν_k 为一个 (Γ,ψ_k)-共形测度，满足 $\psi_k\in\mathfrak{a}^*$。假设 $|\mathsf{m}_{\nu_1,\nu_2}|<\infty$。由于 $a_*\mathsf{m}_{\nu_1,\nu_2}=e^{\psi_1(\log a)-\psi_2(\mathrm{i}\log a)}\mathsf{m}_{\nu_1,\nu_2}$ 对所有 $a\in A$ 都成立，根据 (3.2)，可得

$$|\mathsf{m}_{\nu_1,\nu_2}|=e^{\psi_1(\log a)-\psi_2(\mathrm{i}\log a)}|\mathsf{m}_{\nu_1,\nu_2}|.$$

由于 $|\mathsf{m}_{\nu_1,\ \nu_2}|<\infty$，我们必有

$$\psi_2=\psi_1\circ\mathrm{i}.$$

因此，该结论由定理 4.1 得出。 □

定理 1.1 的证明 设 $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash X)=\infty$ 且 ϕ_0 是 $L^2(\Gamma\backslash X)$ 中的一个基特征函数。根据命题 2.3，我们不妨设 $\phi_0=E_\nu$，其中 ν 是 $\mathcal{F}$上的某个 Γ-共形测度。现在由定理 3.1 和推论 4.2，

$$\infty=|\mathsf{m}_{\nu,\nu}|\ll\|E_\nu\|_2^2.$$

这就产生了矛盾。

事实上，使用 [10]中主定理的一个更精确版本来替代定理 **4.1**，我们无需关于不存在秩一因子的假设即可得到以下结果。

定理 4.3。 设 G 是一个连通半单实代数群，且 $\Gamma <G$ 是一个扎里斯基稠密离散子群。若 $\Gamma\backslash X$ 存在一个平方可积基特征函数，则 $G = G_1G_2$，Γ 与 $\Gamma_1\Gamma_2$ 可公度，其中G_1 （分别为 G_2） 是由 G 的秩一（分别为高秩）因子构成的几乎直积， $\Gamma_1 < G_1$ 是离散子群，且 $\Gamma_2 < G_2$ 是一个格。

参考文献

[1] J. P. Anker 和 H. W. Zhang。局部对称空间上拉普拉斯算子的 L^2 谱底。Geom.Dedicata, 216(2022), no.1, PaperNo 3,12pp.[2] C. Connell、B. Mcreynolds 和 S. Wang。自然流与临界指数。预印本，arXiv:2302.12665 (2023)。[3] K. Corlette。极限集的豪斯多夫维数 *I*。Invent. Math. 102(3), 521–541(1990).[4] K. Corelette 和 A. Iozzi奇异双曲空间中等距变换离散群的极限集。Trans. Amer.Math. Soc. 351(1999), 1507-1530.[5] S. Edwards、M. Lee 和 H. Oh。阿诺索夫群：局部混合、计数与等分布。Geometry& Topology, 27 (2023), 513-573[6] J. Elstrodt。双曲平面上自守形式特征值问题的预解式 *I*。Math. Ann203 (1975), 295–330.[7] J. Elstrodt。双曲平面上自守形式特征值问题的预解式 *II*。Math. Z.132 (1973), 99-134.[8] J. Elstrodt。双曲平面上自守形式特征值问题的预解式 *III*。Math. Ann208 (1974), 99–132.[9] S. Edwards 和 H. Oh。 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 的温和性及高秩情形下的正特征函数。Comm.AMS. Vol 3(2023), 744-778.[10] M. Fraczyk 和 M. Lee。高秩情形下具有有限 *Bowen-Margulis-Sullivan* 测度的离散子群。预印本 (arXiv:2305.00610), 2023。

[11] *A. Grigor'yan*。《热核与流形上的分析》。*AMS/IP* 高等数学研究丛书，第 *47* 卷，美国数学学会。[12] *U. Hamenstädt*。几何有限流形的小特征值。*J. Geom. Anal. 14 (2004), 281–290*。[13] *S. Helgason*。对称空间上的 *Radon-Fourier* 变换及相关群表示。*Bull. Amer. Math. Soc. 71(1965), 757–763*。[14] *R. G. Laha*。对称空间上拉普拉斯-贝尔特拉米算子的非负特征函数。*Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 167-170*。[15] *P. Lax* 和 *R. Phillips*。欧氏空间和非欧空间中格点的渐近分布。*J. Funct. Anal. 46 (1982), 280-350*。[16] *E. Leuzinger*。离散群的临界指数与 L^2谱。*Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), no. 3, 919-927*。[17] *J. Li*。几何有限秩一局部对称流形小特征值的有限性。*Math. Res. Lett. 27 (2020), no. 2, 465-500*。[18] *S. Patterson*。黎曼曲面上的拉普拉斯算子。*Composition Math. 31 (1975), 83-107*。[19] *S. Patterson*。黎曼曲面上的拉普拉斯算子 *II*。*Composition Math. 32 (1976), 71-112*。[20] *S. Patterson*。黎曼曲面上的拉普拉斯算子 *III*。*Composition Math. 31 (1976), 227-259*。[21] *S. Patterson*。*Fuchs*群的极限集。*Acta Math. 136 (1976), 241-273*。[22] *J.-F. Quint*。高秩情形下的 *Patterson-Sullivan* 测度。*Geom. Funct. Anal. 12 (2002), p. 776–809*。[23] *D. Sullivan*。双曲运动离散群在无穷远处的密度。*Publ. IHES. No. 50 (1979), 171–202*。[24] *D. Sullivan*。黎曼几何中正性的相关方面。*J. Diff geometry. 25 (1987), 327–351*。[25] *D. Sullivan*。熵、古老与新近的豪斯多夫测度，以及几何有限 *Kleinian* 群的极限。*Acta Math. 153 (1984), 259–277*。[26] *D. Sullivan*。《*Thurston*故事十年》。下一步是什么？《*William P. Thurston* 的数学遗产》，*Dylan Thurston* 编，数学年刊研究，第 *205* 卷。

[27] T. Weich 和 L. Wolf。高秩局部对称空间中主特征值的缺失。 预印本，arXiv:2205.03167。[28] T. Weich 和 L. Wolf。 局部对称空间的温和性：乘积情形预印本，arXiv:2304.09573。[29] R. Zimmer。 遍历理论与半单群。 Birkhauser Boston，1984年。

杜伦大学数学科学系，Lower Mountjoy，DH1 3LE，杜伦，英国

芝加哥大学数学系，芝加哥，伊利诺伊州 60637，美国 芝加哥大学数学系，芝加哥，伊利诺伊州 60637，美国 耶鲁大学数学系，纽黑文，康涅狄格州 06520，美国