arXiv:2304.14764v1 [math.AT] 28 Apr 2023

异质弦和 CHL 弦的 2-群对称性配边

ARUN DEBRAY

摘要。在非零 B 场存在时，$E_8 \times E_8$ 杂化弦的对称性构成一个 2-群，或称范畴化群，CHL弦的对称性也是如此。我们将相应切结构的配边群表示为扭曲弦配边群，然后计算至 11 维，唯有少数未解决的歧义。随后，我们利用这些配边群研究这两种弦理论的反常与缺陷。

目录

0. 引言 1
1. 异质弦理论与 CHL 弦理论的切向结构 6
2. 配边计算 18
3. 弦理论中的推论 48
参考文献 54

0. 引言

长期以来，弦理论一直是数学中的高阶范畴结构与其应用相遇的领域。这有多种原因，其中一个关键原因是，超弦理论和超引力理论中的许多场，在数学中都有对应的高阶范畴对象。因此，即使只是精确地提出源自弦理论的数学问题，更不用说解决这些问题，往往也需要运用或发展各种具有高阶结构的几何对象的基础理论。本文关注一种称为 *2-群* 的高阶结构在两种特定弦理论中的出现，以及纳入这一结构如何影响对这些理论的切结构所对应的配边群的计算。这些配边群控制着这些理论中的反常和扩展对象。本文的主要结果是计算这两种弦理论基础切结构的配边群及其生成流形，维数至 11 维；但有少数歧义尚未处理。

对于本文所研究的高阶结构，故事始于*Kalb-Ramond*场，也就是*B* 场。它类似于电磁场的场强，以满足量子化条件的闭微分 2-形式表示。量子场论的局域性意味着将电磁场的场强表示为层的截面，具体来说，是主 $\mathbb{T}$丛上的一个联络，其中 $\mathbb{T}$ 是圆群。对于 B 场，一切都高一个次数：它以满足量子化条件的闭微分 3-形式的形式出现，

日期：2023年5月1日。

我们希望将其表达为一种能够层化的几何对象。这不可能是有限维李群 G的主丛上的联络 G；相反，我们将 B 场建模为 $\mathbb{T}$-$gerbe$上的联络，它是主 $\mathbb{T}$丛的范畴化。流形 $\mathbb{T}$上的-gerbe M 粗略来说，是一个群胚丛 M，它在局部等价于$\mathrm{pt}/\mathbb{T}$。要使这一概念精确化有多种方式；我们将讨论其中一种，即 Murray 的丛胚 [Mur96], ，见定义1.1。

本文中，我们考察两种弦理论中的高阶结构：$\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 杂化弦，以及 Chaudhuri-Hockney-Lykken（CHL）弦。前者是一种十维超弦理论，其低能极限是十维 N $= 1$ 超引力；后者是一种九维理论，由 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 杂化弦理论通过在圆上紧致化得到。这两种理论都有 B 场，但 Green 和 Schwarz [GS84] 指出，为了消除反常，B 场和规范场必须满足一种称为 Bianchi 恒等式的关系。Fiorenza-Schreiber-Stasheff [FSS12] 和 Sati-Schreiber-Stasheff [SSS12] 描述了 Bianchi 恒等式如何将 B 场与规范场的数据结合起来，形成可解释为某个 2-群 $\mathbb{G}$ 的主丛上的联络的数据；具体来说，这是与紧李群 G 及一个类 $\mu \in H^4(BG; \mathbb{Z})$相关联的 string 2-群 $\mathrm{Str}(G, \mu)$。通常， G 是规范群，而 μ 由反常多项式确定。

2-群在理论物理学和数学物理学文献中已有一段时间的应用。这个研究纲领真正开始于 Baez、Crans、Lauda、Stevenson 和 Schreiber 的工作 [Bae02、BC04、BL04、BSCS07、BS07]；近年来，2-群、它们的对称性及其反常在 Córdova-Dumitriescu-Intrilligator 的工作之后重新出现在量子场论中 [CDI19] 以及 Benini-Córdova-Hsin 的工作 [BCH19]确定了许多常见量子场论中所研究的2-群对称性的例子。另见 Sharpe [Sha15] 及其中的参考文献。

在本文的第一部分，我们介绍 Bianchi 恒等式和2-群，然后回顾上文提到的 Fiorenza-Schreiber-Stasheff [FSS12] 和 Sati-Schreiber-Stasheff [SSS12] 的工作。这些作者在光滑流形网站 $\mathcal{M}an$ 上的层叠框架中开展研究；B 场的数据$(Q,\ \Theta_Q)$ 以及带联络的主 G-丛 $(P,\ \Theta_P)$ 在一个流形 M 上细化为从 M 到这些数据的分类栈的映射。与 Θ_P 和 Θ_Q 相关联的两个微分特征类的一个识别的数据给出

（1）一个主 $\mathcal{S}tr(G,\ \mu)$-丛的提升 P，对应于指定的 μ （命题 1.35），以及（2）Bianchi 恒等式解的局部数据（命题1.37, [FSS12，§6。3]）。

受此启发，我们引入切结构 ξ^{het} 和 ξ^{CHL}，它们是 Sati-Schreiber-Stasheff 的一般构造的特殊情形 [SSS12，定义 2.8]：流形 M 上的 ξ_n^{het}-结构，是指一个主 $\mathbb{G}_n^{\mathrm{het}}$-丛，其中 $\mathbb{G}_n^{\mathrm{het}} :=$ $\mathrm{Str}(\mathrm{Spin}_n \times(\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8 \times \mathbb{Z}/2)\ c_1 + c_2 - \lambda)$ (1.42)，其经由商 $\mathbb{G}_n^{\mathrm{het}} \to \mathrm{Spin}_n$ 得到的伴随 Spin_n-丛，正是自旋标架的主 Spin_n-丛（定义 1.41）。当 n 变化时，这一定义具有相容性，因此我们可以按通常方式稳定化并定义 ξ^{het}-结构。定义 1.52 中 ξ^{CHL} 的定义与 [SSS12，(2.18)，§2.2.3]，中的 $B\mathrm{String}^{2a}$ 相同，且与之类似。相关的切结构见于 [Sat11b、FSS15a、FSS15b、FSS21]。

给定一个切结构，我们可以计算配边群；事实上，本文旨在计算低维的 ξ^{het} 和 ξ^{CHL} 配边群。随后可以利用这些配边群进一步了解 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 异质弦和 CHL弦。我们主要考虑两项应用。

(1) *McNamara-Vafa* 配边猜想McNamara-Vafa [MV19] 是对量子引力中求和所涉及的时空背景类型这一问题的一种应用。这类背景通常被认为是流形，或与流形密切相关的对象，并配备切结构数据 ξ。配边猜想指出，如果 ξ 是在任何特定的 d维量子引力理论中能够以这种方式出现的最一般切结构，那么 $\Omega_k^{\xi}=0$ 对于 $3\le k\le d-1$。我们将看到，在这一范围内，$\Omega_k^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 和 $\Omega_k^{\xi^{\mathrm{CHL}}}$ 通常都不为零。这与配边猜想是一致的：这表明 ξ^{het} 和 ξ^{CHL} 并非能够参与求和的最一般切结构。通常，通过允许与考虑包含膜或其他缺陷的理论相对应的奇异流形，这些配边群便会消失。因此，可以利用配边计算来预测弦理论中的新缺陷。

(2) 一大类 n维量子场论都带有反常的数据，在许多情况下，可粗略地将其描述为一个$(n+1)$维可逆场论 α。在某些情况下，我们希望平凡化 α，也就是说，展示一个从 α 到平凡场论的同构。根据 Freed-Hopkins-Teleman [FHT10] 和 Freed-Hopkins [FH21b], 的工作，可逆场论可以通过配边群计算进行分类。对于$\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8$ 异质弦和 CHL弦而言，表明可能存在反常的配边群均非零；检验相应的反常是否非平凡将很有意义。

关于这些应用以及我们能从配边计算中了解到什么，详见 §3，以及下文的问题0.1 至0.3 。

我们的主要定理是以下两个关于低维 ξ^{het} 和 ξ^{CHL} 配边群的计算结果。

定理 A. 对于 $k\le 10$， ξ^{het}-配边群为：

$$\begin{aligned}
\Omega_0^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z} & \Omega_6^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z}/2\\
\Omega_1^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2 & \Omega_7^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z}/16\\
\Omega_2^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2 & \Omega_8^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z}^3\oplus(\mathbb{Z}/2)^{\oplus i}\\
\Omega_3^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z}/8 & \Omega_9^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong (\mathbb{Z}/2)^{\oplus j}\\
\Omega_4^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2 & \Omega_{10}^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong (\mathbb{Z}/2)^{\oplus k}.\\
\Omega_5^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong 0
\end{aligned}$$

这里，要么是 $i=1$、 $j=4$ 和 $k=4$，要么是 $i=2$、 $j=6$ 和 $k=5$。

$\Omega_{11}^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 是一个阶为 64 的阿贝尔群，同构于 $\mathbb{Z}/8\oplus\mathbb{Z}/8$、 $\mathbb{Z}/16\oplus\mathbb{Z}/4$、 $\mathbb{Z}/32\oplus\mathbb{Z}/2$ 或 $\mathbb{Z}/64$ 之一。

这是定理 2.62 和 2.74的组合。在 §2.2.1中，我们为 $\Omega_k^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 中所有 $k\le 10$ 类找到了流形代表元，但可能缺少两个类 X_8 和 X_9，其维数分别为 8 和9，以及它们与 S^1_{nb}的乘积。这些类是否为零，取决于某个 Adams 微分的最终结果。在 §2.2.2中，我们找到了代表 X_8的流形：如果尚未处理的 Adams 微分为零，则应将 X_8 加入 §2.2.1的生成元列表；如果该微分不为零，则 X_8 是一个以 ξ^{het}为边界的流形。

我们对 ξ^{CHL}-配边的计算建立在 Hill [Hil09，定理 1 的工作之上。1], 他计算了$\Omega_*^{\mathrm{String}}(B\mathrm{E}_8)$在 14 维及以下的情形。

定理 B. 对于 $k \leq 11$，存在一个抽象同构，将 $\Omega_*^{\xi^{\mathrm{CHL}}}$ 映到 2-挠元直和项以及自由直和项 $\Omega_*^{\mathrm{String}}(B\mathrm{E}_8)$。因此，根据 *Hill* 的计算 [Hil09], , 存在同构

$$\begin{aligned}
\Omega_0^{\xi^{\mathrm{CHL}}} &\cong \mathbb{Z} & \Omega_6^{\xi^{\mathrm{CHL}}} &\cong \mathbb{Z}/2\\
\Omega_1^{\xi^{\mathrm{CHL}}} &\cong \mathbb{Z}/2 & \Omega_7^{\xi^{\mathrm{CHL}}} &\cong 0\\
\Omega_2^{\xi^{\mathrm{CHL}}} &\cong \mathbb{Z}/2 & \Omega_8^{\xi^{\mathrm{CHL}}} &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\\
\Omega_3^{\xi^{\mathrm{CHL}}} &\cong \mathbb{Z}/8 & \Omega_9^{\xi^{\mathrm{CHL}}} &\cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2\\
\Omega_4^{\xi^{\mathrm{CHL}}} &\cong \mathbb{Z} & \Omega_{10}^{\xi^{\mathrm{CHL}}} &\cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2\\
\Omega_5^{\xi^{\mathrm{CHL}}} &\cong 0 & \Omega_{11}^{\xi^{\mathrm{CHL}}} &\cong \mathbb{Z}/8.
\end{aligned}$$

这是定理2.90 和2.92的组合。我们还获得了有关这些群的生成元的流形代表元的一些信息。

我们用于证明定理 A 和 B 的计算工具是标准的：Adams 谱序列。这一谱序列在数学物理文献中已有大量应用，而 Beaudry-Campbell [BC18] 介绍了一种标准方法，可用于简化一大类切结构的 E_2-页；这类切结构可以描述为由虚向量丛扭曲的定向、Spin^c、Spin 或弦配边。例如， [FK96、Fan99、FW10]的扭曲弦配边计算便采用了这一简化技巧。遗憾的是，我们无法使用这种方法：在引理 2.2 中，我们证明了 ξ^{het} 和 ξ^{CHL}无法描述为这种类型的扭曲。不过，得益于 Ando-Blumberg-Gepner-Hopkins-Rezk [ABG+14a、ABG+14b], 我们仍能在更一般的意义下将它们描述为扭曲：通过改造 Hebestreit-Joachim [HJ20], 的一个论证，可以得知， ξ^{het}和 ξ^{CHL} 的 Thom 谱可以构造为与某些映射到$B\mathrm{GL}_1$(MTString)相关联的 MTString-模 Thom 谱。利用这一结构，在与 Matthew Yu 即将开展的合作工作中，我们能够证明一个简化 E_2-页计算的定理：

定理 C (Debray-Yu [DY])。 在拓扑次数 15 及以下，计算 E_2 页的 *Adams* 谱序列可得 2-完备的、适用于一类扭曲的扭曲弦配边，其中包括 ξ^{het} 和 ξ^{CHL} 对应的扭曲；这些谱序列可通过 *Steenrod*代数的子代数 Ext 计算。$\mathcal{A}(2)$ 。

我们的证明更为精确，适用范围也更广；该结果的这一版本见定理 2.20和推论2.22。[1]

我们需要计算的 $\mathcal{A}(2)$-模 Ext 群，比起原则上必须在整个 Steenrod代数 $\mathcal{A}$上处理的问题，要简单得多。奇素数情形下，我们并不需要这种简化；此时直接使用完整的 Adams 谱序列反而更容易，而没有这种简化也不会妨碍我们（另见 [DY，§3。2]）。

<escape>我们在本文中计算这些配边群，是为了将其应用于物理学，特别是反常和配边猜想。我们在§3中讨论了我们计算结果的一些影响；例如， $\mathbb{Z}/2$ 的一个直和项$\Omega_1^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 对应于 Kaidi-Ohmori-Tachikawa-Yonekura 最近发现的非超对称7-膜 [KOTY23]。我们以一些与这些物理学预测相关的问题作为本节引言的结尾。</escape>

[1]由于 [DY]尚不可用，我们在备注 2.26中简要证明所需的情形。

问题 0.1。 Kaidi-Ohmori-Tachikawa-Yonekura7-膜在 Hořava- Witten 理论中对应什么？在配边中又是什么样子？Hořava-Witten [HW96a, HW96b, Wit96]提出，杂化弦可以被识别为M理论在区间上紧化的某个极限；因此，这应当对应于一种带边界流形的配边概念。Conner-Floyd [CF66, §16] 定义了一种带边界紧流形的配边概念——这是否是应用于McNamara-Vafa猜想的正确配边类型？

我们将在 §3.1中讨论配边计算预测存在于 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 杂化弦和 CHL弦中的一些额外扩展对象。

问题 0.2。 在 $\mathbb{Z}/2$ 异质弦理论中，交换两个 E_8丛的 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 对称性是否存在反常？由于 $\Omega_{11}^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 非零，我们无法排除这一反常。

Witten [Wit86, §4] 和 Tachikawa-Yonekura [TY21] 证明，在某些情况下，$\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 杂化弦不存在反常，但他们没有讨论 $\mathbb{Z}/2$ 对称性。

问题 0.3。 CHL弦是否存在反常？由于 $\Omega_{10}^{\xi^{\mathrm{CHL}}} \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$，这一反常可能非平凡。

我们在本文中没有讨论扭曲弦配边在物理学中的另一项应用：沿着例如 Bunke-Naumann [BN14], McTague [McT14], Han-Huang-Duan [HHD21], 以及 Berwick- Evans [BE23]的思路，研究椭圆属、Witten属及相关不变量。研究本文中的计算是否能应用于类似情境，将会很有意思。

概述。我们首先在 §1.1 中介绍 10d N $= 1$ 超引力中的场，它是异质弦理论的低能极限。我们讨论 Green-Schwarz反常消除条件如何对该理论中的场施加一个称为 Bianchi 恒等式 (1.10) 的方程。随后，我们将其推广为一个扭曲的 Bianchi 恒等式 (1.12)，它与李群 G 及一个类 $\mu \in H^4(BG;\mathbb{Z})$ 的数据相关。在 §1.2 中，我们将这些 Bianchi 恒等式与该场论中 2-群对称性的存在联系起来。我们先回顾 2-群、其主丛及其联络，并在例 1.22 中定义与群 G及一个类 $\mu \in H^4(BG;\mathbb{Z})$ 对应的弦覆盖 $\mathrm{S}(G,\mu)$。接着，我们回顾 Fiorenza-Schreiber-Stasheff [FSS12] 和 Sati-Schreiber-Stasheff [SSS12] 的工作，该工作将 Bianchi 恒等式与扭曲弦结构联系起来。基于此，我们在定义 1.41 中定义异质切结构，它是定义 N $= 1$ 超引力所需结构的拓扑部分。随后，在 §1.3 中，我们介绍 CHL弦，并运用在 §1.2 中学到的内容定义 CHL切结构。

在 §2 中，我们计算低次的配边群 $\Omega_*^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 和 $\Omega_*^{\xi^{\mathrm{CHL}}}$。对于后者，我们能够完整计算维数 11 及以下的配边群；但对于前者，维数 7 以上的结果只能部分确定，因为 Adams 微分和一个我们无法解决的扩张问题遮蔽了完整结果。我们首先在 §2.1 讨论如何简化 Thom 谱 $\mathrm{MT}\xi^{\mathrm{het}}$ 和 $\mathrm{MT}\xi^{\mathrm{CHL}}$；我们在引理 2.2 中证明，一种标准方法行不通，因此我们采用另一种思路：利用 Ando-Blumberg-Gepner-Hopkins-Rezk 开发的工具，将 $\mathrm{MT}\xi^{\mathrm{het}}$ 和 $\mathrm{MT}\xi^{\mathrm{CHL}}$ 构造成 MTString-模 Thom 谱。我们回顾这一工具，并讨论它如何导出推论 2.22。该推论是我们与 Matthew Yu 合作的主要定理 [DY] 的一个特例，可简化 2 处一大类扭曲弦配边群的 Adams 谱序列 E_2 页的计算。接下来，在 §2.2 中，我们对 ξ^{het} 进行这项计算。对于奇素数处，我们无法作出这样的简化，因此在 §2.3 中，我们直接继续研究 Adams

谱序列，用于 ξ^{het}，并在定理 2.74 中证明，$\Omega_*^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 在11 及以下次数中没有奇素数挠。最后，在 §2.4 中，我们对 CHL弦进行类似的计算，再次在 2.22 处使用推论 $p = 2$，并在奇素数处采用更直接的方法。

最后一节 §3讨论弦理论中的应用。我们首先在 § [MV19] 中讨论 McNamara-Vafa 的配边猜想3.1，并回顾由 §2中的配边群计算得出的若干预测。在 §3.2中，我们简要介绍量子场论的反常及其配边理论分类，并谈及配边计算引出的问题。

致谢。我尤其要感谢 Miguel Montero，他不仅提出了这个项目，还就本文内容进行了许多有益的交流；也感谢 Matthew Yu，就 [DY] 以及本文相关的其他想法进行了许多有益的讨论。我还要感谢 Markus Dierigl 和匿名审稿人对稿件草稿提出的宝贵意见。此外，本文也受益于与 Ivano Basile、Matilda Delgado、Jacques Distler、Dan Freed、Jonathan J. Heckman、Justin Kaidi、Jacob McNamara、Yuji Tachikawa 和 Roberto Telléz Domínguez 的交流；向大家一并致谢！

本项目的部分工作是在 AD 访问外围理论物理研究所期间完成的；外围研究所的研究经费由加拿大政府通过加拿大工业部提供，并由安大略省政府通过研究与创新部提供。

1. 杂化弦与 CHL 弦理论的切结构

本节旨在定义 ξ^{het} 和 ξ^{CHL}，它们是构建$\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 杂化弦与 CHL弦（的低能极限）所必需的。我们所说的“切结构”，是指在流形上定义给定场论所需结构中的拓扑部分；精确定义见定义1.40 。两种理论中都存在 B 场，这意味着这些切结构是高阶群的分类空间。首先，我们在 §1.1介绍杂化弦，并了解 Green-Schwarz 反常抵消告诉我们的数据和条件；接着在 §1.2，我们将这些数据重新诠释为把规范场与 B 场结合成高阶群主丛的联络。最后，在 §1.3，我们运用 §1.2 中的一般理论，确定 CHL弦的切结构。

本节的内容并非新知，只是过去并不总是以这种形式表述。Bianchi 恒等式/Green-Schwarz 机制表达了高阶群主丛的联络提升，这一点广为人知；参见 Fiorenza-Schreiber-Stasheff [FSS12] 以及 Sati-Schreiber-Stasheff [SSS12]。

1.1. 杂化弦的 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$。

杂化弦理论是十维超弦理论，其低能极限是 10 维 $\mathcal{N} = 1$ 超引力理论。这些超引力理论可以包含杨-米尔斯项，因此由规范群 G这一数据参数化；它是一个紧李群。然而，并非所有 G 的选择都能产生有效的超引力理论；可能存在必须平凡化的反常，而这是一项相当强的约束，意味着 G 中的单位元连通分支必须是 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 或 $G = \mathrm{SemiSpin}_{32}$[2] [GS84, ATD10]。由 Green-Schwarz [GS84], 提出的反常抵消机制本身将理论中的不同场组合成一个主 $\mathbb{G}$-丛的联络，其中 $\mathbb{G}$ 是一个高阶群；我们使用

[2]的中心Spin_{4k} 同构于 $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$。除去其中一个 $\mathbb{Z}/2$ 可得到SO_{4k}；除去另外两个 $\mathbb{Z}/2$ 子群所得的商彼此同构，称为 $\mathrm{SemiSpin}_{4k}$。参见 [McI99]。[3]Green-Schwarz 的工作只消除了反常的微扰部分；更多信息请参见 §3.2 。

本小节讨论场和 Green-Schwarz条件，下一小节讨论高阶群的作用。本文将只关注 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 情形；研究本文中的计算和应用在 $\mathrm{SemiSpin}_{32}$ 情形下的类似结果将会很有意思。

群 $\mathbb{Z}/2$ 通过交换两个因子作用于 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$，而异质弦理论的设定（包括低能超引力极限和 Green-Schwarz 反常抵消）在此对称性下保持不变，因此我们可以将规范群扩展为 $G := (\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8) \rtimes \mathbb{Z}/2$。[4] McInnes 似乎最早注意到了这一点 [McI99，§I]；另见 [dBDH+00，§2.2。1]。

10 维 $\mathcal{N} = 1$ 超引力在流形 M 上的场包括：

- 度量 g，
- M 上的自旋结构，
- 带联络 Θ_P 的主 G-丛 $P \to M$，
- 一个 ***B* 场** 或 ***Kalb-Ramond* 场**、一个带联络的 gerbe $Q \to M$ Θ_Q，以及
- 若干其他场（膨胀子、膨胀子伴子、引力微子和规范微子），这些场与本文并无直接关系。

让我们进一步谈谈 B 场，因为将其建模为带联络的丛形或许不太为人熟悉。丛形是对主 $\mathbb{T}$丛这一概念的范畴化；此处 $\mathbb{T}$ 是圆群。例如，主 $\mathbb{T}$丛 $P \to M$ 由其第一陈类 $c_1(P) \in H^2(M; \mathbb{Z})$分类，而丛形 $Q \to M$ 由其 Dixmier-Douady类 $\mathrm{DD}(Q) \in H^3(M; \mathbb{Z})$ [DD63, Bry93]分类。主 $\mathbb{T}$丛上的联络具有沿环路的整体性；丛形上的联络则具有沿闭曲面的整体性。诸如此类。

丛形最早由 Giraud 引入 [Gir71]。精确定义丛形及其联络有几种不同但等价的方式；从直观上说，可以将 M 上的丛形看作 M 一个局部等价于纤维为$\mathrm{pt}/\mathbb{T}$的平凡层的群胚层。以下是一种使这一说法精确化的方法。

如果 $f\colon Y \to X$ 是一个映射，我们令 $Y^{[n]} := Y \times_X Y \times_X \cdots \times_X Y$； $Y^{[n]}$ 是 f 的 Čech神经中的 n-单形空间。

定义 1.1（Murray [Mur96]）。一个 丛胚 在流形 M 上的一个满射浸没$\pi\colon Y \to M$、一个 $\mathbb{T}$-丛 $P \to Y^{[2]}$，以及一个同构 $\mu\colon \pi_{12}^* P \otimes \pi_{23}^* P \xrightarrow{\cong} \pi_{13}^* P$，它是 $\mathbb{T}$上的$Y^{[3]}$-丛之间的同构，并满足自然的结合律条件（见下文） $Y^{[4]}$。

给定两个 $\mathbb{T}$-丛 P_1， $P_2 \to X$，它们的张量积 $P_1 \otimes P_2$ 是关联于 P_1 和 P_2 的 Hermitian 线丛 L_1，$L_2 \to X$ 的张量积内部的单位圆丛。映射π_{12}， π_{23}， $\pi_{13}\colon Y^{[3]} \rightrightarrows Y^{[2]}$ 是与 f 相关联的 Čech神经 $Y^\bullet$ 中的三个面映射，具体而言，它们通过 $Y \times_X Y \to Y$ 收缩 Y 的三个副本中的两个而给出。

定义 1.1 中的结合律条件难以明确表述，但可参见 [Mur10，定义 4.1(2)]。

定义 1.2（[Mur96]）。丛胚 $Q = (Y, P, \mu)$ 上的联络 Θ_Q 由一个 2-形式$B \in \Omega^2(Y)$ 和 P上的联络 Θ_P 组成，使得若 $\Omega_P \in \Omega^2(P)$ 表示 P 的曲率，且 $\pi_1, \pi_2\colon Y^{[2]} \to Y$ 为两个投影，则

$$\Omega_P = \pi_2^* B - \pi_1^* B. \tag{1.3}$$

[4]虽然我们经常使用标准名称“$\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 杂化弦”来指代这一理论，但我们始终考虑更大的规范群 $(\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8) \rtimes \mathbb{Z}/2$。

Θ_Q 的曲率为 $\Omega^Q := \mathrm{d}B$，这是一个闭三形式。

这个定义需要了解的关键之处是：与带联络的主 $\mathbb{T}$丛 $P \to M$ 类似，它局部具有一个联络1形式 A，全局具有一个曲率2形式Ω_P，它局部满足$\Omega_P = \mathrm{d}A$；带联络的 gerbe Q 局部具有一个联络2形式 B，全局具有一个曲率3形式Ω^Q，它局部满足$\Omega^Q = \mathrm{d}B$。更多信息请参见，例如，Brylinski [Bry93，§5。3]。

定义 1.4。由于 E_8 是一个简单、连通、单连通的紧李群，因此存在典范同构 $H^4(B\mathrm{E}_8; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$。令 c 表示与 $1 \in \mathbb{Z}$对应的生成元。在$B(\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8) \simeq B\mathrm{E}_8 \times B\mathrm{E}_8$, 中，令 c_1 和 c_2 表示 c 的两个副本，它们分别经由 Künneth 映射来自 $B\mathrm{E}_8$ 的第一、第二个副本。

类 $c_1 + c_2$ 在 $\mathbb{Z}/2$ 交换作用下是不变量，因此通过 Serre 谱序列下降为 $H^4(B((\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8) \rtimes \mathbb{Z}/2); \mathbb{Z})$ 中的一个类，我们也将其称为 $c_1 + c_2$。

定义 1.5. 当$n \geq 3$时，Spin_n 也是一个紧致、连通、单连通的单李群；$B\mathrm{Spin}_n; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$ 中对应于 1 的生成元记为 λ。

类 λ 在标准嵌入 $\mathrm{Spin}_n \hookrightarrow \mathrm{Spin}_{n+k}$下保持不变，因此我们常使用其稳定化形式 $\lambda \in H^4(B\mathrm{Spin}; \mathbb{Z})$。我们用它来定义当 $n < 3$ 时 Spin_n 的 λ。由于$2\lambda = p_1$，类 λ 常记为 $\frac{1}{2}p_1$。λ 的模 2 约化是 Stiefel-Whitney 类w_4。

引理 1.6（Whitney 和公式）。设 X 是一个拓扑空间，E_1和 $E_2 \to X$ 是两个带有自旋结构的向量丛。则 $\lambda(E_1 \oplus E_2) = \lambda(E_1) + \lambda(E_2)$。

证明。只需证明普适情形，这相当于计算映射的拉回λ

$$\oplus \colon B\mathrm{Spin}_{k_1} \times B\mathrm{Spin}_{k_2} \longrightarrow B\mathrm{Spin}_{k_1+k_2}. \tag{1.7}$$

对于 $n \geq 3$，Spin_n 是一个连通、单连通的紧致单李群，因此当 $\ell = 1$、2、3时，$H^\ell(B\mathrm{Spin}_n; \mathbb{Z})$消失，而当 $\ell = 0$、4时，它同构于 $\mathbb{Z}$。对于 $n < 3$，$H^*(B\mathrm{Spin}_n; \mathbb{Z})$在4及以下的次数仍然是平凡群或自由阿贝尔群。因此，根据Künneth公式，对于所有 k_1、k_2，$H^4(B\mathrm{Spin}_{k_1} \times B\mathrm{Spin}_{k_2}; \mathbb{Z})$都是自由阿贝尔群，这意味着，如果我们能证明 $2\lambda(E_1 \oplus E_2) = 2\lambda(E_1) + 2\lambda(E_2)$，就可以推出 $\lambda(E_1 \oplus E_2) = \lambda E_1(+ \lambda)E_2$。

如 $2\lambda = p_1$，我们已将问题归结为 p_1 的 Whitney 和公式。Whitney 和公式$p_1(E_1 \oplus E_2) = p_1(E_1) + p_1(E_2)$ 实际上并不适用于所有向量丛，但 Brown [Bro82, 定理 1.6]（另见 Thomas [Tho62]）证明了，当 E_1 和 E_2 可定向时，差值 $p_1(E_1 \oplus E_2) - p_1(E_1) - p_1(E_2)$ 为零，因此在我们讨论自旋向量丛的情形下，可以得出结论。□

备注 1.8。证明引理 1.6还有其他方法：例如，它可由 Jenquin 的一个结果直接推出 [Jen05，推论 4。9] 在一种简单的广义上同调理论中。Johnson-Freyd 和 Treumann [JFT20，§1。4] 概述了证明引理 1.6的另一种方法。

接下来，我们介绍切尔恩–韦伊同态。设 G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，并且设 $f \in \mathrm{Sym}^k(\mathfrak{g}^\vee)$，即 f 是 $\mathfrak{g}$ 上的一个次数为 k 的多项式函数，在伴随 G 作用于 $\mathfrak{g}$ 下不变。给定一个流形 M、一个主 G-丛 $P \to M$，以及 P 上的一个联络 Θ，令 $\Omega \in \Omega^2_P(\mathfrak{g})$ 表示曲率 2-形式。然后可以在 $\Omega^{\wedge k} \in \Omega^{2k}_P(\mathfrak{g}^{\otimes k})$ 上求 f 的值，从而得到一个微分形式。

$f(\Omega^{\wedge k}) \in \Omega_P^{2k}$；因为 f 是 Ad-不变量， $f(\Omega^{\wedge k})$ 下降为微分形式 $w(\Theta) \in \Omega_M^{2k}$，它总是闭的。这定义了一个环同态，称为切尔恩–韦伊同态 [Car50， Che52]，

$$w\colon \mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{g}^\vee) \longrightarrow H^*_{\mathrm{dR}}(M), \tag{1.9a}$$

它将次数加倍，且关于 M 是自然的；此外， $w(\Theta)$ 的德拉姆上同调类取决于 P ，但不取决于联络。利用德拉姆定理和自然性， w 可提升为环同态

$$w\colon \mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{g}^\vee) \longrightarrow H^*(BG;\mathbb{R}), \tag{1.9b}$$

切尔恩和韦伊证明，当 G 是紧的时，它是一个同构 [Che52, Wei49]。因此，当 G 是紧的时，一个类 $x \in H^{2*}(BG;\mathbb{Z})$ 定义了一个多项式 $\mathrm{CW}_x \in \mathrm{Sym}^*(\mathfrak{g}^\vee)$，它是 w 下 x 的德拉姆上同调类的原像。我们也将用 $\mathrm{CW}_x(\Theta)$ 表示在 Θ 的曲率微分形式上计算多项式 CW_x 所定义的微分形式。

回到 10 维 $\mathcal{N} = 1$ 超引力中，Green-Schwarz [GS84] 注意到，为了平凡化一个反常，必须在 P 与 Q 及其联络之间施加一个关系，使得 Q 并不完全是一个 gerbe，而是某种扭曲对象。具体来说，曲率 Ω_Q 不再是闭的，而是满足以下方程

$$\mathrm{d}\Omega_Q = \mathrm{CW}_{c_1+c_2}(\Theta_P) - \mathrm{CW}_\lambda(\Theta^{\mathrm{LC}}), \tag{1.10}$$

其中 Θ^{LC} 是流形 M 上标架主 Spin_n丛上的列维-奇维塔联络[5] 。这在物理学文献中称为 *Bianchi* 恒等式，由此引出以下定义。

定义 1.11。给定紧李群 G 和类 $\mu \in H^4(BG;\mathbb{Z})$，扭曲的 *Bianchi* 恒等式为以下方程

$$\mathrm{d}H = \mathrm{CW}_\mu(\Theta_P), \tag{1.12}$$

其中 H 是一个 3-形式， Θ_P 是主 G-丛上的联络。

与（1.10）的情形一样，我们将其视为两种联络数据的结合：一种定义在主 G-丛上，另一种定义在 gerbe 上。下一节中，我们将把扭曲的 Bianchi 恒等式解释为源自高阶群上的联络。

1.2. **从 Bianchi 恒等式到高阶群**。本节将说明，扭曲的 Bianchi 恒等式（1.12）是将带联络的主 G-丛和 gerbe 结合为主 $\mathbb{G}$-丛的自然结果，其中 $\mathbb{G}$ 是由 G 和μ构造出的某个李2-群，并附加一些我们视为 $\mathbb{G}$ 上联络的数据。首先，我们介绍2-群及其主丛；随后依循 [FSS12、SSS12]，，推导出扭曲的 Bianchi 恒等式。由此，我们可以精确定义 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 杂化弦的切结构，即当该结构定义在流形 M 上时，使我们能够研究该流形上的 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$杂化弦理论的数据中的拓扑部分。

定义 1.13。 一个 2-群 $\mathbb{G}$ 是小范畴双范畴中的一个群对象 s.

定义 1.14。 李 2-群 是一个 2-群 $\mathbb{G}$ ，其底层范畴被赋予了流形范畴中的范畴对象结构。

[5]在 Green-Schwarz 之前，人们就已知 $\mathrm{CW}_{c_1+c_2}(\Theta_P)$ 和 $\mathrm{d}\Omega_Q$ 必须混合才能保持超对称性，这得益于 Bergshoeff-de Roo-de Wit-van Nieuwenhuizen [BdRdWvN82] 以及 Chapline- Manton [CM83]。

这意味着对象和态射的集合都是光滑流形，而且映射的源等指定以及两个映射的复合等运算都是光滑的。2- 群最早由 Hoàng Xuân Sính 在她的论文中提出 [Hoá75]，，而李 2- 群则由 Baez 提出 [Bae02，§2]。

若一个2-群是严格的，即作为幺半范畴，它的结合子和单位子映射全都是恒等映射，则称其为严格的。Mac Lane 相干定理 [Mac71，第 7] 章，说明每个2-群都等价于一个严格的2-群，但李2-群的类似结论并不成立；参见注1.25。

例 1.15。若 G 是一个群，它定义了一个幺半群胚，其对象集为 G，张量积为 $g \otimes h := gh$，且只有恒等态射。这是一个 2-群；若 G 是李群，则它继承李 2-群的结构。

这个过程将由群、群同态和恒等 2-态射构成的双范畴嵌入由 2-群构成的双范畴中，因此我们将滥用记号，再次将这个 2-群称为 G 。

例 1.16。设 A 是一个阿贝尔群，并令 $A[1]$ 表示只有一个对象 $*$ 的幺半群胚，且 $\mathrm{Hom}^{A[1]}(*, *) := A$。这是一个 2- 群；若 A 是李群，则 $A[1]$ 是李 2- 群。

事实证明，每个 2-群 $\mathbb{G}$ 都可以分解为这些例子的一个扩张。设 e 为 $\mathbb{G}$ 的单位对象，$\pi_0(\mathbb{G})$ 为 $\mathbb{G}$ 中对象的同构类所成的群。那么存在一个 2- 群的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{G}}(e)[1] \longrightarrow \mathbb{G} \longrightarrow \pi_0(\mathbb{G}) \longrightarrow 0. \tag{1.17}$$

Eckmann-Hilton 定理保证 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{G}}(e)$ 是阿贝尔群。扩张（1.17）由以下数据分类：

(1) $\pi_0(\mathbb{G})$ 对 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{G}}(e)$ 的一个作用；以及 (2) 一个上同调类 $k \in H^3(B\pi_0(\mathbb{G}); \mathrm{Aut}_{\mathbb{G}}(e))$，称为 $\mathbb{G}$的-不变量 。

当 $\mathbb{G}$ 具有离散拓扑时，这一点没有歧义；但当 $\mathbb{G}$ 是一个李2-群时，必须谨慎确定此处所用的上同调类型。正确的上同调概念是 ***Segal-Mitchison*** 上同调 [Seg70，Seg75] 的 $\pi_0(\mathbb{G})$ 取值于阿贝尔李群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{G}}(e)$，如 Schommer-Pries [SP11定理 1]所示。

现在我们要讨论主 $\mathbb{G}$-丛。其思路是，若 G 是一个群，则主 G-丛是一个局部平凡的浸没，且其纤维是 G-扭子。对于李 2-群 $\mathbb{G}$，我们需要纤维在局部看起来像 $\mathbb{G}$，也就是说，它们必须以某种方式范畴化。

定义 1.18 (Bartels [Bar06], Nikolaus-Waldorf [NW13，定义 6.1。5])。设 $\mathbb{G}$ 是一个李2-群。一个主 $\mathbb{G}$- 丛 是光滑流形 M 上的一个李群胚 $\mathcal{P}$，配有一个满射浸没 $\mathrm{obj}(P) \to M$，以及一个 ρ 对 $\mathbb{G}$ 在 $\mathcal{P}$ 上的光滑右作用，使得映射

$$(\mathrm{pr}_1, \rho) \colon \mathcal{P} \times \mathbb{G} \longrightarrow \mathcal{P} \times_M \mathcal{P} \tag{1.19}$$

是李群胚之间的弱等价。

更多详情请参见 Nikolaus-Waldorf [NW13, §6] 。流形上的主 $\mathbb{G}$-丛构成一个 M 2-群胚 $\mathcal{B}un_{\mathbb{G}}(X)$ [NW13，定理 6.2。1]。

定义 1.20。 设 $\mathbb{G}$ 是一个 2-群，并令 $C_{\mathbb{G}}$ 为一个仅有单个对象 $*$ 的双范畴，其态射范畴为 $\mathrm{Hom}_{C_{\mathbb{G}}}(*,*) := \mathbb{G}$。 $\mathbb{G}$的分类空间 记作 $B\mathbb{G}$，它是 $C_{\mathbb{G}}$的神经的几何实现。[6]

当 $\mathbb{G}$ 是李 2-群时，我们采用相同的定义。这一次， $C_{\mathbb{G}}$ 是拓扑双范畴，因此其神经是一个单纯空间；对其作几何实现，便得到空间 $B\mathbb{G}$。

定理 1.21 (Nikolaus-Waldorf [NW13，定理 4.6、5.3.2、7。1])。 若 $\mathbb{G}$ 是严格李2-群，则存在自然等价 $[X, B\mathbb{G}] \simeq\!\!\rightarrow \pi_0(\mathcal{B}un_{\mathbb{G}}(X))$。

Nikolaus-Waldorf 的证明建立在 Baez-Stevenson 对$[X, B\mathbb{G}]$ [BS09，定理 1] 基于非阿贝尔切赫上同调给出的相关但不同的刻画之上。

当 G 是普通群时，若 G 具有离散拓扑，则 BG 只有一个非零同伦群，即 $\pi_1(BG) = G$；同样，若 $\mathbb{G}$ 是离散 2-群，则 $\pi_i(B\mathbb{G})$ 仅在$i = 1$，2 时非平凡； $\pi_1(B\mathbb{G}) = \pi_0(\mathbb{G})$，且 $\pi_2(B\mathbb{G}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{G}}(e)$。当 $\mathbb{G}$ 是李 2-群时，我们通常无法掌握其同伦群，这与 G 为正维时的 BG 情况相同。

若 $\mathbb{G}$ 具有离散拓扑，那么分类（1.17）的数据，即 $\pi_0(\mathbb{G})$ 在$\mathrm{Aut}_{\mathbb{G}}(e)$ 上的作用以及 k-不变量，等价于 $B\mathbb{G}$的 Postnikov 数据，该数据由 Mac Lane-Whitehead [MLW50]给出：这些数据分类以 BG 为底空间、以 Eilenberg-Mac Lane 空间 $K(\mathrm{Aut}_{\mathbb{G}}(e),2)$为纤维的纤维化。具有此 Postnikov 数据的纤维化的全空间与 $B\mathbb{G}$同伦等价。

例 1.22. 设 G 为紧李群；那么，分类 G 被 $\mathbb{T}[1]$ 扩张的李 2-群的 Segal-Mitchison 上同调群 $H^3_{\mathrm{SM}}(G;\mathbb{T})$ 自然同构于 $H^4(BG;\mathbb{Z})$ [SP11，推论 97]。因此，给定一个类 $\mu \in H^4(BG;\mathbb{Z})$，我们得到一个李 2-群 $\mathrm{Str}(G,\mu)$，它适合中心扩张

$$0 \longrightarrow \mathbb{T}[1] \longrightarrow \mathcal{S}tr(G,\mu) \longrightarrow G \longrightarrow 0, \tag{1.23}$$

有时也称为与 G 和 λ相关联的*string* 2-群 或弦覆盖 。在所有弦覆盖中，最常研究的是 $\mathrm{String}_n := \mathcal{S}tr(\mathrm{Spin}_n, \lambda)$，称为该 string 2-群。

这一类2-群最早由 Baez-Lauda 研究 [BL04，§8。5]。

序列（1.23）意味着，取分类空间后，

$$B\mathbb{G} \longrightarrow BG \xrightarrow{\mu} K(\mathbb{Z},4) \tag{1.24}$$

是一个纤维化。

注 1.25。定理 1.21 对 $\mathbb{G}$ 为严格 2-群的情形，对主 $\mathbb{G}$-丛进行了分类；但根据 Baez-Lauda 的定理 [BL04，推论 60] ，当 G 单连通且 $\mu \neq 0$时，$\mathrm{Str}(G,\mu)$ 不存在严格李2-群模型。不过，这个问题可以解决：在弗雷歇李 2-群的框架下，我们允许 $\mathbb{G}$ 的对象空间和态射空间为弗雷歇流形，此时 $\mathrm{Str}(G,\mu)$ 存在一个严格模型 [BSCS07，LW23],，因此 $B\mathrm{Str}(G,\mu)$ 确实对主 $\mathrm{Str}(G,\mu)$-丛进行分类。这足以用于研究配边群。

沿用 Sati-Schreiber-Stasheff [SSS12]，，我们现在将 $\mathcal{S}tr$（G， μ）与 G 和 μ的扭曲的 Bianchi 恒等式联系起来。为此，我们使用层叠和微分上同调的语言，

[6]双范畴的神经有许多不同的定义；它们的几何实现典范地同伦等价，这一事实是Carrasco-Cegarra-Garzón 的定理 [CCG10], 使我们可以谈论 $B\mathbb{G}$ ，而无需指定使用哪一种双范畴神经。

沿用 [HS05、FH13、Sch13、BNV16、ADH21]。通过将满射次浸没定义为覆盖，将范畴 $\mathcal{M}$an 定义为一个网站，并将层叠定义为一个 ∞-范畴$\mathcal{M}\mathrm{an}^{op} \to \mathcal{T}\mathrm{op}$ 的函子，该函子对超覆盖满足下降条件。由此定义了一个可呈现的 ∞-范畴 $\mathcal{S}$t，即层叠的范畴 [Lur09，第 6.5.2 号命题。14]，以及米田嵌入 $h\colon \mathcal{M}\mathrm{an} \to \mathcal{S}\mathrm{t}$ 将 $\mathcal{M}$an 嵌入为一个满子范畴。我们通常将层叠 $h(M)$ 简写为 M；我们从不直接比较这两个概念，因此不会造成混淆。

对于任意空间 X，函子 Map(– X)$\colon \mathcal{M}\mathrm{an} \to \mathcal{T}\mathrm{op}$ 是一个层，而这一过程定义了一个 ∞-范畴函子 $\Gamma^*\colon \mathcal{T}\mathrm{op} \to \mathcal{S}\mathrm{t}$。由 Γ^* 产生的层叠在流形 M 上取值时，在 M 中是同伦不变的。Γ^* 有一个左伴随 $\Gamma_\sharp\colon \mathcal{S}\mathrm{t} \to \mathcal{T}\mathrm{op}$（参见 Dugger [Dug01，命题 8；Morel-Voevodsky [MV99，命题 3.3；以及 [ADH21，命题 4.3）；$\Gamma_\sharp$(X) 可以理解为对层叠 X 的最佳逼近，其取值在流形上是同伦不变的。

令 $\Delta^n_{\mathrm{alg}} := \{(t_0, \dots, t_n) \mid t_0 + \cdots + t_n = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$。这些“代数 n-单形”组装成一个余单纯流形 $\Delta^\bullet_{\mathrm{alg}}$，并且根据 [ADH21，推论 5.1，存在一个自然的同伦等价$\Gamma_\sharp$(X)’ |X($\Delta^\bullet_{\mathrm{alg}}$)|，其中照例 $\vdash$ 表示几何实现。

因此，对于流形 M，存在自然的同伦等价 $\Gamma_\sharp(M) \simeq \to M$，所以映射$M \to$**X** 自然诱导出一个映射 $M \to \Gamma_\sharp$(**X**)。

引理 1.26. 设**X** $\to$ **Y** $\leftarrow$**Z** 是 $\mathcal{S}t$ 中的一个图表，并且对于所有 n，**Y**(Δ^n_{alg}) 和**Z**(Δ^n_{alg}) 均为连通的。那么

$$\Gamma_\sharp(\mathbf{X} \times_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}) \simeq \Gamma_\sharp(\mathbf{X}) \times_{\Gamma_\sharp(\mathbf{Y})} \Gamma_\sharp(\mathbf{Z}). \tag{1.27}$$

证明. 层的拉回可以逐点计算，再进行层化。因此，给定 $\mathcal{S}t$ 中的一个拉回**X** $\to$ **Y** $\leftarrow$ **Z**，对于每个 $n \geq 0$，其拉回为

$$\mathbf{X}(\Delta^n_{\mathrm{alg}}) \longrightarrow \mathbf{Y}(\Delta^n_{\mathrm{alg}}) \longleftarrow \mathbf{Z}(\Delta^n_{\mathrm{alg}}) \tag{1.28}$$

为 $(\mathbf{X} \times_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z})(\Delta^n_{\mathrm{alg}})$。布斯菲尔德-弗里德兰德定理 [BF78，Bou01] 表明，根据定理陈述中关于 Y 和**Z** 的假设，**X**、**Y**和**Z** 的几何实现的同伦拉回，是逐层同伦拉回（1.28）的几何实现（参见 [War20，第 14–9]，有关布斯菲尔德-弗里德兰德定理这一具体推论）。□

例 1.29。对于 G 一个李群，存在一个层叠 $B_\nabla G$，其在流形 M 上的取值是带有 G-丛及联 M 络的主 [丛群胚的神经的几何实现 FH13]。该对象在 G_{conn} FSS12、SSS12、Sch13] 中记作 B，在 [$\mathbb{B}G^\nabla$ BNV16 第 §5]，节中记作 [，并在 Bun^∇_G 中记作 [ADH21]。

存在一个自然的同伦等价 $\Gamma_\sharp$（$B_\nabla G$）$\simeq \to BG$ [ADH21，推论 13.3。29]，它可以理解为从带联络的主丛遗忘到主丛。

例 1.30。对于 $k \geq 0$，存在一个层叠 $B^k_\nabla \mathbb{T}$，其在流形 M 上的取值是 ∞-群胚的上循环的神经的几何实现，这些上循环属于微分上调群 $\check{}H^{k+1}$（M； $\mathbb{Z}$）。该对象见于 [FSS12、SSS12、Sch13],，其中记作 $\mathbf{B}^k U$（1）$_{\mathrm{conn}}$。

引理 1.31。存在一个同伦等价 $\Gamma_\sharp(B^k_\nabla \mathbb{T})$’ $K(\mathbb{Z}, k+1)$。

*Pro*参见。 Schreiber [Sch13，观察 1.2。134] 在 $\mathcal{S}$ 中给出以下拉回方块 t:

$$\begin{array}{ccc} B^k_\nabla \mathbb{T} & \longrightarrow & \Omega^{k+1}_{c\ell} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ K(\mathbb{Z}, k+1) & \longrightarrow & K(\mathbb{R}, k+1), \end{array} \tag{1.32}$$

其中 $\Omega^{k+1}\,\mathrm{c}_\ell$ 是闭 $(k+1)$-形式的层叠。对于该层叠和 $K(\mathbb{R}, n+1)$，其在每个Δ^n_{alg} 上的取值都是连通空间，因此引理 1.26 给出 $\Gamma_\sharp(B^k_\nabla \mathbb{T})$ ’ $K(\mathbb{Z}, k+1)$ $\times_{K(\mathbb{R},k+1)}$ $\Gamma_\sharp(\Omega^{k+1}\,\mathrm{c}_\ell)$。最后，注意到，基本上由德拉姆定理可知，映射 $\Omega^{k+1}\,\mathrm{c}_\ell$ $\to K(\mathbb{R}, k+1)$ 在应用 $\Gamma_\sharp$后成为同伦等价。这可由 [BNV16 的引理 7.15] 及 Dold-Kan 定理推出。□

这些层叠是陈-韦伊映射的普适背景。

定理 *1.33*（*Cheeger-Simons* [*CS85*，定理 *2.2*], *Bunke-Nikolaus-Völkl* [*BNV16*，第 *5.2*] 节）。设 G 为紧李群，且 $c \in H^k(BG;\mathbb{Z})$，其中 k 为偶数。则存在一个映射$\check{c}$，它关于 (G, c) 是自然的，使得对于任意流形 M和映射 $f\colon M \to B_\nabla G$，将其解释为带有联络 Θ的主 G-丛 $P \to M$，

(1) 若 $\mathit{char} : \check{} H^*(-;\mathbb{Z}) \to H^*(-;\mathbb{Z})$ 表示特征类映射，则 $\mathit{char}(\check{c} \circ f) = c(P)$；*(2)* 若 $\mathit{curv} : \check{} H^*(-;\mathbb{Z}) \to \Omega^*_{c\ell}$ 表示曲率映射，则 $\mathit{curv}(\check{c} \circ f) = \mathrm{CW}_c(\Theta)$。

Cheeger-Simons 将陈-韦伊映射提升到微分上同调；Bunke-Nikolaus-Völkl 则用 $B_\nabla G$ 的术语重新表述了它。映射 $char$ 在定理 1.33 中是沿着方形图（1.32）左侧向下的映射；$curv$ 则是（1.32）顶边上的映射。

定义 1.34 (Fiorenza-Schreiber-Stasheff [FSS12, §6.2])。给定一个紧李群 G 和一个类 $\mu \in H^4(BG;\mathbb{Z})$，令 $\mathbf{BStr}(G,\mu)$ 表示映射 $\check{}\mu\colon B_\nabla G \to B^3_\nabla \mathbb{T}$ 的纤维。

我们很快将看到，映射到 $\mathbf{BStr}(G,\mu)$ 会导出适用于 G and μ 的扭曲的 Bianchi 恒等式的解。

命题 1.35. 存在一个自然的同伦等价 $\Gamma_\sharp(\mathbf{BStr}(G,\mu))$ ’ $\mathit{BStr}(G,\mu)$。

因此，我们将 $\mathbf{BStr}(G,\mu)$ 视为带联络的主 $\mathcal{S}tr(G,\mu)$-丛的分类栈，不过这只是一种启发式看法。[7]

证明。 将引理1.26 应用于图表

$$B_\nabla G \xrightarrow{\check{\mu}} B^3_\nabla \mathbb{T} \longleftarrow *, \tag{1.36}$$

因为 $*$ 和 $B^3_\nabla \mathbb{T}$ 在 Δ^n_{alg} 上对每个 n都是连通的。这意味着 $\Gamma_\sharp(\mathbf{BStr}(G,\mu))$是 $\mu\colon BG \to K(\mathbb{Z}, 4)$的纤维；在 (1.24) 中，我们已将其与 $B\mathbb{G}$ 等同起来。□

命题 *1.37*（*Fiorenza-Schreiber-Stasheff* [*FSS12*，*§6.3*]）。设 G 为一个紧李群，$U \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集，且 $P \to U$ 为一个带有联络 Θ 的主 G-丛。将对应映射 $f_{P,\Theta}\colon U \to B_\nabla G$ 提升为映射 $f_{P,\Theta}\colon U \to \mathit{BStr}(G,\mu)$，则会诱导出微分形式 $H \in \Omega^3(U)$，使得 H 和 Θ 满足扭曲的 *Bianchi* 恒等式 *(1.12)*。

[7]主联络至少有 五种定义 $\mathbb{G}$-丛的联络概念，适用于 $\mathbb{G}$ 一个 2-群：Waldorf 讨论了其中三种 [Wal18, §5]，；Rist-Saemann-Wolf 讨论了第四种 [RSW22]，；第五种仅针对 $\mathbb{G} = \mathrm{String}_n$定义，由 Waldorf 提出 [Wal13]。

这里的思路是，我们指定了微分特征类 $\check{\mu}(P,\ \theta)$ 的一个平凡化。应用曲率映射 曲率：$B^3_\nabla\mathbb{T}\to\Omega^4_{c\ell}$，我们也指定了 $\mathrm{CW}^\mu(\Theta)$ 的一个平凡化；局部而言，相关数据为 H，表明 $\mathrm{CW}^\mu(\Theta)$ 是恰当的。

到$\mathbf{BStr}(G,\mu)$ 的映射所包含的数据，比命题 1.37 所给出的更多，因为我们平凡化的不仅是陈-韦伊形式，也包括微分特征类。这可以解读为：用于指定平凡化的数据 H 经过量子化，形成了带联络的丛形的一个扭曲版本。

总而言之，给定映射 $M\to\mathbf{BStr}(G,\mu)$，我们将其视为建模$\mathcal{S}tr(G,\mu)$-丛及其联络的层叠，并由此得到：

(1) 一个主 $\mathcal{S}tr(G,\mu)$-丛 $\mathcal{P}\to M$，根据命题 1.35；以及 (2) 一个“带联络的扭曲丛形”，即丛形 $Q\to M$ 的局部数据，使得 ΩQ 以及由映射 G-联络 Θ 诱导的 $\mathbf{BStr}(G,\mu)\to B_\nabla G$ 满足扭曲的 Bianchi 恒等式（1.12），根据命题 1.37。

受此启发，我们定义$\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8$ 杂化弦的切结构。它首次出现在 [SSS12，§3。2], 以及 [Sat11b、FSS15a] 讨论了一些相关例子。

定义 1.38。令 $G\coloneqq(\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8)\rtimes\mathbb{Z}/2$。流形 M 上的一个 微分 ξ^{het}_n-结构是以下数据：

（1） M上的一个黎曼度量和自旋结构；（2）带有联络 Θ的主 G-丛 $P\to M$；以及（3）一个提升

$$((B_{\mathrm{Spin}}(M),\Theta^{\mathrm{LC}}),(P,\Theta))\colon M\longrightarrow B_\nabla(\mathrm{Spin}_n\times G) \tag{1.39}$$

到映射 $M\to\mathbf{BStr}(\mathrm{Spin}_n\times G,\ c_1+c_2-\lambda)$。

这里，$B_{\mathrm{Spin}}(M)\to M$是 M的主 Spin_n-标架丛，而 Θ^{LC}表示其列维-奇维塔联络。

对于配边群，我们需要其拓扑版本。

定义 1.40。切结构是一个空间 B 及一个映射 $\xi\colon B\to B\mathrm{O}$。给定一个切结构 ξ，虚向量丛 $E\to X$ 上的 ξ-结构 是将分类映射$\sim f_E\colon X\to B\mathrm{O}$ 提升为映射 $f_E\colon X\to B$，使得 $\xi\circ f_E=f_E$。流形 M 上的 ξ-结构 是其切丛上的ξ-结构。

我们对映射 $\xi_n\colon B_n\to B\mathrm{O}_n$ 作类似定义；在这种情况下，我们只讨论 n-流形上的ξ_n-结构。

Lashof [Las63] 定义了具有Ω^ξ_* 结构的流形的配边群 ξ，而 Boardman [Boa65，§V。1] 定义了一个 Thom 谱 $MT\xi$，其同伦群通过 Pontryagin–Thom构造自然同构于 $\Omega^\xi_{*\circ}$。[8] 我们将切向结构范畴视为位于 $B\mathrm{O}$之上的空间范畴，并且配边群和 Thom 谱在这个范畴中都是函子性的。也就是说，只要与映射到底层 $B\mathrm{O}$相交换，取配边群和 Thom 谱就是函子性的。

[8]在同伦论中，人们通常研究 Thom 谱 $M\xi$，它们表示流形 M的稳定法丛 ν_M 上的 ξ-结构。实际上，我们引用的许多关于 $MTSO$、$MTString$ 等的结果，都是针对 MSO、$MString$ 等，或一般的 Thom 谱 $M\xi$ 表述的。这并不是问题：对于任意切结构 ξ，都存在一个切结构 $\xi^\perp$，使得 TM 上的 ξ-结构与 ν_M 上的 $\xi^\perp$-结构等价，反之亦然，因此 $MT\xi\simeq M\xi^\perp$，所以一般理论是相同的。对于 $\xi=\mathrm{O}$、SO、Spin、Spin^c 和 String，$\xi\simeq\xi^\perp$，在这些情况下，我们可以忽略 $M\xi$ 与 $MT\xi$之间的区别。

下面的定义是 Sati-Schreiber-Stasheff 所给定义的一个特例 [SSS12，定义 2。8]。另见 [Sat11b、FSS15a、FSS21]，了解其他相关示例。

定义 1.41。令 $G_n \coloneqq \mathrm{Spin}_n \times (\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8) \rtimes \mathbb{Z}/2$ 和

$$\mathbb{G}_n^{\mathrm{het}} \coloneqq \mathcal{S}tr(G_n, c_1 + c_2 - \lambda). \tag{1.42}$$

$\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 异质切结构 是切结构

$$\xi_n^{\mathrm{het}} \colon B\mathbb{G}_n^{\mathrm{het}} \longrightarrow B\mathrm{Spin}_n \longrightarrow B\mathrm{O}_n, \tag{1.43}$$

其中，第一个映射来自对 $\mathbb{G}^{\mathrm{het}}$ 按 $\mathbb{T}[1]$ 取商，随后投影到 G_n 中的 Spin_n 因子。我们还通过在 n 中稳定化，类似地定义 $\mathbb{G}^{\mathrm{het}}$ 和 ξ^{het}。

换句话说：微分 ξ_n^{het}-结构是将映射提升到 $B_\nabla(\mathrm{Spin} \times G)$ 至 $\mathbf{BStr}(G,\ \mu)$；根据命题 1.35，拓扑 ξ_n^{het}-结构是这些数据在 $\Gamma_\sharp$ 下的像。特别地，ξ_n^{het}-结构在一个 n-流形 M 上包含一个主 $\mathbb{G}_n^{\mathrm{het}}$-丛 $\mathcal{P} \to M$ 的数据。

对 $\mathbb{G}^{\mathrm{het}}$ 按 $\mathbb{T}[1]$ 取商会诱导出一个切结构之间的映射

$$\phi \colon B\mathbb{G}^{\mathrm{het}} \longrightarrow B\mathrm{Spin} \times B(\mathrm{E}_8^2 \rtimes \mathbb{Z}/2). \tag{1.44}$$

因此，与自旋^{c}流形 M具有一个相关的 $\mathbb{T}$丛 P，其上有模 $2 = w_2(M)$ 的 $c_1(P)$ 类类似，aξ^{het}-流形也具有相关的 $(\mathrm{E}_8^2 \rtimes \mathbb{Z}/2)$-丛 P。从这一角度看，流形 M 上的 ξ^{het}-结构由以下数据构成：

- 在 M 上的自旋结构，$\sim$
- 一个二重覆盖 $\pi \colon M \to M,\sim$
- 两个主 E_8-丛 $P,\ Q \to M$ 它们在 π 的非恒等甲板变换下互换，并且
- 类 $\lambda(M) - (c(P) + c(Q)) \in H^4(M;\ \mathbb{Z})$ 的一个平凡化。

所谓上同调类 $\alpha \in H^n(M;\ A)$ 的平凡化，是指分类映射 $f_\alpha \colon M \to K(A, n)$ 的一个零同伦。因此，定向可以等同于 w_1 的平凡化，等等。为了精确说明 $\lambda(M) - (c(P) + c(Q))$ 的平凡化，我们必须将类 $c(P) + c(Q)$ 从 a$\widetilde{\ }$先验地属于 $H^4(M;\ \mathbb{Z})$ 的元素下降到 $H^4(M;\ \mathbb{Z})$。我们能够做到这一点，因为正如定义 1.4 中所指出的，类 $c_1 + c_2$ 经由 Serre 谱序列下降到基空间。

注记 1.45。我们可以将关于 M 上 ξ^{het} 结构的一些数据合并为一个扭曲特征类。令 $\mathbb{Z}^\sigma$ 为与 $\mathbb{Z}^2$ 作为阿贝尔群同构的 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]$-模，其中 $\mathbb{Z}/2$ 的非平凡元素交换两个因子。再令 $\mathbb{Z}^\sigma_\pi$ 表示 M 上的局部系统，它是伴随丛 $\widetilde{M} \times_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}^\sigma$。因此，一对被甲板变换交换的类 $x,\ y \in H^k(\widetilde{M};\ \mathbb{Z})$ 定义了 $H^k(M;\ \mathbb{Z}^\sigma_\pi)$ 中的一个类。因此，$H^4(\widetilde{M};\ \mathbb{Z})$ 中的类 $c(P)$ 和 $c(Q)$ 共同定义了一个类 $\widetilde{c}(P,\ Q) \in H^4(M;\ \mathbb{Z}^\sigma_\pi)$，它是一个 $((\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8) \rtimes \mathbb{Z}/2)$ 丛的特征类。

若 $\mathbb{Z}$ 表示与 $\mathbb{Z}$ 作为阿贝尔群同构且带有平凡 $\mathbb{Z}/2$ 作用的 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]$-模，则将 $\mathbb{Z}^\sigma$ 除以由 $(1,\ -1)$ 生成的子模，便定义了一个 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]$-模映射 $q \colon \mathbb{Z}^\sigma \to \mathbb{Z}$，从而也定义了相应扭曲上同调群之间的映射；此映射将 $\widetilde{c}(P,\ Q) \mapsto c(P) + c(Q)$ 送至其像。因此，可以将自旋流形 M 上的 ξ^{het} 结构重新表述为如下数据：一个主 $((\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8) \rtimes \mathbb{Z}/2)$ 丛 $(P,\ Q,\ \pi)$，以及 $\lambda(M) - q(\widetilde{c}(P,\ Q))$ 的一个平凡化。

Bott-Samelson [BS58，定理 IV、V(e)] 证明映射 $B\mathrm{E}_8 \to K(\mathbb{Z},4)$ 由特征类 c 定义的 15-连通。这意味着，在同构意义下，维数为 15 或更低的流形上的主

流形上维数为 15 或更低的 $((\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8) \rtimes \mathbb{Z}/2)$-丛，与其特征类 $\widetilde{c}$ 是等价的数据。

注记 1.46。 人们可能希望通过限制到以下特殊情形来简化问题：其中 $\pi\colon M \to M$ 是平凡的（例如 [Wit86] 中就是如此），在这种情况下，一个 ξ^{het}-结构的数据可简化为 M 上的一个自旋结构、两个主 E_8-丛 P，$Q \to M$，以及对 $\lambda(M) - c(P) - c(Q)$ 的一个平凡化。这对应于切结构 $\xi^{r,\,\mathrm{het}}\colon B\mathcal{S}tr(\mathrm{Spin} \times \mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8,\ c_1 + c_2 - \lambda) \to B\mathrm{Spin} \to B\mathrm{O}$。

1.3. **CHL弦**。 十一维 $\mathcal{N} = 1$ 超引力具有时间反演对称性，因此可以定义在 pin^+ 11-流形上。[9] 因此，我们可以将其紧化在带有特定边界数据的莫比乌斯带上，从而得到一个九维超引力理论；本小节的目标是确定这一理论的切结构。人们预计，十一维 $\mathcal{N} = 1$ 超引力是一个称为 M理论的理论的低能极限，[10] 并且预计将 M理论紧化在莫比乌斯带上会产生一种称为 *Chaudhuri-Hockney-Lykken*（*CHL*）弦 [CHL95]的弦理论，9其低能极限正是上述九维超引力理论；本小节研究这一超引力理论的切结构，旨在同时增进我们对 CHL弦的了解。

然而，我们不希望对 CHL弦的理解过于片面。通过紧化还可以用另一种方式得到 CHL弦：考虑带有非平凡主 $\mathbb{Z}/2$丛 $P \to S^1$的圆。通过映射 $\mathbb{Z}/2 \to \mathrm{Spin} \times ((\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8) \rtimes \mathbb{Z}/2)$，这个丛在 S^1 上定义了一个 $\mathrm{Spin} \times ((\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8) \rtimes \mathbb{Z}/2)$-结构，其中 λ 和 $c_1 + c_2$ 均为平凡的，因此该结构可提升为 S^1上的一个 ξ^{het}-结构。我们将带有此 ξ^{het}-结构的圆称为 $\mathbb{RP}^1$，因为 $S^1 \cong \mathbb{RP}^1$ 作为流形，而 ξ^{het}-结构来自二重覆盖 $S^1 \to \mathbb{RP}^1$。CHL弦恰好就是将 E_8^2 杂化弦紧化到 $\mathbb{RP}^1$上所得到的理论。

我们希望确定切结构 ξ^{CHL}，使得 $\mathbb{RP}^1$ 与带有 ξ^{CHL}-结构的流形的乘积具有诱导的 ξ^{het}-结构。一般而言，追踪紧化过程中切结构如何变化可能颇为微妙；如需仔细分析，请参见 Schommer-Pries [SP18，§9]。不过，对于 CHL弦，我们可以采用一种更为权宜的方法：按照 Chaudhuri-Polchinski [CP95]（另见 [dBDH+00，§2.2。1]），我们只考虑这样的情形：由商映射（1.44）得到的上的主-丛是莫比乌斯丛 $S^1 \to \mathbb{RP}^1$ 沿投影$\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{RP}^1 \times M \to \mathbb{RP}^1$的拉回。

命题 1.47。 设 M 是一个自旋流形，$P \to M$ 是一个主 E_8 丛。对 $\lambda(M) - 2c(P)$ 的平凡化 $\mathfrak{s}$ 所提供的数据，会在 $\mathbb{RP}^1 \times M$ 上诱导一个 ξ^{het}-结构，其关联主 $\mathbb{Z}/2$ 丛为莫比乌斯丛 $S^1 \times M \to \mathbb{RP}^1 \times M$。此外，如果 $\dim(M) \leq 14$，那么此对应给出数据 $(P, \mathfrak{s})$ 的同构类集合与 $\mathbb{RP}^1 \times M$ 上关联 $\mathbb{Z}/2$ 丛为 $S^1 \times M \to \mathbb{RP}^1 \times M$ 的 ξ^{het}-结构集合之间的自然双射。

证明。 令 $\pi\colon S^1 \times M \to M$ 为到第二个因子的投影。给定 $P \to M$ 和 $\mathfrak{s}$，E_8-丛对 $(\pi^*P, \pi^*P) \to S^1 \times M$在$S^1 \times M \to \mathbb{RP}^1 \times M$的甲板变换下互换，而 $(c_1 + c_2)$ 在丛对 (π^*P, π^*P) 上的取值为 $2c(P) \in H^4(\mathbb{RP}^1 \times M; \mathbb{Z}/2)$。在 $\mathbb{RP}^1$ 上选取由边界化标架诱导的弦结构，我们得到一个典范的

[9]除了 pin^+ 结构之外，还需要额外的数据，即将 $w_4(TM)$ 提升到 $w_1(TM)$-扭曲整数上同调中的提升。参见 [Wit97, Wit16, FH21a]。[10]M理论预计还需要在上文针对 11 维 $\mathcal{N} = 1$ 超引力所述的切结构之外，增加额外数据。参见 FSS20，表 1] 及其中所列参考文献。

由弦结构的三取二性质得到的 $\lambda(\mathbb{RP}^1 \times M) - \lambda(M) \in H^4(\mathbb{RP}^1 \times M; \mathbb{Z})$ 的平凡化。综合以上所有内容，我们看到，在$S^1 \times M$ 上有两个在甲板变换下互换的 E_8-丛，以及 $\mathbb{RP}^1 \times M$ 上 $\lambda - (c_1 + c_2)$ 的一个平凡化，因而定义了所声称的 ξ^{het}-结构。

要看出这给出了与 $S^1 \times M \to \mathbb{RP}^1 \times M$ 相关的所有 ξ^{het}-结构，回顾注1.45：与一个 ξ^{het}-结构相关联的 $((\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8) \rtimes \mathbb{Z}/2)$-丛由一个扭曲上同调中的特征类分类。假设相关联的 $\mathbb{Z}/2$-丛是 $S^1 \times M \to \mathbb{RP}^1 \times M$，这意味着该类属于 $H^4(\mathbb{RP}^1 \times M; \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$，其中 $\pi_1(\mathbb{RP}^1)$ 的一个生成元通过交换两个因子作用于 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$，而 $\pi_1(M)$ 的作用是平凡的。扭曲的Künneth公式 [Gre06, 定理 1.7]给出一个同构——

$$H^4(\mathbb{RP}^1 \times M; \underline{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}) \xrightarrow{\cong} H^4(M; \mathbb{Z}), \tag{1.48}$$

这意味着定向双覆盖 $S^1 \times M$ 上的那一对 E_8-丛是从 M 上的丛拉回的；为了能由 $\mathbb{Z}/2$ 作用交换，这两个丛必须同构。□

因此，与该数据相对应的 Bianchi 恒等式可以简化为使用单个丛$P \to M$ 以及类 $c(P) + c(P)$：我们得到

$$\mathrm{d}H = \mathrm{CW}_{2c}(\Theta_P) - \mathrm{CW}_{\lambda}(\Theta^{\mathrm{LC}}), \tag{1.49}$$

即 $G = \mathrm{Spin} \times \mathrm{E}_8$ 的扭曲的 Bianchi 恒等式，以及 $\mu = 2c - \lambda$。然后，按照定义 1.38和 1.41，我们作出以下定义。

定义 1.50。流形 M 上的一个 微分 ξ_n^{CHL}-结构 由以下数据组成：

（1） M上的一个黎曼度量和自旋结构；（2）一个带联络 Θ的主 E_8-丛 $P \to M$；以及（3）一个从

$$((B_{\mathrm{Spin}}(M), \Theta^{\mathrm{LC}}), (P, \Theta)) \colon M \longrightarrow B_{\nabla}(\mathrm{Spin}_n \times \mathrm{E}_8) \tag{1.51}$$

到映射 $M \to \mathbf{BStr}(\mathrm{Spin}_n \times \mathrm{E}_8,\ 2c - \lambda)$的提升。

我们所称的 $B\mathbb{G}_n^{\mathrm{CHL}}$与 Sati-Schreiber-Stasheff 的 $B\mathrm{String}^{2a}$ [SSS12，(2.18)，§2.3 中的定义一致。3]Fiorenza-Sati-Schreiber 的工作中也出现了这一概念 [FSS15a，见备注 4.1。1], 不过，这些论文没有讨论它与 CHL弦之间的关系。

定义 1.52 (Sati-Schreiber-Stasheff [SSS12,(2.18),§2.3.3])。令

$$\mathbb{G}_n^{\mathrm{CHL}} \coloneqq \mathcal{S}tr(\mathrm{Spin}_n \times \mathrm{E}_8, 2c - \lambda). \tag{1.53}$$

*CHL*切结构 是如下切结构

$$\xi_n^{\mathrm{CHL}} \colon B\mathbb{G}_n^{\mathrm{CHL}} \longrightarrow B\mathrm{Spin}_n \longrightarrow B\mathrm{O}_n, \tag{1.54}$$

其中，第一个映射来自对 $\mathbb{G}^{\mathrm{CHL}}$ 按 $\mathbb{T}[1]$取商，随后投影到 Spin_n 因子。在 n中稳定化后，我们还得到 $\mathbb{G}^{\mathrm{CHL}}$ 以及一个切结构 ξ^{CHL}。

一个 ξ^{CHL}结构在一个 n流形 M 上，特别是包含一个主 $\mathbb{G}_n^{\mathrm{CHL}}$丛$\mathcal{P} \to M$的数据，并且可以表述为一个主 E_8丛 $P \to M$ 以及对 $\lambda(M) - 2c(P) \in H^4(M; \mathbb{Z})$ 的平凡化。

注记 1.55。由于 ξ^{CHL} 结构包含将 λ 识别为另一类的两倍的数据，因此它会诱导 λ的模 2 约化的平凡化，即 w_4。也就是说， ξ^{CHL} 结构会诱导

一个 $\mathrm{Spin}\langle w_4\rangle$ 结构，其中 $B\mathrm{Spin}\langle w_4\rangle$ 是以下对象的同伦纤维 $w_4\colon\ B\mathrm{Spin} \to K(\mathbb{Z},\ 4)$。此结构已在例如 [Wit97、KS04、FH21a] 中得到研究，应用于 M理论。

注记 1.56（模空间上的切结构变化）。 CHL 弦理论有一个模空间，而非仅有一个理论；规范群取决于模空间中的具体位置。Chaudhuri-Polchinski 最早研究了这个模空间 [CP95]。在一般点处，规范群破缺为 $\mathbb{T}^8$，而在若干特殊点处，规范群会增强为 E_8 或其他非阿贝尔群：参见 [FFG+21，表 3]。本文仅研究模空间中的E_8 点；将本文的方法应用于 CHL 模空间中的其他点也会很有意思。

近期有不少研究探讨 $\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8$ 杂化弦和 CHL弦的紧化模空间，并考察可能出现哪些规范群 [FGN18、CDLZ20、FFG+20、CDLZ21、FFG+21、FPDF21、MV21、CDLZ22、CGH22、CMM22、FPDF22、PDF23、MPDF23]。

2. 配边计算

现在该开始计算了。我们将使用 Adams 谱序列来计算 $\Omega_*^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 和 $\Omega_*^{\xi^{\mathrm{CHL}}}$；这是计算同伦论中的标准工具，近来在数学物理文献中也频繁出现。我们向感兴趣的读者推荐 Beaudry-Campbell 的入门文章 [BC18]。

将 Adams 谱序列应用于数学物理问题时，通常遵循同一套公式。假设我们想要计算 Ω_*^{ξ}，其中 ξ是一种切结构。

(1) 首先，将 ξ 表示为“扭曲的 ξ'结构”，其中 ξ' 是 SO、Spin、Spin^c 或 String 之一：证明向量丛 $E\to M$ 上的 ξ 结构与辅助向量丛 $V\to M$ 以及 $E\oplus V$ 上的 ξ' 结构等价。

这意味着，对于某个通常并不太复杂的 Thom 谱 X，有 $MT\xi\simeq MT\xi'\wedge X$。（2）接下来，利用换环定理，大幅简化空间或谱的$\xi'$-配边计算中的 E_2页。然后运行 Adams 谱序列，并利用换环定理所带来的额外结构。

这一方法可追溯至 Anderson-Brown-Peterson 的工作 [ABP69] 以及 Giambalvo 的工作 [Gia73b，Gia73a，Gia76]，用于计算扭曲的 Spin 配边。它最常用于 $\xi'=$Spin 的情形，并被频繁用于计算表示含费米子场论的切结构的配边群；$\xi'=$String 则较少见，但仍出现在一些受物理启发的例子中，包括 Sugimoto 弦的切结构 [Sug99] 以及 $\xi=$String^c [CHZ11，Sat11b]。

遗憾的是，ξ^{het} 和 ξ^{CHL} 并不属于这类例子：我们将在引理 2.2中看到，无法将这些切结构写成上述意义下的扭曲弦结构。[11,12] 因此，我们必须另辟蹊径。

在奇素数处，我们继续使用未经简化的 Adams 谱序列，不过由于我们只关注 11 及以下的维度，计算仍然十分易于处理。然而在 $p=2$处，我们可以调整上述策略来简化计算：在 §2.1中，我们推广了

[11]B 场的存在，以及 Bianchi 恒等式将其与主 Spin$_n$标架丛混合的方式，排除了 $\xi'=$SO、Spin 或 Spin^c。[12]这一问题也出现在 [FH21a、DY22]中所研究的切结构里。

“扭曲弦配边”的概念，使换环技巧适用于弦覆盖（按照例 1.22中的意义），其群的形式为 Spin $\times G$。这同时适用于 ξ^{het} 和 ξ^{CHL}，因此我们就可以大干一场了。

注 2.1. 我们并非最早计算切结构ξ: $B \to B\mathrm{O}$ 的配边群的人，其中 B 是某个 2-群的分类空间。例如，$\overset{\mathrm{String}}{*}$的 Ω 在一定次数范围内已由 [Gia71、HR95、MG95、Hov08]计算；其他例子包括 [Hil09、KT17、WW19a、WW19b、WWZ19、Tho20、LT21、Yu21、DL23]。

2.1. **弦配边的扭曲**。

“一开始只是个扭曲，怎么最后会变成这样？
不过只是个扭曲，不过只是个扭曲……”

一旦确定了配边问题的切结构，下一步通常是证明一个“剪切”定理，以简化切结构。例如，计算 pin$^-$ 配边 [Pet68, §7]通常先建立 pin$^-$ 配边与 Thom 谱 $\Sigma^{-1}MO_1$, 的 Spin 配边之间的同构，然后用 Adams 谱序列或阿蒂亚-赫希布鲁赫谱序列之类的方法计算后者的配边群。

剪切定理有几种不同的方法，例如 [FH21b、DDHM23],中的方法，但通常它们都处理向量丛的 Thom 谱；例如，上述对 pin$^-$ 配边的简化，始于这样一个观察：丛 $E \to M$ 上的 pin$^-$ 结构等价于一个实线丛 $L \to M$以及 $E \oplus L$上的自旋结构；这一点可由特征类计算得出。随后，将“L 以及 $E \oplus L$上的自旋结构”这一数据通过 Pontrjagin-Thom 定理传递。

这种方法不适用于异质弦和 CHL 切结构。

引理 2.2。在 $B((\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8) \rtimes \mathbb{Z}/2)$ 上不存在满足 $\lambda(V) = c_1 + c_2$ 的自旋向量丛 V；并且在 $B\mathrm{E}_8$ 上不存在满足 $\lambda(V) = 2c$ 的自旋向量丛 W。

这意味着，无法将 ξ^{het}-结构表示为“一个 G-丛、E 上的弦结构，再加上某个伴随丛”，ξ^{CHL} 也同样如此。

证明。设 G 是一个紧致、单、单连通的李群，且 ρ: $G \to \mathrm{SU}_n$ 是一个表示。$H^4(BG;\mathbb{Z})$ 和 $H^4(B\mathrm{SU}_n;\mathbb{Z})$ 都典范同构于 $\mathbb{Z}$，因此 ρ^* 在 H^4 上的拉回映射是一个映射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，必然是乘以某个整数 $\delta(\rho)$。由于 SU_n 紧致、连通且单连通，标准嵌入 $\mathrm{SU}_n \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ 可提升为映射 $\mathrm{SU}_n \to \mathrm{Spin}_{2n}$。这种提升的选择构成 $H^1(B\mathrm{SU}_n;\mathbb{Z}/2) = 0$ 上的一个挠子，这意味着特征类 λ 对 SU_n-表示是唯一确定的。此外，λ 的定义表示是 $H^4(B\mathrm{SU}_n;\mathbb{Z})$ 的一个生成元；由于 $H^4(B\mathrm{SU}_n;\mathbb{Z})$ 无挠，只需证明 $2\lambda = p_1$ 是生成元的两倍，这一点是标准结论。G 的 Dynkin 指标是所有此类表示 ρ 中 $|\delta(\rho)|$ 的最小值。Laszlo-Sorger [LS97，命题 2.6] 证明，E_8 的 Dynkin 指标为 60；这意味着，对于任意由表示诱导出 SU-结构的向量丛 $V \to B\mathrm{E}_8$，$\lambda(V)$ 至少是某个生成元的 60 倍。

我们希望将其推广到实表示。

引理 2.3. 复化映射 $\mathrm{Spin}_n \to \mathrm{O}_n \to \mathrm{U}_n$ 的像包含于 SU_n。

证明。表示 ρ: $G \to \mathrm{U}_n$ 的一个提升，其像包含于 SU_n，当且仅当与 ρ 相关联的复向量丛的 c_1 消失。在沿复化映射拉回时

映射 $B\mathrm{O}_n \to B\mathrm{U}_n$, c_1 被送到 w_1 在 Bockstein映射 $\beta\colon H^1(B\mathrm{O}_n; \mathbb{Z}/2) \to H^2(B\mathrm{O}_n; \mathbb{Z})$ 下的像；当我们进一步拉回到 $B\mathrm{Spin}_n$, $w_1 \mapsto 0$ 时，$c_1 = \beta w_1 \mapsto 0$ 也如此。□

因此，上文提到的 Dynkin 指标事实适用于映入 Spin_n 的表示的复化。

若 V是群 G的实表示，$V \otimes \mathbb{C} \cong V \oplus V$作为实表示，因此对 λ 应用 Whitney 和公式（引理1.6），$\lambda(V \otimes \mathbb{C}) = 2\lambda(V)$。因此，若 V 是 E_8 的任意实自旋表示，$\lambda(V \otimes \mathbb{C})$ 至少是生成元的 60 倍，因此 $\lambda(V)$ 至少是生成元的 30 倍。由此，定义 $\mathbb{G}^{\mathrm{CHL}}$ 的类（它是生成元的两倍）并非任何 E_8 自旋表示的 λ；对于 $\mathbb{G}^{\mathrm{het}}$ 也同样如此，因为可以限制到 $\mathrm{E}_8^2 \rtimes \mathbb{Z}/2$ 中 E_8 的任一因子，从而得到一个 λ 等于生成元的表示。

最后，Atiyah-Segal完备化定理将这一结论从表示推广到所有向量丛。由于 λ 是可加的（引理 1.6），它经由自旋向量丛的 Grothendieck群 $\mathrm{KSpin}(BG)$ 分解；同样，在自旋表示上取值时，λ 经由相应的 Grothendieck群 $\mathrm{RSpin}(G)$ 分解。Atiyah-Segal [AS69, §7, §8] 表明，对任意表示取伴随丛，会将所有定义在 BG 上的向量丛的 Grothendieck环 $\mathrm{KO}^0(BG)$ 表示为表示环 $\mathrm{RO}(G)$ 关于其增广理想的完备化。因此，对于满足 Whitney 和公式的、取值于 $\mathbb{Z}$ 的特征类 c，若其定义在 G 的任意向量丛上，那么从 G 的表示推广到 BG 上的向量丛，不会降低 $|c|$ 的最小值。

为了使用 Atiyah-Segal 定理，我们需要从自旋表示和向量丛推广到任意表示和向量丛。我们将这样做，但代价是将 λ 的最小值略微降低。对于任意向量丛 V，$V^{\oplus 4}$ 都有一个典范的自旋结构：Stiefel-Whitney类的 Whitney 和公式表明自旋结构存在；然后在 $B\mathrm{O}$ 上选取一个全局自旋结构。因此，对于 E_8 的任意表示或 $B\mathrm{E}_8$ 上的向量丛，我们可以定义 $\lambda(V) := \frac{1}{4}\lambda(V^{\oplus 4})$，其取值于 $\frac{1}{4}\mathbb{Z}$。因此，从 $RO(\mathrm{E}_8) \to KO^0(B\mathrm{E}_8)$ 过渡到 $RSpin(\mathrm{E}_8) \to KSpin(B\mathrm{E}_8)$，会使 λ 的最小值至多缩小 4 倍；现在我们可以应用 Atiyah-Segal 定理，因此仍然无法得到 $2c$ 和 ξ^{CHL}；同理，以 E_8 取代 $\mathrm{E}_8^2 \rtimes \mathbb{Z}/2$，可证明无法实现关于 ξ^{het} 的特征类。□

因此，我们采用另一种方法：虽然无法得到与向量丛对应的 Thom 谱，但仍可得到 $MTString$-模 Thom 谱。我们借助 Ando-Blumberg-Gepner-Hopkins-Rezk 理论来实现这一点 [ABG+14a, ABG+14b](ABGHR)，下面简要概述该理论。

ABGHR 关于 Thom 谱的观点，其背后的思想是将局部系数的概念推广到广义上同调理论。给定一个有基点的连通空间 X 以及一个同态 $\rho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}) \cong \{\pm 1\}$，可以得到 $\mathbb{Z}_\rho$ 上的局部系数系：这是 X 上的一个纤维为 $\mathbb{Z}$ 的丛，并且其沿着环路 $\gamma \in \pi_1(X)$ 的单值化恰好是 $\rho(\gamma)$。给定 $\mathbb{Z}_\rho$，我们可以取扭曲上同调群：如果 $\widetilde{X} \to X$ 表示万有覆盖，那么 $\widetilde{C}^*(X;\mathbb{Z})$ 上链复形 $C^*(X;\mathbb{Z})$ 带有一个 $\pi_1(X)$-作用，该作用由 X上的 $\pi_1(X)$-作用诱导而来。如果 $C^*(X;\mathbb{Z}_\rho)$ 表示 $C^*(X;\mathbb{Z})$ 中在此 $\pi_1(X)$-作用下按 ρ 变换的上链所构成的子复形，那么 $H^*(X;\mathbb{Z}_\rho) := H^*(C^*(X;\mathbb{Z}_\rho))$。

换一种说法，若 pt/G 表示只有一个对象 $*$ 的范畴，且 $\mathrm{Hom}(*,*) = G$，ρ 定义了一个以 $\mathrm{pt}/\pi_1(X)$ 为形状的阿贝尔群链复形图表：

$$\mathrm{pt}/\pi_1(X) \xrightarrow{\rho} \mathrm{pt}/\{\pm 1\} \longrightarrow \mathcal{C}h_{\mathbb{Z}}, \tag{2.4}$$

~将 pt 映射到 $C^*(X;\mathbb{Z})$，并将 $g\in\pi_1(X)$ 映射到由 $\rho(g)$给出的作用。按 ρ 变换的上链子复形，恰好就是该图表的极限。由于函子性，我们将这个复形视为某个对象 $\mathcal{X}$ 上的上链；该对象是一个余极限，其图表类似于（2.4）。

总之，扭曲上同调，即 Thom 谱的上同调，可表示为一个图表的余极限，该图表由 $\mathbb{Z}$-模的链复形组成，并由映射 $X\to B\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ 诱导。Ando-Blumberg-Gepner-Hopkins-Rezk 将其提升到谱。具体来说，给定一个环谱 R，Ando-Blumberg-Gepner-Hopkins-Rezk 自然地关联一个拓扑群 [13] $\mathrm{GL}_1(R)$，可将其视为 R 的单位群或自同构群。分类空间 $B\mathrm{GL}_1(R)$ 携带 R-线的泛局部系统； X 上的 R-线局部系统等价于一个映射 $X\to B\mathrm{GL}_1(R)$。

定义 2.5 (Ando-Blumberg-Gepner-Hopkins-Rezk [ABG+14a，定义 2.20])。 该*Thom* 谱 Mf 与映射 $f\colon X\to B\mathrm{GL}_1(R)$ 相关联，是图表 $X\to B\mathrm{GL}_1(R)\to \mathcal{M}od_R$ 的余极限；其中，我们将 X 视为其基本 ∞-群胚。

当 $R=\mathbb{S}$时，这是由于 Lewis [LMSM86，第 IX 章]。在定义 2.5中，我们必须考虑基本的 ∞-群胚，而不只是 π_1，因为 R 可以具有高阶自同构，因为谱是导出对象。

到 $B\mathrm{GL}_1(R)$ 的映射的 Thom 谱是一个 R-模。

例 2.6 (扭曲普通上同调)。 事实证明 $B\mathrm{GL}_1(H\mathbb{Z})\simeq K(\mathbb{Z}/2,1)$，因此 ABGHR 观点恢复了 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ 以及由局部系统扭曲的通常上同调概念。要证明这个同伦等价，使用 E_∞-空间的同伦拉回方块 [ABG+14b，定义 2。1]

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{GL}_1(H\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega^\infty H\mathbb{Z}\\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi}\\ (\pi_0(H\mathbb{Z}))^\times & \longrightarrow & \pi_0(H\mathbb{Z}).\end{array}\tag{2.7}$$

$\Omega^\infty H\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}$ 作为 E_∞-空间，且 ψ 是 E_∞-空间的一个同伦等价。因此， φ 也是 E_∞-空间的一个同伦等价，结论得证。

例 2.8（由向量丛得到的 Thom 谱）。Boardman 的 Thom 谱原始定义 [Boa65, §V.1] 将其与虚向量丛 $V\to X$联系起来。让我们将其与 ABGHR 的定义联系起来。虚向量丛由映射 f_V 分类：$X\to B\mathrm{O}$，而 J-同态 [Whi42] 的一个化身是映射 $J\colon \mathrm{O}\to\mathrm{GL}_1(\mathbb{S})$ [ABG10, 例 3.15], ，它解悬为一个空间映射 $BJ\colon B\mathrm{O}\to B\mathrm{GL}_1(\mathbb{S})$。具有这一签名的映射，是从虚向量丛 $V\to X$ 到可逆 $\mathbb{S}$-模的局部系统的一种自然赋值，并且 BJ 为 V 赋予了一个局部系统，该局部系统在每个 $x\in X$ 处的纤维为 $\mathbb{S}^{V_x}$。将这些映射放在一起，我们得到一个 X-形状的图表

$$X\xrightarrow{f_V}B\mathrm{O}\xrightarrow{BJ}B\mathrm{GL}_1(\mathbb{S})\longrightarrow \mathcal{S}p,\tag{2.9}$$

而这个图表的余极限（按 ABGHR 的意义是一个 Thom 谱）与通常意义下的 Thom 谱 X^V 相同。这是 Lewis 的定理 [LMSM86第 IX 章]以及 Ando-Blumberg-Gepner-Hopkins-Rezk 的定理 [ABG+14a推论 324]的综合结果。

[13] $\mathrm{GL}_1(R)$ i 它并不完全是拓扑群，而是其同伦相干版本：一个类群空间。

这种研究 Thom 谱的方法与乘法结构相得益彰。如果 R 是一个 E_∞-环谱，那么 $\mathrm{GL}_1(R)$ 上的类群化 A_∞-结构可细化为类群化的 E_∞-结构，从而使 $\mathrm{GL}_1(R)$，进而使 $B\mathrm{GL}_1(R)$ 成为无限循环空间。对于 $1 \leq k \leq \infty$，如果 X 是一个 k 重环空间，且 $f\colon X \to B\mathrm{GL}_1(R)$ 是一个 k 重环路映射，那么 Thom 谱 Mf 便继承了 E_k-环谱的结构。这是 Lewis 的定理 [LMSM86，定理 IX.7.1]，适用于 $R = \mathbb{S}$；而 Ando-Blumberg-Gepner 的定理 [ABG18，定理 1.7] 则适用于更一般的 R。

$B\mathrm{O}$ 具有一种无限循环空间结构，该结构源自 $B\mathrm{O}$ 上向量丛直和这一类似加法的运算。J-同态 $BJ\colon B\mathrm{O} \to B\mathrm{GL}_1(\mathbb{S})$ 是一个无限循环映射，因此，只要 ξ 是满足二取三性质的切结构，即 E、F和 $E \oplus F$中任意两个具有 ξ结构时，第三个便具有诱导的 ξ结构，我们就能在$MT\xi$ 上得到一种 E_∞-环结构。其思路是，二取三性质意味着 $\xi\colon B \to B\mathrm{O}$ 是一个无限循环映射；因此，将其映至 $B\mathrm{GL}_1(\mathbb{S})$ 并取 Thom 谱后，我们便得到一个 E_∞-环谱。这适用于MTO、$MTSO$、$MTSpin^c$、$MTSpin$和$MTString$；然而，物理学中常见的一些切结构并不具备这一性质，包括 $B\mathrm{Pin}^\pm$。

命题 2.10. 设 B 和 X 为无限循环空间，且 $\xi\colon B \to B\mathrm{O}$ 和 $f\colon B \to X$ 为无限循环映射，使得 f 的纤维 $\eta\colon F \to B$ 也是无限循环空间之间的映射。这些数据自然地定义了 *Thom* 谱 $M(\xi \circ \eta)$ 在 X上的扭曲，即一个映射 $X \to B\mathrm{GL}_1(M(\xi \circ \eta))$。

证明。 η的纤维：$F \to B$是另一个无限循环映射 $\zeta\colon \Omega X \to F$，因此 Thom 谱之间诱导的映射（其中映射到 $B\mathrm{O}$ 的映射分别为 $\xi\circ\eta\circ\zeta$和 $\xi\circ\eta$）是一个 E_∞-环谱映射。由于 $\xi\circ\eta\circ\zeta$零伦，其 Thom 谱是一个悬挂谱，因此我们有一个 E_∞-环谱映射 $\Sigma^\infty_+\Omega X \to M(\xi\circ\eta)$。

Ando-Blumberg-Gepner-Hopkins-Rezk [ABG+14b, (1.4),(1.7)] 证明 Σ^∞_+ 和 GL_1 在无限循环空间范畴与 E_∞-环谱的范畴之间构成一个伴随对。应用这个伴随关系，我们得到一个无限循环空间映射 $\Omega X \to \mathrm{GL}_1(M(\xi\circ\eta))$；再对其取 delooping，便得到定理陈述中的映射。 □

定理 2.11 (Beardsley [Bea17，定理 1])。采用命题 *2.10*中的记号，“普适扭曲” $X \to B\mathrm{GL}_1(M(\xi\circ\eta))$ 的 *Thom* 谱具有典范等价 $M\xi$。

推论 2.12。

(1) 存在一个映射 $\widehat{w}_1\colon K(\mathbb{Z}/2, 1) \to B\mathrm{GL}_1(MTSO)$，取商 $MTSO \to H\mathbb{Z}$ 后，它便成为例 *2.6* 中的通常同伦等价 $K(\mathbb{Z}/2, 1) \to B\mathrm{GL}_1(H\mathbb{Z})$。 *(2)* 存在一个映射 $\widehat{w}_2\colon K(\mathbb{Z}/2, 2) \to B\mathrm{GL}_1(MTSpin)$，与 *Atiyah-Bott-Shapiro* 映射 $MTSpin \to ko$ [*ABS64, Joa04*]，复合后，便是通常的映射 $K(\mathbb{Z}/2, 2) \to B\mathrm{GL}_1(ko)$ [*DK70, HJ20*]。 *(3)* 存在一个映射 $\beta w_2\colon K(\mathbb{Z}, 3) \to B\mathrm{GL}_1(MTSpin^c)$，与 *Atiyah-Bott-Shapiro* 映射 $MTSpin^c \to ku$ [*ABS64, Joa04, AHR10*]，复合后，便是通过 *3* 次类 $K(\mathbb{Z}, 3) \to B\mathrm{GL}_1(ku)$ [*DK70, Ros89, AS04, ABG10*] 扭曲 K 理论的通常扭曲$\widehat{\ }$。 *(4)* 存在一个映射 $\lambda\colon K(\mathbb{Z}, 4) \to B\mathrm{GL}_1(MTString)$，与 *Ando-Hopkins-Rezk* 定向 $MTString \to tmf$ [*AHR10*]，复合后，便是 *Ando-Blumberg-Gepner* 映射$K(\mathbb{Z}, 4) \to B\mathrm{GL}_1(tmf)$ [*ABG10,* 命题 *8.2*]。

部分（3）是 Hebestreit-Joachim 的定理 [HJ20，附录 C]。其他部分想必早已为人所知，但我们未能在文献中找到它们。

证明。 应用命题2.10 于以下四个映射

(1) w_1: $B\mathrm{O} \to K(\mathbb{Z}/2,\ 1)$，其纤维为 $B\mathrm{SO}$；(2) w_2: $B\mathrm{SO} \to K(\mathbb{Z}/2,\ 2)$，其纤维为 BSpin；(3) $\beta \circ w_2$: $B\mathrm{SO} \to K(\mathbb{Z},\ 3)$，其纤维为 $B\mathrm{Spin}^c$，其中 β: $H^k(-;\ \mathbb{Z}/2) \to H^{k+1}(-;\ \mathbb{Z})$ 为 Bockstein；以及 (4) λ: BSpin $\to K(\mathbb{Z},\ 4)$，其纤维为 BString。

这四个映射都是无限循环映射，因为这些特征类在直和下是可加的。为与既有扭曲相容，我们利用这样一个事实：对于 spin^c 和 string 的情形，Ando-Blumberg-Gepner [ABG10, §7, §8] 以构造 MTSpin^c 和 MTString 扭曲相同的方式，构造所需的扭曲 $K(\mathbb{Z}, 3) \to B\mathrm{GL}_1(\mathrm{ku})$ 和 $K(\mathbb{Z}, 4) \to B\mathrm{GL}_1(\mathrm{tmf})$，因此由函子性可知它们是相容的。ko 和 $H\mathbb{Z}$ 的情形类似。□

推论 2.12 中这些扭曲的 Thom 谱的同伦群具有配边解释。以 $\widehat{w}_2$ 为例，定向流形上的自旋结构是 $w_2(TM)$ 的平凡化；但给定一个空间 X 和一个二次上同调类 B，将其视为映射 f_B: $X \to K(\mathbb{Z}/2, 2)$，则 MT$(\widehat{w}_2 \circ f_B)$ 的同伦群是由定向流形 M、一个映射 g: $M \to X$ 以及 $w_2(TM) + g^*B$ 的平凡化所构成的配边群；这一点由 Hebestreit-Joachim [HJ20, 推论 3.3.8] 证明。其余三种情形类似；特别地，我们已将 ξ^{het} 和 ξ^{CHL} 的 Thom 谱描述为 MTString-模 Thom 谱。

这类扭曲配边此前已有研究：由三次上同调类扭曲的 Spin^c 结构最早由 Douglas [Dou06, §5], 研究，并隐含地出现在 Freed-Witten [FW99] 关于反常抵消的工作中。推论 2.12 中出现的这类扭曲 Spin 结构和弦结构最早由 B.L. Wang [Wan08, Definitions 8.2, 8.4] 考察。另见 [DFM11a, DFM11b, Sat11a, Sat11c, Sat12, Sat15, SW15, LSW20, SY21]，其中从类似的视角给出了更多扭曲广义上同调理论的例子，以及它们在物理学中的一些应用。

第一种情形涉及由三次上同调类扭曲的 $MTSO$，即本节开头所说的扭曲定向概念：给定一个实线丛 $L \to X$，我们要求给出一个映射 g: $M \to X$ 以及 $TM \oplus g^*(L)$ 上的一个定向。从 ABGHR 的视角来看，这意味着映射 $\widehat{w}_1$ 经由 $B\mathrm{O}_1$ 分解为

$$K(\mathbb{Z}/2, 1) \xrightarrow{\simeq} B\mathrm{O}_1 \hookrightarrow B\mathrm{O} \to B\mathrm{GL}_1(\mathbb{S}) \to B\mathrm{GL}_1(MTSO). \tag{2.13}$$

但其他对象不能以这种方式分解。

注 2.14。(2.13) 有一个复版本。令 W 表示 Wall 配边谱 [Wal60]，其同伦群是带有 w_1 的整数提升的流形的配边群。明确地说，若 ξ: $F \to B\mathrm{O}$ 是 βw_1: $B\mathrm{O} \to K(\mathbb{Z}, 2)$ 的纤维，则 W $:=$ MTξ。于是命题 2.10 给出一个映射 $\widehat{\beta w_1}$: $K(\mathbb{Z}, 2) \to B\mathrm{GL}_1(\mathrm{W})$，但二次上同调类等价于复直线丛，而 βw_1 分解为

$$K(\mathbb{Z}, 2) \xrightarrow{\simeq} B\mathbb{T} \to B\mathrm{O}_2 \to B\mathrm{O} \to B\mathrm{GL}_1(\mathbb{S}) \to B\mathrm{GL}_1(\mathcal{W}). \tag{2.15}$$

注 2.16. $\widehat{w}_1$（分别地，βw_1）按 (2.13)（分别地，(2.15)）进行分解这一事实的一个推论是：它是与实（分别地，复）线丛 $L \to X$ 相关联的扭曲，因此相应的 MTSO-模（分别地，W-模）Thom 谱分裂为 MTSO $\wedge X^{L-1}$（分别地，W $\wedge X^{L-2}$）。在 $B\mathrm{O}_1$ 和 $B\mathbb{T}$ 上作普遍考虑，定理 2.11 给出同伦等价 MTSO $\wedge (B\mathrm{O}_1)^{L-1}$’ MTO 和 W $\wedge (B\mathbb{T})^{L-2}$’ MTO；前者是 Atiyah 的定理 [Ati61, 命题 4.1]。

我们将把推论 2.12 应用于次数为 4 的特征类；Bianchi 恒等式为异质弦和 CHL 切结构给出了这些特征类。给定一个空间 X 及其上的一个类 $\mu \in H^4(X;\mathbb{Z})$，令$\mathcal{B}(X)$ 表示 $\lambda+\mu\colon B\mathrm{Spin}\times X \to K(\mathbb{Z},4)$ 的同伦纤维，并令 ξ^μ 表示切结构

$$\xi^\mu\colon \mathcal{B}(X) \longrightarrow B\mathrm{Spin}\times X \longrightarrow B\mathrm{O}. \tag{2.17}$$

$\widehat{\text{MT}}\,\xi^\mu$ 等价于与扭曲 $\lambda\circ\ \mu\colon X \to B\mathrm{GL}_1$(MTString) 相关联的 MTString-模 Thom 谱。若 $X = BG$ 对于一个李群 G，B(X) 是 string 2-群 S(Spin $\times G, \lambda+\mu$) 的分类空间。令 A 表示 2-主 Steenrod 代数，对于 $n\geq 0$，令 A(n) 表示由 $\mathrm{Sq}^1,\dots,\mathrm{Sq}^{2^n}$ 生成的 A 的子代数。在与 Matthew Yu [DY], 即将发表的合作研究中，我们计算了 $H^*(\mathrm{MT}\,\xi^\mu;\mathbb{Z}/2)$ 上的 A-模结构。

定义 2.18。令 R 表示 $\mathbb{Z}/2$-代数 $\mathcal{A}(1)[S]$，即由生成元 $\mathrm{Sq}^1, \mathrm{Sq}^2,$ 和 S 生成，并满足关于 Sq^1 和 Sq^2 的 Adem 关系的代数。给定上述的 X 和 μ，定义 $\mathcal{A}(1)$-模$T(X,\mu) := H^*(X;\mathbb{Z}/2)$，并通过定义如下结构赋予 $T(X,\mu)$ 一个 R-模结构。

$$S(x) := \mu x + \mathrm{Sq}^4(x). \tag{2.19}$$

我们希望将 S视为 Sq^4，并将 $T(X,\ \mu)$ 视为一个 $\mathcal{A}(2)$-模，但先验而言，并不清楚这个 S-作用是否满足 Adem 关系。

定理 2.20（[DY]）。

(1) R-模在 $T(X,\mu)$ 上的结构满足 $\mathrm{Sq}^1, \mathrm{Sq}^2,$ 和 $\mathrm{Sq}^4 = S$的 *Adem* 关系，因此在 $T(X,\mu)$上诱导出一个 $A(2)$-模结构。*(2)* 存在一个 A-模映射

$$H^*(MT\xi^\mu;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathcal{A}\otimes_{\mathcal{A}(2)} T(X,\mu), \tag{2.21}$$

在数据 (X,μ)中自然，该映射在 15 次及以下维度上是同构。

由于 [DY] 尚未发表，我们在注释 2.26 中给出该定理的证明。

推论 2.22。对于 $t-s\leq 15$，计算 *2*-完备ξ^μ-配边的 *Adams* 谱序列的 E_2-页为

$$E_2^{t,s} = \mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}(2)}(T(X,\mu),\mathbb{Z}/2). \tag{2.23}$$

由于 $\mathcal{A}(2)$ 远小于 $\mathcal{A}$，因此处理起来容易得多。

证明。这由换环公式得出：若$\mathcal{B}$ 是分次 Hopf 代数，$\mathcal{C}$ 是$\mathcal{B}$的分次 Hopf 子代数，且 M 和 N 是分次$\mathcal{B}$-模，则存在一个自然同构

$$\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{C}} M, N) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{C}}(M,N). \tag{2.24}$$

可以把它看作一个或许更熟悉的同构的导出版本

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{C}} M, N) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N). \tag{2.25}$$

在我们的例子中，$\mathcal{B}$ 是 Steenrod 代数，它是一个 Hopf 代数；而 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}(2)$，确实是$\mathcal{A}$的 Hopf 子代数，因此我们可以应用（2.24）并得出结论。□

我们将在情形 $\xi^\mu = \xi^{\mathrm{het}}$，$\xi^{\mathrm{CHL}}$ 中使用这一简化，以在 $p=2$处运行 Adams 谱序列，计算 $\Omega_*^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 和 $\Omega_*^{\xi^{\mathrm{CHL}}}$。

注记 2.26（定理 2.20 的证明概要）。 要证明（1），直接检验 $\mathcal{A}(2)$的 Adem 关系。证明第（2）部分的第一步是建立模 2 上同调的 Thom 同构。我们将使用 ***Thom***对角映射，这是一个 $MTString$-模的映射

$$MT\xi^{\mu} \xrightarrow{\Delta^t} MT\xi^{\mu} \wedge MTString \wedge \Sigma^{\infty}_{+} X \tag{2.27}$$

定义如下：对角映射 $\Delta\colon X \to X \times X$ 是一个位于 $B\mathrm{GL}_1$(MTString) 上的空间映射；如果 $\widehat{\ }$ 我们赋予 X 映射 $\lambda \circ \mu$ 到 $B\mathrm{GL}_1$(MTString)，并赋予 $X \times X$ 映射 $(\lambda \circ \mu, *)$。将 MTString-模 Thom 谱函子应用于 Δ，得到 (2.27)。将 (2.27) 与 $H\mathbb{Z}/2$ 作 smash 积。结果是 $H\mathbb{Z}/2$的一个扭曲的 Thom 对角映射，但所有此类扭曲都可平凡化（即所有$H\mathbb{Z}/2$-丛都存在定向）。因此，根据 [ABG+14b，命题 3.26]，以下复合是一个同构：

$$MT\xi^{\mu} \wedge H\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\Delta^t} MT\xi^{\mu} \wedge \Sigma^{\infty}_{+} X \wedge H\mathbb{Z}/2 \longrightarrow MTString \wedge \Sigma^{\infty}_{+} X \wedge H\mathbb{Z}/2, \tag{2.28}$$

它是 $\mathbb{Z}$ /2-同调 Thom 同构。模 2 上同调也有类似的结论。

Thom对角映射使 $H^*(\mathrm{MT}\xi^{\mu}; \mathbb{Z}/2)$ 成为 $H^*(\mathrm{B}(X); \mathbb{Z}/2)$ 上由 Thom类 U 生成的自由秩一模。由于 Thom对角映射是谱映射，我们可以使用 Cartan公式，根据 $\mathrm{B}(X)$ 中的 Steenrod平方运算和 $\mathrm{Sq}(U)$，计算 $H^*(\mathrm{MT}\xi^{\mu}; \mathbb{Z}/2)$ 中任意元素的 Steenrod平方运算。由于 $\mathrm{Sq}(U)$ 和我们在 (2.21) 中所需的同构对 X 和 μ 都是自然的，因此只需考察普适情形，此时 $X = K(\mathbb{Z}, 4)$，且 μ 是典范类 $\tau \in H^4(K(\mathbb{Z}, 4); \mathbb{Z})$。在这种情形下，定理 2.11 蕴含 $\mathrm{MT}\xi^{\mu}$’ MTSpin。根据 Anderson-Brown-Peterson [ABP67], 的结果，若 J 是 A(1)-模 $\mathrm{A}(1)/\mathrm{Sq}^3$，且 M 是 A(1)-模 $\mathbb{Z}/2 \oplus \Sigma^8\mathbb{Z}/2 \oplus \Sigma^{10}J$，则存在一个 A-模映射

$$H^*(MTSpin; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}(1)} M \tag{2.29}$$

这是一个同构，适用于15 次及以下。Giambalvo [Gia71，推论 2。3] 表明存在一个映射 $H^*(MTString; \mathbb{Z}/2) \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}(2)} \mathbb{Z}/2$，它在15 次及以下也构成同构。因此，根据换环定理（2.24），只需给出一个$\mathcal{A}(2)$-模的映射

$$T(K(\mathbb{Z}, 4), \tau) \longrightarrow \mathcal{A}(2) \otimes_{\mathcal{A}(1)} M \tag{2.30}$$

这是一个同构，适用于15 次及以下。利用以下内容可以直接验证这一点：Serre 计算出的$\mathcal{A}(2)$-模结构 $H^*(K(\mathbb{Z}, 4); \mathbb{Z}/2)$ 参见 [Ser53，§10]。

2.2. **ξ^{het} 在 $p = 2$ 处的配边**。本节首先计算 $H^*(BG; \mathbb{Z}/2)$ 在低次时作为一个$\mathcal{A}(2)$-模的结构，其中 $G := \mathrm{E}_8^2 \rtimes \mathbb{Z}/2$；随后利用推论 2.22，运行 Adams 谱序列来计算2-完备的 ξ^{het} 配边在11 次及以下的情形。

不过，首先我们稍微改述一下这个问题。考虑切结构 $\xi^{\mathrm{het}\prime}\colon B^{\mathrm{het}\prime} \to B\mathrm{O}$，它的定义方式与 ξ^{het} 相同，但用 $K(\mathbb{Z},4)$ 替换 $B\mathrm{E}_8$。具体来说，$\mathbb{Z}/2$ 通过交换两个因子作用于 $K(\mathbb{Z}, 4) \times K(\mathbb{Z},4)$；取 Borel 构造

$$B := (K(\mathbb{Z}, 4) \times K(\mathbb{Z}, 4)) \times_{\mathbb{Z}/2} E\mathbb{Z}/2 \tag{2.31}$$

得到一个纤维丛

$$K(\mathbb{Z}, 4) \times K(\mathbb{Z}, 4) \longrightarrow B \longrightarrow B\mathbb{Z}/2. \tag{2.32}$$

对于 $i = 1, 2$，令 $c_i \in H^4(K(\mathbb{Z}, 4) \times K(\mathbb{Z}, 4); \mathbb{Z})$ 为 i^{th} $K(\mathbb{Z}, 4)$ 因子的典范类。类 $c_1 + c_2$ 在 $\mathbb{Z}/2$-作用下是不变量，因此我们可以沿着 Serre 谱序列追踪它，

从而得知它定义了一个非零类 $c_1+c_2 \in H^4(B; \mathbb{Z}/2)$。定义 $f\colon B^{\mathrm{het}'} \to B\mathrm{Spin}\times B$ 为 $\lambda - (c_1 + c_2)\colon B\mathrm{Spin} \times B \to K(\mathbb{Z}, 4)$ 的纤维；那么切结构 $\xi^{\mathrm{het}'}$ 是复合映射

$$B^{\mathrm{het}'} \xrightarrow{f} B\mathrm{Spin} \times B \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} B\mathrm{Spin} \xrightarrow{\qquad\qquad} B\mathrm{O}. \tag{2.33}$$
$$\xi^{\mathrm{het}'}$$

也就是说，流形 M 上的 $\xi^{\mathrm{het}'}$ 结构是一个自旋结构、一个主 $\mathbb{Z}/2$-丛 $P \to M$、两个类 $c_1, c_2 \in H^4(P; \mathbb{Z})$（它们在甲板变换下互换），以及 $\lambda(M) - (c_1 + c_2)$ 的一个平凡化（后一个类下降到 M）。这与 ξ^{het} 结构包含相同的数据，只是我们不要求 c_1 或 c_2 来自主 E_8-丛；因此存在一个切结构的映射 $\widetilde{c}\colon \xi^{\mathrm{het}} \to \xi^{\mathrm{het}'}$，即一个与映射到 $B\mathrm{O}$ 的映射相交换的空间映射 $B\mathbb{G}^{\mathrm{het}} \to B^{\mathrm{het}'}$。与 ξ^{het} 类似，通过类 $\lambda - (c_1 + c_2)\colon B \to K(\mathbb{Z}, 4)$，$\xi^{\mathrm{het}'}$ 结构是 Corollary 2.12 意义下的扭曲弦结构。

Bott-Samelson [BS58、定理 IV、V(e)] 证明，我们在定义 1.4 中定义的特征类 $c \in H^4(B\mathrm{E}_8; \mathbb{Z})$，视为映射 $c\colon B\mathrm{E}_8 \to K(\mathbb{Z}, 4)$，是 15-连通的。这意味着它在配边群上诱导的同态 $\widetilde{c}$，即 $\widetilde{c}\colon \Omega_k^{\xi^{\mathrm{het}}} \to \Omega_k^{\xi^{\mathrm{het}'}}$，在 14 次及以下的次数上是同构。就我们的弦论目的而言，我们只关心 $k \leq 12$，因此不妨计算 $\xi^{\mathrm{het}'}$-配边。在本小节余下部分，我们常常不区分ξ^{het} 和 $\xi^{\mathrm{het}'}$；若区分二者对讨论有所影响，我们会指出所指的是哪一个。

注 2.34. 关闭交换两个 E_8 因子的 $\mathbb{Z}/2$ 对称性，即转而考虑如注 1.46 所述的ξ^r,^{het}-结构，会大大简化这一问题：这些配边群早在几十年前就已为人所知。具体而言，在 ξ^r,^{het} 的定义中，用 $K(\mathbb{Z}, 4)$ 替换 $B\mathrm{E}_8$，从而定义切结构 ξ^r,$^{\mathrm{het}\prime}$。在流形 M 上，该结构由 M 上的一个自旋结构、两个类$c_1, c_2 \in H^4(M; \mathbb{Z})$，以及 $\lambda(M)$ 的一个平凡化 $-c_1 - c_2$组成。正如 Witten [Wit86, §4] 所指出的，这些数据等价于一个自旋结构和一个可任意选取的单独类 c_1；于是 c_2 必为$\lambda(M) - c_1$。因此，切结构 ξ^r,$^{\mathrm{het}\prime}$-结构不过就是 $B\mathrm{Spin} \times K(\mathbb{Z}, 4) \to B\mathrm{O}$；与 ξ^{het}的情形相同，映射 $\mathrm{MT}\xi^r$,$^{\mathrm{het}} \to \mathrm{MT}\,\xi^r$,$^{\mathrm{het}\prime}$, $\mathrm{MTSpin} \wedge K(\mathbb{Z}, 4)_+$ 在 14 次及以下的次数上诱导同伦群同构。Stong [Sto86] 计算了 12 次及以下的 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(K(\mathbb{Z}, 4))$。

如我们在 §1.2 中所讨论的，在流形范畴 M 上，一个平凡主 $\mathbb{Z}/2$-丛以及两个主 E_8-丛 $P, Q \to M$ 的数据，定义了 M 上的一个主 $\mathrm{E}_8^2 \rtimes \mathbb{Z}/2$-丛，其中 $c_1 + c_2$ 等于 $c(P) + c(Q)$；将 $c(P) + c(Q) - \lambda(M)$ 平凡化的数据因此定义了一个 ξ^{het} 结构。类似地，平凡的 $\mathbb{Z}/2$- 丛以及一对 $c_1, c_2 \in H^4(M; \mathbb{Z})$，连同 $c_1 + c_2 - \lambda$ 的一个平凡化，定义了一个$\xi^{\mathrm{het}'}$ 结构。

引理 2.35. 自旋流形 M 具有一个典范的 $\xi^{\mathrm{het}'}$ 结构，如上所述，该结构由平凡主 $\mathbb{Z}/2$-丛、上同调类 $c_1 = \lambda$ 和 $c_2 = 0$，以及 $\lambda - \lambda = 0 \in H^4$ 的典范平凡化所指定$(M;\ \mathbb{Z})$。

这定义了一个切结构之间的映射，因此也定义了 Thom 谱之间的映射 $s_1\colon\ MTSpin \to MT\xi^{\mathrm{het}'}$。一个 $\xi^{\mathrm{het}'}$-结构包含自旋结构的数据；遗忘其余的 $\xi^{\mathrm{het}'}$-结构便定义了一个映射 $s_2\colon MT\xi^{\mathrm{het}'} \to MTSpin$。 s_1与 s_2的复合与恒等映射同伦等价，因为引理 $\xi^{\mathrm{het}'}$ 2.35 中构造的流形所具有的底层自旋结构 与 我们最初的自旋结构相同。

推论 2.36。 存在一个谱 Q 和一个分裂

$$(s_2, q)\colon MT\xi^{\mathrm{het}\prime} \xrightarrow{\simeq} MTSpin \vee \mathcal{Q}. \tag{2.37}$$

我们稍后将用它来减少需要进行的谱序列计算量。引理 2.35和推论 2.36 要求我们使用 $\xi^{\mathrm{het}\prime}$ 而不是 ξ^{het}，当然，关于低次配边群的结论对两者都成立。

当 K 是有限群时，Nakaoka [Nak61，定理 3。3]证明存在一个环同构，将 2 上同调 $B(\mathbb{Z}/2 \ltimes (K \times K))$ 映射到 E_2页的 Serre 谱序列

$$E_2^{p,q} = H^p(B\mathbb{Z}/2; \underline{H^q(BK \times BK; \mathbb{Z}/2)}) \Longrightarrow H^{p+q}(B(\mathbb{Z}/2 \ltimes (K \times K)); \mathbb{Z}/2). \tag{2.38}$$

这里的下划线表示由 $\mathbb{Z}/2$ 对 $BK \times BK$ 的作用（交换两个因子）所诱导的局部系数系。由于这个局部系数系可能是非平凡的，因此定义（ $E_2$2.38）的 -页上的乘法结构时必须谨慎，但这里可以将其明确写出。作为一个 $\mathbb{Z}/2[\mathbb{Z}/2]$-模， H^*（$BK \times BK$； $\mathbb{Z}/2$）{v?}是以下各项的直和：

- 由 $\mathbb{Z}/2$ 固定的类所构成的子代数 $\mathcal{H}_1$ ，这些类具有如下形式： $x \otimes x$ for $x \in H^*(BK; \mathbb{Z}/2)$; and
- 由具有如下形式的类张成的子模 $\mathcal{H}_2$ ： $x \otimes y$ ，其中 x 和 y 线性无关。

由于 $\mathbb{Z}/2$ 在 $\mathcal{H}_1$ 上的作用是平凡的，且 $\mathcal{H}_1$ 是一个环，因此 $H^*(B\mathbb{Z}/2; \mathcal{H}_1)$ 具有环结构。又由于作为 $\mathbb{Z}/2[\mathbb{Z}/2]$-模，$\mathcal{H}_2$ 具有如下形式： $M \oplus M$ ，其中 $\mathbb{Z}/2$ 通过交换两个因子起作用，因此 $H^*(B\mathbb{Z}/2; \mathcal{H}_2)$ 在正次数上消失。[14] 在零次时，我们得到不变量，它们由形如 $x \otimes y + y \otimes x$ 的元素张成，其中 $x, y \in H^*(BK; \mathbb{Z}/2)$。$\mathcal{H}_1 \oplus (\mathcal{H}_2)^{\mathbb{Z}/2} = E^0_{\cdot,2}{}^{\bullet}$ 是 $H^*(BK \times BK; \mathbb{Z}/2)$ 的子代数。

到目前为止，我们已经为 $H^*(B\mathbb{Z}/2; \mathcal{H}_1) \supsetneq E^{>0}_{\cdot,2}{}^{\bullet}$ 以及 $\mathcal{H}_1 \oplus (\mathcal{H}_2)^{\mathbb{Z}/2} = E^0_{\cdot,2}{}^{\bullet}$ 规定了环结构，并且这些环结构在重叠部分一致。因此，要规定整个 E_2-页上的环结构，只需写出 $(\mathcal{H}_2)^{\mathbb{Z}/2}$ 中的元素与正 p 次元素的乘积。我们规定所有这类乘积都为零；这就是中冈定理中出现的环结构。

当然，E_8 不是有限群。中冈定理在相当广泛的范围内成立 [Eve65，Kah84，Lea97]；我们需要的版本由 Evens 证明 [Eve65]，，他证明了当 K 是紧李群时，同一个环同构也成立。因此，这适用于 ξ^{het}，但不一定适用于$\xi^{\mathrm{het}\prime}$；不过，由于它们的上同调环在 14 次及以下同构，因此在本次计算中使用哪一个都无关紧要。

现在我们明确写出这个环结构和 A(2)-模结构。由于 $c\colon B\mathrm{E}_8 \to K(\mathbb{Z}, 4)$ 是 15-连通的，它在 14 次及以下次数诱导出一个上同调同构，因此我们可以用 $K(\mathbb{Z}, 4)$ 的上同调来代替 $B\mathrm{E}_8$ 的上同调。Serre [Ser53, §10] 计算了 $K(\mathbb{Z}, 4)$ 的模 2 上同调。它是一个无限生成的多项式代数；在 12 次及以下次数，其生成元为：典范类 $D \in H^4(K(\mathbb{Z}, 4); \mathbb{Z}/2)$、 $F := \mathrm{Sq}^2 D$、 $G := \mathrm{Sq}^3 D$、$J := \mathrm{Sq}^4 F$，以及 $K := \mathrm{Sq}^5 F$。

[14]为说明这一点，首先注意， G 的模 2 群上同调关于 $\mathbb{Z}/2[G]$系数模具有可加性，因此只需证明当 $M = \mathbb{Z}/2$时，正次数上的 $H^*(B\mathbb{Z}/2; M \oplus M)$消失即可。但 $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ 作为 $\mathbb{Z}/2[\mathbb{Z}/2]$-模与 $\mathbb{Z}/2[\mathbb{Z}/2]$ 同构（也就是说，作为带有 $\mathbb{Z}/2$表示的向量空间， $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ 与群 $\mathbb{Z}/2$上的函数空间同构），而以群环为值的群上同调是平凡的，例如这是因为群环是其自身的自由分解。

若 C 是 D、F、G、J 或 K 之一，我们用 C_1 表示来自 $B\mathrm{E}_8$ 第一份拷贝的类，用 C_2 表示来自第二份拷贝的类。因此，我们得到 BG 低次数上同调的如下加法基：

(1) 在 $\mathcal{H}_1$ 中，$D_1D_2x^k$ 和 $F_1F_2x^k$ 对于 $k \geq 0$。(2) 在 $(\mathcal{H}_2)^{\mathbb{Z}/2}$ 中，$D_1 + D_2$、$F_1 + F_2$、$G_1 + G_2$、$D_1^2 + D_2^2$、$J_1 + J_2$、$D_1F_1 + D_2F_2$、$D_1F_2 + D_2F_1$、$D_1G_1 + D_2G_2$、$D_1G_2 + D_2G_1$、$K_1 + K_2$、$F_1^2 + F_2^2$、$D_1^3 + D_2^3$ 和 $D_1^2D_2 + D_1D_2^2$。

接下来，我们利用 Quillen 的一个定理确定$\mathcal{A}(2)$-模结构。

定理 2.39（Quillen 的检测定理 [Qui71，命题 3。1]）。设 X 是一个空间，并设$\mathbb{Z}/k$ 通过循环置换作用于 X^k。设 $Y \colon = E\mathbb{Z}/k \times_{\mathbb{Z}/k} X^k$，这是一个以 $B\mathbb{Z}/k$为底空间、纤维为 X^k 的纤维丛。设 $i_1 \colon X^k \to Y$是基点处纤维的包含映射，并设 $i_2 \colon B\mathbb{Z}/k \times X \to Y$由对角映射诱导；则

$$(i_1^*, i_2^*) \colon H^*(Y; \mathbb{Z}/k) \longrightarrow H^*(X^k; \mathbb{Z}/k) \oplus H^*(B\mathbb{Z}/k \times X; \mathbb{Z}/k) \tag{2.40}$$

是单射。

对我们而言，$k = 2$, $X = B\mathrm{E}_8$, 和 $Y = BG$。因此，要计算$H^*(BG; \mathbb{Z}/2)$中各类的 Steenrod平方运算，我们可以假设处于 $B\mathrm{E}_8^2$ 中（若该类属于 $(\mathcal{H}_2)^{\mathbb{Z}/2}$）；对于 $\mathcal{H}^1$, ，我们还需要知道 $\mathrm{Sq}(x)$，而 i_2^* 告诉我们 $\mathrm{Sq}(x) = x + x^2$。因此，我们可以计算$H^*(BG; \mathbb{Z}/2)$上的 $\mathcal{A}(2)$-模结构，从而也能计算 $T(-(c_1 + c_2))$上的结构；我们将重点讨论后者。与大多数这类计算一样，过程有些繁琐，但并不复杂，花合理的时间便可手工完成。完成计算后，我们得到了以下结论。

命题 2.41. 令 M 为 $T(-(c_1 + c_2))$ 对所有次数不低于 14 的元素取商所得的模。则 M 是以下子模的直和。

(1) M_1，包含 *Thom*类 U 的直和项。*(2)* $M_2 \colon = H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}/2)$，模去 *13* 次及以上次数中的那些元素。*(3)* M_3，包含 $U(D_1^2 + D_2^2)$ 的直和项。*(4)* M_4，包含 UD_1D_2 的直和项。*(5)* M_5，包含 UD_1D_2x 的直和项。*(6)* M_6，包含 $U(D_1F_1 + D_2F_2)$ 的直和项。*(7)* M_7，包含 $U(D_1D_2^2 + D_1^2D_2)$ 的直和项。

我们在图 1中绘出了这一分解。

回忆推论 2.36，$\mathrm{MT}\xi^{\mathrm{het}'}$分裂为 MTSpin $\vee$ Q。由于在我们所需的范围内 $\Omega_*^{\xi^{\mathrm{het}}} \cong \Omega_*^{\xi^{\mathrm{het}'}}$，并且得益于 Anderson-Brown-Peterson [ABP67], 的工作，Ω_*^{Spin}已为人所知，因此我们将重点放在π_*(Q)上。为此，我们将通过 $s_1 \colon$ MTSpin $\to \mathrm{MT}\xi^{\mathrm{het}'}$，确定 Adams 谱序列的 E_2-页中来自 Spin 配边的子模；于是，Q 的 E_2-页就是一个互补子模。

自旋流形上的典范 $\xi^{\mathrm{het}'}$-结构，来自引理2.35，可改述如下：流形 M上的自旋结构等价于以下数据：流形 M上的自旋结构，一个映射 $c \colon M \to K(\mathbb{Z}, 4)$，以及 $c - \lambda(M)$的一个平凡化。因此，根据推论2.12，自旋结构是该推论意义下的扭曲弦结构（事实上，是备注2.16意义下的普适扭曲），因此映射

$$(1, 0) \colon K(\mathbb{Z}, 4) \longrightarrow (K(\mathbb{Z}, 4) \times K(\mathbb{Z}, 4)) \times_{\mathbb{Z}/2} E\mathbb{Z}/2 = B \tag{2.42}$$

提升为一个$MTString$-模 Thom 谱的映射 $s_1 \colon$ $MTSpin \to MT\xi^{\mathrm{het}'}$。定理2.20 的自然性 s_1^* 在模 2 上同调上的像，从而使我们能够确定哪些

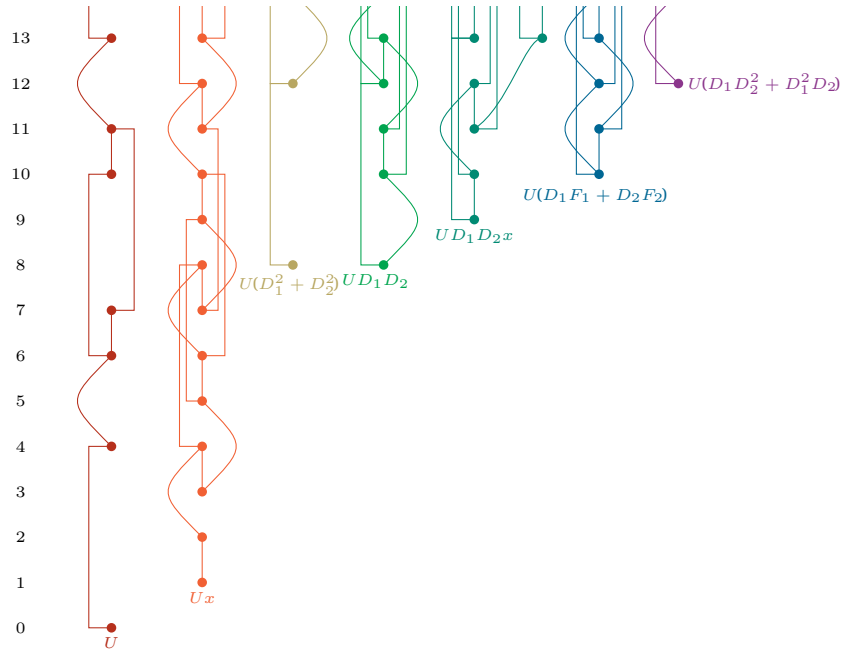

图 1. 低次中的 $\mathcal{A}(2)$-模 $T(-(c_1+c_2))$。图示的子模包含 12 次及以下的所有类。

命题2.41 中的直和项属于 MTSpin，哪些属于 $\mathcal{Q}$。具体而言，拉回映射将 $x \mapsto 0$映为非零 D_1、F_1、G_1等，并将 D_2、F_2、G_2等映为零。这意味着在直和分解$MT\xi^{\mathrm{het}'}$的$MTSpin \vee \mathcal{Q}$中，直和项 M_1、M_3和 M_6 来自$MTSpin$的上同调，其余直和项则来自$\mathcal{Q}$的上同调。

为了运行 Q 的 Adams 谱序列，我们需要计算 M_2、M_4、M_5 和 M_7 在 A(2) 上的 Ext。完成计算后，我们将在图 3 中展示 E_2页。对于一个 A(2)-模 M，$\mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathrm{A}(2)}(M,\mathbb{Z}/2)$ 是一个双分次模，我们通常将其记作 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(2)}(M)$ 或 $\mathrm{Ext}(M)$，它是双分次 $\mathbb{Z}/2$-代数 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(2)}(\mathbb{Z}/2)$ 上的模；代数结构和模结构都来自 Yoneda 乘积 [Yon54, §4]（综述参见 [BC18, §4.2]）。这种模结构有助于确定 Adams 谱序列中的微分：微分与该作用相容。模结构也约束其 E_∞页上的扩张。

May（未发表）和 Shimada-Iwai [SI67, §8] 确定了代数 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(2)}(\mathbb{Z}/2)$。我们只需追踪三个元素的作用：$h_0 \in \mathrm{Ext}^{1,1}_{\mathrm{A}(2)}(\mathbb{Z}/2)$、$h_1 \in \mathrm{Ext}^{1,2}_{\mathrm{A}(2)}(\mathbb{Z}/2)$ 和 $h_2 \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(2)}(\mathbb{Z}/2)$。这些元素属于由商映射 $\mathrm{A} \to \mathrm{A}(2)$ 诱导的映射 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}/2) \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(2)}(\mathbb{Z}/2)$ 的像，因此我们无需担心推论 2.22 是否与 Adams 谱序列 E_2 页上的 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(2)}(\mathbb{Z}/2)$-作用相容。（实际上是相容的。）绘制如图 3 所示的 Ext 图表时，我们用竖线表示 h_0-作用，用斜率为 1 的斜线表示 h_1-作用，用斜率为 $1/3$ 的斜线表示 h_2- 作用。如果这些线中有一条不存在，则相应的 h_i 作用为 0。

通常，人们会使用 Bruner 开发的计算机程序来计算$\mathcal{A}(2)$-模的 Ext 群 [Bru18] 和 Chatham-Chua [CC21]，，或使用 May谱序列 [May66] 或 Davis-Mahowald谱序列等工具 [DM82，MS87]（另见 [BR21，第 2] 章）来计算$\mathcal{A}(2)$-模的 Ext 群。不过，对于我们关心的四个模，采用更简单的手工计算以及文献中已有的计算结果就足够了。

(1) Davis-Mahowald [DM78，表 3.2] 计算所需次数上的 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(2)}(M_2)$。(2) 在 13 次及以下，$M_4$ 与 Σ^8A(2)$\otimes_{\mathcal{A}(0)}\mathbb{Z}/2$) 同构；因此，这两个 A(2)-模的 Ext 群作为 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(2)}(\mathbb{Z}/2)$ 上的代数，在拓扑次数 12 及以下同构。因此，我们可以利用换环定理 (2.24) 进行计算：作为 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(2)}(\mathbb{Z}/2)$-代数，

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(2)}(\mathcal{A}(2)\otimes_{\mathcal{A}(0)}\mathbb{Z}/2)\cong\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(0)}(\mathbb{Z}/2)\cong\mathbb{Z}/2[h_0], \tag{2.43}$$

与 $h_0\in\mathrm{Ext}^{1,1}$。这一 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(0)}(\mathbb{Z}/2)$ 的识别源于 Koszul对偶 [BC18，例 4.5。5]。

(3) M_5 与 M_2非常相似，这为我们提供了一种计算 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(2)}(M_5)$ 的方法。具体而言，若$\tau_{\leq k}M$ 表示一个 $\mathcal{A}(2)$-模 M 中次数大于 k 的元素所生成的子模的商，则存在一个 $\mathcal{A}(2)$-模的短正合列

$$0\longrightarrow\Sigma^{13}\mathbb{Z}/2\longrightarrow\tau_{\leq 13}M_5\longrightarrow\tau_{\leq 13}\Sigma^8M_2\longrightarrow 0. \tag{2.44}$$

我们在图 2左侧画出了这个序列。（2.44）在 Ext 群中诱导出一个长正合列；在 M 和 $\tau_{\leq 13}M$ 之间转换不会改变次数 12 及以下的 Ext 群。由于我们只关心次数 12 及以下的情况，因此我们可以且确实会在 $\tau_{\leq 13}M$ 和M 之间转换，而不再特别说明。

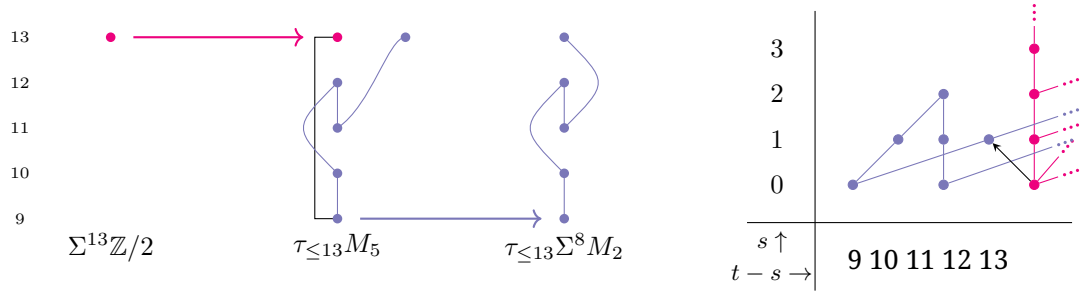

图 2. 左：由 2.44式给出的 $\mathcal{A}(2)$-模的短正合列。右：对应的 Ext 长正合列。关于图中边界映射（黑色箭头）为何非零，参见（2.45）后的讨论。

我们已经知道 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(2)}(\mathbb{Z}/2)$ 和 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(2)}(M_2)$，因此可以运用（2.44）对应的长正合列，计算次数 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(2)}(M_5)$ 12 及以下的值；我们在图 2右侧画出了这个长正合列。在我们关注的范围内，只有一个边界映射因次数原因并非必然为零，即

$$\partial\colon\mathrm{Ext}^{0,13}_{\mathcal{A}(2)}(\Sigma^{13}\mathbb{Z}/2)\longrightarrow\mathrm{Ext}^{1,13}_{\mathcal{A}(2)}(\Sigma^8M_2); \tag{2.45}$$

它必须非零，因为这是得到 $\mathrm{Ext}^{0,13}{}_{\mathcal{A}(2)}(M_5)$ =同态$^{\mathcal{A}(2)}(M_5,\ \Sigma^{13}\mathbb{Z}/2)$ =0的唯一方法；并且查看图 1 可知，这个 Hom群为零。

(4) 若 $C\eta := \Sigma^{-2}\widetilde{H}^*(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}/2)$，则存在一个 14-连通商映射 $M_7 \to \Sigma^{12}C\eta$，因此$\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(2)}(\Sigma^{12}C\eta)$ 与 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(2)}(M_7)$ 在我们关心的范围内并无差异。Bruner-Rognes [BR21，图 0。15] 计算 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(2)}(C\eta)$。

利用这些计算，我们得到 $\mathrm{MT}\xi^{\mathrm{het}'}$ 的直和项 $\mathcal{Q}$ 对应的 Adams 谱序列 E_2 页的如下描述。

命题 *2.46.* *Q 在拓扑次数 12 及以下的 Adams 谱序列 E_2 页如图 3 所示。特别是，在此范围内，E_2 页作为 $Ext^{\mathcal{A}(2)}(\mathbb{Z}/2)$-模由八个元素生成：$p_1 \in Ext^{0,1}$, $p_3 \in Ext^{0,3}$, $p_7 \in Ext^{0,7}$, $a \in Ext^{0,8}$, $b \in Ext^{2,10}$, $c \in Ext^{0,9}$, $d \in Ext^{0,11}$, 和 $e \in Ext^{0,12}$。*

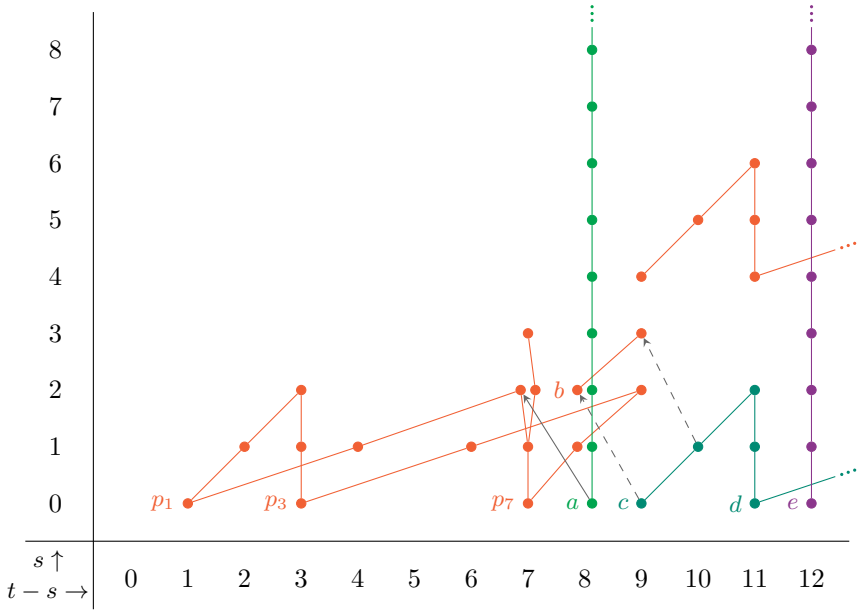

图 3. 在推论 2.36中，我们证明了 $MT\xi^{\mathrm{het}'} \simeq MTSpin \vee \mathcal{Q}$；此图表示计算 E_2 页的 Adams 谱序列，该谱序列计算 $\pi_*(\mathcal{Q})$ 在次数12 及以下的情形。这对应于图 1 中部分直和项。在引理 2.50中，我们证明从 a 出发的实心灰色微分非零；另外两个微分在图中以虚线表示，其是否非零尚未确定。

这个 Adams 谱序列中有许多微分可能非零，即使我们考虑到 Adams 微分与 h_0、h_1 和 h_2 可交换这一事实：

（D1） d_2: E^0、$_8 \to E^2$、9 2，其在 a 上的取值可以是 $h_2^2p_1$、$h_0^2p_7$，或这两个元素的线性组合。（D2） d_2: E^1、$_9 \to E^3$、10 2，其可以将 h_0a 或 h_1p_7 送到 $h_0^3p_7$。（D3） d_2: E^0、$_9 \to E^2$、8 2，以及 d_2: E^1、$_{11} \to E^3$、12 2，它们通过一个 h_1-作用相互交织，该作用可以将 $c \mapsto b$ 和 $h_1c \mapsto h_1b$ 送到相应位置。（D4） d_2: E^0、$_{12} \to E^2$、13 2，其可以将 $e \mapsto h_1^2c = h_0^2d$ 送到相应位置。（D5）如果（D1）和（D2）中的微分为零，则 d_3: E^0、$_8 \to E^3$、10 3 在 a 上可能非零。（D6）如果（D4）中的微分为零，则 d_5: E^0、$_{12} \to E^5$、16 5（及其在 h_0 下的像）或 d_6: E^0、$_{12} \to E^6$、17 6 可能非零。

引理 2.47。微分 (D2)、(D5) 和 (D6) 均为零。

证明。我们的策略是利用 $\mathbb{G}^{\mathrm{het}} \to \mathbb{Z}/2$ 分裂这一事实来消除微分。这个分裂无法扩展为 $MT\xi^{\mathrm{het}}$ 的分裂，但已足够接近。

包含映射 $\iota\colon \mathbb{Z}/2 \hookrightarrow \mathbb{G}^{\mathrm{het}}$ 定义了一个映射 $\iota'\colon MTString \wedge B\mathbb{Z}/2 \to MT\xi^{\mathrm{het}}$，它在 Adams E_2-页上恰好是对直和项 $\mathrm{Ext}(M_2)$ 取包含映射。先对 $\mathbb{G}^{\mathrm{het}}$ 按 $\mathbb{T}[1]$ 取商，再按 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$, 取商，得到一个映射

$$p\colon MT\xi^{\mathrm{het}} \xrightarrow[(1.44)]{\phi} MTSpin \wedge (B((\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8) \rtimes \mathbb{Z}/2))_+ \longrightarrow MTSpin \wedge (B\mathbb{Z}/2)_+, \tag{2.48}$$

并且 $p \circ \iota$: MTString $\wedge (B\mathbb{Z}/2)$ $\to$ MTSpin $\wedge (B\mathbb{Z}/2)_+$ 是通常的映射 MTString $\to$ MTSpin，再加上一个基点。这意味着，任何 $\widetilde{\Omega}_*^{\mathrm{String}}(B\mathbb{Z}/2)$ 中的元素，只要其在 $\widetilde{\Omega}_*^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/2)$ 中的像非零，在 $\Omega_*^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 中也必定非零；这会消去许多与 $\mathrm{Ext}(M_2)$ 之间的微分。为构造这样的元素，研究由 $p \circ \iota$ 诱导的 Adams 谱序列映射，它在 E_2-页上是映射

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(2)}(\widetilde{H}^*(B\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/2)) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(1)}(H^*(B\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/2)). \tag{2.49}$$

Davis-Mahowald [DM78, 表 3.2] 计算我们所需次数中的 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(2)}(H^*(B\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/2))$，而 Gitler-Mahowald-Milgram [GMM68, §2] 计算 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(1)}(H^*(B\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/2))$。我们在图 4 中绘出了映射 (2.49)。利用 h_0-和h_1-等变性，关于 A(1) 的谱序列中所有微分均消失；通过检查也可知不存在隐藏扩张。因此，我们可以确定一些在 $p \circ \iota$ 后仍然存活的类，并据此使图 3 中的一些微分平凡化。

- 通过计算 $p \circ \iota$ 在 Ext 群中的像，我们发现映射 $\widetilde{\Omega}$String 7 $(B\mathbb{Z}/2) \to \widetilde{\Omega}$Spin 7 $(B\mathbb{Z}/2)$ 可识别为将 (1, 0) $\mapsto 1$ 和 (0, 1) $\mapsto 0$映至 $\mathbb{Z}/16 \oplus \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/16$ 的映射。[15] 因此，由 h_0-作用联系起来的拓扑次数 7 中四个直和项之间的任何微分，无论是映入还是映出，都必须消失，包括 (D2) 和 (D5)。
- 类似地，映射 $\widetilde{\Omega}$String 11 $(B\mathbb{Z}/2) \to \widetilde{\Omega}$Spin 11 $(B\mathbb{Z}/2)$ 可以识别为包含映射$\mathbb{Z}/8$, $\to \mathbb{Z}/128 \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2$ 其将 $1 \mapsto$ 映至 (16, 0, 0)。这可以通过计算 Ext 群上的 $p \circ \iota$，或计算 $\widetilde{\Omega}$String 11 $(B\mathbb{Z}/2)$ 的生成元上的 η-不变量得出；该生成元可取为 $\mathbb{RP}^3$ 与一个 Bott 流形的乘积。[16] 因此 (D6) 消失。□

引理 2.50。微分 (D1) 非零；具体而言，$d_2(a) = h_2^2 p_1$。

我们将根据以下事实推导出这一点。

命题 2.51。映射 $\Omega_4^{\xi^{r,\mathrm{het}}} \to \Omega_4^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 是满射，至少在经过2-完备化后如此。

请回想，$\xi^{r,\mathrm{het}}$ 是 ξ^{het} 的类似物，只是将 $(\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8) \rtimes \mathbb{Z}/2$ 替换为 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$。

引理的证明 2.50 假设命题 2.51。在此证明中，默认所有阿贝尔群都是 2-完备的。若 $d_2(a) = 0$，则 $h_2^2 p_1 \in E^{2,92}_\infty$ 存活至 E_∞-页，因此 h_2-作用 $E^{1,5}_\infty \to E^{2,9}_\infty$ 非零

[15] 另一种方法是通过检验一个生成元，证明 $\mathbb{Z}/16 \subset \widetilde{\Omega}_7^{\mathrm{String}}(B\mathbb{Z}/2)$ 单射地映入 $\widetilde{\Omega}_7^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/2)$。可以证明 $\mathbb{RP}^7$ 具有弦结构；那么，该 $\mathbb{Z}/16$ 子群在$\widetilde{\Omega}_7^{\mathrm{String}}(B\mathbb{Z}/2)$中的生成元是 $\mathbb{RP}^7$，并带有其非平凡的主 $\mathbb{Z}/2$-丛。它在 $\widetilde{\Omega}_7^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/2)$ 中的像的阶至少为 16，因为与该 $\mathbb{Z}/2$-丛相关的适当扭曲狄拉克算子的 η-不变量定义了一个配边不变量 $\Omega_7^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/2) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$；而在 $(\mathbb{RP}^7, S^7 \to \mathbb{RP}^7)$ 上，根据 Donnelly [Don78，命题 4.1].[16] 的公式，该 η-不变量模 1 等于某个奇数 ℓ 的 $\ell/16$。所有可定向 3-流形的切丛都可平凡化，因此都具有弦结构；关于具有弦结构的 Bott 流形的构造，参见 [FH21a，第 5.3] 节。

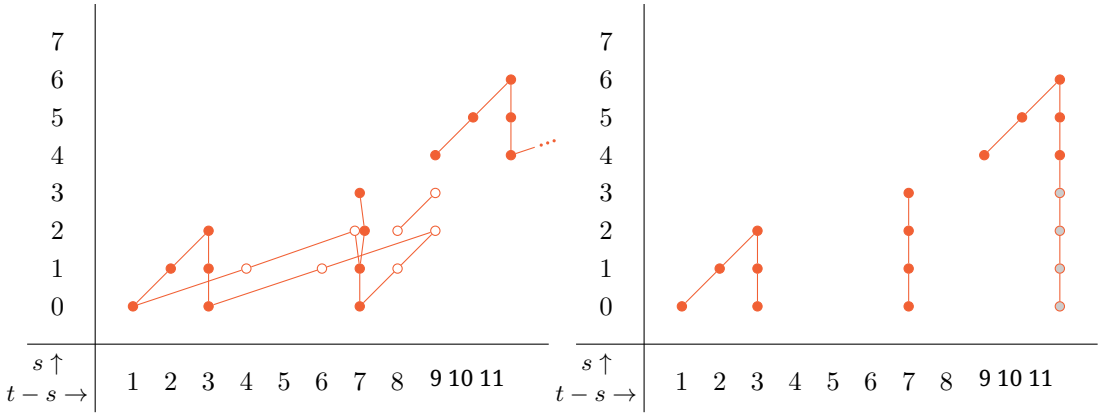

图 4。左：$\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(2)}(H^*(B\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)\ \mathbb{Z}/2)$，计算 $\widetilde{\Omega}^{\mathrm{String}}_*(B\mathbb{Z}/2)^\wedge_2$ 的 Adams 谱序列第 E_2 页。实心点在 $\widetilde{\mathrm{Ext}}^{\mathcal{A}(1)}$ 中的像非零；空心点为核。右：$\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(1)}(H^*(B\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)\ \mathbb{Z}/2)$，计算 $\widetilde{\Omega}^{\mathrm{Spin}}_*(B\mathbb{Z}/2)^\wedge_2$ 的 Adams 谱序列第 E_2 页的一个直和项。实心点属于从 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(2)}$ 出发的映射的像；灰色点为余核。该谱序列映射用于引理 2.47 的证明。

。这提升为如下结论：与带有由其李群标架所诱导的弦结构的 S^3 取积——该结构定义了映射 $\Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}_4 \to \Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}_7$ ——所得结果也非零。与带标架流形作直积对应于同伦群上由 $\pi_*(\mathbb{S})$ 中元素给出的作用，因此与 S^3 作此直积对谱的映射是自然的。

由于 $\Omega^{\xi^{r,\mathrm{het}}}_4 \to \Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}_4$ 是满射，我们可以将与 S^3 的乘积视为一个映射

$$- \times S^3 \colon \Omega^{\xi^{r,\mathrm{het}}}_4 \longrightarrow \Omega^{\xi^{r,\mathrm{het}}}_7 \tag{2.52}$$

然后再映回 $\Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}_7$。然而，正如我们在注 2.34 中指出的，$\Omega^{\xi^{r,\mathrm{het}}}_7 \cong \Omega^{\mathrm{Spin}}_7(K(\mathbb{Z},4))$，以及 Stong [Sto86] 证明了 $\Omega^{\mathrm{Spin}}_7(K(\mathbb{Z},4)) = 0$。因此，与 S^3 相乘是零映射 $\Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}_4 \to \Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}_7$，这与 $d_2(a)$ 消失相矛盾。□

命题 *2.51* 的证明。令 F 为映射 $\phi\colon MT\xi^{r,\mathrm{het}} \to MT\xi^{\mathrm{het}}$ 的纤维，因此存在一个长正合列

$$\cdots \longrightarrow \Omega^{\xi^{r,\mathrm{het}}}_4 \xrightarrow{\phi} \Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}_4 \xrightarrow{\partial} \pi_3(F) \longrightarrow \Omega^{\xi^{r,\mathrm{het}}}_3 \longrightarrow \cdots \tag{2.53}$$

我们将证明 $\pi_3(F)^\wedge_2 = 0$，由正合性可推出命题所述结论。为此，我们必须理解 F。

设 V 是由映射 $\xi^{\mathrm{het}}\colon B\mathbb{G}^{\mathrm{het}} \to B\mathrm{O}$ 分类的 $B\mathbb{G}^{\mathrm{het}}$ 上的秩零稳定向量丛，并设 $\sigma \to B\mathbb{G}^{\mathrm{het}}$ 是由先对 $\mathbb{T}[1]$ 取商、再取 Spin 商、然后取 E_8^2 商的映射分类的线丛：

$$B\mathbb{G}^{\mathrm{het}} \longrightarrow B(\mathrm{E}_8^2 \rtimes \mathbb{Z}/2) \longrightarrow B\mathbb{Z}/2. \tag{2.54}$$

那么，σ 的零截面的包含定义了一个位于 $\mathbb{Z}\times B\mathrm{O}$ 上的空间映射：$\phi\colon (B\mathbb{G}^{\mathrm{het}},\ V) \to (B\mathbb{G}^{\mathrm{het}},\ V\oplus\sigma)$。这里我们用符号 $(B,\ \xi)$ 表示一个空间 B 和一个映射 $\xi\colon B \to \mathbb{Z}\times B\mathrm{O}$；我们使用 $\mathbb{Z}\times B\mathrm{O}$ 而非 $B\mathrm{O}$，是因为 σ 的秩不为 0。令 M^- 表示$V\oplus\sigma\colon B\mathbb{G}^{\mathrm{het}} \to \mathbb{Z}\times B\mathrm{O}$ 的 Thom 谱，并令 $\widetilde{\phi}\colon MT\xi \to M^-$ 表示由 ϕ诱导的 Thom 谱映射；

我们断言 $F \simeq \Sigma^{-1} M$。为说明这一点，我们将使用 [DDK+] 中的一个定理，它将$\widetilde{\phi}$的纤维识别为映射 $MT\xi^{r,\ \mathrm{het}} \to MT\xi^{\mathrm{het}}$。具体而言， [DDK+] 证明， $\widetilde{\phi}$的纤维是将 V 拉回到球丛 $S(\sigma)$ 所得的 Thom 谱，该球丛位于 σ之上。这个球丛是通过 σ的分类映射，从 $B\mathbb{Z}/2$ 上的万有球丛拉回得到的：

$$\begin{array}{ccc} S(\sigma) & \longrightarrow & S(L) \simeq E\mathbb{Z}/2 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B\mathbb{G}^{\mathrm{het}} & \longrightarrow & B\mathbb{Z}/2 \end{array} \tag{2.55}$$

典范线丛的球丛 $L \to B\mathbb{Z}/2$ 是 $E\mathbb{Z}/2 \to B\mathbb{Z}/2$，它是可缩的，因此拉回图表（2.55）简化为一个纤维图，而球丛就是（2.54）的纤维。由于（2.54）是通过取分类空间由群同态诱导的，因此可以通过取该同态的核的分类空间来计算其纤维，即$\mathcal{S}$(Spin $\times$ E$_{28}$， $c_1 + c_2 - \lambda$)。在注1.46 中，我们看到对 $B\mathcal{S}$(Spin $\times$ E$_{28}$， $c_1 + c_2 - \lambda$) $\to B\mathbb{G}^{\mathrm{het}}$应用 Thom 谱函子，也就是对映射 $S(\sigma)$ $\to B\mathbb{G}^{\mathrm{het}}$应用该函子，会产生映射$MT\xi^{r,\ \mathrm{het}} \to MT\xi^{\mathrm{het}}$，因此该映射的纤维是 $\Sigma^{-1} M^{-}$。

要完成证明，使用 Adams 谱序列处理 F，利用其作为 Thom 谱 $\Sigma^{-1} M$ 的描述，并再次借助 [DY]，将其描述为一个 A(2)-模的 Ext。回顾图 2 左侧的 A(2)-模 $\tau_{\leq 13} M_5$；这里的计算结果是，用于计算 $\pi_*(F)^\wedge_2$ 的相关 A(2)-模在 4 次及以下的次数中与 $\Sigma^{-9}(\tau_{\leq 13} M_5)$一致。接着，图 2 右侧计算了 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(2)}(\Sigma^{-9}(\tau_{\leq 13} M_5))$，这就是计算 $\pi_*(F)^\wedge_2$的 Adams 谱序列的 E_2页，在 3 次及以下的次数中成立（将图 2 右侧所有内容的拓扑次数下移 9）。 E_2页在拓扑次数 3 处消失，这意味着 $\pi_3(F)^\wedge_2 = 0$。 □

引理 2.56. 微分 *(D4)* 为零。

证明。 此微分的源是 $E_2^{0,12} \cong \mathbb{Z}/2 \cdot e$，处于 Adams 过滤零级。处于 Adams 过滤 0 级的类 α 可与构成模 2 上同调子群的类 c_α 规范地对应；当且仅当配边不变量 $\int c_\alpha$ 非零时， α 才能存活至 E_∞ 页。这里， $\alpha = e$和 $c_\alpha = D_1 D_2^2 + D_1^2 D_2$，因此当且仅当 e 存活至 E_∞ 页、也即当且仅当下列不变量非零时，我们的微分才为零：

$$\int \left(D_1 D_2^2 + D_1^2 D_2\right) \colon \Omega_{12}^{\xi^{\mathrm{het}}} \longrightarrow \mathbb{Z}/2. \tag{2.57}$$

我们将构造一个流形，使得此不变量在其上非零。

四元数射影平面 $\mathbb{HP}^2$ 具有 $H^*(\mathbb{HP}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^3)$，其中 $|x| = 4$ 且 $\lambda(\mathbb{HP}^2) = x$ [BH58, §15.5, §15.6]（另见 [FH21a, §5.2]）。Künneth公式告诉我们 $H^*(\mathbb{HP}^2 \times S^4; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x, y]/(x^3, y^2)$，其中 $|y| = 4$；由于 TS^4 稳定平凡， $\lambda(S^4)$为零，而 Whitney 和公式（引理 1.6）推出 $\lambda(\mathbb{HP}^2 \times S^4) = x$。

要在 $\mathbb{HP}^2 \times S^4$ 上定义一个 ξ^{het}-结构，只需构造两个 E$_8$-丛 $P, Q \to \mathbb{HP}^2 \times S^4$，并给出 $\lambda(\mathbb{HP}^2 \times S^4) - c(P) - c(Q)$ 的一个平凡化。由于我们可以自由指定 $c(P)$ 和 $c(Q)$，因此选择 P 和 Q，使得 $c(P) = y$ 且 $c(Q) = x - y$；于是 $\lambda(\mathbb{HP}^2 \times S^4) - c(P) - c(Q) = 0$，因此我们可以选择一个平凡化。由于 $D_1 = c(P)$ 模 2 且 $D_2 = c(Q)$ 模 2，

$$\int_{\mathbb{HP}^2 \times S^4} \left(D_1 D_2^2 + D_1^2 D_2\right) = \left(\int_{\mathbb{HP}^2 \times S^4} (yx^2 + xy^2)\right) \bmod 2 = 1. \tag{2.58}$$

□

现在我们必须处理扩张问题。在计算的这一部分中，参考图 3 会很有帮助，因为在解决扩张问题时，我们将多次用到该谱序列的 E_∞ 页的描述。

引理 2.59。 在10 及以下次数中， $\pi_*(Q)^\wedge_2$ 的 *Adams* 谱序列中，所有扩张问题要么分裂，要么由 h_0 在 E_∞-页检测到；但涉及类 $c \in E^{0,9}_\infty$, $h_1^2 p_7 \in E^{2,11}_\infty$ 和 $h_1 b \in E^{3,12}_\infty$ 的扩张除外，这些扩张可能无法如此处理。

类 $h_1 b$ 和 c 可能在 E_∞-页消失，具体取决于 (D3) 中微分的结果。

证明。 仅凭 h_0-作用即可解决此范围内除次数 8、9 和 10 以外的所有扩张问题。

如果 (D3) 中的 d_2 消失，则次数 8 存在一个扩张问题。由 $h_0 a$ 生成的塔中的 h_0-作用可提升，从而在 $\Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}_8$ 中得到一个 $\mathbb{Z}$，因此唯一的问题是是否存在涉及 $h_1 p_7$ 和 b 的扩张。假设此扩张不分裂，即 $\pi_8(\mathrm{Q})^\wedge_2 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4$。我们可以选取此 $\mathbb{Z}/4$ 的一个生成元 x，使得 x 在 Adams E_∞-页中的像为 $h_1 p_7 \in E^{1,9}_\infty$；由于这是 E_∞-页上另一个类的 h_1 倍， x 是一个类 $y \in \pi_7(\mathrm{Q})^\wedge_2$ 的 η 倍，其中 η 是 $\pi_1(\mathbb{S}) \cong \mathbb{Z}/2$ 的生成元。由于 $2\eta = 0, 2x = 2\eta y = 0$；又由于假定 x 生成一个 $\mathbb{Z}/4$，这就产生了矛盾，因此此扩张分裂。

同样的技巧可以分裂所有 10 次的扩张，以及所有涉及类 $E^{4,13}_\infty$ 的扩张。□

命题 2.60。 所有 $\pi_9(\mathcal{Q})^\wedge_2$ 中的扩张问题都可以分裂，因此 $\pi_9(\mathcal{Q})^\wedge_2 \cong (\mathbb{Z}/2)^{\oplus 4}$ 若 *(D3)* 中的微分为零则成立，而 $\pi_9(\mathcal{Q})^\wedge_2 \cong (\mathbb{Z}/2)^{\oplus 2}$ 在微分确实为零时成立。

证明。 若 (D3) 中的微分不为零，则由引理 2.59可得结论，因此不妨假设这些微分为零。

首先，假设我们可以分裂所有涉及 c 的扩张。那么剩下的唯一扩张是 $h_1^2 p_7$ 与 $h_1 b$ 之间的扩张。在引理 2.59 中，我们分裂了 $h_1 p_7$ 与 b 之间的扩张，因此类 $h_1 p_7$ 和 b 分别提升为类 $h_1 p_7$ 和 b，它们生成一个 $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \subset \pi_8(\mathrm{Q})^\wedge_2$。 h_1 的作用提升后表明， $\eta \cdot h_1 p_7$ 和 $\eta \cdot b$ 在 E_∞ 页中的像分别为 $h_1^2 p_7$ 和 $h_1 b$；而 η 将由 $h_1 p_7$ 和 b 生成的 $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ 映到由 $\eta h_1 p_7$ 和 ηb 生成的 $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \subset \pi_9(\mathrm{Q})^\wedge_2$，从而分裂 $h_1^2 p_7$ 与 $h_1 b$ 之间的扩张。

现在我们需要证明 c 可以提升为一个类 c，使得 $2c = 0$。令 X 为拉回

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & B\mathbb{G}^{\mathrm{het}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{RP}^2 & \longrightarrow & B\mathbb{Z}/2 \end{array} \tag{2.61}$$

并令 $\xi\colon X \to B\mathrm{O}$ 为 ξ^{het} 到 X的拉回。在 (2.61) 中，两个垂直箭头都是纤维为 $B\mathrm{E}_8^2$ 的纤维化；利用 Serre 谱序列的诱导映射，我们得到 $H^*(X;\mathbb{Z}/2) \cong H^*(B\mathbb{G}^{\mathrm{het}};\mathbb{Z}/2)/(x^3)$，其中 $x \in H^1(B\mathbb{G}^{\mathrm{het}};\mathbb{Z}/2)$ 是生成元。我们可以用 ξ^{het} 替换 ξ，重新进行整个论证，类似于 $\xi^{\mathrm{het}\prime}$ 来定义 ξ'，并由此推出以下结论。

(1) 映射 $c\colon B\mathrm{E}_8 \to K(\mathbb{Z}, 4)$ 在 14 及以下的次数诱导同构 $\Omega^\xi_* \to \Omega^{\xi'}_*$；(2) 存在一个谱 $\mathcal{Q}'$ 以及一个分裂 $MT\xi \simeq MTSpin \vee \mathcal{Q}'$,；并且 (3) 映射 $X \to B\mathbb{G}^{\mathrm{het}}$ 诱导映射 $MT\xi' \to MT\xi^{\mathrm{het}\prime}$，该映射在 $MTSpin$ 因子上为恒等映射，并将 $\mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$。

ξ' 的命题 2.41 的类比完全相同，只需将 M_2 替换为 $\Sigma C2$，并将M_5 替换为 $\Sigma^9 C2$，其中 $C2$ 是 A(2)-模 $\Sigma^{-1}\widetilde{H}^*(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/2)$。Bruner-Rognes [BR21, §6.1]计算 $\mathrm{Ext}_{A(2)}(C2)$，据此我们可以绘制 Adams 谱序列的 E_2页，该谱序列计算图 5 中的 $\pi_*(Q')^\wedge_2$。对于我们在 Q 的 Adams 谱序列 E_2页中考察的类 p_1、a和 c，令 p_1'、a'和 c' 为 Q′的 E_2页中对应的类：它们处于相同的双次数，而映射 $Q' \to Q$ 将 $x' \to x$ 映射为 $x \in \{p_1, a, c\}$。

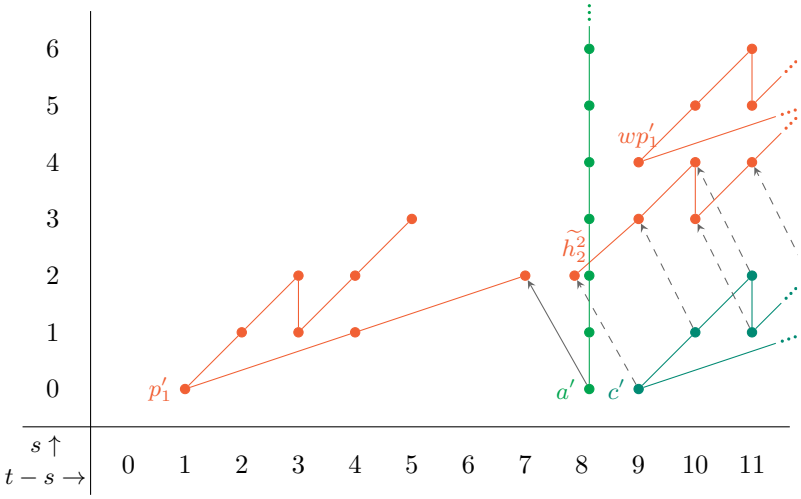

图 5. 计算 E_2 的 Adams 谱序列第页 $\pi_*(\mathcal{Q}')^\wedge_2$，其中 $\mathcal{Q}'$ 是在命题 2.60 的证明中定义的谱。通过与 $\mathcal{Q}$ 的 Adams 谱序列比较，我们得知引理 $d_2(a') = h_2^2 p_1'$ 的结论成立，并且虚线微分（例如 $d_2(c')$、$d_2(h_1 c')$）为零当且仅当(D3) 中的微分为零。

这一切的关键在于，如果 (D3) 中的微分消失，那么 c 和 $h_1^2 p_7$ 在 Q 的 E_∞页上都能存活，于是 c 和 $h_1^2 p_7$ 都属于由$\sim Q' \to Q$: $c = \Phi(c')$ 在 E_∞页上诱导的映射 Φ 的像，而 Bruner-Rognes [BR21, 推论 4.3] 定义了一个类 $h_2^2 \in \mathrm{Ext}^{2,9}\,A(2)(C2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{2,10}\,A(2)(\Sigma C2)$，使得 $h_1^2 p_7 = \Phi(h_2^2)$。再看图 5，在 Q′ 的 E_∞页上，$h_2^2(\,h_1) \neq 0$和 $wp_1'(\,h_1) \neq 0$，因此引理 2.59 中的 $2\eta = 0$ 技巧将 $\pi_9(Q')^\wedge_2$ 中的扩张分裂开来。因此存在一个类 $c' \in \pi_9(Q')^\wedge_2$，使得 $2c' = 0$，并且 c' 在 E_∞页上的像是 c'。应用$\Phi(c') = c$，我们得知 c 提升到 $\pi_9(Q)^\wedge_2$ 中的 $\Phi(c')$，且这个类的两倍为 0，正如我们想要证明的那样。□

因此，我们证明了以下定理。

定理 2.62. 忽略奇素数挠元后，存在同构

$$\begin{aligned}
\Omega_0^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z} & \Omega_6^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z}/2\\
\Omega_1^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2 & \Omega_7^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z}/16\\
\Omega_2^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2 & \Omega_8^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z}^3\oplus(\mathbb{Z}/2)^{\oplus i}\\
\Omega_3^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z}/8 & \Omega_9^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong (\mathbb{Z}/2)^{\oplus j}\\
\Omega_4^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2 & \Omega_{10}^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong (\mathbb{Z}/2)^{\oplus k}\\
\Omega_5^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong 0 & \Omega_{11}^{\xi^{\mathrm{het}}} &\cong A,
\end{aligned}$$

其中：

- A 是一个阶为64 的阿贝尔群，同构于 $\mathbb{Z}/8\oplus\mathbb{Z}/8$、 $\mathbb{Z}/16\oplus\mathbb{Z}/4$、 $\mathbb{Z}/32\oplus\mathbb{Z}/2$或 $\mathbb{Z}/64$之一，并且
- 或者 $i=1$、 $j=4$和 $j=4$，或者 $i=2$、 $j=6$和 $k=5$。

2.2.1. 一些流形生成元。 我们通过给出所找到的各群在 10 维及以下所有生成元的流形代表元来结束本节，但如果9 维和 10 维的微分(D3) 为零，则这两个次数中的类可能除外。我们还给出11维中的部分信息。在此列表中，我们默认在 2处局部化，不过我们很快将在定理 2.74 中看到，这不会丢失任何信息。

映射 $\mathrm{MTSpin}\vee(\mathrm{MTString}\wedge B\mathbb{Z}/2)\to \mathrm{MT}\xi^{\mathrm{het}}$ 在 7 及以下维度的同伦群上是满射，因此很快就能得到我们所需的许多生成元。低维 Spin 配边的生成元是标准的；对于 $\widetilde{\Omega}_*^{\mathrm{String}}(B\mathbb{Z}/2)$，我们利用 E_∞-页上的 h_2-作用，并结合映射 $\widetilde{\Omega}_*^{\mathrm{String}}(B\mathbb{Z}/2)\to\widetilde{\Omega}_*^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/2)$，如引理 2.47 的证明所示（见图 4），从而推得生成元。

(0) $\Omega_0^{\xi^{\mathrm{het}}}\cong\mathbb{Z}$，由点生成。(1) $\Omega_1^{\xi^{\mathrm{het}}}\cong\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$。第一个直和项来自 Ω_1^{Spin}，因此由 S^1_{nb} 生成，即由其非零边界化标架所诱导的 ξ^{het}-结构的圆生成。另一个直和项对应于 Q 的 Adams 谱序列中的 $p_1\in E^{0,1}_\infty$，处于 Adams 过滤零级，因此对应一个模 2 上同调类，并由该类检测。观察图 1，这个类是 $H^1(B\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)$ 的生成元，在与一个 ξ^{het}-结构对应的主 $\mathbb{Z}/2$-丛上取值。因此，我们可以选取由非平凡 $\mathbb{Z}/2$-丛及包含 $\mathbb{Z}/2\hookrightarrow \mathrm{E}_8^2\rtimes\mathbb{Z}/2$ 所诱导的带有 ξ^{het}-结构的 S^1 作为生成元。我们将此生成元记为 $\mathbb{RP}^1$，于是其 $\mathbb{Z}/2$-丛可表示为 $S^1\to\mathbb{RP}^1$。

(2) Adams 谱序列的 E_∞ 页中由 h_1 给出的作用，在配边计算中提升为与流形生成元 S^1_{nb} 相乘。由 h_1 给出的作用定义了从 E_∞ 页的 1 线到 2 线的同构，因此我们可以取 $S^1_{nb}\times S^1_{nb}$ 和 $\mathbb{RP}^1\times S^1_{nb}$ 作为 $\Omega_2^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 的两个生成元。

(3) $\Omega_3^{\xi^{\mathrm{het}}}\cong\mathbb{Z}/8$；存在一个生成元，其在 Adams E_∞ 页中的像为 p_3。映射序列

$$\widetilde{\Omega}_3^{\mathrm{String}}(B\mathbb{Z}/2)\xrightarrow{\iota}\Omega_3^{\xi^{\mathrm{het}}}\xrightarrow{p}\Omega_3^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/2) \tag{2.63}$$

由两个同构 $\mathbb{Z}/8 \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/8 \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/8$ 构成，因此只需找到一个允许弦结构的 $\Omega_3^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/2)$ 生成元。标准生成元为 $\mathbb{RP}^3$，带有主$\mathbb{Z}/2$丛 $S^3 \to \mathbb{RP}^3$；由于 $\mathbb{RP}^3$ 可平行化，因此它允许弦结构。

(4) $\Omega_4^{\xi^{\mathrm{het}}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$。自由直和项来自 Ω_4^{Spin}，因此由带平凡 $\mathbb{Z}/2$-丛的 K3 曲面，以及具有特征类 $-\lambda$(K3) 和 0 的 E_8-丛生成。$\mathbb{Z}/2$ 对应于 $E^{1,5}_\infty \cong \mathbb{Z}/2\cdot h_2p_1$。$h_2$ 的作用提升到与 S^3 的乘积及其李群标架上，因此我们可以用 $S^3 \times \mathbb{RP}^1$ 生成这个直和项。

注 2.64。在命题 2.51 中，我们证明了 $\Omega_4^{\mathrm{Spin}}(K(\mathbb{Z},4)) \cong \Omega_4^{\xi^{r\,\mathrm{het}}} \to \Omega_4^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 是满射；利用这一点，我们可以替换 $S^3 \times \mathbb{RP}^1$，这是我们稍后需要的。Stong [Sto86] 证明了 $\Omega_4^{\mathrm{Spin}}(K(\mathbb{Z},4)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$；其中一个 $\mathbb{Z}$ 因子来自 Ω_4^{Spin}，因此由映射到 $K(\mathbb{Z},4)$ 为平凡映射的 K3 曲面表示。另一个因子由以下配边不变量检测：给定一个 4 维自旋流形 X 以及一个映射 $f\colon X \to K(\mathbb{Z},4)$，该不变量将 $X \mapsto \int_X f^*c$ 发送到，其中 $c \in H^4(K(\mathbb{Z},4);\mathbb{Z})$ 是典范类。例如，在S^4 上，此不变量等于 1；S^4 带有其标准定向以及诱导该定向的唯一自旋结构，而到 $K(\mathbb{Z},4)$ 的映射由类 $1 \in H^4(S^4;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$给出。

两个类 (K3, 0) 和 $(S^4, 1)$ 在 $\Omega_4^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 中的像必须生成整个群。不出所料，K3 曲面被映到上述 $\mathbb{Z}$ 直和项的一个生成元；该直和项由 $\int p_1$ 检测。由于这个不变量在 $(S^4, 1)$ 上为零，Ω_4 上映射的满射性意味着 $(S^4, 1)$ 映到 $\mathbb{RP}^1 \times S^3$ 的类。[17] 因此，$\Omega_4^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 中的 $\mathbb{Z}/2$ 直和项可由 S^4 生成：它带有平凡的 $\mathbb{Z}/2$ 丛以及两个特征类为 $c = \pm 1 \in H^4(S^4;\mathbb{Z})$ 的 E_8 丛。

由谱映射诱导的 Adams 谱序列上的映射 $MT\xi^{r,\mathrm{het}} \to MT\xi^{\mathrm{het}}$ 将代表 E_∞ 页上 $(S^4, 1)$ 的类映到 0 (参见 Francis [Fra11, §2]，或 Lee-Yonekura [LY22, §3.5]，其中讨论了 $\Omega_*^{\xi^{r\,\mathrm{het}}} = \Omega_*^{\mathrm{Spin}}(K(\mathbb{Z},4))$ 的 Adams 谱序列)，因此 $(S^4,1)$ 的像在 $\Omega_4^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 中非零这一事实，类似于一个隐扩张。

(5) $\Omega_5^{\xi^{\mathrm{het}}} = 0$.(6) $\Omega_6^{\xi^{\mathrm{het}}} \cong \mathbb{Z}/2$，以及 E_∞ 页上一个生成元的像为 h_2p_3，其提升表明我们可以取 $S^3 \times \mathbb{RP}^3$ 作为生成元。(7) $\Omega_7^{\xi^{\mathrm{het}}} \cong \mathbb{Z}/16$。这一 $\mathbb{Z}/16$ 由 $\Omega_7^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/2)$ 检测到，与 $\mathbb{RP}^3$ 的情形非常相似。我们得知，这个直和项由 $\mathbb{RP}^7$ 生成，其中 $\mathbb{G}^{\mathrm{het}}$-丛由 $\mathbb{Z}/2$-丛 $S^7 \to \mathbb{RP}^7$诱导而来，并且在 E_∞ 页上由 p_7检测到。

(8) $\Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}$ <escape>$_8$ $\cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ </escape>以及一个额外的<escape> $\mathbb{Z}/2$ </escape>求和项，前提是(D3)中的微分不为零。

- 前两个自由直和项来自 $\Omega\mathrm{Spin}_*$；它们的生成元可以取为四元数射影平面 $\mathbb{HP}^2$ 和一个 Bott 流形 B。可以为 B 选取弦结构 [FH21a, §5.3]，我们也这样做。在这两种情形下，与 ξhet-结构相关联的 $\mathbb{Z}/2$丛都是平凡的；由于 B 是弦的，我们赋予它这样的 ξ het-结构，其中两个主E8丛都是平凡的。对于 $\mathbb{HP}^2$, $H^4(\mathbb{HP}^2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 及其生成元 x，正如我们在引理 2.56 的证明中所讨论的；我们在 $\mathbb{HP}^2$ 上选取一个 ξhet-结构，其主E8丛为 $P, Q \to \mathbb{HP}^2$，其中 $c(P) = -x$ 且 Q 平凡。
- 第三个自由直和项来自拓扑次数 8 中的绿色 h_0-塔 in $\pi_*(\mathcal{Q})$的 Adams 谱序列。这个直和项由 bordis m

[17] 感谢 Justin Kaidi 告知我们这一事实。

不变量

$$f\colon \int c(P)c(Q)\colon \Omega_8^{\xi^{\mathrm{het}}} \longrightarrow \mathbb{Z}, \tag{2.65}$$

由于这个量可能非零（如下文所示），它在我们为另外两个自由直和项发现的两个生成元上为零，而且它在剩余的挠元直和项上也必须为零。引理 2.50 推出，(2.65) 的模 2 约化（即 $\int D_1D_2$）为零。这是因为每个类 $x \in E^{0,\ t}$ 都对应一个次数为 $t\ \mathbb{Z}/2$ 的上同调类 c_x，且 x 能存活到第 E_∞ 页，当且仅当配边不变量 $\int c_x$ 非零。因此，$|f(M)|$ 的最小非零值至少为 2，其中 M 是一个闭的 8 维 ξ^{het} 流形。

回忆引理 2.56 的证明，$H^*(\mathbb{HP}^2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^3)$，其中 $|x| = 4$ 且 $\lambda(\mathbb{HP}^2) = x$。考虑由 $c(P) = 2x$ 和 $c(Q) = -x$ 指定的两个 E_8 丛 P、$Q \to \mathbb{HP}^2$；则 $\lambda(\mathbb{HP}^2) - c(P) - c(Q) = 0$，因此这些数据可提升为一个 ξ^{het}- 结构，并且

$$\int_{\mathbb{HP}^2} c(P)c(Q) = 2, \tag{2.66}$$

达到最小值。因此，$\mathbb{HP}^2$ 这两个主 E_8-丛生成了最后一个自由直和项。

- 已知存在的 $\mathbb{Z}/2$ 直和项不受任何尚未解决的微分影响，它由 h_1p_7 生成，因此照常提升至 $S^1{}_{nb} \times \mathbb{RP}^7$。
- 如果 $d_2(c) \neq 0$，则还有一个额外的 $\mathbb{Z}/2$ 直和项，它在 E_∞页上由 b表示。我们将在 § X_8 中讨论这个直和项及其生成元2.2.2。

(9) $\Omega_9^{\xi^{\mathrm{het}}} \cong (\mathbb{Z}/2)^{\oplus 2} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{\oplus 2}$，并且如果(D3) 中的微分均为零，则还有一个额外的 $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ 直和项。

- 其中两个 $\mathbb{Z}/2$ 直和项来自 $\Omega^{\mathrm{Spin}}_9 \cong (\mathbb{Z}/2)^{\oplus 2}$，它们分别由生成元 $\mathbb{HP}^2 \times S^1{}_{nb}$ 和 $B \times S^1{}_{nb}$ 表示，其 ξ_{het}-结构由 $\Omega^{\xi_{\mathrm{het}}}_8$ 中相应的生成元诱导而来。

- 无论未确定的微分取何值，始终存在的另外两个 $\mathbb{Z}/2$ 直和项都在映射 ι的像中：$\widetilde{\Omega}^{\mathrm{String}}_9(B\mathbb{Z}/2) \to \Omega^{\xi_{\mathrm{het}}}_9$。较低 Adams 过滤中的直和项生成元在 E_∞ 页上的像等于 $h_1^2p_7$，因此我们得到 $S^1{}_{nb} \times S^1{}_{nb} \times \mathbb{RP}^7$。

较高 Adams 过滤中的直和项有非零像可直接看出。$\widetilde{\Omega}^{\mathrm{Spin}}_9(B\mathbb{Z}/2)$ 的两个生成元可取为 $\mathbb{HP}^2 \times \mathbb{RP}^1$ 和 $B \times \mathbb{RP}^1$；为确定我们得到的是哪一个，再与 Atiyah-Bott-Shapiro [ABS64] 映射 $\widetilde{\Omega}^{\mathrm{Spin}}_9(B\mathbb{Z}/2) \to \widetilde{\mathrm{ko}}_9(B\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$复合，该映射将 $[\mathbb{HP}^2 \times \mathbb{RP}^1] \mapsto 0$ 和 $[B \times \mathbb{RP}^1]$ 映到生成元。图 4 中 Adams 谱序列映射的像包含在这样一个直和项中：该直和项在 Atiyah-Bott-Shapiro 映射下的像非零。我们的生成元在 $\widetilde{\Omega}^{\mathrm{Spin}}_9(B\mathbb{Z}/2)$ 中的像与 $B \times \mathbb{RP}^1$同调；最后，由于 B和 $\mathbb{RP}^1$ 都是弦，我们可以取 $B \times \mathbb{RP}^1$作为这一维的最后一个生成元。

- 如果 $d_2(h_1c) = 0$，则还有另一个 $\mathbb{Z}/2$ 求和项，其在 E_∞页上的像为 h_1b。因此，照例它提升到 $S^1{}_{nb} \times X_8$，其中 X_8 是我们在 §2.2.2中描述的流形。
- 若 $d_2(c) = 0$，则还有另一个 $\mathbb{Z}/2$ 求和项，其在 E_∞-页上的像为 c。我们未能找到表示该生成元的流形 X_9。由于 c 位于 Adams

滤过 0，对应于模 2 上同调类 D_1D_2x；如果存在 X_9，则可以通过证明 $\int_{X_9} D_1D_2x = 1$ 来检测它。

(10) $\Omega^{\xi^{\text{het}}}_{10} \cong (\mathbb{Z}/2)^{\oplus 3} \oplus \mathbb{Z}/2$，以及如果 $\mathbb{Z}/2$ 中的微分可能消失时的另一个(D3) 直和项。

- $\Omega^{\xi^{\text{het}}}$ 10 中的三个 $\mathbb{Z}/2$ 直和项来自 $\Omega\text{Spin}_{10} \cong (\mathbb{Z}/2)^{\oplus 3}$。已知它们的生成元分别为 $B \times S^1\text{nb} \times S^1\text{nb}$、$\mathbb{HP}^2 \times S^1\text{nb} \times S^1\text{nb}$，以及一个 Milnor 超曲面 X_{10}，其定义为 $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^4$ 中的一个光滑的 (1, 1) 次超曲面。Milnor [Mil65, §3]证明，X_{10} 生成了 ΩSpin 10 中最后一个 $\mathbb{Z}/2$ 直和项。
- 下一个 $\mathbb{Z}/2$ 直和项由映射 $\widetilde{\Omega}_{\text{弦}\,10}(B\mathbb{Z}/2) \to \Omega^{\xi_{\text{het}}\,10}$ 和 $\Omega^{\xi_{\text{het}}\,10} \to \Omega_{\text{Spin}\,10}(B\mathbb{Z}/2)$ 检测；通过类似于我们在 9 次中对高滤过橙色 $\mathbb{Z}/2$ 直和项所作的论证，我们可以选择 $B \times \mathbb{RP}^1 \times S^1{}_{nb}$ 作为生成元。
- 如果 $d_2(h_1c) = 0$，那么还存在一个额外的 $\mathbb{Z}/2$ 直和项，其在 E_∞-页上的像为 h_1c。因此，我们可以取 $S^1{}_{nb} \times X_9$ 作为一个流形代表元，不过如上所述，我们并不知道 X_9 是什么。

(11) 我们尚未确定 $\Omega^{\xi^{\text{het}}}_{11}$ 的生成元，甚至不知道它的同构类型。这是一个答案将有助于 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 杂化弦反常抵消的问题；参见问题 0.3 和 §3.2.1。不过，我们在上文给出的 Adams 论证表明，$\Omega^{\xi^{\text{het}}}_{11}$ 包含一个 $\mathbb{Z}/8$ 子群，它是以下映射的像：$\widetilde{\Omega}^{\text{String}}_{11}(B\mathbb{Z}/2) \to \Omega^{\xi^{\text{het}}}_{11}$。将其与图 4 中的映射 $\widetilde{\Omega}^{\text{String}}_{11}(B\mathbb{Z}/2) \to \widetilde{\Omega}^{\text{Spin}}_{11}(B\mathbb{Z}/2)$ 对比，可以得知，$B \times \mathbb{RP}^3$ 的类生成了这个 $\mathbb{Z}/8$。

2.2.2. X_8，Ω 中一个可能非零的类。尽管我们无法确定类 $b \in E^{2,\,10\,2}$ 是否能存活到 E_∞-页，但我们可以写出它在 $\Omega^{\xi^{\text{het}}}_8$ 中所确定的类的流形代表元 X_8；如果 b 确实存活，则应将 X_8 添加到上述生成元列表中。

定义 2.67。令 $\mathbb{Z}/2$ 通过在 S^2 和 S^3 的第一个副本上作用对跖映射，并在 S^3 的第二个副本上作用平面反射，从而作用于 $S^3 \times S^3 \times S^2$。这是一个自由作用；令 X_8 表示其商，它是一个光滑流形。

X_8 是 Nath-Sankaran 研究过的那类广义多尔德流形 [NS19]。与 X_8 类似的流形常作为配边群的生成元出现：参见 [FH21a，§5.5。1] 以及 [DDHM23，§14.3。3]中的相关例子。

引理 2.68. X_8 具有弦结构，并且可以在 X_8 上选择一种弦结构，使其在 $S^3 \times S^3$ 上诱导的弦结构与 $S^3 \times S^3 \cong \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$上的李群标架所诱导的弦结构一致。

证明. 将 $S^{k-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ 的法丛相加，得到一个同构

$$T(S^3 \times S^3 \times S^2) \oplus \underline{\mathbb{R}}^3 \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbb{R}}^4 \oplus \underline{\mathbb{R}}^4 \oplus \underline{\mathbb{R}}^3. \tag{2.69}$$

为了理解 TX_8，我们将在引入 $S^3 \times S^3 \times S^2$ 上的 $\mathbb{Z}/2$ 作用时研究 (2.69)，其商为 X_8。由于 S^k 上的外向单位法向量场是 O_{k+1}-不变量，$\mathbb{Z}/2$ 在 (2.69) 左侧的 $\mathbb{R}^3$ 上作用平凡，因为外向单位法向量场为法丛提供了平凡化，从而给出 $\mathbb{R}^3$ 因子。在右侧，$\mathbb{Z}/2$ 通过对 S^3 第一因子的对跖映射作用，因此在第一 $\mathbb{R}^4$ 的每个 $\mathbb{R}$ 直和项上都以 -1 作用。第二个 S^3 因子的反射意味着 $\mathbb{Z}/2$ 在第二个 $\mathbb{R}^4$ 上的作用分别为 -1、1、1 和 1，对应四个

$\underline{\mathbb{R}}$ 直和项。最后， S^2 上的对跖映射意味着 $\mathbb{Z}/2$ 在剩余三个 $\mathbb{R}$ 直和项上以 -1 作用。 _

从 $S^3\times S^3\times S^2$ 上的等变向量丛过渡到商上的非等变向量丛，(2.69) 诱导出一个同构

$$TX_8\oplus\underline{\mathbb{R}}^3\xrightarrow{\cong}\sigma^{\oplus 8}\oplus\underline{\mathbb{R}}^3, \tag{2.70}$$

其中， $\sigma\to X_9$ 是从典范线丛 $\sigma\to\mathbb{RP}^2$拉回的。Whitney 和公式表明， $\sigma^{\oplus 8}\to\mathbb{RP}^2$ 是 Spin 的；又由于弦障碍存在于 $H^4(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z})=0$中， $\sigma^{\oplus 8}$是弦的。因此，拉回到 X_8 后也具有弦结构，所以 TX_8 是弦的。

对于李群标架弦结构，利用以下事实：每个 S^3 直和项上的对合都可以用李群来描述：由于 $S^3\cong\mathrm{SU}_2$ 关于对跖映射的商是 $\mathbb{RP}^3\cong\mathrm{SO}_3$, ， S^3 上的李群标架关于对跖映射是等变的。与反射的相容性来自 $\mathrm{Pin}_3^+\supset\mathrm{SU}_2$ 中反射的作用。□

命题 2.71。 采用引理 *2.68* 中描述的弦结构，且 $\mathbb{Z}/2$-丛 $\sigma\to X_8$,$[X_8]$ 与 $[S^1_{nb}\times\mathbb{RP}^7]$ 在线性无关于 $\widetilde{\Omega}_8^{\mathrm{String}}(B\mathbb{Z}/2)\cong\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$，因此 $[X_8]$ 在 E_∞-页中对应于 $\Omega_*^{\mathrm{String}}(B\mathbb{Z}/2)$ 的像是 $E^{2,10}_\infty\cong\mathbb{Z}/2$ 中的非零类（或许还加上一个位于较低滤过中的项）。

证明。令 $f\colon\widetilde{\Omega}_8^{\mathrm{String}}(\mathbb{RP}^2)\to\widetilde{\Omega}_8^{\mathrm{String}}(B\mathbb{Z}/2)$ 为由 $\mathbb{RP}^2\hookrightarrow\mathbb{RP}^\infty\simeq B\mathbb{Z}/2$ 诱导的映射。该映射在 Adams 谱序列上诱导的映射并不难分析：Bruner-Rognes [BR21, §4.4, Chapter 6, §12.1] 计算了 $\widetilde{\mathrm{tmf}}_*(\mathbb{RP}^2)$ 的整个 Adams 谱序列，利用了识别$\Sigma^\infty\mathbb{RP}^2\simeq\Sigma\mathbb{S}/2$，并且如上所述，tmf 与 MTString 同调在 14 次及以下的维度中一致。同样，Davis-Mahowald [DM78, Table 3.2] 计算了我们所需范围内 $\widetilde{\Omega}_*^{\mathrm{String}}(B\mathbb{Z}/2)$ 的 E_2 页 Adams 谱序列，结合他们的计算、微分的 h_i-线性以及引理 2.59 证明中的 $2\eta=0$ 技巧，可以看出 $\widetilde{\Omega}_8^{\mathrm{String}}(B\mathbb{Z}/2)\cong\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$。正如 §2.2.1 中所讨论的，其中一个 $\mathbb{Z}/2$ 直和项由 $\mathbb{RP}^7\times S^1_{nb}$ 检测，其在 E_∞ 页中的像位于滤过 1。考虑映射

$$\Psi\colon\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(2)}(\widetilde{H}^*(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/2))\longrightarrow\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(2)}(\widetilde{H}^*(B\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)) \tag{2.72}$$

由 $\mathbb{RP}^2\to\mathbb{RP}^\infty\simeq B\mathbb{Z}/2$ 诱导；我们在图 6 中画出了这个映射。 Ψ 也是这两个 Adams 谱序列的 E_2- 页之间的映射；观察图 6 可知， Ψ 在拓扑次数 8 处是单射，其像包含 $E^{2,10}{}_2$ 中的非零元素，但不包含 $E^{1,9}{}_2$ 中的非零类。由于这两个元素都存活到 E_∞- 页，因此可推出 $f\colon\widetilde{\Omega}_8^{\mathrm{String}}(\mathbb{RP}^2)\to\widetilde{\Omega}_8^{\mathrm{String}}(B\mathbb{Z}/2)$ 是单射；并且若要在 $\widetilde{\Omega}_8^{\mathrm{String}}(B\mathbb{Z}/2)$ 中找到一个与 $\mathbb{RP}^7\times S^1_{nb}$ 线性无关的类，只需在 $\widetilde{\Omega}_8^{\mathrm{String}}(\mathbb{RP}^2)$ 中找到一个非零类。

根据定义，映射 $\sigma\colon X_8\to B\mathbb{Z}/2$ 经由 $\mathbb{RP}^2$ 分解，因此只要证明 X_8 连同其到 $\mathbb{RP}^2$ 的映射不是零配边，我们就完成了。为此，考虑与二重覆盖 $S^2\to\mathbb{RP}^2$ 相关的转移映射 $\Sigma^\infty\mathbb{RP}^2\to\Sigma^\infty S^2$；它在弦配边上诱导出映射 $\widetilde{\Omega}_*^{\mathrm{String}}(\mathbb{RP}^2)\to\widetilde{\Omega}_*^{\mathrm{String}}(S^2)$，将 $(M,f\colon M\to\mathbb{RP}^2)$ 送到与线丛 $f^*\sigma$ 相关的二重覆盖 $M'\to M$，以及映射 $M'\to S(\sigma)=S^2$。

映射 $\Omega^\xi_k(S^\ell)\to$ 将 $M\mapsto(M\times S^\ell,\ \mathrm{proj}_2\colon M\times S^\ell\to S^\ell)$ 映射到（其中 S^ℓ 带有边界稳定标架，它与 M 上的 ξ-结构共同诱导出 $M\times S^\ell$上的 ξ-结构）总是一个同构（例如，可用阿蒂亚-赫希-布鲁赫谱序列验证这一点），并且

[18]另请参阅 Beaudry-Bobkova-Pham-Xu 的密切相关工作 [BBPX22], 他们利用$tmf_*(\mathbb{RP}^2)$ 通过椭圆谱序列进行计算。

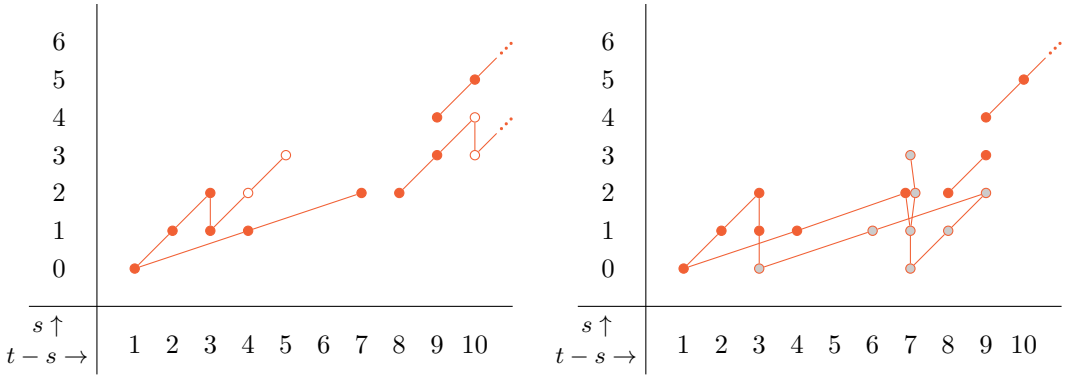

图 6. 由映射 $\mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{RP}^\infty$ 与 $B\mathbb{Z}/2$ 诱导的约化弦配边 Adams 谱序列之间的映射，我们在命题 2.71 的证明中会用到它。左：$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(2)}(\widetilde{H}^*(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/2)\ \mathbb{Z}/2)$，这是计算 $\widetilde{\Omega}^{\mathrm{String}}_*(\mathbb{RP}^2)^\wedge_2$ 的 Adams 谱序列的 E_2 页。实心点映射到 $\mathbb{RP}^\infty$ 后像非零；空心点属于核。Bruner-Rognes [BR21, §4.4, 第 6 章，§12.1] 计算了这些 Ext 群并运行了这一 Adams 谱序列；根据他们的工作，我们知道这一范围内没有微分（但存在一些不影响我们论证的隐藏 ν-扩张；见（同上，定理 12.5））。右：$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(2)}(H^*(B\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)\ \mathbb{Z}/2)$，它是计算 $\widetilde{\Omega}^{\mathrm{String}}_*(B\mathbb{Z}/2)^\wedge_2$ 的 Adams 谱序列的 E_2 页的一个直和项。实心点属于来自 $\mathbb{RP}^2$ 的映射的像；灰点属于余核。E_2 页由 Davis-Mahowald [DM78, 表 3.2], 计算；在命题 2.71 的证明中，我们论证了图示范围内没有微分或隐藏的 2-扩张。

$\Omega^{\mathrm{String}}_6 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ [Gia71, §3, §4], 由 $S^3 \times S^3$ 及其李群标架生成，因为它在 Adams 谱序列中由 h_2^2 表示。因此 $\widetilde{\Omega}^{\mathrm{String}}_8(S^2) \cong \mathbb{Z}/2$ 由 $S^3 \times S^3 \times S^2$生成，其到 S^2 的映射由投影到第三个因子给出。在转移下的像是它的二重覆盖，即 $S^3 \times S^3 \times S^2$，它具有正确的弦结构以及到 S^2的映射，因此 $[X_8] \neq 0$ 属于 $\widetilde{\Omega}^{\mathrm{String}}_8(\mathbb{RP}^2)$，这足以证明该定理。□

最后，考察映射 $\widetilde{\Omega}^{\mathrm{String}}_*(B\mathbb{Z}/2) \to \Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}_*$，我们得出：

推论 2.73. 设 $d_2(c) = 0$ 是 ξ^{het} 的 *Adams* 谱序列中的一个元素。那么 $[X_8] \neq 0$ 属于$\Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}_8$，且它在 E_∞ 页上的像是类 $b \in E^{2,10}_\infty$（可能再加上滤过较低的一些元素）。

2.3. ξ^{het} 在奇素数处的配边。

定理 2.74. $\Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}_*$ 在 *11* 度及以下的维度中没有奇素数挠。

证明。这相当于直接计算 Adams 谱序列。我们将详细讨论 $p = 3$ 的情形；对于 $p = 5$，7，情况类似但更简单；而对于 $p \geq 11$，这显然成立，因为 Steenrod 幂运算的次数太高，Adams 谱序列无法产生挠元。

首先，我们在命题 $H^*(B\mathbb{G}^{\text{het}};\mathbb{Z}/3)$ 中计算低次时作为 Steenrod代数 $\mathcal{A}$ 上的模 2.77，然后在命题 $H^*(MT\xi^{\text{het}};\mathbb{Z}/3)$ 中对 2.83做同样的计算。完成这些之后，我们就可以运行 Adams 谱序列，并在命题 2.86中进行计算。

在本小节中，$\mathcal{P}^i$ 表示 i^{th} Steenrod幂运算，这是作用于模3上同调的一个度数为$4i$ 的运算，而 β 是序列 $0\to\mathbb{Z}/3\to\mathbb{Z}/9\to\mathbb{Z}/3\to 0$的 Bockstein同态。

引理2.75。 令 $C\in H^3(K(\mathbb{Z},3);\mathbb{Z}/3)$ 表示典范类的模3 约化。那么

$$H^*(K(\mathbb{Z},3);\mathbb{Z}/3)\cong\mathbb{Z}/3[C,\mathcal{P}^1C,\beta\mathcal{P}^1C,\dots]/(C^2,\dots), \tag{2.76}$$

所有未列出的生成元和关系都位于14 度及以上。

证明。 这是对纤维化 $K(\mathbb{Z},2)\to *\to K(\mathbb{Z},3)$，因此我们从简叙述。 $E_2^{0,*}\cong H^*(K(\mathbb{Z},2);\mathbb{Z}/3)\cong\mathbb{Z}/3[x]$，其中 $|x|=2$；到E_∞页时，x 的所有幂都必须被微分消去。

唯一能消去 x 的方式是通过传递的 d_3：$E_3^{0,2}\to E_3^{3,0}$。令 $C:=d_3(x)$。由分次交换性可得 $C^2=0$。微分的莱布尼茨法则意味着，当 $3\nmid k$时，$d_3(x^k)=\pm x^{k-1}C$；而若 $3\mid k$，则 $d_3(x^k)=0$。

因此 x^3 存活至 E_4页。能消去 x^3 的唯一剩余微分是传递的d_7：$E_7^{0,6}\to E_7^{7,0}$，因此 $d_7(x^3)\neq 0$；由Kudo传递定理，[Kud56]，因为 $x^3=\mathrm{P}^1(x)$,$d_7(x^3)=\mathrm{P}^1C$。莱布尼茨法则进而推出 $d_7(x^6)=x^3\mathrm{P}^1C$，因此到 E_8页时，总次数小于18的 $p=0$ 线上所有元素都已被消去。

由于 $d_3(x^3)=0$, x^2C 存留至 E_4页；它仍能支持微分的唯一可能，是存在一个新的类 $w\in H^8(K(\mathbb{Z},3);\mathbb{Z}/3)$，使得 $d_5(x^2C)=w$。要看出$\beta(\mathcal{P}^1C)=\pm w$，可与 $\mathbb{Z}/9$ 值上同调对应的谱序列作比较，从而看出 $\mathcal{P}^1C$ 不在从 $\mathbb{Z}/9$ 上同调到 $\mathbb{Z}/3$上同调的模3约化映射的像中。[19] □

命题 *2.77.* 设 $D\in H^4(BE_8;\mathbb{Z}/3)$ 是定义 *1.4* 中类 c 的模 *3* 约化，并设 D_1 和 D_2 是 $H^*(BE_8^2;\mathbb{Z}/3)$ 中的两个 D 拷贝，它们来自 BE_8 的两个因子。在 *13* 次及以下的次数中，由 $\phi:B\mathbb{G}^{\text{het}}\to BSpin\times B(E_8^2\rtimes\mathbb{Z}/2)$ 诱导的 $\mathbb{Z}/3$上同调上的拉回映射，是一个商环同态，它将 $\lambda-D_1-D_2\mapsto 0$, $-p_2-P^1(D_1+D_2)\mapsto 0$，并将$\beta P^1(D_1+D_2)\mapsto 0$。

这里 ϕ 是我们在（1.44）中构造的映射，它遗忘了 B 场。

证明。 对纤维化应用 Serre 谱序列

$$K(\mathbb{Z},3)\longrightarrow B\mathbb{G}^{\text{het}}\longrightarrow B\mathrm{Spin}\times B(\mathrm{E}_8^2\rtimes\mathbb{Z}/2). \tag{2.78}$$

底空间并非单连通，因此我们可能需要考虑局部系数，但事实证明并非如此，因为 $\mathbb{Z}/2$ 交换两个E_8 因子的对称变换（它是底空间中 π_1 的来源）对 B 场的作用平凡，而 B 场给出了（2.78）中的纤维。

为了对 (2.78) 运行 Serre 谱序列，我们需要知道 $B\mathrm{Spin}$ 和 $B(\mathrm{E}_8^2\rtimes\mathbb{Z}/2)$ 的上同调。前者是由 Pontrjagin 类模 3 约化生成的多项式环，

[19]或者，也可以通过为 $K(\mathbb{Z},3)\to *\to K(\mathbb{Z},4)$ 建立 Serre 谱序列，并利用 Hill 对 $K(\mathbb{Z},4)$ 的低次模 3 上同调作为 A-模的计算 [Hil09，推论 2.9，图 1(a)]，推导出这个 Bockstein：C传递到一个 4 次类 D，而 Hill 证明了 $\beta(\mathrm{P}^1D)\neq 0$，因此根据 Kudo传递定理 [Kud56]，$\beta(\mathrm{P}^1C)\neq 0$在 $H^*(K(\mathbb{Z},3);\mathbb{Z}/3)$ 中。

这是 Borel-Hirzebruch 的一个定理 [BH59, §30。2]；对于后者，可对该纤维化运行 Serre 谱序列

$$B\mathrm{E}_8^2 \longrightarrow B(\mathrm{E}_8^2 \rtimes \mathbb{Z}/2) \longrightarrow B\mathbb{Z}/2. \tag{2.79}$$

由于 $H^*(B\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/3)$ 在正次数上消失，这个 Serre 谱序列退化，从而得到

$$H^*(B(\mathrm{E}_8^2 \rtimes \mathbb{Z}/2);\mathbb{Z}/3) \xrightarrow{\cong} H^*(B\mathrm{E}_8^2;\mathbb{Z}/3)^{\mathbb{Z}/2}. \tag{2.80}$$

答案现在由 Künneth公式、以下事实推出：在我们所需的范围内，根据 Bott-Samelson $B\mathrm{E}_8$ 可替换为 $K(\mathbb{Z},4)$的结果 [BS58、定理 IV、V(e)] （我们在 §2.2中提到过），以及由 Cartan [Car54] 和 Serre [Ser52], 计算并由 Hill [Hil09在推论 2 中明确陈述的 上同调 $K(\mathbb{Z},4)$ 的模 3 低次上同调。9]。

现在回到 (2.78) 及其 Serre 谱序列。纤维化 (2.78) 由 4 次 上同调类 $\lambda - D_1 - D_2$分类，也就是说，它是普适 $K(\mathbb{Z},3)$-丛

$$K(\mathbb{Z},3) \longrightarrow EK(\mathbb{Z},3) \longrightarrow BK(\mathbb{Z},3) \simeq K(\mathbb{Z},4) \tag{2.81}$$

通过由 $\lambda - D_1 - D_2$.[20] 分类的映射 $B\mathrm{Spin} \times B(\mathrm{E}_8^2 \rtimes \mathbb{Z}/2) \to K(\mathbb{Z}, 4)$。在针对（2.81）的 Serre 谱序列中，类 $C \in E^0{}_2{}^3 = H^3(K(\mathbb{Z}, 3);\mathbb{Z}/3)$ 必须传递到 $E^4{}_2{}^0 = H^4(K(\mathbb{Z}, 4);\mathbb{Z}/3)$ 的生成元，而该生成元拉回为 $\lambda - D_1 - D_2$，从而在 E_5 页上强制得到关系 $\lambda - D_1 - D_2 = 0$。

定理陈述中另外两个拉回为零的结论，随后可由 Kudo传递定理 [Kud56] 推出：$\mathrm{P}^1 C \in E^0{}_2{}^7 = H^7(K(\mathbb{Z}, 3);\mathbb{Z}/3)$ 必须传递到 $\mathrm{P}^1(\lambda - D_1 - D_2)$，而 $\beta\mathrm{P}^1 C$ 的情形也类似。为计算这些，我们必须确定 P^1 如何作用于庞特里亚金类的模 3 约化。Shay [Sha77] 证明了切尔恩类的 Steenrod幂运算公式，通过拉回即可得到庞特里亚金类的公式。因此，正如 Nordström [Nor], $\mathrm{P}^1 p_1 = p_2$ 所推导的；接着，Adem关系告诉我们

$$\mathcal{P}^1 p_2 = \mathcal{P}^1\mathcal{P}^1 p_1 = -\mathcal{P}^2 p_1 = p_1^3, \tag{2.82}$$

最后一个等式成立，是因为$\mathcal{P}^i$ 是次数为 $2i$ 的类上的杯积立方。因此我们看到$\mathcal{P}^1 C$ 通过 $-p_2 - \mathcal{P}^1(D_1 + D_2)$ 发生传递，而 $\beta\mathcal{P}^1 C$ 通过 $\beta\mathcal{P}^1(D_1 + D_2)$ 发生传递，从而在第 E_{10} 页消去这些类。

现在，莱布尼茨法则整理了 Serre 谱序列中总次数不超过 13 的其余部分：到第 E_{10} 页时，这一范围内的所有元素都集中在线 $q = 0$ 上。因此在第E_∞页，这一范围内的扩张问题显然平凡，由此得证。□

命题2.83. 设 M_3 表示 $H^*(MT\xi^{\mathrm{het}};\ \mathbb{Z}/3)$ 模去所有次数不低于14的元素所得的商，设 M_3^{SO}表示 $H^*(MTSO;\ \mathbb{Z}/3)$ 模去所有次数不低于14 的元素所得的商，并设$C\alpha$ 为一个 A-模，由次数为0和4 的两个 $\mathbb{Z}/3$ 直和项通过 P^1连接而成。那么，存在一个 A-模同构

$$\mathcal{M}_3 \cong \mathcal{M}_3^{\mathrm{SO}} \oplus \Sigma^8 C\alpha \oplus \Sigma^{12}\mathbb{Z}/3. \tag{2.84}$$

证明。 在命题 2.77中，我们发现映射 $\phi\colon B\mathbb{G}^{\mathrm{het}} \to B\mathrm{Spin} \times B(\mathrm{E}_8^2 \rtimes \mathbb{Z}/2))$ 在模 3 上同调的 13 及以下次数上诱导满射。由于 ϕ 与映射到 $B\mathrm{O}$ 的映射相交换，而这些映射是这些切结构定义的一部分，ϕ 因此在 Thom

[20]这个映射及其纤维化仅在同伦意义下确定，但任意两个代表元的选择都会给出同构的答案。

谱

$$MT\xi^{\mathrm{het}} \to MTSpin \wedge B(\mathrm{E}_8^2 \rtimes \mathbb{Z}/2)_+. \tag{2.85}$$

这两个切结构到 $B\mathrm{O}$ 的映射都经过 $B\mathrm{SO}$，因此模3上同调的 Thom同构会解除扭曲。Thom同构对于切结构之间的映射是自然的，因此我们得出，(2.85) 所诱导的模3上同调上的拉回映射在 13 次及以下度数上是满射——因此我们可以计算后一个 Thom 谱的上同调中的 Steenrod幂运算。并且映射 MTSpin $\to$MTSO 在远离 2 的地方是等价，因此我们可以用 MTSO 代替 MTSpin。Milnor [Mil60，定理 4] 计算了 $H^*(\mathrm{MTSO};\mathbb{Z}/3)$ 上的 Steenrod模结构，表明它是一个自由 $\mathcal{A}/\beta$-模。利用这一点，我们可以确定 Up_i 的 Steenrod幂，其中 U 是 Thom类；再结合 Cartan 公式，即可完成证明。□

命题2.86。 在拓扑次数12及以下，计算$(\Omega_*^{\xi^{\mathrm{het}}})^\wedge_3$的 *Adams* E_2页由集中在偶数拓扑次数上的 h_0-塔组成，因此该 *Adams* 谱序列在12及以下次数处退化。

证明。命题2.83中的直和分解意味着，只需分别证明关于 $\mathrm{M}_3^{\mathrm{SO}}$、$\Sigma^8 C\alpha$ 和 $\Sigma^{12}\mathbb{Z}/3$ 的 h_0-塔的陈述。和往常一样，对于 M 这个 A-模，我们用 $\mathrm{Ext}(M)$ 表示 $\mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathcal{A}}(M,\mathbb{Z}/3)$。我们需要的第一个要素是 $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/3)$ 本身；Gershenson [Ger63] 计算了 $t-s\le 11$ 次数处的 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}/3)$；May [May65, May66] 将这一计算扩展到了 $t-s\le 88$。在拓扑次数 2 及以下，$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/3)$ 由一个位于拓扑次数 0 的 h_0-塔组成，这就得出了关于 $\Sigma^{12}\mathbb{Z}/3$的结论。

接下来，我们利用 $\mathcal{A}$-模的短正合列会在 Ext 群中诱导出长正合列这一事实来计算 $\mathrm{Ext}(C\alpha)$。具体而言，将 $C\alpha$ 分解为$\mathcal{A}$-模的扩张。

$$0 \longrightarrow \Sigma^4\mathbb{Z}/3 \longrightarrow C\alpha \longrightarrow \mathbb{Z}/3 \longrightarrow 0, \tag{2.87}$$

我们在图7左侧绘出了这一点，并在图7右侧计算了相应的 Ext 长正合列。在此范围内，至多有一个非零边界映射：$\partial\colon \mathrm{Ext}^{0,4}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}/3) \to \mathrm{Ext}^{1,4}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}/3)$。由于 $\mathrm{Ext}^{0,4}_{\mathcal{A}}(C\alpha) = \hom_{\mathcal{A}}(C\alpha, \Sigma^4\mathbb{Z}/3) = 0$，这个映射必定非零。我们看到，在 6 次及以下的次数中，$\mathrm{Ext}(C\alpha)$ 仅由偶数次的 h_0-塔构成，这意味着推论陈述中由 $\Sigma^8 C\alpha$ 得出的部分。

最后，$\mathcal{M}_3^{\mathrm{SO}}$。Milnor [Mil60，定理 4] 证明该模与一个自由的 $\mathcal{A}/\beta$-模在以下度数中重合13及以下，并证明（同上，引理 5）此类模的 Ext 群仅由偶拓扑次数中的 h_0-塔组成。因此，在拓扑次数12 及以下，$\mathrm{Ext}(\mathcal{M}_3^{\mathrm{SO}})$ 也仅由 h_0-塔组成，且其拓扑次数为偶数。□

这足以证明定理 2.74 对于 $p=3$：h_0-塔在 E_∞-页提升到 $\mathbb{Z}_3$（即3-进整数）直和项中 $(\Omega_*^{\xi^{\mathrm{het}}})^\wedge_3$，因此在此范围内没有 3-挠元。□

注记 2.88。 我们在 $p=2$ 使用的换环技巧，在 $p=3$ 也有一个类似结果，适用于 tmf 的扭曲（因此对于 3-局部扭曲弦配边，在 15 及以下维度也同样成立，因为 Ando-Hopkins-Rezk 映射 [AHR10] $MTString^{(3)} \to tmf^{(3)}$ 是 15-连通的 [HR95, Hil09]）：使用 Baker-Lazarev 版本的 Adams 谱序列 [BL01],，我们可以在代数上取 Ext

$$\mathcal{A}^{tmf} := \pi_{-*}\mathrm{Map}_{tmf}(H\mathbb{Z}/3, H\mathbb{Z}/3), \tag{2.89}$$

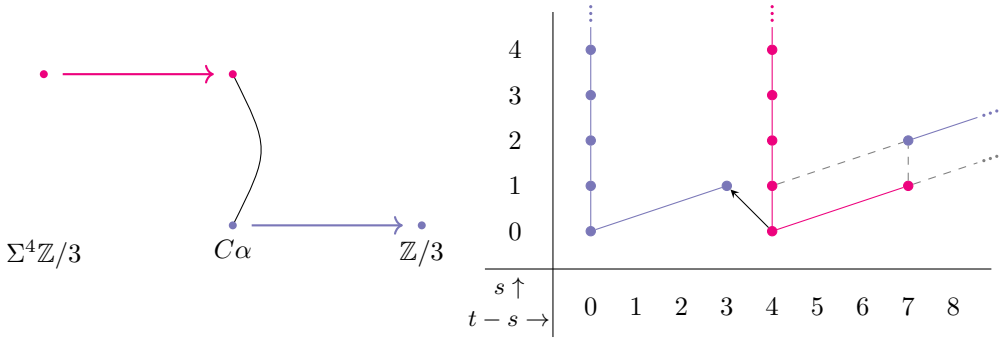

图7。 左：在2.87处$\mathcal{A}$-模的扩张 $p=3$。右：相应的 Ext 长正合列。灰色虚线表示由$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}/3)$ 中的元素作用所产生的映射，无法从这个长正合列中看出，必须通过其他方式推导；本文不需要这些映射，因此不作详细讨论。

其中 $H\mathbb{Z}/3$ 通过环谱映射 tmf-代数谱 $tmf \xrightarrow{\tau\leq 0} H\mathbb{Z} \to H\mathbb{Z}/3$构成，其中第一个映射是 Postnikov 0-连通商，第二个映射由 $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/3$诱导。代数$\mathcal{A}^{tmf}$ 由 Henriques 和 Hill 使用 Behrens 的工作明确计算得到 [Beh06] 以及 Hopkins-Mahowald 未发表的工作；参见 Henriques [DFHH14，§13。3],Hill [Hil07], 以及 Bruner-Rognes [BR21，§13]，其中给出了使用该 Adams 谱序列进行计算的方法。

与 $p=2$处一样，将这个谱序列应用于扭曲弦配边时，如果扭曲并非源自向量丛，还需要做一些工作。我们将与 Matthew Yu 合作，在未来的工作中探讨这一问题 [DY], ，届时将展示如何针对非向量丛扭曲在$\mathcal{A}^{tmf}$ 上进行计算，以及这如何简化3-主的$\Omega_*^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 在弦理论相关次数上的计算。

2.4. ξ^{CHL} **配边**。 本节计算 ξ^{CHL} 配边群。与 ξ^{het}配边群的情形一样，我们使用推论 2.22 中 $p=2$ 的换环技巧，并在奇素数处更直接地使用 Adams 谱序列。不过，这一次我们可以从它与 $B\mathrm{E}_8$,的弦配边 Adams 谱序列之间的抽象同构中推导出大量信息；Hill 已对后者进行了研究 [Hil09]。

2.4.1. 2主计算。

定理2.90。 在11 及以下次数中，2-完备化后的$\Omega_*^{\xi^{\mathrm{CHL}}}$ 和$\Omega_*^{\mathrm{String}}(B\mathrm{E}_8)$ 在抽象意义下同构。

证明。根据推论 2.22，这一范围内的 Adams E_2-页与 $T(-2c)$ 在 A(2) 上的 Ext 相同。 $T(\mu)$ 上的 A(2)-模结构仅取决于底层群 BG 、μ 模 2 以及 $2c$ 模 $2=0$，因此作为 A(2)-模， $T(-2c)\cong T(0)=H^*(B\mathrm{E}_8;\mathbb{Z}/2)$。因此，在我们关心的范围内，Adams$E_2$-页与 $\mathrm{MT}\xi^0=\mathrm{MTString}\wedge(B\mathrm{E}_8)_+$ 的 E_2- 页相同。Hill [Hil09 的图 3] 计算了对应于 $B\mathrm{E}_8$, 约化弦配边的 E_2- 页，据此我们绘制了图 8 中 $\Omega_*^{\xi^{\mathrm{CHL}}}$ 的完整 E_2-页。

这是一个抽象同构，先验上并不能告诉我们有关微分或扩张的信息。不过，对 $\mathbb{T}[1]$ 取商定义了一个映射 $\mathbb{G}^{\mathrm{CHL}}\to\mathrm{Spin}\times\mathrm{E}_8$, ，它在分类空间的 Thom 谱的 Adams 谱序列上诱导出一个映射，而这个 Adams 谱序列映射可识别为由 $MTString\wedge(B\mathrm{E}_8)_+\to MTSpin\wedge(B\mathrm{E}_8)_+$ 诱导的映射，因此任何微分

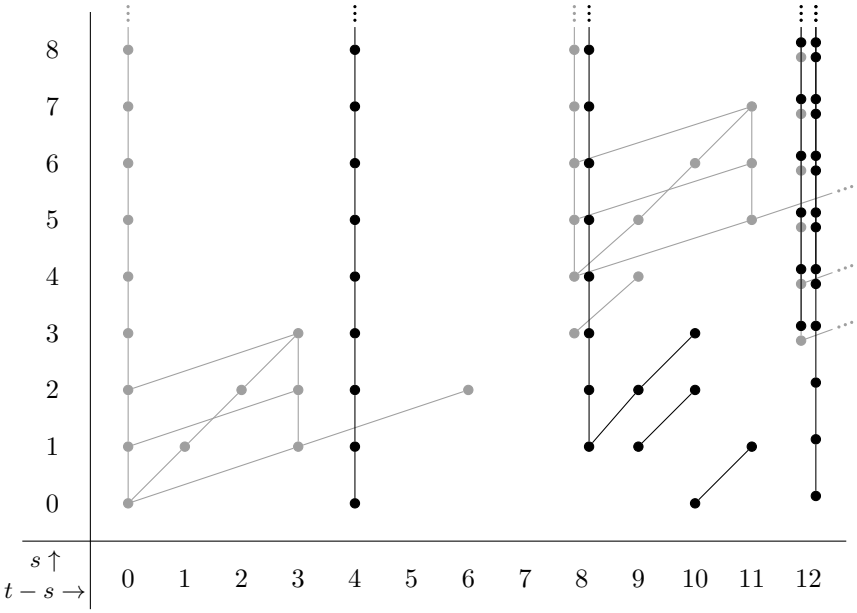

图 8。 Adams 谱序列的 E_2页，用于计算 2-完备的ξ^{CHL} 配边。灰色求和项对应于具有平凡E_8-丛的类。有关更多信息，请参见定理 2.90 。本图改编自 [Hil09, 图3]。

通过从$MTSpin\ \wedge B\mathrm{E}_8$ 的 Adams 谱序列回拉而推导出的 $B\mathrm{E}_8$ 的弦配边中的微分，在我们的 ξ^{CHL} 配边 Adams 谱序列中仍然成立。

此外，我们可以用具有平凡 $\Omega_*^{\xi^{\mathrm{CHL}}}$ 的弦流形来实现 Figure 8中对应于灰色求和项的部分，并且具有平凡 E_8-丛，因此灰色求和项从 Adams 谱序列的其余部分中分裂出来。

考察图 8 中的黑色求和项，微分关于 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}/2)$-作用的线性性意味着，在我们所关注的范围内，唯一可能的非零微分是 $d_2\colon E^{0,10}_2 \to E^{2,11}_2$ 和 $d_2\colon E^{1,12}_2 \to E^{3,13}_2$。Hill [Hil09, §3.3] 利用到 MTSpin $\wedge(B\mathrm{E}_8)_+$ 的映射证明这两个微分非平凡，因此正如我们上面所指出的，对于 ξ^{CHL} 配边而言情况也同样如此。

由于不再有微分，且范围内所有由 2 产生的扩张都可由 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}/2)$-作用推出而无需额外信息，因此我们已经证明了该定理。□

注 2.91。 如注 1.55 所述，映射 $c\colon B\mathrm{E}_8 \to K(\mathbb{Z},\ 4)$ 定义了一个从 ξ^{CHL}结构到 $\mathrm{Spin}\langle w_4\rangle$ 结构的映射，即一个自旋结构和 w_4的平凡化所构成的数据。这是从 ξ^{het} 结构到 $\xi^{\mathrm{het}'}$ 结构这一过程在 CHL 理论中的类比，见 §2.2 ——而且与该情形一样，由于 c 是 15-连通的，诱导映射 $\Omega^{\xi^{\mathrm{CHL}}}_k \to \Omega^{\mathrm{Spin}\langle w_4\rangle}_k$ 对于 $k \leq 14$是同构，因此本节中的计算也给出了 $\mathrm{Spin}\langle w_4\rangle$ 配边群。

Sati-Schreiber-Stasheff [SSS12, (2.17)] 提出了一种不同的观点：$\mathrm{Spin}\langle w_4\rangle$ 结构是推论 2.12 意义下的扭曲弦结构：对 $w_4(M)$ 的平凡化与一个类 $\mu \in H^4(M;\mathbb{Z})$ 以及 2μ 与 $\lambda(M)$ 的一个识别等价，因此，$\mathrm{Spin}\langle w_4\rangle$- 结构是映射 $-2\colon K(\mathbb{Z},4) \to K(\mathbb{Z},4)$ 所对应的扭曲弦结构（Sati-Schreiber-Stasheff 将其分类空间记为 $B\mathrm{String}^{2\mathrm{DD}_2}$）。另见 [FH21a，注 C.18]。

定理 2.90 的证明利用了一个抽象同构，因此并未提供关于生成元的任何信息。来自 $\Omega_*^{\mathrm{String}}(B\mathrm{E}_8)$ 的元素 $\Omega_*^{\mathrm{String}}(\mathrm{pt})$ 由具有平凡 E_8-丛的弦流形表示；它们自然满足条件 $2c = \lambda$，因此在 $\Omega_*^{\xi^{\mathrm{CHL}}}$ 中定义的类，在与 $\Omega_*^{\mathrm{String}}(B\mathrm{E}_8)$. 的抽象同构下表示相同的元素。

还剩下几个元素： $\mathbb{Z}$ 在次数 4 和 8 的副本，以及 $\mathbb{Z}/2$ 在次数 9 和 10 的副本。我们可以用一个满足 Bianchi 恒等式条件的 E_8-丛 K3 曲面来表示 $\Omega_4^{\xi^{\mathrm{CHL}}} \cong \mathbb{Z}$ 的生成元；确定 $\Omega_k^{\xi^{\mathrm{CHL}}}$ 在 $k = 8$、9、 10中的生成元会很有意思。

2.4.2. 奇素数计算。

定理 2.92. 对于 $k \leq 12$，$\Omega_k^{\xi^{\mathrm{CHL}}}$ 没有奇素数挠元。

证明。首先证明 $p = 3$的情形。弦覆盖 $\mathrm{S}(G, \lambda)$ 的模3上同调作为 A-模，只取决于 λ 模 3。因此，在 CHL 情形中，由于 $\lambda = 2c$，我们不妨取 $\lambda = -c$ ——或者将我们的 $K(\mathbb{Z}, 4)$ 类替换为其相反类，即 $\lambda = c$。这个弦覆盖对应于推论 2.12 中 MTString 在 $K(\mathbb{Z}, 4)$ 上的普适扭曲，这意味着根据定理 2.11，这个扭曲的 Thom 谱仍然是 MTSpin！也就是说，CHL 配边的 3-主 Adams 谱序列的 E_2 页与 Spin 配边的 E_2 页一致——也与定向配边的情形一致，因为遗忘映射 MTSpin $\to$MTSO 是一个 3-主等价。

Milnor [Mil60，定理 4]证明，模 3 上同调 $MTSO$ 是一个由偶数次生成元自由生成的 $\mathcal{A}/\beta$-模，其中 β 是模 3 Bockstein；随后，他证明（同上，定理 1）：对于任何具有该性质并满足有限性条件的谱，其同伦中不存在奇素数挠。CHL 配边谱满足这些条件，因此得出结论。

对于 $p \geq 5$，论证与定理 2.74中的基本相同。 □

3. 弦理论中的推论

量子引力理论中，配边群有几种不同的用途。本节讨论前一节中的计算所引出的应用和问题。尽管我们主要从数学角度进行讨论，但本节陈述的部分内容目前只在物理学层面的严谨程度下得到确立。

3.1. **配边猜想**。 作为量子引力沼泽地计划的一部分，McNamara-Vafa [MV19] 提出了以下猜想；这一猜想是基于一个普遍公认的观点：量子引力理论不应存在全局对称性：

猜想3.1 (McNamara-Vafa配边猜想 [MV19])。 假设我们有一个一致的n维量子引力理论，其中参与求和的时空背景带有一个 ξ结构。那么，对于 $3 \leq k \leq n-1$， $\Omega_k^{\xi} = 0$。

这里的关键在于“时空背景具有 ξ-结构”的含义——我们的意思并不只是可以对所有 ξ-流形求和，而是 ξ 以某种有待明确的意义，构成理论得以成立的最一般结构。弦论学家经常研究 $\mathcal{M}$上的奇异流形，甚至德利涅-芒福德栈，参见 [PS05、PS06a、PS06b、DFM11a、DFM11b], ；而猜想 3.1 中出现的 ξ-配边概念预计会将这一点考虑在内，成为某种广义流形的配边理论。

目前已知的各种量子引力理论的切结构 ξ 并不满足猜想3.1中的消失判据，因此这些理论的背景必然还需要附加数据或条件，以修正 ξ，从而使其配边群消失。这些修正通常采取在理论中引入额外扩展对象的形式。这便引出了配边猜想的一种常见应用：计算当前所理解的切结构 ξ 对应的配边群，并将任何非零群作为指引，借此揭示理论中可能存在的新对象，随后再对这些对象展开研究。这一思想已应用于 [MV19、BKRU20、GEMSV20、DH21、MV21、Sch21、ACC22、BC22、BCKM22、DHMT22、MR22、Wit22、DDHM23、MDL23]；[21]在本小节中，我们将运用§2中的计算结果，探讨能够从中了解到关于$E_8\times E_8$ 杂化弦和CHL弦的哪些信息。

尽管 $k\geq 3$ 猜想 3.1中存在这一限制，修改 ξ 以消去 Ω_1^ξ 和 Ω_2^ξ 中的类，通常在物理上很有意义，并且可以预测理论中的有用新对象。这是研究配边猜想时常用的技巧，我们也会这样做。

3.1.1. $E_8\times E_8$ 杂化弦。 McNamara-Vafa [MV19, §4.5] 讨论了他们的猜想对 $E_8\times E_8$ 杂化弦理论的预测，但采用了一个简化假设，即规范 $(E_8\times E_8)\rtimes\mathbb{Z}/2$-丛是平凡的；相应的切结构于是为$B$String。例如，他们的猜想必须解释由 $\Omega_3^{\mathrm{String}}\cong\mathbb{Z}/24$生成的 S^3 及其李群标架，并说明如何通过考虑 NS5膜使其平凡化。

配合 $\Omega_*^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 在此基础上，我们可以预言更多对象。回顾一下我们在 $\xi_{\text{杂化弦}}$配边群中找到的生成元，以及我们在 §2.2.1中的记号。

例3.2。 $\Omega_1^{\xi^{\mathrm{het}}}\cong\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$，其生成元为 S^1_{nb} 和 $\mathbb{RP}^1$。McNamara-Vafa 已经研究过 S^1_{nb}，但后者是新的。若允许带奇点流形，$\mathbb{RP}^1$ 以$D^2/(\mathbb{Z}/2)$为边界，即带有一个在原点处奇异的主 $\mathbb{Z}/2$ 丛的圆盘，通过包含映射将其膨胀为奇异的 $\mathbb{G}^{\mathrm{het}}$丛 $\mathbb{Z}/2,\to\mathbb{G}^{\mathrm{het}}$。

这个类对应于7-膜，位于$E_8\times E_8$ 杂化弦中。该膜的世界体积是八维的，因此它周围在十维时空中的链环是一个圆。绕此圆的单值化会交换两个E_8丛。这正是 Kaidi-Ohmori-Tachikawa-Yonekura 最近引入并讨论的非超对称7-膜 [KOTY23]。

不同理论中的相关 7-膜由 Distler-Freed-Moore [DFM11a] 以及 Dierigl-Heckman-Montero-Torres [DHMT22]进行研究；后者研究了 IIB 型弦理论中的一种 7-膜，称为 R7-膜，在配边猜想中对应于 $[\mathbb{RP}^1]\in\Omega^{\mathrm{Spin\text{-}GL}_2^+(\mathbb{Z})\,1}_{\mathrm{Spin\text{-}GL}_2^+(\mathbb{Z})\,1}$。

为了更好地理解 Kaidi-Ohmori-Tachikawa-Yonekura 的7膜，我们可以尝试确定它在不同弦理论之间的对偶下映射到何处。例如，Hořava- Witten [HW96b、HW96a、Wit96] 将$E_8\times E_8$ 杂化弦理论（的某个极限）与一种理论对应起来；该理论被预测为 M理论在单位区间上紧化后的低能极限。根据这一对应关系，Kaidi-Ohmori-Tachikawa-Yonekura 的7膜应对应于 M理论中的一个缺陷，该缺陷由配边猜想与一个2维配边类相关联。由于从 M理论过渡到杂化弦理论需要在区间上紧化，而区间是一个带边界流形，因此应使用一种针对紧流形的配边理论

[21]尽管已有这些研究，仍有许多与各种弦理论和超引力理论相关、且已经完成计算的配边群，其对应的缺陷尚未确定。这包括$\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(BE_8)$ [Sto86、Edw91],，适用于在没有$E_8\times E_8$ 交换对称性的情况下的 $\mathbb{Z}/2$ 杂化弦；Ω_*^{DPin} [KPMT20，附录 E、F],，与 I 型弦理论相关；以及$\Omega_*^{\mathrm{m}_c}$ [FH21a],，对 M理论的低能极限有用。

它们不一定是闭的。[22] 这个配边类应由一个区间丛表示，其底空间为 $\mathbb{RP}^1$，因此我们猜想，莫比乌斯带的配边类对应于该膜在 M理论中的对应物。作为检验，预期在莫比乌斯带上紧化的 M理论与$\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 在 $\mathbb{RP}^1$ 上紧化的杂化弦理论相同——正如我们在第 §1.3节所讨论的那样，它们都被预测为 CHL弦，不过照例，目前已知的只是关于低能超引力极限的结论。本文不打算彻底解决这一问题：除此之外，这还需要为这一应用找出带边界流形的“恰当”配边概念。

在结束对异质弦/M-对偶的讨论之前，我们指出一种带边界流形的配边概念，该概念由 Conner-Floyd 提出 [CF66, §16],在这种配边下，莫比乌斯带并非边界；我们乐观地猜想，这正是将配边应用于配边猜想时所需的带边界流形配边。

定义 3.3。设 $\xi_1 \colon B_1 \to B\mathrm{O}$ 和 $\xi_2 \colon B_2 \to B\mathrm{O}$ 为切结构，且 $\eta \colon B_1 \to B_2$为一个切结构的映射，即 η 与映射 ξ_i交换。一个 ξ_2/ξ_1-流形是一个紧流形 M，带有 ξ_2-结构，并且

(1) ∂M上的一个 ξ_1-结构 $\mathfrak{x}$，以及 (2) 对 ∂M 上的 ξ_2-结构 $\eta(\mathfrak{x})$ 的一个识别，该结构等于在 M上取边界所诱导的 ξ_2-结构。

Conner-Floyd [CF66, §16] 引入了一种针对 ξ_2/ξ_1-流形的配边概念，[23] 记作$\Omega_*^{\xi_2/\xi_1}$，使得与此配边概念对应的 Thom 谱为 $MT\xi_2/MT\xi_1$，即 $\eta \colon MT\xi_1 \to MT\xi_2$ 的余纤维。这意味着存在一个长正合列

$$\cdots \longrightarrow \Omega_k^{\xi_1} \xrightarrow{\eta} \Omega_k^{\xi_2} \xrightarrow{j} \Omega_k^{\xi_1/\xi_2} \xrightarrow{\partial} \Omega_{k-1}^{\xi_1} \longrightarrow \cdots \tag{3.4}$$

其中 j 将 ξ_2-流形视为边界为空的 ξ_2/ξ_1-流形。

引理 3.5. 莫比乌斯带 M 的类在 $\Omega_{\mathrm{Pin}^+/\mathrm{Spin}\ 2}$ 中非零。[24]

证明。 根据 (3.4)，只需证明 $[\partial M] \neq 0$ 在 Ω_1^{Spin} 中非零。莫比乌斯带的边界是一个圆；对于其上任意 pin^+ 结构， M边界圆都带有非配边自旋结构，即在 Ω_1^{Spin} 中非零。这是因为，如果 ∂M 带有配边自旋结构，就可以沿着$^+$ 将带有标准 pin M 结构的圆盘与之粘合， ∂M 从而在$^+$ 上得到 $\mathrm{pin}\mathbb{RP}^2$结构；但 $\mathbb{RP}^2$ 并不允许 pin^+ 结构。 □

引理 3.5 表明，Conner-Floyd 关于带边界流形配边的概念，或许正适用于我们在异质弦/M理论对偶性中的应用。

例 3.6. 接下来考虑高维配边群所预言的高余维对象，$\Omega_2^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 非零，但可以由 S^1_{nb} 和 $\mathbb{RP}^1$的乘积生成。这意味着，如果我们按照上述含义将 $[\mathbb{RP}^1]$， $[S^1_{nb}] \in \Omega_1^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 平凡化，即允许 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 杂化弦理论定义在奇异流形上，且这些流形的边界为 $\mathbb{RP}^1$ 和 S^1_{nb}，那么我们就可以实现我们的

[22]McNamara-Vafa [MV19, §5] 暗示了这一推广，不过其视角是带奇点流形，而非带边界流形。[23]Conner-Floyd 只考察了少数几个 ξ_1 和 ξ_2的例子。文献 [Sto68、Ale75、Mit75、RST77、Lau00、Bun15] 则考察了更多切结构。[24]严格来说，$\mathrm{Pin}^+/\mathrm{Spin}$ 并非正确的切结构：应当用类似$\mathfrak{m}_c$ [Wit97、Wit16、FH21a], 的结构取代 Pin^+，并用类似 ξ^{het}的结构取代 Spin，不过 $\mathfrak{m}_c$- 与 pin^+ 结构在二维流形上是等价的数据 [FH21a, §8.5.1]。

$\Omega_2^{\xi^{\text{het}}}$ 的选定生成元作为奇异三维流形的边界：例如，我们使用 $D^2/(\mathbb{Z}/2)$将 $\mathbb{RP}^1$ 实现为边界，因此可以使用 $S^1_{nb}\times D^2/(\mathbb{Z}/2)$将 $S^1_{nb}\times\mathbb{RP}^1$ 实现为边界。因此，要处理 $\Omega_2^{\xi^{\text{het}}}$，无需在我们处理 $\Omega_1^{\xi^{\text{het}}}$ 时所用的缺陷或奇点之外，添加任何新类型的缺陷或奇点。

例3.7。 $\Omega_3^{\xi^{\text{het}}}\cong\mathbb{Z}/8$，由 $\mathbb{RP}^3$生成。正如例 3.2中所述，我们可以通过允许原点处存在奇点，将 $\mathbb{RP}^3$ 配边为 $B^4/$（$\mathbb{Z}/2$）。该配边类应对应于一种不同于 NS5膜的5-膜。

例 3.8。 $\Omega_4^{\xi^{\text{het}}}\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2$。 $\mathbb{Z}/2$ 直和项由 $S^3\times\mathbb{RP}^1$生成，其中 S^3 携带李群标架，因此可以使用我们之前讨论过的对象将其配边类平凡化，就像例 3.6中那样。根据注 2.64，由于 $S^3\times S^1$ 作为 ξ^{het}-流形与 S^4 （带有平凡的 $\mathbb{Z}/2$-丛和 E_8-丛，其特征类为 $\pm1\in H^4$（S^4；$\mathbb{Z}$）的 $\cong\mathbb{Z}$相配边 4-膜相对应，该膜最近由 Kaidi-Ohmori-Tachikawa-Yonekura [KOTY23]发现。

该 $\mathbb{Z}$ 直和项在$\Omega_4^{\xi^{\text{het}}}$ 中对我们来说是新的。它由带平凡 $\mathbb{Z}/2$丛的 K3 曲面生成；一个E_8丛是平凡的，另一个则抵消了 $\lambda(\mathrm{K3})$。McNamara-Vafa [MV19，§4.2.1] 讨论了没有E_8丛数据或非平凡 B 场的 K3 曲面，并以此展示一种高形式$\mathbb{T}$对称性。我们的 K3 曲面对应于不同的配边类，但 McNamara-Vafa 的论证仍然适用：由于人们认为 K3 曲面是$\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8$ 杂化弦理论的有效背景，这种高形式 $\mathbb{T}$对称性必定以某种方式被破缺或规范化。我们不知道这会是什么样子。

$\Omega_5^{\xi^{\text{het}}}$ 消失，而$\Omega_6^{\xi^{\text{het}}}\cong\mathbb{Z}/2$ 由 $\mathbb{RP}^3\times S^3$生成，因此与例3.6 一样，我们可以将其实现为一个边界，而无需引入任何新类型的奇点。

例3.9。 $\Omega_7^{\xi^{\text{het}}}\cong\mathbb{Z}/16$，由 $\mathbb{RP}^7$生成。这个配边类与例 3.2 和 3.7非常类似；这一次，我们有一个1维膜，即一条弦。

注记 3.10（通过紧化关联配边类[25]）。对于在 Spin-$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Z})$ 流形上考察的 IIB 型弦理论配边猜想，$[\mathbb{RP}^k]\in\Omega^{\xi^{\text{het}}}_{\text{Spin-GL}_2^+(\mathbb{Z})}$ 在 $k=1$、3 时非零，且 7 [DDHM23, §14.3.2], 因此，我们会预期这些类对应三种不同类型的扩展对象，类似于例3.2、3.7 和 3.9。然而，在 [DDHM23, §7],中，文中证明这两个高余维对象可表示为与 $\mathbb{RP}^1$对应的 R7-膜的紧化，因此实际上只有一种新对象。我们猜想此处也会出现类似情况：在 $\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8$ 杂化弦理论中，与 $\mathbb{RP}^3$ 和 $\mathbb{RP}^7$ 对应的扩展对象，可以通过先前已知的膜，以及例3.2 中与 $\mathbb{RP}^1$对应的 Kaidi-Ohmori-Tachikawa-Yonekura 的 7膜来解释。

从配边的角度来看，我们的意思是，如果允许存在局部呈 $\mathbb{R}^k\times D^2/(\mathbb{Z}/2)$ 形的奇异 ξ^{het}-流形，那么不仅应当能够以 $\mathbb{RP}^1$ 为边界，还应当能够以$\mathbb{RP}^3$ 和 $\mathbb{RP}^7$为边界。我们将此留作一个猜想。

例 3.11. $\Omega_8^{\xi^{\text{het}}}$，它对应于余维 9对象，与以下之一同构：$\mathbb{Z}^3\oplus\mathbb{Z}/2$或 $\mathbb{Z}^3\oplus(\mathbb{Z}/2)^{\oplus2}$，具体取决于微分 (D3)的命运。我们找到的这四个或五个直和项的生成元为：

- $\mathbb{HP}^2$ 具有两种不同的 ξ_{het}-结构，从而得到两个 $\mathbb{Z}$ 直和项；
- Bott 流形，生成另一个自由直和项；

[25]感谢 Markus Dierigl 指出这一点。

- $\mathbb{RP}^7 \times {S^1}_{nb}$ 生成 $\mathbb{Z}/2$ 即使 (D3) 不消失时仍然存在的直和项；以及
- 我们在第 §2.2.2 节讨论的流形 X_8 是 $\mathbb{RP}^2$ 上的一个 $S^3 \times S^3$-丛。如果微分(D3) 非零，那么 X_8 作为一个 ξ_{het}-流形是有边界的。

$\mathbb{RP}^6 \times S^1_{nb}$ 是一个lready 计入 d f或在 t h^{e} 的意义上f 例子 l$^{\text{e3.6,}}$ 因此我们 f聚焦于 he oth

生成元。二者 B 和 $\mathbb{HP}^2$ 在配边群中都不可配边$\Omega^{\text{Spin-Mp}_2(\mathbb{Z})}_{\ 8}$；该配边群出现在对 IIB 型弦理论配边猜想的研究中；参见 [DDHM23，§6。9] 其中讨论了 IIB 型理论中与这些配边类相对应的缺陷。与例3.8类似，$\text{E}_8 \times \text{E}_8$ 异质弦理论中的情况想必并不完全相同，但可能类似。

最后， X_{8}。遵循 [MV19，§4。5] 和 [DDHM23，§7.6，§7。8] 将 X_8 描述为以 $\mathbb{RP}^2$ 为底、纤维为 $S^3 \times S^3$ 的纤维丛，这启发了如下弦理论构造：先利用对应于 NS5膜的奇异流形为第一个 S^3提供边界，再在第二个 S^3上紧化，然后以 $D^3/(\mathbb{Z}/2)$ 为底进行纤维化 X_8，使$\text{E}_8 \times \text{E}_8$ 成为奇异流形的边界。我们不知道这是否是$\text{E}_8 \times \text{E}_8$ 杂化弦的有效背景；支持或反对它的论证，或可提供一个例子，说明如何运用猜想3.1 ，基于弦理论的预言，对 X_8 的命运作出数学猜想。

例 3.12. $\Omega_9^{\xi^{\text{het}}}$ 对应于零维对象，即点缺陷，并且同构于 $(\mathbb{Z}/2)^{\oplus 4}$ 或 $(\mathbb{Z}/2)^{\oplus 6}$，具体取决于 (D3) 的命运。我们在 §2.2.1 中找到的生成元有三个形如 S^1_{nb} 乘以一个 ξ^{het}-流形，因此按照例 3.6 的意义，它们已经得到处理。第四个生成元是 $B \times \mathbb{RP}^1$，因此也已经得到处理。

其余两个可能需要、也可能不需要的流形是 $X_8 \times S^1_{nb}$（照例已得到处理），以及一个我们尚未确定的流形 X_9。

3.1.2. *CHL弦。* 定理 2.90 和2.92表明，$\Omega_*^{\xi^{\text{CHL}}}$ 在抽象意义上同构于$\Omega_*^{\text{String}}(B\text{E}_8)$。因此存在一个对应于 $\Omega_*^{\text{String}}(\text{pt})$ 的直和项；正如上文所见，这些类可以由具有平凡E_8-丛的弦流形来表示。其中一些流形已由 McNamara-Vafa [MV19第 4 节5] 在异质弦理论中处理过，例如利用五膜及其非零边界化标架消去 S^3，而且 CHL弦中大概也存在类似的缺陷。McNamara-Vafa 尚未解释许多弦配边类如何以缺陷来诠释，这些问题仍有待探讨；在 CHL弦的背景下进一步理解这一点将会很有意思。

我们还在 $\Omega_*^{\xi^{\text{CHL}}}$ 中发现了另外几个类。例如，$\Omega_4^{\xi^{\text{CHL}}} \cong \mathbb{Z}$ 是由一个 K3 曲面生成的，其 E_8-丛经过选择，满足 Bianchi 恒等式。与例 3.8 一样，这对应于某种余维 4 对象，不过我们不知道它会是什么样子。

3.2. 杂化弦上的 $\mathbb{Z}/2$ 对称性是否存在反常？ $\text{E}_8 \times \text{E}_8$ 量子场论可能带有反常数据，这是一种轻微的不一致：若不指定额外数据，场论中的关键量就无法得到绝对定义。例如，人们希望流形 M 上的量子场论配分函数是一个复数，但反常表明，配分函数只是一个尚未平凡化的复直线中的元素。必要时，解决这种不一致的过程称为反常抵消。

Freed-Teleman [FT14] 将一大类量子场论的反常抵消描述如下：一个 n维量子场论 Z存在于一个 $(n+1)$维可逆场论的边界上 α，后者称为 反常场论，对应于 Z。 Z 与α 的切结构相匹配。反常抵消就是将 α平凡化的过程，即建立一个从 α 到平凡理论的同构。

我们从 Atiyah-Segal 的方法出发 [Ati88，Seg88] 认为场论是从（可能带有几何结构的）配边范畴到诸如 $\mathcal{V}ect_{\mathbb{C}}$这样的范畴的对称幺半函子。扩展场论的观点意味着，这些通常是 $(\infty,\ n)$-范畴。如果 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个对称幺半 $(\infty,\ n)$-范畴，那么对称幺半函子 $(\infty,\ n)$构成的 -范畴F: $\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 会获得“逐点张量积”的对称幺半结构，其定义公式如下

$$(F_1\otimes F_2)(x)\coloneqq F_1(x)\otimes_{\mathcal{D}}F_2(x), \tag{3.13}$$

其中 x 是一个对象、态射、高阶态射等。

定义 3.14（Freed-Moore [FM06，定义 5。7]）。设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半 (∞,n)-范畴。一个 可逆场论 是一个场论 $\alpha\colon \mathcal{B}ord_n^{\xi}\to\mathcal{C}$，满足存在另一个场论 $\alpha^{-1}\colon \mathcal{B}ord_n^{\xi}\to\mathcal{C}$，使得 $\alpha\otimes\alpha^{-1}\simeq\mathbf{1}$，即平凡理论。

平凡理论 **第一部分**：$\mathcal{B}ord_n^{\xi}\to\mathcal{C}$ 定义为将所有对象映射到 $\mathcal{C}$ 中的幺半群单位，并将所有态射和高阶态射分别映射为恒等态射和恒等高阶态射。

因此，反常的分类可由可逆场论的分类得出，而反常抵消则是从可逆场论到**第一部分**的同构。Freed-Hopkins-Teleman [FHT10] 利用稳定同伦论对可逆拓扑场论进行分类，而 Grady-Pavlov [GP21，§5] 则将其推广到了非拓扑情形。

在大多数情况下，包括本文研究的超引力理论，所研究的量子场论都是幺正的，因此其反常理论具有幺正性的 Wick 旋转类比，反射正性。Freed-Hopkins [FH21b] 对反射正性可逆场论进行了分类。

令 $I_{\mathbb{Z}}$ 表示球谱的 *Anderson* 对偶 [And69，Yos75]。

定理 3.15 (Freed-Hopkins [FH21b，定理 1。1])。设 ξ 为一个切结构。由 $(n+1)$维流形上的反射正性可逆拓扑场论的形变类群到 ξ的挠子子群存在一个自然同构，其中 $[MT\xi,\ \Sigma^{n+2}I_{\mathbb{Z}}]$。

Freed-Hopkins 随后猜想（同上，猜想 8.37），整个群能够对所有反射正性可逆场论进行分类，无论其是否为拓扑场论。

$I_{\mathbb{Z}}$ 萨蒂满足一个泛性质，由此可得一个自然短正合列的存在 e

$$0\longrightarrow \mathrm{Tors}(\mathrm{Hom}(\Omega^{\xi}_{n+1},\mathbb{T}))\longrightarrow [MT\xi,\Sigma^{n+2}I_{\mathbb{Z}}]\longrightarrow \mathrm{Hom}(\Omega^{\xi}_{n+2},\mathbb{Z})\longrightarrow 0, \tag{3.16}$$

而且，对于一个 n 维量子场论 Z 可能反常的分类而言，这个序列具有物理意义。例如，$\mathrm{Hom}(\Omega^{\xi}_{n+2},\mathbb{Z})$ 是流形范畴中 ξ 流形的 $\mathbb{Z}$ 值 $n+2$ 次特征类所构成的群，而式 (3.16) 中的商映射将 Z 的反常场论映射为其反常多项式。对于 Z，通常可以利用微扰技术计算这些数据，这些数据称为局域反常。因此，可以使用配边计算来评估量子场论的可能反常群，以及特定反常场论是否可平凡化；关于近期利用此技术研究弦论和超引力理论中的反常消除定理，参见 [FH21a、TY21、DDHM22、LY22、DY22、Tac22、DOS23] 。

3.2.1. 杂化弦的反常。$\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8$ 杂化弦。对于 $\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8$ 杂化弦，反常场论是群 $[MT\xi^{\mathrm{het}},\Sigma^{12}I_{\mathbb{Z}}]$ 的一个元素：自由部分与 $\Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}_{12}$ 的自由部分非典范同构，挠部分与 $\Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}_{11}$ 的挠子子群非典范同构。尽管我们尚未完全确定这些群，但 $\Omega^{\xi^{\mathrm{het}}}_{11}$ 非零，正如我们所证明的

在定理 2.62中，因此存在需要消除非平凡反常的可能性。人们通常认为反常场论本身是平凡的，因为物理学家已经对 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 杂化弦理论进行了许多一致性检验，但有时也会出现意外：在与 Dierigl、Heckman 和 Montero 的合作研究中 [DDHM22]，我们发现，IIB 型弦理论中对偶对称性的反常理论非零，因此需要修改该理论才能将其平凡化。

对于 $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ 杂化弦，已有相当多的工作在特殊情形下抵消反常，但对于完整的切结构 ξ^{het}，反常抵消问题仍未解决。Green-Schwarz [GS84] 的早期工作表明反常多项式为零，因此根据（3.16），我们只需考察出自 $\Omega_{11}^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 的配边不变量。如果忽略$\mathbb{Z}/2$ 交换对称性，反常已知是平凡的：Witten [Wit86, §4] 证明了全局反常由配边不变量 $\Omega_{11}^{\mathrm{Spin}}(B\mathrm{E}_8) \to \mathbb{C}^\times$分类，而 Stong [Sto86] 证明了 $\Omega_{11}^{\mathrm{Spin}}(B\mathrm{E}_8) = 0$（另见注 2.34）。Sati [Sat11a] 则从 $\Omega_{11}^{\mathrm{String}}\, B(\mathrm{E}_8)$ 的角度研究了一个密切相关的问题。

Tachikawa-Yamashita 的近期工作 [TY21]（另见 Tachikawa [Tac22] 和 Yonekura [Yon22，§4]）利用一种巧妙的 *TMF*方法，抵消了大类异质弦理论紧化中的反常。他们的工作没有考虑 $\mathbb{Z}/2$ 交换对称性。若要处理 ξ^{het}-流形上的完整反常，可以直接在 $\Omega_{11}^{\xi^{\mathrm{het}}}$ 的生成元上计算，或者改造 Tachikawa-Yonekura 的论证，这将十分有趣。如果这一对称性确实具有非平凡反常，那么它将对 CHL弦产生影响：要么需要修改该理论，要么表明该理论是不自洽的。

3.2.2. *CHL*弦的反常。 CHL弦的反常抵消研究较少。在定理 2.90 和 2.92中，我们看到 $\Omega_{11}^{\xi^{\mathrm{CHL}}}$ 是挠元，因此反常多项式为零；我们还看到 $\Omega_{10}^{\xi^{\mathrm{CHL}}} \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$，因此反常场论有可能是非平凡的，这一点值得研究。

参考文献

[ABG10] Matthew Ando、Andrew J. Blumberg 和 David Gepner。《 K-理论与 TMF 的扭曲》。载于《超弦、几何、拓扑与 C^*-代数》，《纯数学研讨会论文集》第 81 卷，第 27–63 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2010年。 https://arxiv.org/abs/1002.3004。21、22、23[ABG+14a] Matthew Ando、Andrew J. Blumberg、David Gepner、Michael J. Hopkins 和 Charles Rezk。《∞范畴方法： R-线丛、 R-模 Thom 谱与扭曲的 R-同调》。《拓扑学杂志》，7(3)：869–893，2014年。 https://arxiv.org/abs/1403.4325。4、20、21[ABG+14b] Matthew Ando、Andrew J. Blumberg、David Gepner、Michael J. Hopkins 和 Charles Rezk。《通过刚性无穷环空间理论研究环谱的单位、定向与 Thom 谱》。《拓扑学杂志》，7(4)：1077–1117，2014年。 https://arxiv.org/abs/1403.4320。4、20、21、22、25[ABG18] Matthew Ando、Andrew J. Blumberg 和 David Gepner。《参数化谱、乘法 Thom 谱与扭曲的 Umkehr 映射》。《几何与拓扑》，22(7)：3761–3825，2018年。 https://arxiv.org/abs/1112.2203。22[ABP67] D. W. Anderson、E. H. Brown, Jr. 和 F. P. Peterson。《Spin 余边环的结构》。《数学年刊》（第2辑），86：271–298，1967年。25、28[ABP69] D. W. Anderson、E. H. Brown, Jr. 和 F. P. Peterson。《Pin 配边及相关主题》。《瑞士数学评论》，44：462–468，1969年。18[ABS64] M.F. Atiyah、R. Bott 和 A. Shapiro。《Clifford 模》。《Topology》，3（增刊1）：3–38，1964年。22、39[ACC22] David Andriot、Nils Carqueville 和 Niccolò Cribiori。《在配边猜想中寻找结构》。《SciPost物理》，13(3)：论文编号071，共38页，2022年。 https://arxiv.org/abs/2204.00021。49

[ADH21] Araminta Amabel、Arun Debray 和 Peter J. Haine（编）。《微分上同调：范畴、特征类与联络》。2021年。 https://arxiv.org/abs/2109.12250。12[AHR10] Matthew Ando、Michael J. Hopkins 和 Charles Rezk。《KO理论与拓扑模形式谱的乘法定向》。2010年。 https://faculty.math.illinois.edu/~mando/papers/koandtmf.pdf。22、45[Ale75] J. C. Alexander。《关于 (U, Sp)配边》。《美国数学杂志》，97(3)：617–625，1975年。50[And69] D.W. Anderson。《 K-理论的万有系数定理》。1969年。 https://faculty.tcu.edu/gfriedman/notes/Anderson-UCT.pdf。53[AS69] M. F. Atiyah 和 G. B. Segal。《等变 K-理论与完备化》。《微分几何杂志》，3：1–18，1969年。20[AS04] Michael Atiyah 和 Graeme Segal。《扭曲的 K-理论》。《乌克兰数学通报》，1(3)：287–330，2004年。 https://arxiv.org/abs/math/0407054。22[ATD10] Allan Adams、Washington Taylor 和 Oliver DeWolfe。《十维中的弦普适性》。《物理评论快报》，105(7)：071601，共4页，2010年。 https://arxiv.org/abs/1006.1352。6[Ati61] Michael Atiyah。《配边与余配边》。《剑桥哲学学会会刊》，57：200–208，1961年。23[Ati88] Michael Atiyah。《拓扑量子场论》。《高等科学研究所数学出版物》，68：175–186，1988年。53[Bae02] John C. Baez。《高阶杨–米尔斯理论》。2002年。 https://arxiv.org/abs/hep-th/0206130。2、10[Bar06] Toby Bartels。《高阶规范理论第一部分：2-丛》。博士论文，加州大学河滨分校，2006年。 https://arxiv.org/abs/math/0410328。10[BBPX22] Agnès Beaudry、Irina Bobkova、Viet-Cuong Pham 和 Zhouli Xu。《$\mathbb{R}P^2$ 与 $\mathbb{R}P^2 \wedge \mathbb{C}P^2$的拓扑模形式》。《拓扑学杂志》，15(4)：1864–1926，2022年。 https://arxiv.org/abs/2103.10953。41[BC04] John C. Baez 和 Alissa S. Crans。《高维代数第六部分：李2-代数》。《范畴论及其应用》，12：492–538，2004年。 https://arxiv.org/abs/math/0307263。2[BC18] Agnès Beaudry 和 Jonathan A. Campbell。《计算稳定同伦群指南》。载于《拓扑学与量子理论的相互作用》，《当代数学》第 718 卷，第 89–136 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2018年。 https://arxiv.org/abs/1801.07530。4、18、29、30[BC22] Ralph Blumenhagen 和 Niccolò Cribiori。《K-理论与配边的开闭对应》。《高能物理学杂志》，(8)：论文编号37，2022年。 https://arxiv.org/abs/2112.07678。49[BCH19] Francesco Benini、Clay Córdova 和 Po-Shen Hsin。《关于2-群全局对称性及其反常》。《高能物理学杂志》，(3)：118，共70页，2019年。 https://arxiv.org/abs/1803.09336。2[BCKM22] Ralph Blumenhagen、Niccolò Cribiori、Christian Kneißl 和 Andriana Makridou。《畴壁及其伴随缺陷7-膜的动力学余配边》。《高能物理学杂志》，(8)：论文编号204，2022年。 https://arxiv.org/abs/2205.09782。49[BdRdWvN82] E. Bergshoeff、M. de Roo、B. de Wit 和 P. van Nieuwenhuizen。《十维麦克斯韦–爱因斯坦超引力、其流及辅助场问题》。《核物理B辑》，195：97–136，1982年。9[BE23] Daniel Berwick-Evans。《场论如何探测拓扑模形式中的挠元？》2023年。 https://arxiv.org/abs/2303.09138。5[Bea17] Jonathan Beardsley。《通过幺半群算子Kan扩张构造相对 Thom 谱》。《代数与几何拓扑》，17(2)：1151–1162，2017年。 https://arxiv.org/abs/1601.04123。22[Beh06] Mark Behrens。《 $K(2)$-局部球面在素数3处的模描述》。《Topology》，45(2)：343–402，2006年。 https://arxiv.org/abs/math/0507184。46[BF78] A. K. Bousfield 和 E. M. Friedlander。《 Γ-空间、谱与双单纯集的同伦论》。载于《同伦论的几何应用》（1977年伊利诺伊州埃文斯顿会议论文集）第二部分，《数学讲义》第 658 卷，第 80–130 页。施普林格，柏林，1978年。12[BH58] A. Borel 和 F. Hirzebruch。《特征类与齐性空间第一部分》。《美国数学杂志》，80：458–538，1958年。34[BH59] A. Borel 和 F. Hirzebruch。《特征类与齐性空间第二部分》。《美国数学杂志》，81：315–382，1959年。44[BKRU20] Vijay Balasubramanian、Arjun Kar、Simon F. Ross 和 Tomonori Ugajin。《自旋结构与婴儿宇宙》。《高能物理学杂志》，(9)：192，共30页，2020年。 https://arxiv.org/abs/2007.04333。49

[BL01] Andrew Baker 和 Andrej Lazarev。关于 R-模的 Adams 谱序列。Algebr. Geom. Topol., 1:173–199, 2001。 https://arxiv.org/abs/math/0105079. 45[BL04] John C. Baez 和 Aaron D. Lauda。高维代数。V. 2-群。《范畴论及其应用》, 12:423–491, 2004。 https://arxiv.org/abs/math/0307200. 2, 11[BN14] Ulrich Bunke 和 Niko Naumann。弦配边与拓扑模形式的次级不变量。Bull. Sci. Math., 138(8):912–970, 2014。 https://arxiv.org/abs/0912.4875. 5[BNV16] Ulrich Bunke、Thomas Nikolaus 和 Michael Völkl。作为谱层的微分上同调理论。J. Homotopy Relat. Struct., 11(1):1–66, 2016。 https://arxiv.org/abs/1311.3188. 12, 13[Boa65] J.M. Boardman。稳定同伦论。1965年。油印讲义。14, 21[Bou01] A. K. Bousfield。关于空间的望远镜同伦论。美国数学会汇刊, 353(6):2391–2426, 2001。12[BR21] Robert R. Bruner 和 John Rognes。拓扑模形式的 Adams 谱序列，数学调查与专著第253卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2021年。30, 31, 36, 41, 42, 46[Bro82] Edgar H. Brown, Jr.。BSO_n 和 BO_n 的整数系数上同调。Proc. Amer. Math. Soc., 85(2):283–288, 1982。8[Bru18] Robert Bruner。Ext（计算机软件），2018年。 http://www.rrb.wayne.edu/papers/index.html#code. 30[Bry93] Jean-Luc Brylinski。环空间、特征类与几何量子化，数学进展第107卷。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1993年。7, 8[BS58] Raoul Bott 和 Hans Samelson。莫尔斯理论在对称空间中的应用。《美国数学杂志》, 80:964–1029, 1958年。15, 26, 44[BS07] John C. Baez 和 Urs Schreiber。高阶规范理论。载于《代数、几何与数学物理中的范畴》，《当代数学》第431卷，第7–30页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007年。 https://arxiv.org/abs/math/0511710. 2[BS09] John C. Baez 和 Danny Stevenson。拓扑2-群的分类空间。载于《代数拓扑》，Abel Symp. 第4卷，第1–31页。施普林格，柏林，2009年。 https://arxiv.org/abs/0801.3843. 11[BSCS07] John C. Baez、Danny Stevenson、Alissa S. Crans 和 Urs Schreiber。从环群到2-群。Homology Homotopy Appl., 9(2):101–135, 2007年。 https://arxiv.org/abs/math/0504123. 2, 11[Bun15] Ulrich Bunke。带边界流形的普适 η-不变量。《数学季刊》, 66(2):473–506, 2015年。 https://arxiv.org/abs/1403.2030. 50[Car50] Henri Cartan。可微主丛的实上同调。I：微分代数的概念，李群的韦伊代数。亨利·嘉当研讨班, 2, 1949-1950年。9[Car54] Henri Cartan。关于 Eilenberg-Mac Lane 群。II。Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 40:704–707, 1954年。44[CC21] Hood Chatham 和 Dexter Chua。Spectralsequences（计算机软件），2021年。 https://github.com/spectralsequences/sseq/. 30[CCG10] Pilar Carrasco、Antonio M. Cegarra 和 Antonio R. Garzón。双范畴的神经与分类空间。《代数与几何拓扑》, 10(1):219–274, 2010年。 https://arxiv.org/abs/0903.5058. 11[CDI19] ClayCórdova、Thomas T.Dumitrescu 和 Kenneth Intriligator。探索2-群全局对称性。《高能物理学杂志》, (2):184, 前置部分，2019年。 https://arxiv.org/abs/1802.04790. 2[CDLZ20] Mirjam Cvetič、Markus Dierigl、Ling Lin 和 Hao Y. Zhang。弦普适性与八维中的非单连通规范群。《物理评论快报》, 125:211602, 2020年11月。 https://arxiv.org/abs/2008.10605. 18[CDLZ21] Mirjam Cvetič、Markus Dierigl、Ling Lin 和 Hao Y. Zhang。八维 Chaudhuri-Hockney-Lykken 真空的规范群拓扑。《物理评论D》, 104:086018, 2021年10月。 https://arxiv.org/abs/2107.04031. 18[CDLZ22] Mirjam Cvetič、Markus Dierigl、Ling Lin 和 Hao Y. Zhang。来自结点的所有八维和九维弦真空。《物理评论D》, 106:026007, 2022年7月。 https://arxiv.org/abs/2203.03644. 18[CF66] P. E. Conner 和 E. E. Floyd。配边与 K-理论的关系。数学讲义，第28号。施普林格出版社，柏林—纽约，1966年。5, 50

[CGH22] Veronica Collazuol、Mariana Graña 和 Alvaro Herráez。杂化弦在S^1 上的 E_9 对称性与弱引力猜想。《高能物理学杂志》, (6):第83号论文，27页，2022年。 https://arxiv.org/abs/2203.01341. 18[Che52] Shiing-shen Chern。纤维丛的微分几何。载于《1950年国际数学家大会论文集》，马萨诸塞州剑桥，第2卷，第397–411页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1952年。9[CHL95] Shyamoli Chaudhuri、George Hockney 和 Joseph Lykken。十维中的极大超对称弦理论。《物理评论快报》, 75(12):2264–2267, 1995年。 https://arxiv.org/abs/hep-th/9505054. 16[CHZ11] Qingtao Chen、Fei Han 和 Weiping Zhang。广义维滕属与消失定理。微分几何杂志, 88(1):1–40, 2011年。 https://arxiv.org/abs/1003.2325. 18[CM83] G. F. Chapline 和 N. S. Manton。十维中杨–米尔斯理论与超引力的统一。Phys. Lett. B, 120(1-3):105–109, 1983年。9[CMM22] Peng Cheng、Ilarion V. Melnikov 和 Ruben Minasian。平坦等变幺半丛：全纯性与对偶。2022年。 https://arxiv.org/abs/2207.06885. 18[CP95] Shyamoli Chaudhuri 和 Joseph Polchinski。Chaudhuri-Hockney-Lykken弦的模空间。《物理评论D》（第3辑）, 52(12):7168–7173, 1995年。 https://arxiv.org/abs/hep-th/9506048. 16, 18[CS85] Jeff Cheeger 和 James Simons。微分特征与几何不变量。载于《几何与拓扑》（马里兰州大学公园市，1983/84），《数学讲义》第1167卷，第50–80页。施普林格，柏林，1985年。13[dBDH+00] Jan de Boer、Robbert Dijkgraaf、Kentaro Hori、Arjan Keurentjes、John Morgan、David R. Morrison 和 Savdeep Sethi。三元组、通量与弦。理论与数学物理进展, 4(5):995–1186 (2001), 2000年。 https://arxiv.org/abs/hep-th/0103170. 7, 16[DD63] Jacques Dixmier 和 Adrien Douady。希尔伯特空间丛的连续场与 C^*-代数。Bull. Soc. Math. France, 91:227–284, 1963年。7[DDHM22] Arun Debray、Markus Dierigl、Jonathan J. Heckman 和 Miguel Montero。那场本不该发生的反常 IIB。Fortschr. Phys., 70(1):第2100168号论文，31页，2022年。 https://arxiv.org/abs/2107.14227. 53, 54[DDHM23] Arun Debray、Markus Dierigl、Jonathan J. Heckman 和 Miguel Montero。《IIBordia编年史：对偶、配边与沼泽地》。2023年。 https://arxiv.org/abs/2302.00007. 19, 40, 49, 51, 52[DDK+] Arun Debray、Sanath Devalapurkar、Cameron Krulewski、Yu Leon Liu、Natalia Pacheco-Tallaj 和 Ryan Thorngren。对称性破缺中的长正合列：序参量约束、缺陷反常匹配与高阶贝里相。34[DFHH14] Christopher L Douglas、John Francis、André G Henriques 和 Michael A Hill（编）。拓扑模形式，数学调查与专著第201卷。美国数学会，2014年。46[DFM11a] Jacques Distler、Daniel S. Freed 和 Gregory W. Moore。定向反演简述。载于《量子场论与微扰弦理论的数学基础》，纯粹数学研讨会论文集第83卷，第159–172页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011年。 https://arxiv.org/abs/0906.0795. 23, 48, 49[DFM11b] Jacques Distler、Daniel S. Freed 和 Gregory W. Moore。自旋结构与超弦。载于《微分几何综述》第XV卷：数学与物理学展望，《微分几何综述》第15卷，第99–130页。Int. Press，马萨诸塞州萨默维尔，2011年。 https://arxiv.org/abs/1007.4581. 23, 48[DH21] Markus Dierigl 和 Jonathan J. Heckman。沼泽地配边猜想与非阿贝尔对偶群。《物理评论D》, 103(6):第066006号论文，12页，2021年。 https://arxiv.org/abs/2012.00013. 49[DHMT22] Markus Dierigl、Jonathan J. Heckman、Miguel Montero 和 Ethan Torres。IIB探索：反射7-膜。2022年。 https://arxiv.org/abs/2212.05077. 49[DK70] P. Donovan 和 M. Karoubi。分次布劳尔群与具有局部系数的 K-理论。Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (38):5–25, 1970年。22[DL23] Joe Davighi 和 Nakarin Lohitsiri。通过配边研究环面2-群反常。2023年。附有 Arun Debray 撰写的数学附录。 https://arxiv.org/abs/2302.12853. 19

[DM78] Donald M. Davis 和 Mark Mahowald。 RP^{8l+7} 的浸入猜想是错误的。《美国数学会汇刊》，236:361–383，1978年。30, 32, 41, 42[DM82] Donald M. Davis 和 Mark Mahowald。关于截断射影空间的 Steenrod 代数子代数 A_2 上的 Ext。载于《代数拓扑当前趋势》，第 1 部分（加拿大安大略省伦敦，1981），CMS 会议论文集第 2 卷，第 297–342 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1982年。30[Don78] Harold Donnelly。 G-空间的 Eta 不变量。印第安纳大学数学杂志，27(6):889–918，1978年。32[DOS23] Markus Dierigl、Paul-Konstantin Oehlmann 和 Thorsten Schimannek。六维 F 理论中的离散格林-施瓦茨机制与非临界弦的椭圆属。《高能物理学杂志》，(3):第 90 号论文，2023年。 https://arxiv.org/abs/2212.04503。53[Dou06] Christopher L. Douglas。单李群的扭曲 K-同调。《Topology》，45(6):955–988，2006年。 https://arxiv.org/abs/math/0402082。23[Dug01] Daniel Dugger。普适同伦论。《Advances in Mathematics》，164(1):144–176，2001年。 https://arxiv.org/abs/math/0007070。12[DY] Arun Debray 和 Matthew Yu。非向量丛托姆谱的 Adams 谱序列。即将出版。4, 5, 6, 24, 34, 46[DY22] Arun Debray 和 Matthew Yu。配边理论中的反常消除能为 U 做什么。2022年。https://arxiv.org/abs/2210.04911。18, 53[Edw91] Steven R. Edwards。关于 $B(E_8 \times E_8)$的 Spin 配边。《伊利诺伊数学杂志》，35(4):683–689，1991年。49[Eve65] Leonard Evens。有限群表示的陈类。《美国数学会汇刊》，115:180–193，1965年。27[Fan99] Fuquan Fang。具有六个不同主曲率的杜平超曲面的拓扑。《Mathematische Zeitschrift》，231(3):533–555，1999年。4[FFG+20] Anamaría Font、Bernardo Fraiman、Mariana Graña、Carmen A. Núñez 和 Héctor Parra De Freitas。探索 T^d上的异质弦景观。《高能物理学杂志》，(10):194，73，2020年。https://arxiv.org/abs/2007.10358。18[FFG+21] Anamaría Font、Bernardo Fraiman、Mariana Graña、Carmen A. Núñez 和 Héctor Parra De Freitas。探索 T^d上的 CHL弦景观。《高能物理学杂志》，(8):第 095 号论文，46，2021年。https://arxiv.org/abs/2104.07131。18[FGN18] Bernardo Fraiman、Mariana Graña 和 Carmen A. Núñez。杂化弦紧化的新扭曲。《高能物理学杂志》，(9):078，前置部分+97，2018年。 https://arxiv.org/abs/1805.11128。18[FH13] Daniel S. Freed 和 Michael J. Hopkins。陈-韦伊形式与抽象同伦论。《美国数学会通报》（新系列），50(3):431–468，2013年。 https://arxiv.org/abs/1301.5959。12[FH21a] Daniel S. Freed 和 Michael J. Hopkins。不可定向流形上的 M理论一致性。《数学季刊》，72(1-2):603–671，2021年。 https://arxiv.org/abs/1908.09916。16, 18, 32, 34, 38, 40, 47, 49, 50, 53[FH21b] Daniel S. Freed 和 Michael J. Hopkins。反射正性与可逆拓扑相。《Geometry & Topology》，25(3):1165–1330，2021年。 https://arxiv.org/abs/1604.06527。3, 19, 53[FHT10] Daniel S. Freed、Michael J. Hopkins 和 Constantin Teleman。模空间的一致定向。载于《几何的诸多面向》，第 395–419 页。牛津大学出版社，牛津，2010年。 https://arxiv.org/abs/0711.1909。3, 53[FK96] Fuquan Fang 和 Stephan Klaus。四维完全交的拓扑分类。《Manuscripta Mathematica》，90(2):139–147，1996年。4[FM06] Daniel S. Freed 和 Gregory W. Moore。确定 M理论的量子被积函数。《数学物理通讯》，263(1):89–132，2006年。 https://arxiv.org/abs/hep-th/0409135。53[FPDF21] Bernardo Fraiman 和 Héctor Parra De Freitas。七维异质弦中的对称性增强。《高能物理学杂志》，(10):第 002 号论文，34，2021年。 https://arxiv.org/abs/2106.08189。18[FPDF22] Bernardo Fraiman 和 Héctor Parra De Freitas。异质弦在 T^4上的规范对称性冻结。《高能物理学杂志》，(4):第 007 号论文，21，2022年。 https://arxiv.org/abs/2111.09966。18[Fra11] John Francis。自旋流形上的积分以及 K(ℤ,4) 的 K理论。2011年。 https://sites.math.northwestern.edu/~jnkf/writ/bspin2011.pdf。38

[FSS12] Domenico Fiorenza、Urs Schreiber 和 Jim Stasheff。微分特征类的 Čech 上循环：一种 ∞-李理论构造。理论与数学物理进展，16(1):149–250，2012年。 https://arxiv.org/abs/1011.4735。2, 5, 6, 9, 12, 13[FSS15a] Domenico Fiorenza、Hisham Sati 和 Urs Schreiber。M理论中 C 场的 E_8 模空间 3-层叠。《数学物理通讯》，333(1):117–151，2015年。 https://arxiv.org/abs/1202.2455。2, 14, 15, 17[FSS15b] Domenico Fiorenza、Hisham Sati 和 Urs Schreiber。陈-西蒙斯理论的高阶层叠视角。载于《量子场论的数学方面》，《数学物理研究》，第 153–211 页。施普林格，沙姆，2015年。2[FSS20] Domenico Fiorenza、Hisham Sati 和 Urs Schreiber。扭曲余同伦蕴含八维流形上的 M理论反常抵消。《数学物理通讯》，377(3):1961–2025，2020年。 https://arxiv.org/abs/1904.10207。16[FSS21] Domenico Fiorenza、Hisham Sati 和 Urs Schreiber。扭曲余同伦蕴含 M5 膜上的扭曲弦结构。《数学物理杂志》，62(4):第 042301 号论文，16，2021年。 https://arxiv.org/abs/2002.11093。2, 15[FT14] Daniel S. Freed 和 Constantin Teleman。相对量子场论。《数学物理通讯》，326(2):459–476，2014年。 https://arxiv.org/abs/1212.1692。52[FW99] Daniel S. Freed 和 Edward Witten。带 D 膜的弦理论中的反常。《亚洲数学杂志》，3(4):819–851，1999年。 https://arxiv.org/abs/hep-th/9907189。23[FW10] Fuquan Fang 和 Jianbo Wang。五、六、七维复射影完全交的同胚分类。《 Mathematische Zeitschrift 》，266(3):719–746，2010 年。4[GEMSV20] Iñaki García Etxebarria、Miguel Montero、Kepa Sousa 和 Irene Valenzuela。弦紧化中没有任何事情是确定的。《高能物理学杂志》，(12):第 032 号论文，105，2020年。 https://arxiv.org/abs/2005.06494。49[Ger63] Hillel H. Gershenson。Adams 谱序列与 Toda 对球面稳定同伦群的计算之间的关系。《Mathematische Zeitschrift》，81:223–259，1963年。45[Gia71] V. Giambalvo。关于 h8i 配边。《伊利诺伊数学杂志》，15:533–541，1971年。19, 25, 42[Gia73a] V. Giambalvo。带有一个关系的线丛配边。《伊利诺伊数学杂志》，17:442–449，1973年。18[Gia73b] V. Giambalvo。Pin 与 Pin′ 配边。《美国数学会会刊》，39:395–401，1973年。18[Gia76] V. Giambalvo。带对合的自旋流形配边。《牛津数学季刊》（第二辑），27(106):241–252，1976年。18[Gir71] Jean Giraud。《非阿贝尔上同调》。《数学科学基础原理》第 179 卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1971年。7[GMM68] S. Gitler、M. Mahowald 和 R. James Milgram。 RP^n 的非浸入问题及高阶上同调运算。《美国国家科学院院刊》，60:432–437，1968年。32[GP21] Daniel Grady 和 Dmitri Pavlov。几何配边猜想。2021年。 https://arxiv.org/abs/2111.01095。53[Gre06] Robert Greenblatt。带局部系数的同调与特征类。《同调、同伦与应用》，8(2):91–103，2006年。17[GS84] Michael B. Green 和 John H. Schwarz。超对称 $D = 10$ 规范理论和超弦理论中的反常抵消。《物理快报 B》，149(1-3):117–122，1984年。2, 6, 9, 54[HHD21] Ruizhi Huang、Fei Han 和 Haibao Duan。弦^c 结构与模不变量。《美国数学会汇刊》，374(5):3491–3533，2021年。 https://arxiv.org/abs/1905.02093。5[Hil07] Michael A. Hill。 $B\Sigma_3$的 3-局部 tmf-同调。《美国数学会会刊》，135(12):4075–4086，2007年。 https://arxiv.org/abs/math/0511649。46[Hil09] Michael A. Hill。 BE_8 与 $BE_8 \times BE_8$ 的弦配边，维数不超过 14。《伊利诺伊数学杂志》，53(1):183–196，2009年。 https://arxiv.org/abs/0807.2095。4, 19, 43, 44, 45, 46, 47[HJ20] Fabian Hebestreit 和 Michael Joachim。扭曲自旋配边与正标量曲率。《拓扑学杂志》，13(1):1–58，2020年。 https://arxiv.org/abs/1311.3164。4, 22, 23[Hoá75] Hoáng Xuân Sính。《Gr-范畴》。博士论文，巴黎第七大学，1975年。10[Hov08] Mark Hovey。大素数处 M String 与 M Uh6i 的同伦。《代数与几何拓扑》，8(4):2401–2414，2008年。19

[HR95] Mark A. Hovey 和 Douglas C. Ravenel。《 $p = 3$处的 7-连通配边环》。美国数学会汇刊，347(9):3473–3502，1995年。19，45[HS05] M. J. Hopkins 和 I. M. Singer。《几何、拓扑与 M理论中的二次函数》。《微分几何杂志》，70(3):329–452，2005年。 https://arxiv.org/abs/math/0211216。12[HW96a] Petr Hořava 和 Edward Witten。《带边界流形上的十一维超引力》。《核物理B》，475(1-2):94–114，1996年。 https://arxiv.org/abs/hep-th/9603142。5，49[HW96b] Petr Hořava 和 Edward Witten。《从十一维出发的异质弦与 I型弦动力学》。《核物理B》，460(3):506–524，1996年。 https://arxiv.org/abs/hep-th/9510209。5，49[Jen05] Jerome A. Jenquin。《带自旋结构流形上的经典切尔恩-西蒙斯理论》。2005年。 https://arxiv.org/abs/math/0504524。8[JFT20] Theo Johnson-Freyd 和 David Treumann。$\mathrm{H}^4(\mathrm{Co}_0;\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}/24$。《国际数学研究通知》，(21):7873–7907，2020年。 https://arxiv.org/abs/1707.07587。8[Joa04] Michael Joachim。《等变 K-理论的高阶相干性》。载于《结构化环谱》，伦敦数学会讲义系列第315卷，第87–114页。剑桥大学出版社，剑桥，2004年。22[Kah84] Bruno Kahn。《二次型与实伽罗瓦表示的 Stiefel-Whitney 类》。《数学发明》，78(2):223–256，1984年。27[KOTY23] Justin Kaidi、Kantaro Ohmori、Yuji Tachikawa 和 Kazuya Yonekura。《非超对称异质膜》。2023年。 https://arxiv.org/abs/2303.17623。4，49，51[KPMT20] Justin Kaidi、Julio Parra-Martinez 和 Yuji Tachikawa。《超弦世界面上的拓扑超导体》。《SciPost物理》，9:10，2020年。数学附录由 Arun Debray 撰写。 https://arxiv.org/abs/1911.11780。49[KS04] Igor Kriz 和 Hisham Sati。《M理论、IIA型超弦与椭圆上同调》。《理论与数学物理进展》，8(2):345–394，2004年。 https://arxiv.org/abs/hep-th/0404013。18[KT17] Anton Kapustin 和 Ryan Thorngren。《规范理论的高阶对称性与有能隙相》。载于《21世纪的代数、几何与物理》，数学进展第324卷，第177–202页。Birkhäuser/Springer，Cham，2017年。 https://arxiv.org/abs/1309.4721。19[Kud56] Tatsuji Kudo。《一个转移定理》。《九州大学理学部纪要 A》，9:79–81，1956年。43，44[Las63] R. Lashof。《庞加莱对偶与配边》。《美国数学会汇刊》，109:257–277，1963年。14[Lau00] Gerd Laures。《带角流形的配边》。《美国数学会汇刊》，352(12):5667–5688，2000年。50[Lea97] Ian J. Leary。《花环积的整上同调》。《代数杂志》，198(1):184–239，1997年。27[LMSM86] L. G. Lewis, Jr.、J. P. May、M. Steinberger 和 J. E. McClure。《等变稳定同伦论》，数学讲义第1213卷。施普林格出版社，柏林，1986年。J. E. McClure 撰写了相关贡献。21，22[LS97] Yves Laszlo 和 Christoph Sorger。《曲线上抛物 G-丛的模空间上的线丛及其截面》。《高等师范学校科学年刊》(4)，30(4):499–525，1997年。 https://arxiv.org/abs/alg-geom/9507002。19[LSW20] John A. Lind、Hisham Sati 和 Craig Westerland。《扭曲迭代代数 K-理论与球丛的拓扑T对偶》。《K理论年刊》，5(1):1–42，2020年。 https://arxiv.org/abs/1601.06285。23[LT21] Yasunori Lee 和 Yuji Tachikawa。《关于六维整体规范反常的几点评论》。《理论与实验物理进展》，(8):第08B103号论文，29，2021年。 https://arxiv.org/abs/2012.11622。19[Lur09] Jacob Lurie。《高阶托扑斯理论》，数学年刊研究第170卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009年。 https://people.math.harvard.edu/~lurie/papers/highertopoi.pdf。12[LW23] Matthias Ludewig 和 Konrad Waldorf。《由环群扩张得到的李2群》。2023年。 https://arxiv.org/abs/2303.13176。11[LY22] Yasunori Lee 和 Kazuya Yonekura。《八维超引力中的整体反常》。《高能物理学杂志》，(7):第125号论文，2022年。 https://arxiv.org/abs/2203.12631。38，53[Mac71] Saunders MacLane。《工作数学家的范畴论》。数学研究生教材，第5卷。施普林格出版社，纽约—柏林，1971年。10

[May65] J. Peter May。《Steenrod代数的上同调；球面的稳定同伦群》。《美国数学会通报》，71:377–380，1965年。45[May66] J. P. May。《受限李代数与 Hopf代数的上同调》。《代数杂志》，3:123–146，1966年。30，45[McI99] Brett McInnes。《弦理论中的半自旋群》。《数学物理杂志》，40(10):4699–4712，1999年。https://arxiv.org/abs/hep-th/9906059。6，7[McT14] Carl McTague。《凯莱平面与弦配边》。《几何与拓扑》，18(4):2045–2078，2014年。https://arxiv.org/abs/1111.4520。5[MDL23] David Martín Velázquez、Davide De Biasio 和 Dieter Lüst。《配边、奇点与里奇流猜想》。《高能物理学杂志》，(1):第126号论文，49，2023年。https://arxiv.org/abs/2209.10297。49[MG95] Mark Mahowald 和 Vassily Gorbounov。《余边谱 MOh8i 的一些同伦》。载于《同伦论及其应用》（Cocoyoc，1993年），《当代数学》第188卷，第105–119页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1995年。19[Mil60] J. Milnor。《关于余边环 Ω^* 及其一个复类比》。第一部分。《美国数学杂志》，82:505–521，1960年。45，48[Mil65] John W. Milnor。《关于自旋流形的评论》。载于《微分与组合拓扑（纪念 Marston Morse 的研讨会）》，第55–62页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1965年。40[Mit75] G. E. Mitchell。《带定向边界的流形的配边》。《美国数学会会刊》，47:208–214，1975年。50[MLW50] Saunders Mac Lane 和 J. H. C. Whitehead。《复形的3-型》。《美国国家科学院院刊》，36:41–48，1950年。11[MPDF23] Miguel Montero 和 Héctor Parra De Freitas。《由离散 theta 角产生的新型超对称弦理论》。《高能物理学杂志》，(1):第91号论文，47，2023年。https://arxiv.org/abs/2209.03361。18[MR22] Jacob McNamara 和 Matthew Reece。《关于宇称破缺的思考》。2022年。https://arxiv.org/abs/2212.00039。49[MS87] Mark Mahowald 和 Paul Shick。《经典Adams谱序列中的周期现象》。《美国数学会汇刊》，300(1):191–206，1987年。30[Mur96] M. K. Murray。《丛gerbe》。《伦敦数学会杂志》(2)，54(2):403–416，1996年。https://arxiv.org/abs/dg-ga/9407015。2，7[Mur10] Michael K. Murray。《丛gerbe导论》。载于《几何的诸多面向》，第237–260页。牛津大学出版社，牛津，2010年。https://arxiv.org/abs/0712.1651。7[MV99] Fabien Morel 和 Vladimir Voevodsky。概形的 $\mathbb{A}^1$-同伦论。《高等科学研究所数学出版物》，(90):45–143（2001），1999年。12[MV19] Jacob McNamara 和 Cumrun Vafa。《配边类与沼泽地》。2019年。https://arxiv.org/abs/1909.10355。3，6，48，49，50，51，52[MV21] Miguel Montero 和 Cumrun Vafa。《配边猜想、反常与弦路灯柱原理》。《高能物理学杂志》，(1):第063号论文，46，2021年。https://arxiv.org/abs/2008.11729。18，49[Nak61] Minoru Nakaoka。《无限对称群的同调》。《数学年刊》(2)，73:229–257，1961年。27[Nor] Johannes Nordström。MathOverflow 答复：“庞特里亚金类的 Steenrod幂”。https://mathoverflow.net/a/272417/。44[NS19] Avijit Nath 和 Parameswaran Sankaran。《广义多尔德流形》。《大阪数学杂志》，56(1):75–90，2019年。https://arxiv.org/abs/1708.02418。40[NW13] Thomas Nikolaus 和 Konrad Waldorf。《非阿贝尔gerbe的四种等价版本》。《太平洋数学杂志》，264(2):355–419，2013年。https://arxiv.org/abs/1103.4815。10，11[PDF23] Héctor Parra De Freitas。《由冻结奇点产生的新型超对称弦模空间》。《高能物理学杂志》，(1):第170号论文，17，2023年。https://arxiv.org/abs/2209.03451。18[Pet68] F. P. Peterson。《配边理论讲义》。数学讲义。纪伊国屋书店有限公司，1968年。19

[PS05] T. Pantev 和 E. Sharpe。《非有效群作用规范化笔记》。2005年。 https://arxiv.org/abs/hep-th/0502027. 48[PS06a] Tony Pantev 和 Eric Sharpe。《gerbe（及其他环面叠）的 GLSM》。理论与数学物理进展，10(1):77–121，2006年。 https://arxiv.org/abs/hep-th/0502053. 48[PS06b] Tony Pantev 和 Eric Sharpe。《卡拉比－丘叠上的弦紧化》。核物理B，733(3):233–296，2006年。 https://arxiv.org/abs/hep-th/0502044. 48[Qui71] Daniel Quillen。《亚当斯猜想》。《Topology》，10:67–80，1971年。28[Ros89] Jonathan Rosenberg。《从丛理论视角看连续迹代数》。J. Austral. Math. Soc. Ser. A，47(3):368–381，1989年。22[RST77] Nigel Ray、Robert Switzer 和 Larry Taylor。《正规结构与配边理论及其应用于 $M\mathrm{Sp}_*$》。《美国数学会回忆录》，12(193):ix+66，1977年。50[RSW22] Dominik Rist、Christian Saemann 和 Martin Wolf。《带联络的显式非阿贝尔丛》。2022年。 https://arxiv.org/abs/2203.00092. 13[Sat11a] Hisham Sati。《弦流形上的 E_8 规范理论反常》。《国际现代物理学杂志A》，26(13):2177–2197，2011年。 https://arxiv.org/abs/0807.4940. 23, 54[Sat11b] Hisham Sati。《与M膜相关的几何与拓扑结构 II：扭曲弦结构与弦^{c}结构》。《澳大利亚数学会杂志》，90(1):93–108，2011年。 https://arxiv.org/abs/1007.5419. 2, 14, 15, 18[Sat11c] Hisham Sati。《与M膜相关的扭曲拓扑结构》。《国际几何方法与现代物理学杂志》，8(5):1097–1116，2011年。 https://arxiv.org/abs/1008.1755. 23[Sat12] Hisham Sati。《与M膜相关的扭曲拓扑结构 II：扭曲Wu结构与Wu^c 结构》。《国际几何方法与现代物理学杂志》，9(7):1250056，21，2012年。 https://arxiv.org/abs/1109.4461. 23[Sat15] Hisham Sati。《九膜结构》。《国际几何方法与现代物理学杂志》，12(4):1550041，24，2015年。https://arxiv.org/abs/1405.7686. 23[Sch13] Urs Schreiber。《凝聚无穷拓扑斯中的微分上同调》。2013年。 https://arxiv.org/abs/1310.7930。12, 13[Sch21] Lorenz Schlechter。《弦理论中的计算方法及其在沼泽猜想中的应用》。博士论文，慕尼黑路德维希-马克西米利安大学，2021年。 https://edoc.ub.uni-muenchen.de/28084/1/Schlechter_Lorenz.pdf. 49[Seg70] Graeme Segal。《拓扑群的上同调》。载于《数学研讨会论文集》第IV卷（INDAM，罗马，1968/69），第377–387页。Academic Press，伦敦，1970年。10[Seg75] G. B. Segal。《Gel'fand-Fuks意义下拓扑群的分类空间》。《Funkcional. Anal. i Priložen.》，9(2):48–50，1975年。10[Seg88] G. B. Segal。《共形场论的定义》，第165–171页。施普林格荷兰，Dordrecht，1988年。53[Ser52] Jean-Pierre Serre。《关于Eilenberg-MacLane群》。《巴黎科学院院刊》，234:1243–1245，1952年。44[Ser53] Jean-Pierre Serre。《Eilenberg-MacLane复形的模2上同调》。《Comment. Math. Helv.》，27:198–232，1953年。25, 27[Sha77] P. Brian Shay。《Steenrod代数和Dyer-Lashof代数的模 p Wu公式》。《美国数学会会刊》，63(2):339–347，1977年。44[Sha15] Eric Sharpe。《量子场论中广义全局对称性笔记》。《Fortschr. Phys.》，63(11-12):659–682，2015年。 https://arxiv.org/abs/1508.04770. 2[SI67] Nobuo Shimada 和 Akira Iwai。《关于某些Hopf代数的上同调》。《名古屋数学杂志》，30:103–111，1967年。29[SP11] Christopher J. Schommer-Pries。《光滑2群的中心扩张与有限维弦2群》。《Geom. Topol.》，15(2):609–676，2011年。 https://arxiv.org/abs/0911.2483. 10, 11[SP18] Christopher J. Schommer-Pries。《环面可检测拓扑场论的可逆性》。《Geom. Topol.》，22(5):2713–2756，2018年。 https://arxiv.org/abs/1511.01772. 16[SSS12] Hisham Sati、Urs Schreiber 和 Jim Stasheff。《扭曲微分弦结构与五膜结构》。《数学物理通讯》，315(1):169–213，2012年。 https://arxiv.org/abs/0910.4001. 2, 5, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 47

[Sto68] Robert E. Stong。《配边理论笔记》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1968年。数学笔记。50[Sto86] R. E. Stong。《附录：$\Omega_{11}^{\mathrm{Spin}}(K(Z,4))$的计算》。载于《统一弦理论研讨会》（加利福尼亚州圣巴巴拉，1985年），第430–437页。World Sci. Publishing，新加坡，1986年。26, 33, 38, 49, 54[Sug99] Shigeki Sugimoto。《I型D9-D9系统与USp(32)弦理论中的反常抵消》。《理论物理进展》，102(3):685–699，1999年9月。 https://arxiv.org/abs/hep-th/9905159. 18[SW15] Hisham Sati 和 Craig Westerland。《扭曲Morava K-理论与E-理论》。《J. Topol.》，8(4):887–916，2015年。 https://arxiv.org/abs/1109.3867. 23[SY21] Hisham Sati 和 Aliaksandra Yarosh。《扭曲Morava K-理论与李群的连通覆盖》。《代数与几何拓扑》，21(5):2223–2255，2021年。 https://arxiv.org/abs/1711.05389. 23[Tac22] Yuji Tachikawa。《拓扑模形式与异质弦整体反常的缺失》。《理论与实验物理进展》，(4):论文编号04A107，8，2022年。 https://arxiv.org/abs/2103.12211. 53, 54[Tho62] Emery Thomas。《挠庞特里亚金类》。《美国数学会会刊》，13:485–488，1962年。8[Tho20] Ryan Thorngren。《3 + 1D中的拓扑量子场论、对称性破缺与有限规范理论》。《物理评论B》，101:245160，2020年6月。 https://arxiv.org/abs/2001.11938. 19[TY21] Yuji Tachikawa 和 Mayuko Yamashita。《拓扑模形式与所有异质弦整体反常的缺失》。2021年。 https://arxiv.org/abs/2108.13542. 5, 53, 54[Wal60] C. T. C. Wall。《余边环的确定》。《数学年刊》（第2辑），72:292–311，1960年。23[Wal13] Konrad Waldorf。《弦联络与陈-西蒙斯理论》。《美国数学会汇刊》，365(8):4393–4432，2013年。 https://arxiv.org/abs/0906.0117. 13[Wal18] Konrad Waldorf。《主2-丛联络的整体视角》。《Forum Math.》，30(4):809–843，2018年。 https://arxiv.org/abs/1608.00401. 13[Wan08] Bai-Ling Wang。《几何循环、指标理论与扭曲 K-同调》。《J. Noncommut. Geom.》，2(4):497–552，2008年。 https://arxiv.org/abs/0710.1625. 23[War20] Garth Warner。《拓扑学与同伦论专题》。2020年。 https://arxiv.org/abs/2007.02467. 12[Wei49] André Weil。《纤维空间的微分几何》。载于《科学著作集 I》，《施普林格数学文集》，第422–436页。施普林格柏林海德堡，1949年。9[Whi42] George W. Whitehead。《关于球面与旋转群的同伦群》。《数学年刊》（第2辑），43:634–640，1942年。21[Wit86] Edward Witten。《十维物理学中的拓扑工具》。载于《统一弦理论研讨会》（加利福尼亚州圣巴巴拉，1985年），第400–429页。World Sci. Publishing，新加坡，1986年。附录由R. E. Stong撰写。5, 16, 26, 54[Wit96] Edward Witten。《卡拉比－丘紧化的强耦合展开》。《核物理B》，471(1-2):135–158，1996年。 https://arxiv.org/abs/hep-th/9602070. 5, 49[Wit97] Edward Witten。《关于 M-理论中的通量量子化与有效作用量》。《J. Geom. Phys.》，22(1):1–13，1997年。 https://arxiv.org/abs/hep-th/9609122. 16, 18, 50[Wit16] Edward Witten。《不可定向流形上的"宇称"反常》。《物理评论B》，94:195150，2016年11月。 https://arxiv.org/abs/1605.02391. 16, 50[Wit22] Edward Witten。《关于引力正则形式主义的注记》。2022年。 https://arxiv.org/abs/2212.08270。49[WW19a] Zheyan Wan 和 Juven Wang。《伴随QCD$_4$-去禁闭临界现象、对称性丰富的拓扑量子场论与高阶对称性扩张》。《物理评论D》，99(6):065013，21，2019年。 https://arxiv.org/abs/1812.11955. 19[WW19b] Zheyan Wan 和 Juven Wang。《高阶反常、高阶对称性与配边 I: 通过广义配边理论对高阶对称性保护拓扑态及其边界费米子/玻色子反常进行分类》。《数学科学与应用年刊》，4(2):107–311，2019年。 https://arxiv.org/abs/1812.11967. 19[WWZ19] Zheyan Wan、Juven Wang 和 Yunqin Zheng。《量子4维杨–米尔斯理论与时间反演对称的5维高阶规范拓扑场论》。《物理评论D》，100(8):085012，61，2019年。 https://arxiv.org/abs/1904.00994. 19

[Yon54] Nobuo Yoneda。关于模的同调理论。 东京大学理学部纪要第一辑，7:193–227，1954年。 29[Yon22] Kazuya Yonekura。异质弦全局反常与挠性维滕指数。《高能物理学杂志》，（10）：论文编号114，2022年。 https://arxiv.org/abs/2207.13858。 54[Yos75] Zen-ichi Yosimura。CW谱上同调理论的泛系数列。《大阪数学杂志》，12(2):305–323，1975年。 53[Yu21] Matthew Yu。（1+1）d理论的对称性与反常：2-群和对称性分数化。《高能物理学杂志》，2021(61)，2021年。 https://arxiv.org/abs/2010.01136。19