arXiv:2304.14782v1 [math.CO] 28 Apr 2023

在图结合多面体上寻找组合最短路径的困难性

伊藤武洋 ！ 东北大学信息科学研究生院，日本

柿村直德 庆应义塾大学理工学部，日本

神山直之 九州大学产业数学研究所，日本

小林佑輔 ！
京都大学数理解析研究所，日本

前泽俊一
日本东京理科大学数学系

野崎优太
日本横滨国立大学环境与信息科学部SKCM^2，日本广岛大学

冈本吉央 ！
日本电气通信大学信息学与工程研究生院

摘要

我们证明，计算 Carr 和 Devadoss 提出的图结合多面体两个顶点之间的组合最短路径是 NP困难的。这解决了 Cardinal 提出的一个开放问题。图结合多面体是著名的关联多面体的一种推广。关联多面体可由一条路径的图结合多面体得到。在理论计算机科学中，一个引人关注且重要的开放问题是：计算关联多面体两个顶点之间的组合最短路径能否在多项式时间内完成。这等价于计算凸多边形两个三角剖分之间的翻转距离，以及两棵有根二叉树之间的旋转距离。我们的结果表明，用某种推广方法来解决这一开放问题并不可行。作为定理的推论，我们证明，除非 P = NP，否则无法在多项式时间内计算拟阵基多面体两个顶点之间的组合最短路径。由于拟阵基多面体上的组合最短路径可以在多项式时间内计算，我们的结果揭示了拟阵与多拟阵之间一个出人意料的差异。

2012年 ACM 学科分类计算数学 → 组合学；计算理论 → 问题、归约与完备性

关键词与短语图结合子、组合最短路径、NP 困难性、多拟阵

资助伊藤武洋：日本学术振兴会科学研究费助成事业资助编号 JP18H04091、JP19K11814、JP20H05793柿村直德：日本学术振兴会科学研究费助成事业资助编号 JP20H05795、JP21H03397、JP22H05001神山直之：日本学术振兴会科学研究费助成事业资助编号 JP20H05795小林佑輔：日本学术振兴会科学研究费助成事业资助编号 JP20K11692、JP20H05795、JP22H05001前泽俊一：日本学术振兴会科学研究费助成事业资助编号 JP20H05795、JP22K13956野崎优太：日本学术振兴会科学研究费助成事业资助编号 JP20H05795、JP20K14317、JP23K12974冈本吉央：日本学术振兴会科学研究费助成事业资助编号 JP20H05795、JP20K11670、JP23K10982

致谢 本研究受到 Vincent Pilaud 和 Jean Cardinal 在 2022年9月2日 在线举行的“多面体直径及相关主题”研讨会上的报告启发。我们感谢他们带来的灵感。我们也感谢岩政雄二和大关健太参与讨论，并感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。

1 引言

图结合子由 Carr 和 Devadoss [8] 引入。这些多胞体是关联多面体的推广。在关联多面体中，每个顶点对应一个由 n个元素构成的二叉树，而每条边对应两个二叉树之间的一种旋转操作。关于关联多面体的历史介绍，请参阅 Ceballos、Santos 和 Ziegler 的论文引言 [9]。

二叉树可以由一条带标号路径构造得到。设 $V = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$ 为该路径的顶点集合，$E = \{\{i, i+1\} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ 为该路径的边集合。要构造一棵带标号的二叉树，我们从路径中任意选取一个顶点，记为$i \in V$。随后，从路径中移除 i，至多会得到两个连通分量：左侧子路径和右侧子路径，它们可能为空。然后，在相应的二叉树中，将 i 设为根，并递归地将左侧子路径对应的二叉树作为左子树，将右侧子路径对应的二叉树作为右子树。注意，在此构造中，二叉树的每个节点都以路径中的一个顶点为标号。

在图结合多面体的构造中，我们沿用相同的思路。由于本文只关注图结合多面体的图结构，因此只描述其顶点和边。要定义图结合多面体，我们首先固定一个连通无向图 $G = (V, E)$。[1] 于是，在 G-关联多面体中，顶点对应于 G 的所谓消去树，而边对应于两棵消去树之间的交换操作。以下描述遵循 Cardinal、Merino 和 Mütze [5] 的表述。

连通无向图 $G = (V, E)$ 的消去树是一种有根树，其定义如下。它以 V 为顶点集，并由一个根 $v \in V$ 组成；该根的子节点是 $G - v$ 的每个连通分量对应的消去树（图1）。从 T 的消去树交换到 T' 的另一棵 G 消去树，定义如下。设 v 是 T 的一个非根顶点，且 u 是 T 中 v 的父节点。记 G 中由 T 内以 v 为根的子树诱导的子图为 H。将 u 与 v 交换，会按如下方式将 T 转换为 T'。(1) 在树 T' 中，u 的父节点是 v；在 T 中，u 的父节点的一个子节点是 v，而 T'。(2) T 中以 u 为根的子树，在 T' 中仍是以 u 为根的子树。(3) 在 T 中以 v 为根的子树 S，在 T' 中仍是以 v 为根的子树；但若 S 的顶点与 u 属于 $H - v$ 的同一个连通分量，则 S 会成为 T' 中以 u 为根的子树。爪图 G 的 G- 关联多面体如图 2 所示。注意，交换操作是可逆的。

本文研究图结合子的一些图性质，重点关注多面体两个顶点之间组合最短路径的计算（即图论距离），我们称之为图结合子上的组合最短路径问题。在这个问题中，给定一个图 G和两棵消去树 T，T'属于G，我们希望计算G-关联多面体上从 T 到 T' 的图论路径的最短长度。文献中，我们只找到关于 G 为完全图或（星图的推广）的情形的研究。当 G 为完全图时，G-关联多面体称为排列多胞体，其每个顶点都对应一个排列。由于一条边对应一次相邻换位，两个顶点之间的图论距离等于对应排列之间的逆序数。这可以在多项式时间内计算。当 G 为星图时，G-关联多面体称为星形结合多面体 [27]。最近，Cardinal、Pournin 和 Valencia-Pabon [7]提出了一种多项式

[1] 图结合多面体也可以针对非连通图定义，但本文将重点讨论连通图。

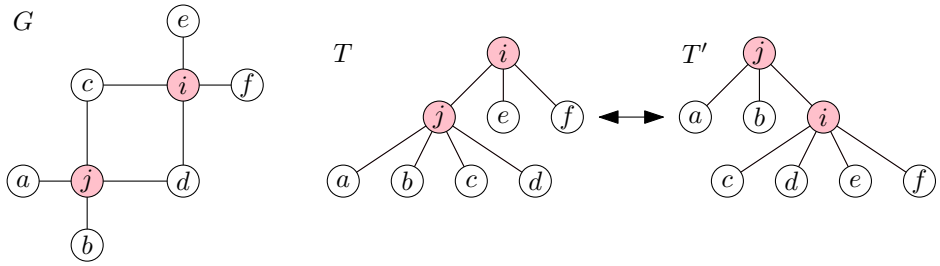

图1 消去树示例。树 T 和 T' 是图G的消去树。树 T' 可通过将 i 与 j交换，从 T 得到。此示例取自 Cardinal、Merino 和 Mütze [5]。

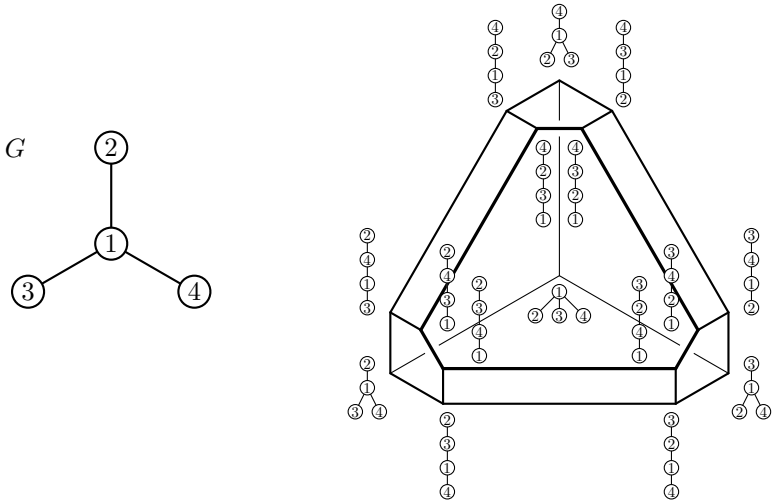

图2 图结合多面体示例。该多面体的每个顶点都对应图 G的一棵消去树。

时间算法，用于计算星形结合多面体上的组合最短路径；他们还将该算法推广到 G 为完全分裂图的情形（即通过将星图的中心顶点替换为一个团而得到的图）。

另一方面，当 G 是一条路径时，是否能在多项式时间内计算组合最短路径仍是一个引人关注的开放问题。在这种情况下，图论距离对应于两棵二叉树之间的旋转距离。根据卡特兰对应，这等价于凸多边形两个三角剖分之间的翻转距离。解决这一开放问题的一种可能策略是将问题推广并求解推广后的问题。在我们的情形中，可以通过考虑一般图的图结合多面体来实现推广。

我们的主要结果表明，当 G 也作为输入的一部分给出时， G-关联多面体上的组合最短路径问题是 NP困难。这意味着上述策略注定会失败。

首先，我们将图结合子上的组合最短路径问题正式表述如下。

图关联多面体上的组合最短路径
输入：图 G 和两棵 G 的消去树 T_{ini}， T_{tar}
输出： T_{ini} 和 T_{tar} 在 G-关联多面体的图上的距离

4 图关联多面体上组合最短路径的求解难度

我们的第一个定理证明了图结合子上的组合最短路径问题的 NP 困难性。这解决了 Cardinal 提出的一个开放问题（见 [3, 第 4 节2]）。

▶**定理 1.** 图结合子上的组合最短路径是NP-困难的 .

定理 1 得到以下推论，该推论与 Edmonds [13]引入的多拟阵有关。由有限集 U和函数 ρ: $2^U \to \mathbb{R}$ 组成的一对 (U, ρ) 称为一个多拟阵，如果 ρ 满足以下条件：(P1) $\rho(\emptyset) = 0$; (P2) 若 $X \subseteq Y \subseteq U$，则 $\rho(X) \leq \rho(Y)$; (P3) 若 $X, Y \subseteq U$，则 $\rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$。函数 ρ 称为多拟阵 (U, ρ) 的秩函数 。

对于一个多拟阵 (U, ρ)，我们将 (U, ρ) 的基多面体 定义为

$$\mathbf{B}(\rho) := \{x \in \mathbb{R}^U \mid x(X) \leq \rho(X)\,(\forall X \subseteq U),\, x(U) = \rho(U)\},$$

其中，对每个子集 $X \subseteq U$，我们定义 $x(X) := \sum_{u \in X} x(u)$。于是，$\mathbf{B}(\rho)$ 是一个多面体，因为对于每个元素 $e \in E$，都有 $0 \leq \rho(U) - \rho(U \setminus \{u\}) = x(U) - \rho(U \setminus \{u\}) \leq x(u) \leq \rho(\{u\})$。

多拟阵被视为拟阵的多面体推广。例如，拟阵的贪心算法可以看作是在拟阵的基多面体上最大化线性函数的算法，[2] 并且该算法很容易推广到多拟阵的基多面体。拟阵基多面体的许多组合性质在多拟阵基多面体上同样成立。已知在拟阵的基多面体上，组合最短路径可以在多项式时间内计算， [18],因此我们希望将这一结果推广到多拟阵，从而引出以下问题定义。

多拟阵上的组合最短路径
输入：对一个多拟阵 (U, ρ) 的预言机访问，以及两个极点 x_{ini}, x_{tar}，它们属于基多面体$\mathbf{B}(\rho)$
输出：$\mathbf{B}(\rho)$ 上 x_{ini} 与 x_{tar} 之间的距离

我们注意到，多拟阵 (U, ρ) 是通过预言机访问给出的，该预言机针对任意集合 $X \subseteq U$ 返回值$\rho(X)$。算法的运行时间也以预言机调用次数来衡量。在处理多拟阵时，这是一个标准假设 [16]，因为如果将函数 ρ 作为一张表输入，其中列出所有 $X \subseteq U$对应的值 $\rho(X)$，那么仅存储这张表就至少需要 $2^{|U|}$ 空间。我们还注意到，可以在多项式时间内测试多拟拟阵基多面体中两个极点是否邻接 [33]。

下一个定理指出，该问题是困难的；这一点可由定理 1 推出，并揭示了拟阵与多拟阵之间意想不到的对比。

▶**定理 2.** 除非 P =NP，否则不存在适用于多拟阵上组合最短路径问题的多项式时间算法。

我们的证明依赖于这样一个事实：图结合多面体可以实现为某些多拟阵的基多面体 [27]。不过，我们需要谨慎处理，因为在归约中，我们要求多项式时间内计算出所用多拟阵的秩函数。为此，我们给出 Devadoss [12],[3] 提出的图结合多面体实现的显式不等式描述；该实现确实是一个多拟阵的基多面体。

[2] 这也可以看作是对最小生成树问题中 Kruskal 算法的推广。[3] 我们在此指出，Carr 和 Devadoss 对图结合多面体的原始定义 [8] 并未给出该多面体顶点的显式坐标。因此，我们依赖 Devadoss 的实现 [12] ，他给出了显式的顶点坐标。

相关工作

多面体上的路径已得到深入研究。这一研究方向最初的动机之一，是设计并理解用于线性优化的路径跟踪算法，例如单纯形法。在《离散与计算几何手册 [17], 》一章中，Kalai 提出了一个开放问题：“为凸多胞体寻找一种高效的路由算法。”这里，路由算法是指能够找到从给定初始顶点到给定目标顶点之间一条短路径的算法。

图结合多面体上的路径受到广泛关注。直径或许是研究得最频繁的量，其定义为多面体两个顶点之间距离的最大值。Sleator、Tarjan 和 Thurston [32] 的一项著名结果表明，$(n-1)$ 维关联多面体（即具有 n 个顶点的路径所对应的图结合多面体）的直径至多为 $2n-6$，当 $n \geq 11$ 时，此界对所有足够大的 n 都是紧的。Pournin [28], 改进了这一界，并证明当 $n \geq 11$时，$(n-1)$ 维关联多面体的直径恰为 $2n-6$。

对于一般的 n 顶点图 G，Manneville 和 Pilaud [25] 证明，G 结合多面体的直径至多为 $\binom{n}{2}$，且至少为 $\max\{m, 2n-20\}$，其中 m 是 G 的边数。上界在 G 为完全图的情形下取到（即，G 结合多面体是排列多胞体）。当 G 是具有 n 个顶点的星图（即 $K_{1,n-1}$）时，Manneville 和 Pilaud [25] 证明其直径为 $2n-2$。当 G 是环图（即该多面体为环结合子）时，Pournin [29] 给出了渐近精确的直径。当 G 是树时，Manneville 和 Pilaud [25] 给出了上界 $O(n \log n)$，而 Cardinal、Langerman 和 Pérez-Lantero [4] 构造了直径为 $\Omega(n \log n)$ 的树的实例（此类实例选取为完全二叉树）。Cardinal、Pournin 和 Valencia-Pabon [6]证明，对于具有 m 条边的平凡完美图，直径为 $\Theta(m)$，并根据图的树宽、路径宽和树深度给出了直径的上界和下界。Berendsohn [2] 证明，对于具有 n 个主干顶点和 m 个腿顶点的毛毛虫树，直径为 $\Theta(n + mH)$，其中包含所谓腿分布的香农熵 H。

据作者所知，计算图关联多面体直径的复杂性尚未得到研究。当多面体不局限于图关联多面体时，已有一些困难性结果。Frieze 和 Teng [15] 证明了：对于由不等式给出的多面体，计算其直径是弱 NP 困难的。Sanità [30]证明了：计算给定图的分数匹配多胞体的直径是强 NP 困难的。Kaibel 和 Pfetsch [19] 提出了一个关于计算简单多胞体直径复杂性的开放问题。

关于在 G-关联多面体上计算组合最短路径的问题也已有研究。一个长期悬而未决的开放问题是：是否能够在多项式时间内计算关联多面体中的组合最短路径（即，当 G 是路径时的 G-关联多面体）。目前仅当 G 是完全图（民间已知）、星图或完全分裂图（Cardinal、Pournin 和 Valencia-Pabon [7]）时，才已知存在多项式时间算法。当 G 是路径时，已知有近似因子为二的多项式时间近似算法 [11]，以及以距离为参数的固定参数算法 [10, 20, 21, 24]。

由于关联多面体上的组合最短路径等价于凸多边形三角剖分的最短翻转序列，因此，在更一般的情形下，人们也研究了三角剖分的最短翻转序列计算问题。对于点集的三角剖分，该问题是 NP困难 [23]，甚至是 APX-困难 [26]。对于简单多边形的三角剖分，该问题同样是 NP困难 [1]。

消去树已出现在数学和计算机科学的许多分支中。有关很好的综述，请参见 Cardinal、Merino 和 Mütze [5]。

技术概述

为了证明图关联多面体上组合最短路径问题的困难性，我们首先考察该问题的一个“加权”版本。本文为进行归约而首次引入了这一版本。在该问题中，给定图的每个顶点都有一个正权重，交换两个顶点所产生的权重定义为这两个顶点权重的乘积。交换序列的权重定义为序列中各次交换权重之和。作为中间定理，我们证明了这一加权版本是强 NP 困难的。

为此，我们将图 [14] 中求解平衡最小 s-t 割这一 NP困难问题，归约为图关联多面体上的组合最短路径问题的加权版本。在平衡最小 s-t 割问题中，我们要确定给定图 G 是否存在一个最小 s-t 割，使其为顶点集的二等分。在归约中，我们从 G 构造一个顶点加权图 H，以及 H 的两棵消去树T_{ini}、T_{tar}。加权图 H 的构造方法是：将 s 和 t 替换为大团，对每条边进行细分，并复制每个顶点；权重的分配方式是使细分顶点获得较小权重，而复制顶点和大团中的顶点获得较大权重。构造消去树 T_{ini} 和 T_{tar}，使得交换两个权重较大的顶点是不允许的；而识别几个权重较小的顶点（这对应于 G 的一个平衡最小 s-t 割）则会得到一条最短路径。

在第二步中，我们将加权版本归约为该问题原始的无权版本。为此，将权重为 w 的顶点复制为一个大小为 w的团。我们希望确保，在加权实例中，权重分别为 $w(u)$ $w(v)$的顶点 u，v之间的一次交换，会映射为构造出的无权实例中相应于 u 和 v 的团内顶点之间连续的 $w(u)\cdot w(v)$次交换。我们利用投影这一有用操作，并结合平均论证来证明这一点。

2 预备知识

对于正整数 k，令 $[k]$ 表示{1，2，……，k}。

对于图 $G=(V,\ E)$及其两个消去树 T_{ini} 和 T_{tar}，我们称由 G的消去树组成的序列 $\mathbf{T}=\langle T_0,\ T_1,\ \ldots\ldots,\ T_\ell\rangle$ 为从T_{ini} 到 T_{tar} 的重配置序列，如果 $T_0=T_{\mathrm{ini}}$、$T_\ell=T_{\mathrm{tar}}$，且 T_i 可通过对 T_{i-1} 执行一次交换操作得到，其中 $i\in[\ell]$。如果不会造成混淆，我们有时将$\mathbf{T}$ 视为交换操作序列。$\mathbf{T}$ 的长度定义为其中交换的次数 ℓ，记作length(**T**)。于是，图结合子上的组合最短路径问题就是寻找一个从 T_{ini} 到 T_{tar}、使length(**T**)最小的重配置序列$\mathbf{T}$。

当 $u\in V$是消去树 T中 $v\in V$的子节点时，交换 u 和 v的操作表示为 swap(u,v)。注意，我们区分 swap(u,v) 和 swap(v,u)。对于消去树 T和顶点 $v\in V$（T），令 anc$_T(v)$（分别地，des$_T(v)$）表示 v在 T中的所有祖先（后代）构成的集合。注意，当且仅当 $v\in$ des$_T(u)$时，$u\in$anc$_T(v)$。还要注意，anc$_T(v)$和 des$_T(v)$均不包含 v。若不同顶点 u和 v 在 T中满足 $u\in$anc$_T(v)$或 $v\in$ anc$_T(u)$，则称它们在 T中可比较；否则，称它们在 T中不可比较。$\prec$在 V上的线性序唯一确定一个消去树 T，使得 $u\in$anc$_T(v)$蕴含 $u\prec v$。

设 $G=(V,E)$ 是一个无向图。对于 $X\subseteq V$，令 $\delta_G(X)$ 表示 X与 $V\backslash X$ 之间的边集。对于 s，$t\in V$，若 $s\in X$且 $t\notin X$，则称 $X\subseteq V$ 为一个 s-t 割。若对于某个 s-t 割 $X\subseteq V$，有 $F=\delta_G(X)$，则称边集 $F\subseteq E$ 为一个 s-t 割集。最小 s-t割是使 $|\delta_G(X)|$最小的 s-t 割 X。对于 $X\subseteq V$，令 $G[X]$ 表示由

X 诱导的子图，并令 $E[X]$ 表示其边集。

3 加权问题的困难性

我们研究图关联多面体上组合最短路径问题的一个加权变体，称为图关联多面体上的加权组合最短路径。该问题给定一个图 $G=(V,\ E)$、两棵消去树T_{ini}和 T_{tar}，以及一个权函数 $w\colon V\to\mathbb{Z}_{>0}$。对于 $u,\ v\in V$，交换 $\mathbf{swap}(u,\ v)$ 的权重 定义为 $w(u)\cdot w(v)$。此值有时记作 $w(\mathbf{交换}(u,\ v))$。重配置序列$\mathbf{T}$ 的加权长度 （或简称权重）定义为序列$\mathbf{T}$中所有交换的总权重，记作 $\mathrm{length}_w(\mathbf{T})$。图关联多面体上的加权组合最短路径问题的目标是找到一个从T_{ini} 到 T_{tar} 的重配置序列$\mathbf{T}$ ，使 $\mathrm{length}_w(\mathbf{T})$ 最小。

本节将证明，该加权变体是强 NP 困难的。

▶**定理 3.** 图关联多面体上的加权组合最短路径是强NP困难的，也就是说，即使输入规模为 $\sum_{v\in V}w(v)$，该问题仍是NP困难的。

3.1 归约

为了证明定理 3，我们将平衡最小 s-t 割归约到图关联多面体上的加权组合最短路径问题。在平衡最小 s-t 割问题中，输入由一个连通图 $G=(V,E)$ 及 $s,t\in V$ 组成，目标是确定 G 是否包含一个最小 s-t 割 X，使得 $|X|=|V\setminus X|$。不失一般性，我们可以假设 $|V|$ 为偶数。令 $V=\{s,t,v_1,v_2,\dots,v_{2n}\}$ 且 $E=\{e_1,\dots,e_m\}$，其中$|V|=2n+2$ 且 $|E|=m$。已知平衡最小 s-t 割是 NP 困难的 [14]。对于平衡最小 s-t 割的一个实例，我们按如下方式构造图关联多面体上的加权组合最短路径问题的一个实例。

令 N 为一个足够大的整数（例如 $N=10n^3m$）。我们首先通过引入一个新顶点 u_e 对每条边 $e\in E$ 进行细分。然后，对于每个 $v\in V$，我们引入 v 的一个副本 v'。我们将 s 替换为一个团 $\{s_1、\dots\dots、s_{N^3}\}$，其大小为 N^3；并将 t 替换为另一个团 $\{t_1、\dots\dots、t_{N^3}\}$，其大小为 N^3。令 H 为所得到的图。形式化地，图 $H=(V(H)\ E(H))$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
V(H) &= (V\setminus\{s,t\})\cup\{v'\mid v\in V\}\cup\{u_e\mid e\in E\}\cup\{s_1,\dots,s_{N^3}\}\cup\{t_1,\dots,t_{N^3}\},\\
E(H) &= \{\{v,u_e\}\mid v\in V\setminus\{s,t\},\ e\in\delta_G(v)\}\cup\{\{v',u_e\}\mid v\in V,\ e\in\delta_G(v)\}\\
&\quad\cup\{\{s_i,s_j\}\mid i,j\in[N^3],\ i\neq j\}\cup\{\{t_i,t_j\}\mid i,j\in[N^3],\ i\neq j\}\\
&\quad\cup\{\{s_i,u_e\}\mid i\in[N^3],\ e\in\delta_G(s)\}\cup\{\{t_i,u_e\}\mid i\in[N^3],\ e\in\delta_G(t)\}.
\end{aligned}
$$

定义 $w\colon\ V(H)\to\mathbb{Z}_{>0}$ 如下：

$$
\begin{aligned}
w(v) &= N && (v\in V\setminus\{s,t\}),\\
w(v') &= N^8 && (v\in V),\\
w(u_e) &= 1 && (e\in E),\\
w(s_i) &= w(t_i)=N^4 && (i\in[N^3]).
\end{aligned}
$$

初始消元树 T_{ini} 由以下线性序定义：

$$
\begin{aligned}
&v_1\prec\cdots\prec v_{2n}\prec s_1\prec t_1\prec s_2\prec t_2\prec\cdots\prec s_{N^3}\prec t_{N^3}\\
&\quad\prec u_{e_1}\prec\cdots\prec u_{e_m}\prec v'_1\prec\cdots\prec v'_{2n}\prec s'\prec t'.
\end{aligned}
$$

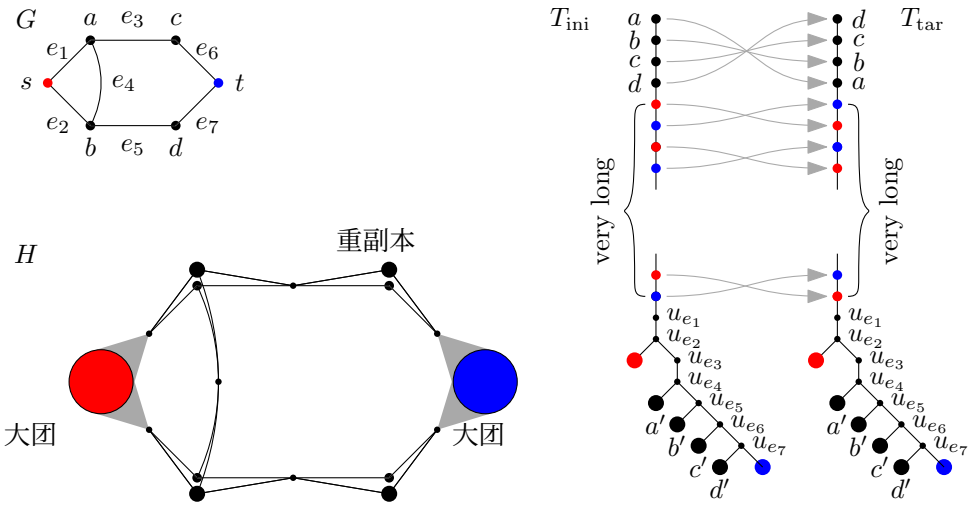

图 3 定理 3 的归约。

请注意，在 T_{ini} 中，顶点 v_1、……、v_{2n}、s_1、t_1、s_2、t_2、……、s_{N^3}、t_{N^3} 沿一条路径排列，而其他元素不一定按顺序排列。目标消去树T_{tar} 是由以下线性序定义的消去树：

$$v_{2n} \prec \cdots \prec v_1 \prec t_1 \prec s_1 \prec t_2 \prec s_2 \prec \cdots \prec t_{N^3} \prec s_{N^3} \prec u_{e_1} \prec \cdots \prec u_{e_m} \prec v'_1 \prec \cdots \prec v'_{2n} \prec s' \prec t'.$$

我们考虑一个图关联多面体上的加权组合最短路径实例 $(H,\ w,\ T_{\text{ini}},\ T_{\text{tar}})$。在该实例中，我们将前 $2n$ 个元素的排列顺序反转，并对每个 i 反转 s_i 和 t_i 的排列顺序。示意见图 3。

要证明定理 1，只需证明以下命题。

▶**命题 4.** 设 λ 是 G中 s-t 割集的最小大小。当且仅当 G有一个最小 s-t 割 X 满足 $|X| = |V \setminus X|$时，存在一条从 T_{ini}到 T_{tar}、权重小于 $4\lambda N^7 + (n^2 - n + 1)N^2$的重配置序列。

3.2 命题 4 的证明

充分性（“如果”部分）

假设 G 有一个最小 s-t 割 X 满足 $|X| = |V \setminus X| = n + 1$。令 $U = \{u_e \mid e \in \delta_G(X)\}$。注意到 $|U| = |\delta_G(X)| = \lambda$。从 T_{ini}开始，我们反复交换 U 中的一个元素及其父节点，从而得到一棵消去树 T_1，其中 U中的每个元素都是 $V(H) \setminus U$中某个元素的祖先。见图 4。从T_{ini}到 T_1的交换总权重至多为 $|U|(2nN + 2N^7 + m)$。由于 $G - \delta_G(X)$由两个连通分量组成，$H - U$也如此。因此，$T_1 - U$ 由两棵消去树 T_s 和 T_t 组成，使得 T_s 包含 $(X \setminus \{s\}) \cup \{s_1, \ldots, s_{N^3}\} \cup \{u_e \mid e \in E[X]\} \cup \{v' \mid v \in X\}$，而 T_t 包含 $((V \setminus X) \setminus \{t\}) \cup \{t_1, \ldots, t_{N^3}\} \cup \{u_e \mid e \in E[V \setminus X]\} \cup \{v' \mid v \in V \setminus X\}$。

在 T_s 中，对每一对 $u, v \in X \setminus \{s\}$，交换 u 和 v，我们便得到一棵消去树，其中对于 v_i，$v_j \in X \setminus \{s\}$ 且满足 $i > j$ 的情况，v_i 是 v_j 的祖先。这些交换的总权重为 $\binom{|X|-1}{2} \cdot N^2$。类似地，对 T_t 执行权重为 $\binom{|V \setminus X|-1}{2} \cdot N^2$ 的交换，我们便得到一棵消去树，其中对于 $v_i, v_j \in (V \setminus X) \setminus \{t\}$ 且满足$i > j$ 的情况，v_i 是 v_j 的祖先。令 T_2 为对 T_1 执行这些操作后得到的消去树。

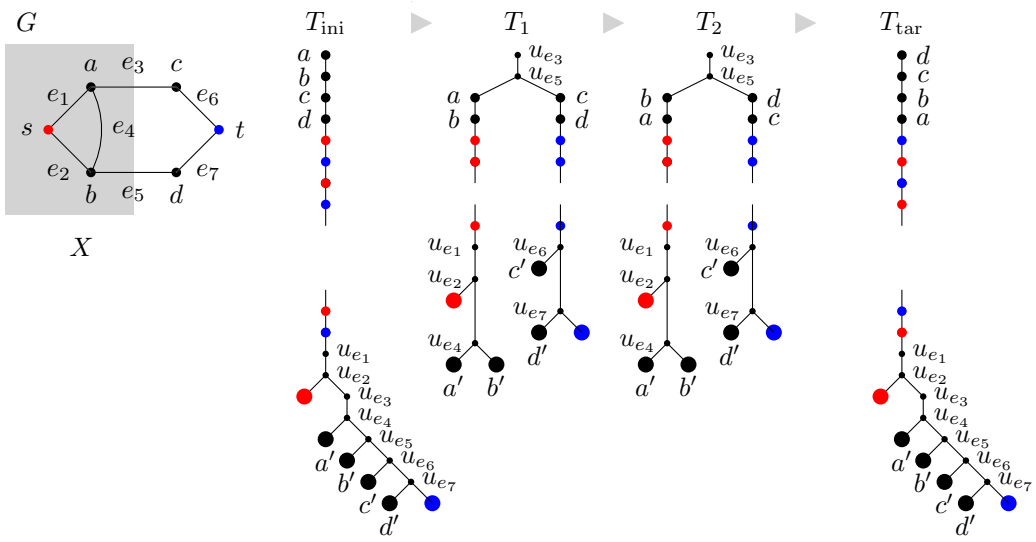

图 4 从 T_{ini} 到的一个重配置序列 T_{tar}。

从 T_2 开始，我们反复交换 U 中的一个元素及其子节点，从而得到消去树 T_{tar}。通过执行总权重至多为$|U|(2nN + 2N^7 + m)$ 的交换即可实现这一点。

因此，从 T_{ini} 到 T_{tar} 的上述交换的总权重至多为

$$\begin{aligned}
&2|U|(2nN + 2N^7 + m) + \binom{|X| - 1}{2} \cdot N^2 + \binom{|V \setminus X| - 1}{2} \cdot N^2 \\
&\quad = 4\lambda N^7 + n(n-1)N^2 + 4\lambda nN + 2\lambda m \\
&\quad < 4\lambda N^7 + (n^2 - n + 1)N^2,
\end{aligned}$$

这里注意到 $|U| = \lambda$ 和 $|X| = |V \setminus X| = n + 1$。这证明了充分性。

必要性（“仅当”部分）

设**T** 是一个从 T_{ini} 到 T_{tar} 的重构序列，其权重小于 $4\lambda N^7 + (n^2 - n + 1)N^2$。由于该权重小于 N^8，我们得到以下结论。

▶ **观察 5.** 对于 $v \in V$，顶点 v' 在**T**中不会与其他顶点交换。对于i、$j \in [N^3]$，**交换**(s_i, s_j)、**交换**(t_i, t_j)、**交换**(s_i, t_j)和**交换**(t_i, s_j) 均未在**T**中执行。

根据观察 5，我们不能直接交换 s_1 和 t_1，因此**T** 包含一棵消去树 T^*，其中 s_1 和 t_1 不可比较。于是，存在一个顶点集 $V^* \subseteq V(H)$，使得 s_1 和 t_1 分别属于 $H - V^*$的不同连通分量，且 V^* 中的每个顶点都是 T^*中 s_1 和 t_1 的祖先。再次根据观察 5，对于 $v \in V$，V^* 不包含 v'，也就是说，$V^* \subseteq V \cup \{u_e \mid e \in E\}$。注意，移除 $V^* \cap V$不会影响 H 的连通性，因为每个顶点 $v \in V^* \cap V$在 H中都有一个副本 v'。令

$$F := \{e \in E \mid u_e \in V^*\}.$$

那么，s 和 t 属于 $G - F$的不同连通分量，即 F 在 G中包含一个s-t 割集。

由于移除 V 不会影响 H的连通性，我们还可以得出以下结论。

10 在图结合子上寻找组合最短路径的困难性

▶ **观察 6.** 设 T和 T'是 $\mathbf{T}$ 中的消去树，且 e_1、$e_2 \in E$是不同的边。若 $u_{e_1} \in \mathbf{anc}_T(u_{e_2})$且 $u_{e_2} \in \mathbf{anc}_{T'}(u_{e_1})$，则在 T和 T'之间，针对某些 e_3、$e_4 \in E$（可能是 $\{e_1$、$e_2\} \cap \{e_3$、$e_4\} \neq \emptyset$）执行 **交换**$(u_{e_3}$、$u_{e_4})$。

我们将$\mathbf{T}$ 分成两个重配置序列$\mathbf{T}_1$ 和$\mathbf{T}_2$, ，其中$\mathbf{T}_1$ 从 T_{ini} 到 T^*，而$\mathbf{T}_2$ 从 T^* 到 T_{tar}。由对称性，不妨假设

$$\text{length}_w(\mathbf{T}_1) \leq \frac{\text{length}_w(\mathbf{T})}{2} < 2\lambda N^7 + N^3.$$

对于 $i \in [N^3]$，定义

$$L_i = \{e \in E \mid \mathbf{swap}(u_e, s_i) \text{ is applied in } \mathbf{T}_1\},$$
$$R_i = \{e \in E \mid \mathbf{swap}(u_e, t_i) \text{ is applied in } \mathbf{T}_1\}.$$

对于 $i \in [N^3]$，令**交换(**L_i**)**表示$\mathbf{T}_1$ 中所有满足 $e \in L_i$的交换**交换(**u_e，s_i**)**的集合。类似地，令**交换(**R_i**)**表示$\mathbf{T}_1$ 中所有满足 $e \in R_i$的交换**交换(**u_e，t_i**)**的集合。

▷ 断言 7。对于 $i \in [N^3]$，有如下结论：若边 $e \in E$ 包含在包含 s的 $G - L_i$ 连通分量中，则对于$\mathbf{T}_1$, 中的任意消去树 T，有$u_e \in \text{des}_T(s_i)$；若边 $e \in E$ 包含在包含 t的 $G - R_i$ 连通分量中，则对于$\mathbf{T}_1$中的任意消去树 T，有$u_e \in \text{des}_T(t_i)$。

证明。对于包含 s的 $G - L_i$ 连通分量中的每条边 $e \in E$，顶点s_i 和 u_e 在 $H - \{u_f \mid f \in L_i\}$ 中属于同一个连通分量。由于 $u_e \in \text{des}_{T_{\text{ini}}}(s_i)$ 成立，且在 $\mathbf{T}_1$ 中不会应用交换(u_e, s_i)，因此对于 $\mathbf{T}_1$ 中的任意消去树 T，都有 $u_e \in \text{des}_T(s_i)$。第二个陈述的证明相同。◁

为简化记号，令 $L_0 = R_0 = F$。对于 $i \in [N^3] \cup \{0\}$，令 $X_i \subseteq V$ 为包含 s的 $G - L_i$ 连通分量的顶点集。类似地，令 $Y_i \subseteq V$ 为包含 t的 $G - R_i$ 连通分量的顶点集。

▷ 断言 8. 对于 i, $j \in [N^3] \cup \{0\}$ 满足 $j > i$，有以下结论：**(i)** $(E[X_j] \setminus L_j) \cap L_i = \emptyset$，以及**(ii)** $(E[Y_j] \setminus R_j) \cap R_i = \emptyset$。

证明。为证明 (i)，反设存在某个 $j > i$，使得 $e \in (E[X_j] \setminus L_j) \cap L_i$。注意到 $j \in [N^3]$。由于 $e \in E[X_j] \setminus L_j$，断言 7 表明，对于 $\mathbf{T}_1$ 中的任意消去树 T，$u_e \in \text{des}_T(s_j)$。若 $i \geq 1$，则由于 $u_e \in \text{des}_T(s_j)$ 且 $s_i \in \text{anc}_T(s_j)$，可知 u_e 和 s_i 在 T 中不相邻。这意味着 $\mathbf{T}_1$, 中未执行 $\text{swap}(u_e, s_i)$，这与 $e \in L_i$ 矛盾。若 $i = 0$，则由 $e \in L_0 = F$ 可知 $u_e \in \text{anc}_{T^*}(s_1) \subseteq \text{anc}_{T^*}(s_j)$，这与对于任意 T 都有 $u_e \in \text{des}_T(s_j)$ 相矛盾。(ii) 的证明同理。◁

▷ 断言 9. $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots \supseteq X_{N^3}$且 $Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots \supseteq Y_{N^3}$。

证明。 设 i, $j \in [N^3] \cup \{0\}$ 为满足 $j > i$ 的指标。由于 $(E[X_j] \setminus L_j) \cap L_i = \emptyset$ 根据断言 8 (i), 中的所有顶点都 X_j 包含在 的同一个连通分量中 $G - L_i$。由于两者X_i和 X_j都包含 s，我们得到 $X_j \subseteq X_i$。这表明 $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots \supseteq X_{N^3}$。类似地，我们得到 $Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots \supseteq Y_{N^3}$。◁

▷ 断言 10。对于 $i \in [N^3]$，我们有 $|L_i| = |R_i| = \lambda$、$L_i = \delta_G(X_i)$ 和 $R_i = \delta_G(Y_i)$。

证明。由于 F 包含一个 s-t 割集，因此有 $X_0 \subseteq V \setminus \{t\}$。对于 $i \geq 1$，由于根据断言 9，$s \in X_i \subseteq X_0 \subseteq V \setminus \{t\}$，我们看到 $\delta_G(X_i)$ 是一个包含于 L_i中的 s-t 割集。类似地， R_i 包含 G中的一个 s-t 割集。因此，对于任意 $i \in [N^3]$，我们得到 $|L_i|$、$|R_i| \geq \lambda$。通过考虑 $\mathbf{T}_1$的权重，我们得到

$$\begin{aligned} 2\lambda N^7 + N^3 &> \mathrm{length}_w(\mathbf{T}_1) \\ &\geq \sum_{i=1}^{N^3} (w(s_i)|L_i| + w(t_i)|R_i|) \\ &= 2\lambda N^7 + N^4 \sum_{i=1}^{N^3} ((|L_i| - \lambda) + (|R_i| - \lambda)), \end{aligned}$$

这表明，对于任意 $i \in [N^3]$， $|L_i| = |R_i| = \lambda$。因此， L_i 和 R_i 各自都是 G 中的一个最小 s-t 割集，故 $L_i = \delta_G(X_i)$ 和 $R_i = \delta_G(Y_i)$ 成立。◁

根据该断言，**交换**(L_i) 和 **交换**(R_i) 的总权重至少为 $2\lambda N^7$，由此可知，对于 $e \in L_i$（分别对于 $e \in R_i$）以及 $i \in [N^3]$， u_e 和 s_i （分别为 t_i）在 $\mathbf{T}_1$ 中恰好交换一次。对于 $i \in [N^3]$，令 T_i（分别为 T'_i）表示在刚刚应用了 **交换**(L_i)（分别为 **交换**(R_i)）中的所有交换后，出现在 $\mathbf{T}_1$ 中的消去树。

▷ 断言 11。消去树 T'_{N^3}， T_{N^3}， T'_{N^3-1}， T_{N^3-1}，……， T'_1， T_1 按此顺序出现在 $\mathbf{T}_1$ 中。

证明。我们首先证明对于 $i \in [N^3]$， T_i 出现在 T'_i 之后。设 $e \in R_i$ 是在得到 T'_i 之前紧接着执行交换(u_e, t_i) 的边。设 $f \in L_i \setminus (R_i \setminus \{e\})$，根据 $|L_i| = |R_i|$，这样的 f 必定存在。由于根据断言 10， R_i 是一个最小的 s-t 割集，我们可知 $G - (R_i \setminus \{e\})$ 是连通的。于是，对于 T'_i 之前的任意消去树 T，对于任意 $e' \in E \setminus (R_i \setminus \{e\})$，都有 $u_{e'} \in \mathsf{des}_T(t_i)$。特别地， $u_f \in \mathsf{des}_T(t_i)$。由于 $s_i \in \mathsf{anc}_T(t_i)$，我们可知 u_f 和 s_i 在 T 中不相邻。这说明我们不能在 T'_i 之前执行交换(u_f, s_i)。因此，在 $\mathbf{T}_1$ 中， T_i 出现在 T'_i 之后。

用同样的论证可以证明，对于 $i \in [N^3 - 1]$， T'_i 出现在 T_{i+1} 之后。因此，T'_{N^3}、 T_{N^3}、T'_{N^3-1}、 T_{N^3-1}、……、 T'_1、 T_1 按此顺序出现。◁

▷ 断言 12. 对于 $i \in [N^3]$，有如下结论：$u_e \in \mathbf{anc}^{T_i}($
$u_{e'})$ 对于任意 $e \in L_i$ 以及 $e' \in E \setminus L_i$，且$u_e \in \mathbf{anc}^{T'_i}$
$(u_{e'})$ 对于任意 $e \in R_i$ 以及 $e' \in E \setminus R_i$。

证明。设 T 是 $\mathbf{T}_1$ 中紧邻 T_i 之前的一个消去树。那么，存在一条边$f \in L_i$，使得 T_i 是由 T 通过执行 swap(u_f, s_i) 得到的。由于根据断言 10， $G - (L_i \setminus \{f\})$ 是连通的，因此，对于 $e \in L_i \setminus \{f\}$，有 $u_e \in \mathsf{anc}_T(s_i)$；对于$e' \in E \setminus (L_i \setminus \{f\})$，有 $u_{e'} \in \mathsf{des}_T(s_i)$。因此，执行 swap$(u_f, s_i)$ 后，我们得到：对于$e \in L_i \setminus \{f\}$，有 $u_e \in \mathsf{anc}^{T_i}(f)$；对于 $e' \in E \setminus L_i$，有 $u_{e'} \in \mathsf{des}^{T_i}(f)$。这表明，对于任意$e \in L_i$且 $e' \in E \setminus L_i$，都有 $u_e \in \mathsf{anc}^{T_i}(u_{e'})$。用同样的论证可得，对于任意 $e \in R_i$ 且 $e' \in E \setminus R_i$，都有 $u_e \in \mathsf{anc}^{T'_i}(u_{e'})$。◁

▷ 断言 13。 $X_1 = V \setminus Y_1$。

证明。 注意到 X_0 和 Y_0 互不相交，因为 $F = L_0 = R_0$ 包含一个 s-t 割集，位于 G中。由于 $X_1 \subseteq X_0$ 和 $Y_1 \subseteq Y_0$ 根据断言 9，可知 X_1 和 Y_1 互不相交。为导出矛盾，假设 $X_1 \neq V \setminus Y_1$，也就是说， X_1和 Y_1是互不相交的集合，且 $X_1 \cup Y_1 \subsetneq V$。那么，根据断言 9，我们得到 $X_i \neq V \setminus Y_i$ 对任意 $i \in [N^3]$均成立。这表明 $L_i \neq R_i$ 对任意

$i \in [N^3]$。由于 $|L_i| = |R_i| = \lambda$，存在 $f_i \in L_i \setminus R_i$和 $f_i' \in R_i \setminus L_i$。根据断言 12，我们得到 $u_{f_i} \in \mathbf{anc}_{T_i}(u_{f_i'})$ 和 $u_{f_i'} \in \mathbf{anc}_{T_i'}(u_{f_i})$。根据观察 6，对某个 $e, e' \in E$，会在 T_i'和 T_i之间应用**交换**$(u_e, u_{e'})$。由于每个 $i \in [N^3]$都需要进行这样的交换，根据断言 11，我们必须在 $\mathbf{T}_1$中至少交换 $\{u_e \mid e \in E\}$ N^3 次。因此，我们得到

$$\mathrm{length}_w(\mathbf{T}_1) \geq \sum_{i=1}^{N^3} (w(s_i)|L_i| + w(t_i)|R_i|) + N^3 = 2\lambda N^7 + N^3,$$

这与长度$_w$(**T**$_1$) $< 2\lambda N^7 + N^3$矛盾。 ◁

▷ 断言 14. $F = \delta_G(X_1) = \delta_G(Y_1)$.

证明。 断言 10 和 13 表明 $L_1 = R_1 = \delta_G(X_1) = \delta_G(Y_1)$。结合断言 8 可知 $F \cap E[X_1] = F \cap E[Y_1] = \emptyset$。由于 F 包含一个 s-t 割集，且位于 G中，因此我们得到 $F = \delta_G(X_1) = \delta_G(Y_1)$。 ◁

▷ 断言 15. 设 T是$\mathbf{T}_1$中的一棵消去树。如果两个顶点 $u, v \in V \setminus \{s, t\}$ 属于 $G - F$ 中的同一个连通分量，那么 u和 v在 T中具有可比性。

证明。由断言 14， $G - F$由两个连通分量 $G[X_1]$ 和 $G[Y_1]$组成。我们先考虑 u, $v \in X_1 \setminus \{s\}$ 的情形。由断言 7 和 14 可得，对于任意 $e \in E[X_1]$，都有 $u_e \in \mathsf{des}_T(s_1)$。此外，由于长度$_w$(**T**$_1$) $< 2\lambda N^7 + N^3$成立，且 swap(L_i) 和 swap(R_i) 的总权重为 $2\lambda N^7$，因此在 $\mathbf{T}_1$, 中既不进行 swap(s_1, u)，也不进行 swap(s_1, v)，因为 $w(s_1)w(u) = w(s_1)w(v) = N^5$。因此，我们得到 $u \in \mathsf{anc}_T(s_1)$ 和$v \in \mathsf{anc}_T(s_1)$，这表明 u和 v在 T中具有可比性。当 $u, v \in Y_1 \setminus \{t\}$ 时，同样的论证也成立。◁

Since the weight of $\mathbf{T}_1$ is at least $\sum_{i=1}^{N^3}(w(s_i)|L_i| + w(t_i)|R_i|) = 2\lambda N^7$, we obtain

$$\mathrm{length}_w(\mathbf{T}_2) = \mathrm{length}_w(\mathbf{T}) - \mathrm{length}_w(\mathbf{T}_1) < 2\lambda N^7 + N^3.$$

因此，上述论证（断言 7–15）同样适用于$\mathbf{T}_2$的逆序列。特别地，即使将$\mathbf{T}_1$ 替换为$\mathbf{T}_2$，断言 15 仍然成立。因此，如果两个顶点$u, v \in V \setminus \{s, t\}$ 在 $G - F$中属于同一个连通分量，那么 u和 v在**T**中的任意消去树里都是可比较的。对于这样一对顶点 u 和 v，要颠倒 u 和 v 的排列，唯一的方法是应用**交换**(u, v)或**交换**(v, u)。

根据断言 14，回顾一下， $G - F$由两个连通分量 $G[X_1]$ 和 $G[Y_1]$ 组成。由于 v_1、……、v_{2n}的排列从 T_{ini}到 T_{tar}发生了反转，我们可以看出，如果 u、$v \in X_1 \setminus \{s\}$ 或 u、$v \in Y_1 \setminus \{t\}$ $= (V \setminus X_1) \setminus \{t\}$，则必须在 T 中应用 swap($u, v$) 或 swap($v, u$)。此外，我们还必须像在 $\mathbf{T}_1$ 中那样，在 $\mathbf{T}_2$, 中交换 $\{u_e \mid e \in E\}$ 和 $\{s_1, t_1, \ldots, s_{N^3}, t_{N^3}\}$ 中的一些元素，其总权重至少为 $2\lambda N^7$ 。根据这些观察，我们对 T 的权重作如下估算，其中用 $k = |X_1|$ 简化记号：

$$\begin{aligned}
\mathrm{length}_w(\mathbf{T}) &\geq 2\lambda N^7 + 2\lambda N^7 + \binom{|X_1| - 1}{2} \cdot N^2 + \binom{|V \setminus X_1| - 1}{2} \cdot N^2 \\
&= 4\lambda N^7 + \frac{(k-1)(k-2)}{2} N^2 + \frac{(2n-k+1)(2n-k)}{2} N^2 \\
&= 4\lambda N^7 + (k^2 - 2(n+1)k + 2n^2 + n + 1)N^2 \\
&= 4\lambda N^7 + (n^2 - n)N^2 + (k - n - 1)^2 N^2.
\end{aligned}$$

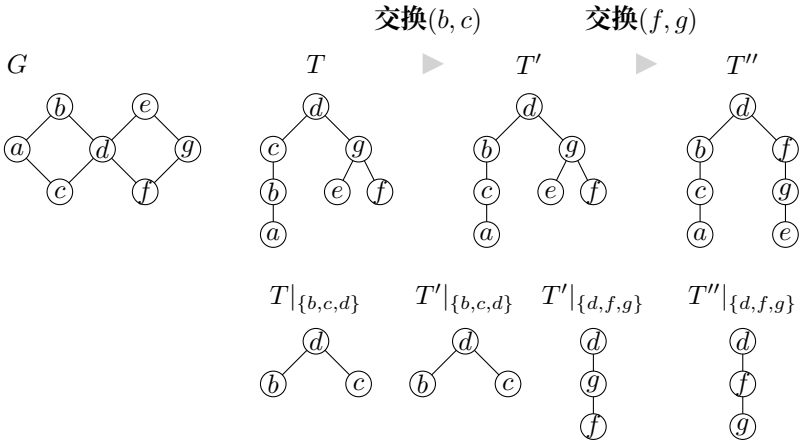

图5 投影示例。注意，由于 $T|_{\{b,c,d\}} = T'|_{\{b,c,d\}}$、$b$ 和 c 在 $T|_{\{b,c,d\}}$ 中不可比较，且由于 f 和 g 在 $T'|_{\{d,f,g\}}$ 中相邻，因此 $T''|_{\{d,f,g\}}$ 是通过交换 f 和 g 从 $T'|_{\{d,f,g\}}$ 得到的。

结合 $\mathrm{length}_w(\mathbf{T}) < 4\lambda N^7 + (n^2 - n + 1)N^2$，可得 $(k - n - 1)^2 < 1$，因此，根据 k 和 n 的整数性，有 $k = n + 1$。

因此，我们得到 $|X_1| = k = n + 1$ 和 $|Y_1| = |V \setminus X_1| = n + 1$。由于 $|\delta_G(X_1)| = |L_1| = \lambda$，这表明 X_1 是 G 中所需的 s-t 割。

4 无权问题的困难性（定理1的证明）

为证明定理 1，我们将图关联多面体上的加权组合最短路径问题归约为图关联多面体上的组合最短路径问题。一个称为投影 的操作（例如 [6]）在我们的有效性证明中起着重要作用。

4.1 有用操作：投影

设 $G = (V, E)$ 是一个图，设 T 是与 G 关联的消去树。对于满足 $G[U]$ 连通的 $U \subseteq V$，令 $T|_U$ 为与 $G[U]$ 关联且保留 T 中排列的消去树。也就是说，当且仅当 $u \in \mathbf{anc}_T(v)$ 且 u 与 v 在 $G[U] - \mathbf{anc}_T(u)$ 中连通时，$u \in \mathbf{anc}^{T|_U}(v)$，其中 $u, v \in U$。注意，这样的 $T|_U$ 是唯一确定的。我们称 $T|_U$ 为 T 到 U 的投影 。图5展示了示意图。

▶ **引理 16**。设 $U \subseteq V$ 为一个顶点集，且 $G[U]$ 连通。设 T 和 T' 为与 G 关联的消去树，且 T' 是由 T 通过应用**交换**(u, v)得到的，其中 $u, v \in V$。

1. 如果 $\{u, v\} \subseteq U$，那么 $T'|_U = T|_U$ 或 $T'|_U$ 可由 $T|_U$ 通过执行**交换**(u, v)得到。
2. 否则，$T'|_U = T|_U$。

证明。由于在构造 $T|_U$ 时会移除 $V \setminus U$ 中的所有顶点，$\mathrm{swap}(u, v)$ 仅在 $\{u, v\} \subseteq U$ 时才会影响 $T|_U$，这就证明了第二项。对于第一项，假设 $\{u, v\} \subseteq U$。那么，u 和 v 在 $T|_U$ 中相邻或不可比较。若它们相邻，则 $T'|_U$ 可由 $T|_U$ 通过执行 $\mathrm{swap}(u, v)$ 得到。若它们不可比较，则 $T'|_U = T|_U$。 ◀

4.2 归约

假设给定一个图 $G = (V, E)$、两棵消去树 T_{ini} 和 T_{tar}，以及一个权函数 $w\colon V \to \mathbb{Z}_{>0}$，它们构成图关联多面体上的加权组合最短路径问题的一个实例。接下来，将每个顶点 $v \in V$ 替换为一个大小为 $w(v)$ 的团。形式化地，考虑一个图 $G' = (V', E')$，使得 $V' = \{v_i \mid v \in V,\ i \in \{1, \dots, w(v)\}\}$，并且当且仅当 $\{u, v\} \in E$ 或 $u = v$ 时，$\{u_i, v_j\} \in E'$。令 $T'\text{ini}$（分别为 T'_{tar}）为由 T_{ini}（分别为 T_{tar}）通过将顶点 $v \in V$ 替换为路径 $v_1, v_2, \dots, v_{w(v)}$ 而得到的消去树。也就是说，对于不同的 $u, v \in V$，当且仅当 $(u_{w(u)}, v_1)$ 是 T'_{ini}（分别为 $T'\text{tar}$）的弧时，T_{ini}（分别为 T_{tar}）中才有弧 (u, v)。注意，所得消去树与 G' 相关联。这定义了图关联多面体上的组合最短路径问题的一个实例。

4.3 有效性

接下来，我们证明，所得到的图关联多面体上的组合最短路径实例存在一个长度至多为 ℓ 的重配置序列，当且仅当原始的图关联多面体上的加权组合最短路径实例存在一个长度为w（$\mathbf{T}$ 的长度$\mathbf{T}$）$\leq \ell$的重配置序列。

充分性（“若”部分）

假设原始的图关联多面体上的加权组合最短路径实例存在一个从 T_{ini} 到 T_{tar}的重配置序列 $\mathbf{T}$。那么，我们通过将$\mathbf{T}$ 中的每个交换$\mathbf{swap}(u, v)$替换为$w(u) \cdot w(v)$次交换$\{\mathbf{swap}(u_i, v_j) \mid i \in [w(u)],\ j \in [w(v)]\}$，构造一个从 $T'\text{ini}$ 到 T'_{tar} 的重配置序列$\mathbf{T}'$。这就得到一个从 T'_{ini} 到 T'_{tar} 的重配置序列，其长度为$\text{length}_w(\mathbf{T})$，由此证明了充分性。

必要性（“仅当”部分）

假设所获得的图关联多面体上的组合最短路径实例具有一个长度至多为 ℓ 的重配置序列 $\mathbf{T}'$，从 $T'\text{ini}$ 到 T'_{tar}。对于任意 $v \in V$，由于 $v_1, \dots, v_{w(v)}$ 构成一个团，因此它们在 $\mathbf{T}'$ 中的任意消去树上都是可比较的。此外，由于 $v_1, \dots, v_{w(v)}$ 在 T'_{ini} 和 T'_{tar} 中均按此顺序排列，我们可以假设对于任意 $i, \dots, j \in [w(v)]$，$\mathbf{swap}(v_i, v_j)$ 不会应用于 $\mathbf{T}'$。

令 Φ 为所有映射 ϕ 的集合：$V \to \mathbb{Z}$，满足对于任意 $v \in V$，$\phi(v) \in \{1, \dots, w(v)\}$。注意，$|\Phi| = \prod_{v \in V} w(v)$。对于 $\phi \in \Phi$，定义 $U_\phi = \{v_{\phi(v)} \mid v \in V\}$。注意，$G'[U_\phi]$ 同构于 G，因此它是连通的。将 $\mathbf{T}'$ 中的每棵消去树投影到 U_ϕ 上，我们得到一个消去树序列。引理 16 表明，若在同一棵消去树连续出现时删除重复项，则该序列构成一个重配置序列，记为 $\mathbf{T}\phi$。由于 $G'[U_\phi]$ 同构于 G，通过对每个 $v \in V$ 将 $v_{\phi(v)}$ 与 v 进行对应，我们可以将 $\mathbf{T}\phi$ 视为从 T_{ini} 到 T_{tar} 的重配置序列。也就是说，$\mathbf{T}\phi$ 可视为原始图关联多面体上的加权组合最短路径实例的一个可行解。

接下来，我们考虑重配置序列 $\{\mathbf{T}_\phi \mid \phi \in \Phi\}$，并证明其中存在一个所需的序列。假设在 $\mathbf{T}'$, where$u, v \in V$, $i \in [w(u)]$, and $j \in [w(v)]$ 中执行了 $\text{swap}(u_i, v_j)$。那么，引理 16 表明，只有当 $\phi(u) = i$and $\phi(v) = j$ 时，才会在 $\mathbf{T}\phi$ 中执行对应的交换操作 $\text{swap}(u_i, v_j)$，该操作与 $\text{swap}(u, v)$ 相同。因此，这种交换至多会执行 $|\{\phi \in \Phi \mid \phi(u) = i,\ \phi(v) = j\}| =$

$|\Phi|/(w(u)\cdot w(v))$ 在 $\{\mathbf{T}_\phi \mid \phi \in \Phi\}$ 中的序列。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{\phi\in\Phi}\mathrm{length}_w(\mathbf{T}_\phi) &= \sum_{\phi\in\Phi}\sum_{\mathbf{swap}(u,v)\in\mathbf{T}_\phi} w(\mathbf{swap}(u,v)) \\ &\le \sum_{\mathbf{swap}(u_i,v_j)\in\mathbf{T}'} w(\mathbf{swap}(u,v))\cdot\frac{|\Phi|}{w(u)\cdot w(v)} \\ &= \mathrm{length}(\mathbf{T}')\cdot|\Phi| \le \ell\cdot|\Phi|,\end{aligned}$$

其中，每个重配置序列都被视为交换的多重集。因此，

$$\min_{\phi\in\Phi}(\mathrm{length}_w(\mathbf{T}_\phi)) \le \frac{1}{|\Phi|}\sum_{\phi\in\Phi}\mathrm{length}_w(\mathbf{T}_\phi) \le \ell.$$

因此，存在 $\phi\in\Phi$ 使得 $\mathbf{T}^\phi$ 是一个所需的序列。这说明了必要性。

因此，加权问题可以归约为无权问题，从而由定理 3 可推出定理 1。

5 多拟阵的困难性（定理 2 的证明）

本节中，我们证明定理 2。我们将图结合子上的组合最短路径问题归约为多拟阵上的组合最短路径问题。假设给定了图结合子上的组合最短路径问题的一个实例 $G=(V,E)$、T_{ini} 和 T_{tar}。为此，我们构造一个满足以下条件的多拟阵 (V,f)。

1. $\mathbf{B}(f)$ 是 G-关联多面体的一个实现。**2.** 对于每个子集 $X\subseteq V$，我们可以在由 G的大小的多项式界定的时间内计算值 $f(X)$。**3.** 我们可以在由 G的大小的多项式界定的时间内，分别找到 T_{ini}和 T_{tar}所对应的 x_{ini}、x_{tar} 这两个$\mathbf{B}(f)$ 的极点。

我们首先说明上述条件足以完成证明。假设存在具有上述性质的多拟阵 (V,f)。那么，我们可以借助一个假想的多项式时间算法，构造一个用于求解图结合子上的组合最短路径问题的多项式时间算法；该假想算法用于求解多拟阵上的组合最短路径问题，构造如下。设 $(G,T_{\mathrm{ini}},T_{\mathrm{tar}})$ 是图结合子上的组合最短路径问题的一个实例。根据性质 1 和 3，我们可以在多项式时间内构造一个多拟阵上的组合最短路径问题实例 $((V,f)\ x_{\mathrm{ini}},x_{\mathrm{tar}})$。利用这个假想的多项式时间算法，我们可以在由$|V|$ 和对 f的预言机调用次数共同界定的多项式时间内求解该实例。根据性质 2，这一运行时间由 $|V|$的一个多项式界定。因此，我们可以在多项式时间内找到 $(G,T_{\mathrm{ini}},T_{\mathrm{tar}})$ 的一个解，证明得证。

在构造这样的多拟阵（V，f）时，我们使用 Devadoss 对 G-关联多面体的实现，其描述如下。

设 $G=(V,E)$ 是一个至少有两个顶点的连通无向图。我们定义$n:=|V|$。对于每个子集 $X\subseteq V$，若 $G-X$ 的一个连通分量[4] C 满足 $|C|\ge 2$（分别地，$|C|=1$），则称其为非平凡（分别地，平凡）连通分量。对于每个子集 $X\subseteq V$，我们将 $\mathcal{C}^*(X)$ 定义为 $G-X$的非平凡连通分量集合。

[4] 更确切地说，C 是一个连通分量的顶点集。

16 在图结合子上寻找组合最短路径的困难性

设 T 是 G的一棵消去树。对于每个顶点 $v \in V$，我们将 $T(v)$ 定义为以 v为根的 T 子树的顶点集。然后，我们从叶到根，按照以下规则为 v 的每个顶点选择坐标 $x^T(v)$，从而定义向量 $x^T \in \mathbb{R}^V$。

- 如果 v 是 T 的叶子，则我们定义 $x^T(v) := 0$。如
- 果 v 不是 T 的叶子，则我们定义 $x^T(v)$ 使得

$$\sum_{u \in T(v)} x^T(u) = 3^{|T(v)|-2}.$$

定义 $\mathcal{E} := \{x^T \in \mathbb{R}^V \mid T \text{ 是 } G \text{ 的消去树}\}$。

▶**引理 17** (Devadoss [12])。 E 的凸包是 G-关联多面体的一个实现。对于 G 的每棵消去树 T，点 x^T 是 G-关联多面体的一个极点。

Define the function $f\colon 2^V \to \mathbb{R}$ by

$$f(X) := 3^{n-2} - \sum_{C \in \mathcal{C}^*(X)} 3^{|C|-2} \tag{1}$$

对于每个子集 $X \subseteq V$。注意，由于 $n \geq 2$ 和 G 是连通的， $f(\emptyset) = 0$。不难看出，我们可以在时间上界为 G 大小的多项式的时间内计算函数 f 的值。

▶ **引理 18**。 设 a_1、 a_2、 … 、 a_k 为正整数。则

$$3^{a_1+a_2+\cdots+a_k} \geq 3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots + 3^{a_k}.$$

证明。 当 $k = 1$时，该命题由定义成立。

接下来，我们证明对于每个整数 $k \geq 2$,

$$3^{a_1+a_2+\cdots+a_k} - (3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots + 3^{a_k}) \geq 3. \tag{2}$$

首先，考虑 $k = 2$ 的情形。在这种情况下，由于 a_1， $a_2 \geq 1$，我们有

$$3^{a_1+a_2} - (3^{a_1} + 3^{a_2}) = (3^{a_1} - 1)(3^{a_2} - 1) - 1 \geq 3.$$

设 $\ell \geq 2$ 为正整数，并假设当 $k = \ell$ 时 (2) 成立。接着，考虑 $k = \ell + 1$ 的情形。由于 a_1, a_2， … ， $a_{\ell+1}$ 都是正整数，我们有

$$\begin{aligned}
&3^{a_1+a_2+\cdots+a_{\ell+1}} - (3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots + 3^{a_{\ell+1}}) \\
&= 3^{a_{\ell+1}} \cdot 3^{a_1+a_2+\cdots+a_\ell} - (3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots + 3^{a_{\ell+1}}) \\
&\geq 3^{a_{\ell+1}}(3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots + 3^{a_\ell} + 3) - (3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots + 3^{a_{\ell+1}}) \\
&= (3^{a_1+a_{\ell+1}} + 3^{a_2+a_{\ell+1}} + \cdots + 3^{a_\ell+a_{\ell+1}} + 3^{a_{\ell+1}+1}) - (3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots + 3^{a_{\ell+1}}) \\
&\geq 3^{a_{\ell+1}}(3-1) \geq 3,
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由归纳假设得出。证明至此完成。◀

▶**引理 19**。 式 *(1)* 中定义的函数 f 满足 *(P1)*、*(P2)* 和 *(P3)*。

这里，我们回顾这三个性质：(P1) $f(\emptyset) = 0$；(P2) 若 $X \subseteq Y \subseteq V$，则 $f(X) \leq f(Y)$；(P3) 若 X， $Y \subseteq V$，则 $f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leq f(X) + f(Y)$。

证明。 性质 (P1) 可直接由 f 的定义推出。因此，我们考虑 (P2) 和 (P3)。

我们首先证明 (P2)。设 X 是 V 的子集，且 v 是 $V\setminus X$ 中的一个顶点。只需证明 $f(X) \leq f(X\cup\{v\})$。设 $C_1, C_2, \ldots, C_k$ 是 $G-X$ 的非平凡连通分量。那么我们有

$$f(X) = 3^{n-2} - \sum_{i=1}^{k} 3^{|C_i|-2}.$$

若 $v \notin \bigcup_{i=1}^{k} C_i$，则 v 是 $G-X$ 的一个孤立顶点。这意味着 $\mathsf{C}^*(X) = \mathsf{C}^*(X\cup\{v\})$。因此，$f(X) = f(X\cup\{v\})$。由此，我们假设 $v \in \bigcup_{i=1}^{k} C_i$。不失一般性，假设 $v \in C_k$。那么，$C_k \setminus \{v\}$ 被划分为 $G-(X\cup\{v\})$ 的连通分量 C'_1、C'_2、…、C'_ℓ。假设 C'_1、C'_2、…、C'_t 是非平凡的，而 C'_{t+1}、C'_{t+2}、…、C'_ℓ 是平凡的。那么我们有

$$f(X\cup\{v\}) = 3^{n-2} - \sum_{i=1}^{k-1} 3^{|C_i|-2} - \sum_{i=1}^{t} 3^{|C'_i|-2}.$$

由于 $|C_k| > \sum_{i=1}^{t} |C'_i|$，我们有

$$f(X\cup\{v\}) - f(X) = 3^{|C_k|-2} - \sum_{i=1}^{t} 3^{|C_i|-2} \geq 3^{\sum_{i=1}^{t}|C'_i|-2} - \sum_{i=1}^{t} 3^{|C'_i|-2} \geq 0,$$

其中，第一个不等式由函数 $g(x) = 3^{x-2}$ 的单调性得出，第二个不等式由引理 18 得出。

接下来，我们证明 (P3)。设 X 是 V 的一个子集。设 u, v 是 $V\setminus X$ 中不同的顶点。于是，只需证明

$$f(X\cup\{u\}) + f(X\cup\{v\}) \geq f(X\cup\{u,v\}) + f(X).$$

（例如，参见 [16, p.58]。）设 $C_1, C_2, \ldots, C_k$ 是 $G-X$ 的非平凡连通分量。于是，我们有

$$f(X) = 3^{n-2} - \sum_{i=1}^{k} 3^{|C_i|-2}.$$

首先，我们考虑 $u \notin \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ 的情形。在这种情况下，由于 u 是 $G-X$ 中的一个孤立顶点，我们有 $f(X) = f(X\cup\{u\})$ 和 $f(X\cup\{v\}) = f(X\cup\{u,v\})$。类似地，我们可以处理 $v \notin \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ 的情形。

接下来，我们考虑 $u, v \in \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ 和 u, v 属于 $G-X$ 的不同连通分量的情形。不失一般性，假设 $u \in C_{k-1}$ 和 $v \in C_k$。

- 设 $C^\circ_1, C^\circ_2, \ldots, C^\circ_\ell$ 是 $G[C_{k-1}]-\{u\}$ 的非平凡连通分量，其中 $G[C_{k-1}]$ 表示 G 中由 C_{k-1} 诱导的子图。
- 设 $C^\bullet_1, C^\bullet_2, \ldots, C^\bullet_t$ 是 $G[C_k]-\{v\}$ 的非平凡连通分量。那么，$G[C_{k-1}\cup C_k]-\{u,v\}$ 的非平凡连通分量为 $C^\circ_1, \ldots, C^\circ_\ell, C^\bullet_1, \ldots, C^\bullet_t$。因此，我们有

$$f(X\cup\{u\}) + f(X\cup\{v\}) = f(X\cup\{u,v\}) + f(X).$$

最后，我们考虑 u、$v \in \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ 和 u、v 属于 $G-X$ 的同一个连通分量的情形。不失一般性，假设 u、$v \in C_k$。

18 在图关联多面体上寻找组合最短路径的困难性

设 C_1°、C_2°、.....、C_ℓ° 是 $G[C_k]-\{u\}$ 的非平凡连通分量。设 $C_1^\bullet$、$C_2^\bullet$、.....、$C_t^\bullet$ 是 $G[C_k]-\{v\}$ 的非平凡连通分量。设 C'_1、C'_2、.....、C'_m 是 $G[C_k]-\{u、v\}$ 的非平凡连通分量。于是，由于 $\sum_{i=1}^{\ell}|C_i^\circ|\le|C_k|-1$ 和 $\sum_{i=1}^{t}|C_i^\bullet|\le|C_k|-1$，我们有

$$\begin{aligned}
&f(X\cup\{u\})+f(X\cup\{v\})-f(X\cup\{u,v\})-f(X)\\
=&-\sum_{i=1}^{\ell}3^{|C_i^\circ|-2}-\sum_{i=1}^{t}3^{|C_i^\bullet|-2}+3^{|C_k|-2}+\sum_{i=1}^{m}3^{|C'_i|-2}\\
\ge&-\sum_{i=1}^{\ell}3^{|C_i^\circ|-2}-\sum_{i=1}^{t}3^{|C_i^\bullet|-2}+3^{|C_k|-2}\\
\ge&-3^{\sum_{i=1}^{\ell}|C_i^\circ|-2}-3^{\sum_{i=1}^{t}|C_i^\bullet|-2}+3^{|C_k|-2}\\
\ge&-3^{|C_k|-3}-3^{|C_k|-3}+3^{|C_k|-2}=3^{|C_k|-3}\ge 0,
\end{aligned}$$

其中第二个不等式由引理 18 得出。证明完毕。 ◀

设 (U,ρ) 是一个多拟阵。众所周知，对于每个向量 $x\in\mathbb{R}^U$，x 是 $\mathbf{B}(\rho)$ 的一个极点，当且仅当存在 U 中元素的一个排列 $\sigma=(u_1,u_2,\ldots,u_{|U|})$，使得

$$x(u_i)=\rho(\{u_1,u_2,\ldots,u_i\})-\rho(\{u_1,u_2,\ldots,u_{i-1}\})$$

对于每个整数 $i\in[|U|]$（见 [13, 22, 31]）。在这种情况下，我们称 x 由 σ生成。

为了证明对于 G 的每棵消去树，x^T 都是 $\mathbf{B}(f)$ 的一个极点，我们在 V 上构造一个排列 σ，使得 x^T 由 σ 生成。为此，若对于 V 中顶点的一个排列 $\sigma=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$，对于满足 $i\ne j$ 的任意整数对 $i,j\in[n]$，若 v_i 是 T 中 v_j 的祖先，则 $i<j$，我们称消去树 T与 该排列兼容。换言之，当 T 被视为偏序集时，如果 σ 是 T 的线性扩张，则称 T 与 σ 兼容。

▶ **引理 20.** 设 $\sigma=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ 是 V 中顶点的一个排列。设 z 是由 σ 生成的 $\mathbf{B}(f)$ 的一个极点。此外，设 T 是与 σ 兼容的 G 的一棵消去树。那么，$z=x^T$。

证明。设 k 是 $[n]$ 中的一个整数。我们证明 $z(v_k)=x^T(v_k)$。设 C 是 $G-\{v_1,v_2,\ldots,v_{k-1}\}$ 中包含 v_k 的连通分量。若 v_k 是 T 的一个叶子，则 $|C|=1$。因此，我们有 $z(v_k)=x^T(v_k)=0$。假设 v_k 不是 T 的叶子。注意，在这种情况下，$|C|\ge 2$。设 $C_1,C_2,\ldots,C_\ell$ 是 $G[C]-\{v_k\}$ 的连通分量。假设 $C_1,C_2,\ldots,C_t$ 非平凡，而 $C_{t+1},C_{t+2},\ldots,C_\ell$ 平凡。对于每个整数 $i\in[\ell]\setminus[t]$，假设 $C_i=\{u_i\}$。设 $c_1,c_2,\ldots,c_\ell$ 是 T 中 v_k 的子节点。我们假设对每个整数 $i\in[\ell]$，$c_i\in C_i$。那么，对每个整数 $i\in[t]$，$T(c_i)=C_i$，这意味着

$$\sum_{u\in T(c_i)}x^T(u)=3^{|C_i|-2}.$$

我们有

$$z(v_k)=f(\{v_1,v_2,\ldots,v_k\})-f(\{v_1,v_2,\ldots,v_{k-1}\})=3^{|C|-2}-\sum_{i=1}^{t}3^{|C_i|-2}.$$

此外，由于对于每个整数 $i \in [\ell] \setminus [t]$，$u_i$ 都是 T 的叶子，

$$x^T(v_k) = 3^{|C|-2} - \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{u \in T(c_i)} x^T(u) = 3^{|C|-2} - \sum_{i=1}^{t} \sum_{u \in T(c_i)} x^T(u) = 3^{|C|-2} - \sum_{i=1}^{t} 3^{|C_i|-2}.$$

因此，$z(v_k) = x^T(v_k)$。证明至此完成。 ◀

回忆一下，$\mathcal{E} = \{x^T \in \mathbb{R}^V \mid T \text{ 是 } G\}$ 的一棵消去树。

▶ **引理 21**。基多面体 $\mathbf{B}(f)$ 与 E 的凸包重合。

证明。设 T 是 G的一棵消去树，并设 σ 是 V 中顶点的一个排列，满足 T 与 σ相容。设 z 是由 σ生成的$\mathbf{B}(f)$ 的极点。于是，引理 20 蕴含 $z = x^T$。

设 z是$\mathbf{B}(f)$的一个极点。回忆一下，存在一个排列 $\sigma = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n)$，它是 V 中顶点的排列，且 z 由 σ生成。将消去树 T 定义为按照排列 σ移除 V中的顶点后得到的树。（也就是说，我们先移除v_1，然后移除 v_2，依此类推。）于是，T 与 σ相容。因此，引理 20 蕴含 $z = x^T$。◀

以下引理可由引理 17 和 21 直接推出。

▶ **引理 22.** 基多面体 $\mathbf{B}(f)$ 是 G-关联多面体的一种实现。 ◀

因此，我们完成了从图结合子上的组合最短路径问题到多拟阵上的组合最短路径问题的归约。因此，定理 1 推出了定理 2。

6 结论

我们证明了，在图结合子和多拟阵的基多面体上，组合最短路径的计算是困难的。这使我们不再抱有希望：通过将问题推广到图结合子，获得一种多项式时间算法，以求出凸多边形两个三角剖分之间的最短翻转序列，以及两棵二叉树之间的旋转距离，从而解决一个未解决的问题。然而，该问题仍未解决，我们应当另辟蹊径来攻克它。

参考文献

1 Oswin Aichholzer、Wolfgang Mulzer 和 Alexander Pilz。简单多边形三角剖分之间的翻转距离是 NP完全的。《离散与计算几何》，54(2):368–389，2015。 doi:10.1007/s00454-015-9709-7。2 Benjamin Aram Berendsohn。毛毛虫结合多面体的直径。载于 Artur Czumaj 和 Qin Xin 编，第 *18* 届斯堪的纳维亚算法理论研讨会与研讨班，*SWAT 2022*，*2022*年*6*月*27*日至*29*日，法罗群岛托尔斯港，第 *LIPIcs* 卷227，页码14:1–14:12。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2022。 doi:10.4230/LIPIcs.SWAT.2022.14。3 Maike Buchin、Anna Lubiw、Arnaud de Mesmay 和 Saul Schleimer。低维拓扑空间中的计算与重构（达格施图尔研讨会22062）。达格施图尔报告，12(2):17–66，2022。 doi:10.4230/DagRep.12.2.17。4 Jean Cardinal、Stefan Langerman 和 Pablo Pérez-Lantero。关于树关联多面体的直径。电子组合学杂志，25(4):4，2018。 doi:10.37236/7762。

20 在图结合子上寻找组合最短路径的困难性

5 Jean Cardinal、Arturo I. Merino 和 Torsten Mütze。高效生成消去树和图关联多面体。载于 Joseph (Seffi) Naor 和 Niv Buchbinder 编，《2022年ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》，SODA 2022，线上会议／美国弗吉尼亚州亚历山德里亚，2022年1月9日至12日，页码2128–2140。SIAM，2022。 doi:10.1137/1.9781611977073.84。 6 Jean Cardinal、Lionel Pournin 和 Mario Valencia-Pabon。图关联多面体的直径估计。《组合年刊》，26:873–902，2022。 doi:10.1007/s00026-022-00598-z。 7 Jean Cardinal、Lionel Pournin 和 Mario Valencia-Pabon。扫帚树的旋转距离，2022。 doi:10.48550/ARXIV.2211.07984。 8 Michael Carr 和 Satyan L. Devadoss。考克斯特复形与图关联多面体。《拓扑学及其应用》，153(12):2155–2168，2006。 doi:https://doi.org/10.1016/j.topol.2005.08.010。 9 Cesar Ceballos、Francisco Santos 和 Günter M. Ziegler。关联多面体的许多非等价实现。《组合数学》，35(5):513–551，2015。 doi:10.1007/s00493-014-2959-9。 10 Sean Cleary 和 Katherine St. John。旋转距离是固定参数可解的。《信息处理快报》，109(16):918–922，2009。 doi:10.1016/j.ipl.2009.04.023。 11 Sean Cleary 和 Katherine St. John。旋转距离的线性时间近似算法。《图算法与应用杂志》，14(2):385–390，2010。 doi:10.7155/jgaa.00212。 12 Satyan L. Devadoss。图关联多面体的一种实现。《离散数学》，309(1):271–276，2009。 doi:10.1016/j.disc.2007.12.092。 13 Jack Edmonds。次模函数、拟阵及某些多面体。载于 Richard Guy、Haim Hanani、Norbert Sauer 和 Johanan Schönheim 编，《组合结构及其应用》，页码69–87。Gordon and Breach，纽约州纽约市，1970。 14 Uriel Feige 和 Mohammad Mahdian。寻找较小的平衡分隔集。载于 Jon M. Kleinberg 编，《第38届ACM计算理论年会论文集》，美国华盛顿州西雅图，2006年5月21日至23日，页码375–384。ACM，2006。 doi:10.1145/1132516.1132573。 15 Alan M. Frieze 和 Shang-Hua Teng。关于计算多面体直径的复杂性。《计算复杂性》，4:207–219，1994。 doi:10.1007/BF01206636。 16 Satoru Fujishige。《次模函数与优化》，《离散数学年刊》第58卷。爱思唯尔，荷兰阿姆斯特丹，第2版，2005。 17 Jacob E. Goodman、Joseph O'Rourke 和 Csaba D. Tóth 编。《离散与计算几何手册》第三版。CRC出版社，2017。 18 伊藤武洋、Erik D. Demaine、Nicholas J. A. Harvey、Christos H. Papadimitriou、Martha Sideri、Ryuhei Uehara 和 Yushi Uno。关于重构问题的复杂性。《理论计算机科学》，412(12-14):1054–1065，2011。 doi:10.1016/j.tcs.2010.12.005。 19 Volker Kaibel 和 Marc E. Pfetsch。多面体理论中的一些算法问题。载于 Michael Joswig 和 Nobuki Takayama 编，《代数、几何与软件系统》 [达格施图尔研讨会成果], 页码23–47。施普林格，2003。 doi:10.1007/978-3-662-05148-1_2。 20 Iyad A. Kanj、Eric Sedgwick 和 Ge Xia。计算三角剖分之间的翻转距离。《离散与计算几何》，58(2):313–344，2017。 doi:10.1007/s00454-017-9867-x。 21 Haohong Li 和 Ge Xia。一个用于凸翻转距离的 O(3.82^k) 时间固定参数算法。载于 Petra Berenbrink、Patricia Bouyer、Anuj Dawar 和 Mamadou Moustapha Kanté 编，《第40届国际计算机科学理论方面研讨会》，STACS 2023，2023年3月7日至9日，德国汉堡，第254卷 LIPIcs，页码44:1–44:14。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2023。 doi:10.4230/LIPIcs.STACS.2023.44。 22 László Lovász。次模函数与凸性。载于 Achim Bachem、Bernhard Korte 和 Martin Grötschel 编，《数学规划——现状》，页码235–257。施普林格柏林海德堡，德国柏林、海德堡，1983。 doi:10.1007/978-3-642-68874-4_10。 23 Anna Lubiw 和 Vinayak Pathak。点集的两个三角剖分之间的翻转距离是 NP完全的。《计算几何》，49:17–23，2015。 doi:10.1016/j.comgeo.2014.11.001。

24 Joan M. Lucas。二叉树旋转距离的改进核大小。《信息处理快报》，110(12-13):481–484，2010。 doi:10.1016/j.ipl.2010.04.022。25 Thibault Manneville 和 Vincent Pilaud。图结合子的图性质。洛林组合学研讨班，73:B73d，2015。26 Alexander Pilz。平面点集三角剖分之间的翻转距离是 APX-困难。《计算几何》，47(5):589–604，2014。 doi:10.1016/j.comgeo.2014.01.001。27 Alex Postnikov、Victor Reiner 和 Lauren Williams。广义排列多面体的面。《数学文献》，13:207–273，2008。28 Lionel Pournin。关联多面体的直径。《数学进展》，259:13–42，2014。 doi:https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.02.035。29 Lionel Pournin。循环多面体的渐近直径。《以色列数学杂志》，219(2):609–635，2017。 doi:10.1007/s11856-017-1492-0。30 Laura Sanità。分数匹配多胞体的直径及其困难性含义。载于 Mikkel Thorup（编），第59届IEEE计算机科学基础年会（FOCS 2018），巴黎，法国，2018年10月7日至9日，第910–921页。IEEE计算机学会，2018。doi:10.1109/FOCS.2018.00090。31 Lloyd S. Shapley。凸博弈的核。《国际博弈论杂志》，1:11–26，1971。 doi:10.1007/BF01753431。32 Daniel D. Sleator、Robert E. Tarjan 和 William P. Thurston。旋转距离、三角剖分与双曲几何。《美国数学会杂志》，1:647–681，1988。 doi:10.1090/S0894-0347-1988-0928904-4。33 Donald M. Topkis。多拟阵上的邻接关系。《数学规划》，30(2):229–237，1984。doi:10.1007/BF02591887。