arXiv:2304.14798v1 [math.GR] 28 Apr 2023

p进代数群的开子群

Anand Pillay* Ningyuan Yao †圣母大学
复旦大学

2023年5月1日

摘要

在 [6] 中，更正式地说，在 [5] 中，人们提出了这样的问题： p进代数群的开子群是否是（p进）半代数的，等价地说，是否可在结构（$\mathbb{Q}_p$， $+$， $\times$）中定义。我们对交换情形给出了肯定的回答。结合 [8] 的结果，这一结论也适用于约化代数群。

1 引言与预备知识

所谓 p-进代数群，是指定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的（不一定是线性的）代数群 G 的 $\mathbb{Q}_p$ 点群 $G(\mathbb{Q}_p)$。就本文目的而言，我们可以假设 G 作为代数群是连通的。相对于从拓扑域 $\mathbb{Q}_p$ 诱导的拓扑，群 $G(\mathbb{Q}_p)$ 是一个全不连通局部紧拓扑群。 p-进半代数以及在 $(\mathbb{Q}_p, +, \cdot)$ 中一阶可定义（带参数）这两种说法同义，稍后将予以讨论。

以下问题最初在 [6], 中以非正式的方式提出，随后在 [5] 中以更正式的形式提出（问题 1.1）。

问题 1.1. 设 G 是定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的代数群。 $G(\mathbb{Q}_p)$ 的任意开子群是否都是 p-进半代数的?

*本研究由美国国家科学基金会资助，项目编号：DMS-1665035、DMS-1760212 和 DMS-2054271
†本研究由国家社会科学基金资助，项目编号：20CZX050

在 p-进拓扑中，点 $a \in \mathbb{Q}_p$ 的基本开邻域具有如下形式： $\{x : v(x-a) \geq n\}$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。这些集合是 p-进半代数集，由此可知，对于任意 p-进代数群 $G(\mathbb{Q}_p)$，都存在一个由 p-进半代数集构成的单位元邻域基。由此我们推得，任意 $G(\mathbb{Q}_p)$ 的紧开子群都是半代数的。当 G 是半单且（几乎） $\mathbb{Q}_p$-单的时，问题 1.1 有肯定答案。~~1989年，~~第一作者收到 Armand Borel 的一封信，其中指出了这一点（基本上是关于 [4] 的一份报告）。这一结果基于 Prasad 的一篇论文 [8] ，该文除其他内容外，还证明了 Rousseau 和 Tits 的一个（此前未发表的）定理。结论是， $G(\mathbb{Q}_p)$ 的任意开子群要么是半代数的且具有有限指数，要么是紧的（因此也是半代数的）。在尚未读到 Prasad 的论文时，我们于 [4] 给出了 $G = SL_2$ 情形下的一个明确证明，该证明利用了 $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ 在其树上的作用；我们还对 $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ 的问题 1.1 给出了肯定答案。

本文的主要目标是：在 G是定义在 $\mathbb{Q}_p$上的交换代数群（不一定是线性的）这一“相反”情形下，对问题 1.1 给出肯定答案。我们还可以将这一结果与先前的结果结合起来，例如，当 G是定义在 $\mathbb{Q}_p$上的约化代数群时，也能对问题 1.1 给出肯定答案。

我们强调一个将会频繁用到的事实：如果 $G(\mathbb{Q}_p)$ 是一个 p-进代数群，那么 G 有一个单位元邻域基，由紧开 p-进半代数子群组成。

问题 1.1 的灵感来自实数情形，在该情形下我们确实有肯定答案：实代数群 $G(\mathbb{R})$ 的任一开子群 H 都是（实）半代数的。这是因为， $G(\mathbb{R})$ 有有限多个半代数且半代数连通的连通分支，而每个这样的分支实际上都是连通的。因此， $G(\mathbb{R})$ 的连通分支 $G(\mathbb{R})^0$ 具有有限指数，且是半代数的；并且 $G(\mathbb{R})^0 \leq H \leq G(\mathbb{R})$，由此可知 H 也是半代数的。

局部紧群由连通的（实）李群和全不连通群构成；也就是说，如果 G 是局部紧群，那么其拓扑连通分支 G^0 是连通李群的射影极限，而 G/G^0 是全不连通的。有趣的是，尽管实数域与 p-进数域之间存在模型论类比（下文将对此进行讨论），形如 $G(k)$的群——其中 G 是定义在 k上的代数群，对于 $k = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{Q}_p$ （更一般地说，即“半代数群”）——却处于这种性质的两端： $G(\mathbb{R})$是一个实李群，而 $G(\mathbb{Q}_p)$是一个 p-进李群，因而是全不连通的。

尽管模型论（以可定义性的形式）为问题 1.1 提供了某种

动机，但它在证明中并未发挥实质性的技术作用。不过，我们仍应对可定义性和半代数性作一些背景介绍。本文的阐述和定义是为当前论文量身定制的。实数和 p-进半代数集这两类集合可以统一地加以定义。设 k be $\mathbb{R}$ or $\mathbb{Q}_p$。那么， k-半代数集构成的类，是满足以下条件的笛卡尔幂 k^n 的子集所组成的最小类：(a) 包含所有 k-代数集，即由 k 上的有限个多项式方程组定义的 k^n 的子集；(b) 对（有限个）笛卡尔积和布尔组合封闭；(c) 若 $m \leq n$, $\pi: k^n \to k^m$ 是某个坐标投影，且 $X \subseteq k^n$ 是半代数集，则 $\pi(X)$ 也是半代数集；(d) 若 $\pi: k^n \to k^m$ 如 (c) 所述，且 $X \subseteq k^m$ 是半代数集，则 $\pi^{-1}(X)$ 也是半代数集。因此，显然，k-半代数集就是在结构 $(k, +, \times)$ 中带参数可定义的集合。事实上，这一说法对任意域 k 都有意义，尽管“半代数”一词通常仅用于实数和 p-进数。

众所周知， $\mathbb{R}^n$ 的实半代数子集恰好是形如 $\{\bar{a} \in \mathbb{R}^n: f_1(\bar{a}) = 0 \wedge \ldots \wedge f_r(\bar{a}) = 0 \wedge g(\bar{a}) > 0\}$ 的集合的有限并，其中 f_i 和 g 是 $\mathbb{R}$上的多项式。注意，在 $\mathbb{R}$中， $x < y$ 当且仅当 $x \neq y$且 $y - x$ 是平方数；如上所定义，右侧是半代数的。记住这一点，麦金太尔消去量词定理针对$\mathbb{Q}_p$ [2] 给出了实数与 p-进数之间一个强有力的模型论类比，并指出， $\mathbb{Q}_p^n$ 的任意 p-进半代数子集，都是形如 $\{\bar{a}: f(\bar{a}) = 0\}$ 和 $\{\bar{a}: P_m(g(\bar{a}))\}$ 的集合的有限布尔组合，其中 f、g是 $\mathbb{Q}_p$上的多项式，且 $m = 2$为 3、.....； $P_m(x)$表示“x是一个 mth 次幂”。一个重要事实是， $\mathbb{Q}_p$ 上的赋值是 p-进半代数可定义的。具体而言， p-进整数环（赋值环）可由公式 $\phi(x)$: $\exists y(y^2 = 1 + p^3x^4)$（不含参数）定义。对任意素数 p，这一结论都成立。

我们还应提及“半代数”一词在赋值域（K, v）中的一种相关但不同的用法。它指的是 K^n 的子集，这些子集是 K 上多项式的零点集的布尔组合，以及形如 $\{\bar{a}: v(f(\bar{a})) \leq v\, g(\bar{a})\}$ 的集合，其中 f, g 是 K 上的多项式。例如，当（K, v）是代数闭（非平凡）赋值域时，这种意义下的半代数集与在结构（$K, +, \times, V$）中可定义的集合一致，其中 V 是赋值环。

但本文将只讨论赋值域 $\mathbb{Q}_p$，而“半代数”一词沿用前文的含义。

我们需要了解特征为 0 的域 k 上连通交换代数群 G 的结构。参考 Milne 的

新近出版的著作 [3]很有帮助。首先，存在唯一的连通线性代数子群L，使得 G 在 k 上是一个阿贝尔簇 G/L，且定义在 k 上（ [3] 的定理 8.27）。其次，线性部分 L 是一个向量群 V（定义在 k 上）与一个代数环面 T（定义在 k 上）的乘积。（ [3] 的推论 16.15。）这里，定义在 k 上的向量群是指一个定义在 k 上的代数群，它在 k 上同构于若干个加法群 $\mathbb{G}_a$ 的有限乘积。定义在 k 上的代数环面是指一个定义在 k 上的代数群，它在 k 的代数闭包上同构于若干个乘法群 $\mathbb{G}_m$的有限乘积。给定一个代数环面 T，我们可以将 T 写成定义在 k 上的代数环面 T_s 与 T_a 的几乎直积，其中 T_s （ T 的分裂部分）在 k 上同构于若干个乘法群 $\mathbb{G}_m$ 的有限乘积，而 T_a 是各向异性的，也就是说，它在 k 上的特征群是平凡的。（参见[3] 的第 12 章，尤其是习题 12-5 和 12-6。）

现在，阿贝尔簇 A上的底层簇是某个射影空间 $\mathbb{P}$中的一个 k-闭子簇。当 $k = \mathbb{Q}_p$ 时， $\mathbb{P}(k)$ 是紧的，$A(k)$ 也是如此（赋予 p-进拓扑）。此外，根据 [7], 中的定理 3.1，对于 $k = \mathbb{Q}_p$，以及对于 k上的各向异性环面 T， $T(k)$ 也紧。

对于 $k = \mathbb{Q}_p$，令 $B = G/(V \times T_s)$。于是我们得到 k上的代数群正合列 $1 \to V \times T_s \to G \to B \to 1$，其中代数群 B 是 T_a对 A 的扩张，因此 $B(k)$ 也紧。综上，我们得出：

事实 1.2. 设 G 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的交换代数群，则存在 $\mathbb{Q}_p$上的一维连通线性代数群 L_1,.., L_d，以及 $\mathbb{Q}_p$上的连通代数群 B，并且存在一个正合列

$$1 \to L = L_1 \times ... \times L_d \to G \to B \to 1$$

over $\mathbb{Q}_p$。此外，
(i) 对于每个 i，要么 L_i 在 $\mathbb{Q}_p$ 上同构于加法群，要么在 $\mathbb{Q}_p$ 上同构于乘法群，

(ii) $B(\mathbb{Q}_p)$ 是紧的，并且 $G(\mathbb{Q}_p)$ 在 $B(\mathbb{Q}_p)$ 中的像是一个开（有限指数）子群（因此也是紧的）。

本文的主要结果是：

定理 1.3. 设 G 是定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的连通交换代数群。那么 $G(\mathbb{Q}_p)$ 的任意开子群都是 p-进半代数（可定义）的。

值得指出的是，如果 H 是 $G(\mathbb{Q}_p)$ 的任意抽象子群，而 U 是 $G(\mathbb{Q}_p)$ 的任意开紧子群，那么 $H+U$ 就是 $G(\mathbb{Q}_p)$ 的一个开子群。这或许会让人想到，将此应用于 $G=\mathbb{G}_m\times\mathbb{G}_a$，且 H 是 p-进指数函数的图像这一情形，就能得到 $G(\mathbb{Q}_p)$ 的非半代数开子群。但实际上，p-进指数函数的图像位于 $\mathbb{Z}_p^*\times\mathbb{Z}_p$ 中，因此添加一个紧开子群后，就再也看不出它了。

致谢。感谢 Armand Borel 和 Guy Rousseau 于 1989年 与第一作者通信。第5节 的内容受 Borel 在 1989年2月8日 的信中告知第一作者的内容影响，也在论文 [4] 的补遗中有所讨论。在 1989年6月6日 写给第一作者的信中，Rousseau 再次指出，$SL_2(\mathbb{Q}_p)$ 的任意真开子群都是紧的这一 [4] 结果，是 Tits 一项未发表结果的特例；该结果也由 Rousseau 给出了证明，并由 Prasad 发表了相关论述。

第一作者还要感谢 Dugald Macpherson 在 2018年秋（于瓦哈卡的一次会议期间）参与讨论。

2 证明：构件

如前所述，若 G 是定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的代数群，且其 $\mathbb{Q}_p$-点群是紧的，那么 $G(\mathbb{Q}_p)$ 的每个开子群都是可定义的。我们首先利用这一点，将定理的证明归约到 G 具有事实 1.2 中 $L_1\times\ldots\times L_d$ 这种形式的情形。

引理 2.1. 假设 G 是 $\mathbb{Q}_p$上的交换代数群，且$L\to G\to B$ 如事实 1.2 所述。假设 H 是 $G(\mathbb{Q}_p)$ 的开子群，并且 $H\cap L$ （ $L(\mathbb{Q}_p)$ 的开子群）是可定义的，那么 H 是可定义的。

证明. 在 $\mathbb{Q}_p$ 点上处理时，由事实 1.2 可得以下短正合列：

$$1\to L(Q_p)\to G_1\to_\pi B_1\to 1$$

其中 $G_1=G(\mathbb{Q}_p)$，且 B_1 是 $B(\mathbb{Q}_p)$ 的开有限指数子群。

设 U 是包含于 H 的 G_1 的一个开半代数子群。那么 $\pi(U)\leq\pi(H)$ 是紧群 B_1 的开子群，因此 $\pi(U)$

在 $\pi(H)$ 中具有有限指数。设 $a_1, .., a_n \in \pi(H)$ 是 $\pi(H)$ 中 $\pi(U)$ 的陪集代表元。设 $b_i \in H$ 使得 $\pi(b_i) = a_i$。

Claim. $H = (H \cap L) + U + (b_1 + U).. + (b_n + U)$.

证明。显然，右侧包含于左侧。现在假设 $h \in H$，于是对某个 $i = 1$、...、...、n 以及某个 $u \in U$，有 $\pi(h) = a_i + \pi(u)$。但此时 $\pi(b_i + u) = \pi(h)$，因此，由于 $b_i + u \in H$， $h - (b_i + u) \in \mathrm{Ker}(\pi) \cap H = H \cap L$，正如所需。□

因此，由于 $H \cap L$ 是可定义的， H也是可定义的。 □

因此，根据引理 2.1（以及事实 1.2），要证明定理 1.3，只需证明：

命题 2.2。假设 $G = L_1 \times ... \times L_n$，其中每个 L_i 要么是 $\mathbb{G}_a$ 的$\mathbb{G}_m$ （在 $\mathbb{Q}_p$上）。那么， $G(\mathbb{Q}_p)$的每个开子群都是半代数的。

接下来的几节中，我们将给出命题 2.2 的证明，基本上是对 d 作归纳法。本节余下部分，我们先讨论 $d = 1$ 的情形，并给出一些其他观察。

$\mathbb{Z}_p$ 表示 p-进整数。我们用 $\mathbb{Q}_p^\times$ 表示 p-进域的乘法群，并用$\mathbb{Z}_p^\times$ 表示其由 $\mathbb{Z}_p$ 的可逆元素组成的子群（即赋值为 0 的元素）。

引理2.3。$(\mathbb{Q}_p, +)$ 的真开子群恰好是由 $v(x) \geq k$ for each $k \in \mathbb{Z}$ 定义的子群，即形如 $p^k\mathbb{Z}_p$ for $k \in \mathbb{Z}$ 的子群。特别地，$(\mathbb{Q}_p, +)$ 的真开子群都是紧的半代数子群。

证明。我们在引言中已经提到，这些开球 $v(x) \geq k$form a neighbourhood basis of the identity in $(\mathbb{Q}_p, +)$。特别地，如果 H 是 $(\mathbb{Q}_p, +)$ 的一个开子群，那么 H contains some $U =$ "$v(x) \geq k$" for some $k \in \mathbb{Z}$。但群 $\mathbb{Q}_p/U$ 同构于（抽象地）Pr¨ufer$p$-群 $\mathbb{Z}(p^\infty)$（all complex p^nth roots of unity for $n \geq 0$），而 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ 的唯一真抽象子群是 p^nth roots of unity for each n 的子群。因此，H is of form $v(x) \geq k + n$ for the appropriate$n$。

□

引理 2.4. 设 H 是 $\mathbb{Q}_p^\times$ 的开子群。那么，要么 H 是紧的，此时对于某个 n，有 $(\mathbb{Z}_p^\times)^n \leq H \leq \mathbb{Z}_p^\times$；要么 H 含有一个形如 $(\mathbb{Q}_p^\times)^n$ (nth 次幂) 的有限指数子群。无论哪种情况， H 都是半代数的。

证明. 这是众所周知的结果，事实上在 [4] （事实 2.7）中有明确表述。注意， $H \cap \mathbb{Z}_p^\times$ 是开且具有有限指数。因此，如果 H 包含于 $\mathbb{Z}_p^\times$，那么对于某个 n，有 $(\mathbb{Z}_p^\times)^n \leq H \leq \mathbb{Z}_p^\times$；并且我们知道 $(\mathbb{Z}_p^\times)^n$ 在 $\mathbb{Z}_p^\times$ 中具有有限指数，因此在 H 中也具有有限指数。

否则， $H \cdot \mathbb{Z}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times$ 是 $\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times \cong (\mathbb{Z}, +)$ 的非平凡子群（通过赋值 v），因此具有某个 m 对应的形式 $m\mathbb{Z}$，且其在 $\mathbb{Z}$ 中的指数有限。由于 $H \cap \mathbb{Z}_p^\times$ 在 $\mathbb{Z}_p^\times$ 中的指数有限，因此 H 在 $\mathbb{Q}_p^\times$ 中的指数有限，故包含某个 $(\mathbb{Q}_p^\times)^n$，其在 $\mathbb{Q}_p^\times$ 中的指数有限，因此在 H中的指数也有限。 □

以下一般性基本事实将被频繁使用。

引理 2.5. 设 L_1、L_2 为群，且 $G = L_1 \times L_2$。假设 H 是 G的子群。设 $A_i = L_i \cap H$ 是 L_i 的正规子群，且 π_i是 G_i 在 L_i上的投影，其中 $i = 1, 2$。那么存在一个同构f_H：$\pi_1(H)/A_1 \to \pi_2(H)/A_2$，使得 $H = \bigcup_{a\in\pi_1(H)}(aA_1) \times f_H(aA_1)$。

证明。对于每个 $a \in \pi_1(H)$，存在 $f_a \in \pi_2(H)$，使得 $(aA_1) \times (f_aA_2) \subseteq H$。我们断言， $f: aA_1 \mapsto f_aA_2$ 是从 $\pi_1(G)/A_1$ 到$\pi_2(G)/A_2$的同构。首先，若存在 $b, c \in \pi_2(G)$，使得 $(aA_1) \times (bA_2) \subseteq H$ 且 $(aA_1)\times(cA_2) \subseteq H$，则 $A_1\times(b^{-1}cA_2) \subseteq H$。我们有 $b^{-1}cA_2 \subseteq H\cap L_2 = A_2$，因此 $bA_2 = cA_2$。所以 $f: aA_1 \mapsto f_aA_2$ 定义良好。同理，对于每个 $b \in \pi_2(H)$，存在 $g_b \in \pi_1(H)$，使得 $(g_bA_1) \times (bA_2) \subseteq H$。我们看到， $g: bA_2 \mapsto g_bA_1$ 是 f 的逆映射。因此， f 是一个双射。为证明 f 是一个态射，取 $a, b \in \pi_1(H)$，则

$$(aA_1 \times f_aA_2) \cdot (bA_1 \times f_bA_2) = (abA_1 \times f_af_bA_2) = (abA_1 \times f_{ab}A_2),$$

这意味着 f 是一个态射。

对于每个 $(a, b) \in H$，我们有 $(a, b)(A_1 \times A_2) = (aA_1 \times bA_2) \subseteq H$。但我们已经证明了 $bA_2 = f_aA_2 = f(aA_1)$，因此 $(a, b) \in aA_1 \times f(aA_1)2$，于是 $H \subseteq \bigcup_{a\in\pi_1(H)}(aA_1) \times f(aA_1)$，如所需。 □

3 加法群的乘积

这里我们讨论所有 L_i 都是加法群时的命题 2.2。

引理 3.1. 设 A 是 $(\mathbb{Q}_p, +)$ 的一个开紧子群，且 $\sigma: \mathbb{Q}_p/A \to \mathbb{Q}_p/A$ 是 $\mathbb{Q}_p/A$ 的一个群自同构。那么存在 $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$，使得 $\sigma(x + A) = \alpha x + A$ 对所有 $x \in \mathbb{Q}_p$ 都成立。

证明. 设 $O_n = (p^{-n}A)/A$。那么每个 O_n 都是阶为 p^n 的循环群，而 σ 在每个 O_n 上的限制都是 O_n 的一个自同构。因此存在整数 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$，使得

- 每个 $0 < \alpha_n < p^n$ 且
- $\sigma(x)$ 对于 $= \alpha_n x$。

断言。对每个 $n > 0$, $\alpha_n \equiv \alpha_{n+1}$（模 p^n）。

证明。对 n 使用归纳法。对于 $n = 1$，我们有 O_1 是阶为 p 的循环群。因此存在 $0 < \alpha_1 < p$，使得对所有 $x \in O_1$, $\sigma(x) = \alpha_1 x$。现在假设 $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ 满足该断言。令 $x \in O_{n+1}$ 为 O_{n+1} 的一个生成元，则 $\sigma(x) = \alpha_{n+1}x$，且 $\sigma(px) = p\sigma(x) = \alpha_{n+1}px$。由于 $px \in O_n$，我们有 $\sigma(px) = \alpha_n px$。因此 $\alpha_n px = \alpha_{n+1}px$。由于 x 是 O_{n+1} 的一个生成元，我们得到 $p\alpha_n \equiv p\alpha_{n+1}$（模 p^{n+1}），所以 $\alpha_n \equiv \alpha_{n+1}$（模 p^n），证毕。 □

上述断言表明，$\{\alpha_n | \ n \in \mathbb{N}^+\}$ 是 $\mathbb{Z}_p^\times$中的柯西序列，因此存在极限 $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$。此外，对每个 $n \in \mathbb{N}^+$，都有 $\alpha \equiv \alpha_n$(模 p^n)，这意味着对所有 $x \in p^{-n}A$, $\alpha x + A = \alpha_n x + A$。由此可得，对每个 $x \in p^{-n}A$, $\sigma(x + A) = \alpha_n(x + A) = \alpha_n x + A = \alpha x + A$。证明完毕。 □

推论 3.2. 设 A 和 B 是$(\mathbb{Q}_p, +)$的开紧子群，且$\eta : \mathbb{Q}_p/A \to \mathbb{Q}_p/B$ 是一个群同构。那么存在 $\alpha \in \mathbb{Q}_p^\times$，使得对所有 $x \in \mathbb{Q}_p$, $\eta(x + A) = \beta x + A$。

证明. 假设 $A = p^n\mathbb{Z}_p$ 和 $B = p^m\mathbb{Z}_p$。设 $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ 是由 $x \mapsto p^{m-n}x$ 定义的映射。那么 $\bar{f} : x/A \mapsto f(x)/B$ 是从$\mathbb{Q}_p/A$到 $\mathbb{Q}_p/B$的同构。由于 $\bar{f}^{-1} \circ \eta$是 $\mathbb{Q}_p/A$的自同构，由引理 3.1 可知，对某个 $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$, $\bar{f}^{-1} \circ \eta(x) = \alpha x + A$。因此，$\eta(x) = \bar{f} \circ (\bar{f}^{-1} \circ \eta)(x) = p^{m-n}\alpha + A$。 □

定理 3.3（加法开子群定理 I）。设 $G = L_1 \times \ldots \times L_n$，其中每个 $L_i = (\mathbb{Q}_p, +)$。设 H 是 G 的一个开子群，使得 $H_A = H \cap L_1$ 是紧的，且 $\pi_1(H) = L_1$。设 $H_B = H \cap (L_2 \times .. \times L_n)$。那么存在一个可定义线性映射 $f : L_1 \to L_2 \times \ldots \times L_n$，使得

$$H = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}_p} (a + H_A) \times (f(a) + H_B).$$

定理 3.4（加法开子群定理 II）。假设 H 是 $G = L_1 \times ... \times L_n$ 的一个开子群，其中同样每个 L_i 都是 $(\mathbb{Q}_p, +)$。若 O 是 H 的一个开子群，使得 $H/O \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$，则存在一个可定义线性映射 h: $\mathbb{Q}_p \to H$，它在 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 与 H/O 之间诱导一个同构。

(加法 I)$_n$ 表示加法开子群定理在情形 n 下的陈述。(加法 II)$_n$ 同理。

引理 3.5。(加法 I)$_n$，(加法 II)$_n$ $\Longrightarrow$ (加法 I)$_{n+1}$ 适用于 $n \geq 1$

证明。假设 $G = L_1 \times ... \times L_{n+1}$。令 H、H_A 和 H_B 如加法开子群定理 I 中所述。令 $\pi_{(2,...,n+1)}$ 为从 G 到 $L_2 \times ... \times L_{n+1}$ 的投影。由引理 2.5，存在映射 $g: L_1 \to \pi_{(2,...,n+1)}(H)$，使得

$$\bar{g} : L_1/H_A \to \pi_{(2,...,n+1)}(H)/H_B,\ a/H_A \mapsto g(a)/H_B$$

是一个同构，并且

$$H = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}_p} (a + H_A) \times (g(a) + H_B).$$

由于 $\pi_{(2,...,n+1)}(H)/H_B \cong L_1/H_A \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$，应用(加法 II)$_n$，存在一个可定义线性映射 $h: \mathbb{Q}_p \to \pi_{(2,...,n+1)}(H_B)$，使得 $h: L_1/H_A \to \pi_{(2,...,n+1)}(H)/H_B$ 是一个同构。现在，h 和 $\bar{g}$ 诱导出 L_1/H_A 的一个自同构 $\bar{\sigma}$，满足 $\bar{g} = h \circ \bar{\sigma}$。由推论 3.2，存在 $\gamma \in \mathbb{Z}_p^\times$ 使得$\bar{\sigma}(a/H_A) = \gamma a/H_A$。令 $\sigma: \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ 由 $x \mapsto \gamma x$ 和 $f = h \circ \sigma$ 定义，则 f 是可定义线性的，并且对于所有 $x \in \mathbb{Q}_p$，$f(x)/H_B = g(x)/H_B$。证明完毕。 □

引理 3.6。（加法 I）$_{n+1}$，（加法 II）$_n$ $\Longrightarrow$ （加法 II）$_{n+1}$，其中 $n \geq 1$。

证明。假设 $G = L_1 \times ... \times L_{n+1}$。令 H、H_A 和 H_B 如加法开子群定理 I 中所述。令 $\pi_{(2,...n+1)}$ 为从 G 到 $L_2 \times ... \times L_{n+1}$ 的投影，$O_A = O \cap L_1$，且 $O_B = O \cap L_2 \times ... \times L_n$。

• 情形 1：$H_A = O_A = L_1$。则 $H = L_1 \times H_B$ 且 $O = L_1 \times O_B$。我们看到 $H/O \cong H_B/O_B$，并且可以将（加法 II）$_n$ 应用于 H_B/O_B。

• 情形 2：$H_A = L_1$, $\pi_1(O) = L_1$，且 O_A 是紧的。于是 $H = H_A \times H_B$.

设 h_0： $\mathbb{Q}_p \to H$ 由 $a \mapsto (a, 0, ..., 0)$定义。容易看出h_0： $a/O_A \mapsto h_0(a)/O$ 是从 $\mathbb{Q}_p/O_A$ 到 H/O的群同态。另一方面， $a/O_A \in \mathbb{Q}_p/O$ 的阶为 p^m 当且仅当 $p^m a \in O_A$ 且 $p^{-(m-1)}a \notin O_A$，这意味着 $p^m(a, 0, ..., 0) \in O_A \times O_B \subseteq O$ 且 $p^{m-1}(a, 0, ..., 0) \in (p^{m-1}a + O_A) \times O_B$。由于$((p^{m-1}a + O_A) \times O_B) \cap O = \emptyset$，我们有$(a, 0, ..., 0)$在 H/O中的阶为 p^m。可见 h_0是单射，且 h_0的像是无限的。因此 h_0 是同构。设 h_1： $\mathbb{Q}_p \to H$ 是一个可定义线性函数，使得 $a/\mathbb{Z}_p \mapsto h_1(a)/O_A$ 是从 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 到$\mathbb{Q}_p/O_A$的同构。设 $h = h_1 \circ h_0$，则 h是可定义线性的，因而满足该性质。

• 情形 3： $\pi_1(H)$ 是紧的。于是 $H = \bigcup_{a \in \pi_1(H)} (a + H_A) \times (g(a) + H_B)$，且$H/(H_A \times H_B)$ 是有限的。考虑短正合列

$$1 \to (H_B + O)/O \to H/O \to H/(H_B + O) \to 1$$

由于 $O_A \times H_B \leq H_B + O$，我们看到 $(H_A \times H_B) \cap (H_B + O)$ 是 $H_A \times H_B$ 的有限指数子群，因此 $H/(H_B + O)$ 是有限的。由于 $H/O = \mathbb{Z}(p^\infty)$ 没有真无限子群，我们有 $(H_B + O) = H$。现在

$$(H_B + O)/O \cong H_B/(H_B \cap O) \text{ via } (0, a)/O \mapsto a/(H_B \cap O).$$

将 (加法 II)$_n$ 应用于 $H_B/(H_B \cap O)$，存在一个可定义线性函数h_0： $\mathbb{Q}_p \to H_B$，使得 $a/\mathbb{Z}_p \mapsto h_0(a)/H_B \cap O$ 是一个同构。因此

$$h : \mathbb{Q}_p \to H, \quad x \mapsto (0, h_0(x))$$

满足该性质。

• 情形 4： H_A 和 $\pi_1(O)$ 是紧的，且 $\pi_1(H) = L_1$。根据 (加法 I)$_{n+1}$，存在一个可定义线性函数 f： $\mathbb{Q}_p \to L_2 \times ... \times L_{n+1}$，使得

$$H = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}_p} (a + H_A) \times (f(a) + H_B).$$

令 $D = H \cap (\pi_1(O) \times L_2 \times ... \times L_n)$。于是 $O \subseteq D$。由于 H/D 是无限的，我们看到 D/O 是 H/O 的有限子群。假设 D/O 的阶为 p^n，那么对每个 $d \in D$，$p^n d \in O$，因此

$$D = p^{-n}O = \{p^{-n}x | \ x \in O\}.$$

考虑映射 h： $\mathbb{Q}_p \to H, a \mapsto (a, f(a))$。我们断言

$$\bar{h} : \mathbb{Q}_p/p^n\pi_1(O) \to H/O, \quad a/p^n\pi_1(O) \mapsto h(a)/O$$

¯是一个群同态。要证明 h 是群同态，只需检查对每个 $a \in p^n\pi_1$（O），h（a）$\in O$。取 $a \in p^n\pi_1$（O），则 $a = p^n b$ 与$b \in \pi_1$（O）。因此（b，f（b））$\in D$，从而 p^n（b，f（b））=（$p^n b$，$p^n f$（b））$\in O$。由于f是线性的，我们有 $p^n f$（b）$= f$（$p^n b$）$= f$（a）。因此 h（a）=（a，f（a））$\in O$，证毕。

设 $a \in \mathbb{Q}_p$，使得 $a/p^n\pi_1$（O）在 $\mathbb{Q}_p/p^n\pi_1$（O）中的阶为 p^m，则对某个 $b \in \pi_1$（O）$\backslash p\pi_1$（O），有 $a = p^{n-m}b$。因此（b，f（b））$\in D\backslash pD$。这意味着（b，f（b））$/O$在 D/O中的阶为 p^n，因此

$$p^{n-m}(b, f(b))/O = (a, f(a))/O = h(a)/O$$

¯的阶为 p^m。我们得出 h是单射，因此是同构。

• 情形 5： $O_A \leq H_A$ 是紧的，且 $\pi_1(H) = \pi_1(O) = L_1$。假设

$$H = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}_p} (a + H_A) \times (f_H(a) + H_B)$$

and

$$O = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}_p} (a + O_A) \times (f_O(a) + O_B)$$

其中 f_H 和 f_O 是从 $\mathbb{Q}_p$ 到 $L_2 \times ... \times L_{n+1}$的函数。容易看出，对于每个 $a \in \mathbb{Q}_p$，都有 $f_O(a) - f_H(a) \in H_B$。因此 $H = (H_A \times H_B) + O)$，从而 $(H_A \times H_B)/((H_A \times H_B) \cap O)$同构于 $H/O = (H_A \times H_B) + O)/O$，通过

$$x/((H_A \times H_B) \cap O) \mapsto x/O$$

对于 $x \in H_A \times H_B$。由情形 3可知，存在一个可定义线性函数h： $L_1 \to H_A \times H_B$，使得 $a/\mathbb{Z}_p \mapsto h(a)/((H_A \times H_B) \cap O)$是从 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 到 $(H_A \times H_B)/((H_A \times H_B) \cap O)$的同构，因此 $a/\mathbb{Z}_p \mapsto h(a)/O$ 也是从 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 到 H/O的同构。

□

由推论 3.2 易知 (加法 II)$_1$ 成立。利用引理 3.5 和引理 3.6，我们可以对 $n \in \mathbb{N}^+$ 使用归纳法证明定理 3.3。

定理 3.7. 设 H 是 $G = L_1 \times ... \times L_n$的开子群，其中每个$L_i = (\mathbb{Q}_p, +)$。则 H 是可定义的。

证明. 对 n使用归纳法。设 $H \cap L_1 = H_A$ 和 $H_B = H \cap (L_2 \times ... \times L_n)$。则根据归纳假设， H_A 和 H_B 是可定义的。若 $\pi_1(H)/H_A$ 是有限的，则 $H_A \times H_B$ 是 H的有限指数子群，因此 H 是可定义的。若 $\pi_1(H)/H_A$ 是无限的，则 $\pi_1(H) = L_1$ 且 H_A 是紧的。根据定理 3.3，存在一个可定义线性函数 $f\colon L_1 \to L_2 \times ... \times L_n$，使得

$$H = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}_p} (a + H_A) \times (f(a) + H_B).$$

对于任意 $a \in L_1$和 $b \in L_2 \times ... \times L_n$，$(a, b) \in H \iff b - f(a) \in H_B$。因此， H是可定义的。 □

引理 3.8。设 $G = L_1 \times ... \times L_n$，且对每个$i \leq n$， $L_i = (\mathbb{Q}_p, +)$。令 H 为 G $(\mathbb{Q}_p)$的一个开子群，则 G/H 是一个挠群。

证明。对 n使用归纳法。对于 $n = 1$， G/H 要么是平凡的，要么同构于$\mathbb{Z}(p^\infty)$。现在假设 $G = L_1 \times ... \times L_{n+1}$。令 $G_1 = L_1 \times ... \times L_n$，则有一个短正合列

$$1 \to G_1/G_1 \cap H \to G/H \to L_{n+1}/\pi_{n+1}(H) \to 1,$$

其中 π_{n+1} 是从 G 到 L_{n+1}的投影。由归纳假设可知， $G_1/G_1 \cap H$ 和 $L_{n+1}/\pi_{n+1}(H)$都是挠群。因此，G/H 也是一个挠群。

□

引理 3.9. 假设 $G = L_1 \times ... \times L_n$，且对于每个$i \leq n$，都有 $L_i = (\mathbb{Q}_p, +)$。设 $O \leq H$ 是 G的开子群，则 H/O 是一个挠群。

证明. H/O 是 G/O的子群，因此是一个挠群。 □

4 乘法群的乘积

如上所述， $\mathbb{Q}_p^\times$表示 $\mathbb{Q}_p$的乘法群。 $\mathbb{Z}_p^\times$也类似。$(\mathbb{Q}_p^\times)^k$表示该乘法群的 kth 次幂。

定理 4.1（乘法开子群定理 I）。设 $G = L_1 \times .. \times L_n$，其中每个 $L_i = \mathbb{Q}_p^\times$，且 H 是 G 的开子群。则 H 是可定义的。

定理 4.2（乘法开子群定理 II）。设 H 是 $G = L_1 \times ... \times L_n$ 的开子群，其中每个 $L_i = \mathbb{Q}_p^\times$。如果 O 是 H 的开子群，满足 $H/O \cong (\mathbb{Z}, +)$，那么存在一个可定义映射 $h:\ \mathbb{Q}_p \to H$，使得 $a/\mathbb{Z}_p^\times \mapsto h(a)/O$ 是从 $\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times$ 到 H/O 的同构。

乘法开子群定理 I（分别为 II）在 n 中记作（Multi-I）$_n$（分别为（Multi-II）$_n$）。注意，（Multi-I）$_1$ 由引理 2.4 成立。

注 4.3。由于 Th($\mathbb{Q}_p$) 具有可定义斯科伦函数（见 [9]），我们有如下结论：若 H 是 $L_1 \times ... \times L_n$ 的可定义子群（其中 L_i 是 $\mathbb{Q}_p^\times$），且 $H_A = H \cap L_1$ 和 $H_B = H \cap （L_2 \times .. \times L_n）$，则存在一个可定义映射

$$f : \pi_1(H) \to L_2 \times ... \times L_n$$

使得

$$H = \bigcup_{a \in \pi_1(H)} (aH_A) \times (f(a)H_B).$$

注 4.4。注意，对于每个正整数 k,

$$f_k : \mathbb{Q}_p^\times \to (\mathbb{Q}_p^\times)^k,\ x \mapsto x^k$$

¯是一个可定义映射，使得 f_k：$x/\mathbb{Z}_p^\times \mapsto f_k(x)/\mathbb{Z}_p^\times$是从$\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times$到（$\mathbb{Q}_p^\times$）$^k\mathbb{Z}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times$的同构。由于 Th($\mathbb{Q}_p$) 具有可定义斯科伦函数，$f_k$ 有一个可定义截面 h_k：（$\mathbb{Q}_p^\times$）$^k \to \mathbb{Q}_p^\times$。显然，$\bar{h_k}$：$x/\mathbb{Z}_p^\times \mapsto h_k(x)/\mathbb{Z}_p^\times$是从（$\mathbb{Q}_p^\times$）$^k\mathbb{Z}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times$到 $\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times$的同构。

引理 4.5。（Multi-II）$_1$ 成立。

证明。设 $O \leq H$ 是 $\mathbb{Q}_p^\times$ 的开子群，使得 $H/O \cong (\mathbb{Z}, +)$。那么 O 是紧的，因此是 $\mathbb{Z}_p^\times$ 的一个子群。令 $a \in H$ 具有最小正赋值。那么 $H/O = \{a^m/O |\ m \in \mathbb{Z}\}$。假设 $v(a) = d$，并令

$$f : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{Q}_p^\times,\ \ x \mapsto x^d,$$

then

$$\bar{f} : \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times \to H/O,\ \ x/\mathbb{Z}_p^\times \mapsto x^d/O$$

是一个同构。 □

引理 4.6。（Multi-I）$_{n+1}$、（Multi-II）$_n \implies$（Multi-II）$_{n+1}$，对于 $n \geq 1$。

证明。假设 $G = L_1 \times ... \times L_{n+1}$，其中每个 $L_i = \mathbb{Q}_p^\times$。令 $O \leq H$ 为 G、$H_A = H \cap L_1$、$H_B = H \cap (L_2 \times .. \times L_{n+1})$、$O_A = O \cap L_1$ 和 $O_B = O \cap (L_2 \times ... \times L_{n+1})$ 的开子群。

• 情形 1：H_A 和 O_A 在 $\pi_1(H)$ 中具有有限指数。于是，$H_A \times H_B$ 在 H 中具有有限指数，且 $O_A \times O_B$ 在 O 中具有有限指数。

考虑短正合列

$$1 \to (H_A \times H_B)O/O \to H/O \to H/(H_A \times H_B)O \to 1.$$

由于 $H/H_A \times H_B$ 是有限的，我们可知 $H/((H_A \times H_B)O)$ 是有限的，因此 $(H_A \times H_B)O/O$ 是 H/O 的无限子群，故同构于 $(\mathbb{Z}, +)$。假设 $|H/((H_A \times H_B)O)| = k$。注意，$(\mathbb{Z}, +)$ 中指数为 k 的子群具有 $(k\mathbb{Z}, +)$ 的形式。令 $b \in H$ 使得 b/O 是 H/O 的生成元，则

$$H = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} b^n O \quad \text{and} \quad (H_A \times H_B)O = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} b^{nk} O,$$

这意味着

$$H = \bigcup_{i=0}^{k-1} b^i (H_A \times H_B)O.$$

由于

$$H_A O/O \cong H_A/(H_A \cap O) = H_A/O_A$$

是 H/O 的有限子群，我们看到 $H_A = O_A$ as $(\mathbb{Z}, +)$ 没有非平凡有限子群。因此

$$(H_A \times H_B)O/O \cong (H_A \times H_B)/((H_A \times H_B) \cap O) \cong H_B/O_B.$$

将 (Multi-II)$_n$ 应用于 H_B/O_B，并由注 4.4 可知，存在一个可定义映射h_0 : $(\mathbb{Q}_p^\times)^k \to (H_A \times H_B)O$，使得

$$\bar{h}_0 : (\mathbb{Q}_p^\times)^k \mathbb{Z}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times \to (H_A \times H_B)O/O,\ a/\mathbb{Z}_p^\times \mapsto h_0(a)/O$$

是一个同构。由于 $p^k/\mathbb{Z}_p^\times$是 $(\mathbb{Q}_p^\times)^k\mathbb{Z}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times$的生成元，我们有 $h_0(p^k)/O$ 是 $(H_A \times H_B)O/O$的生成元。因此 $h_0(p^k)/O = b^k/O$。对于任意$x \in (\mathbb{Q}_p^\times)^k$，若 $v(x) = mk$，则 $x/\mathbb{Z}_p^\times = (p^k)^m/\mathbb{Z}_p^\times$，所以

$$h_0(x)/O = h_0((p^k)^m)/O = (b^k)^m/O = b^{km}/O = b^{v(x)}/O.$$

现在 $\mathbb{Q}_p^\times = \bigcup_{i=0}^{k-1} p^i\mathbb{Z}_p^\times (\mathbb{Q}_p^\times)^k$。应用可定义的 Sklolem 函数，存在一个可定义函数 $d\ \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{Q}_p^\times{}^k \quad xd\ x^{-1} = p^i\mathbb{Z}_p^\times \quad x \in$：（），使得若对于，，，$p^i\mathbb{Z}_p^\times\ \mathbb{Q}_p^\times{}^k \quad i = 0\ \ldots\ k-1 \quad h\ \mathbb{Q}_p^\times \to H \quad h\ x\ = b^i h_0\ d\ x$（）则（）。令：定义为（）（（））， 若 $x \in p^i\mathbb{Z}_p^\times (\mathbb{Q}_p^\times)^k$ 对 $i = 0, ..., k-1$ 成立。于是 h 是一个可定义函数。

为了证明

$$\bar{h} : \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times \to H/O,\ \ x/\mathbb{Z}_p^\times \mapsto h(x)/O$$

是一个同构，我们只需检验，对于所有 $x \in \mathbb{Q}_p^\times$，$h(x)/O = b^{v(x)}/O$ 。令 $x \in \mathbb{Q}_p^\times$。取满足 $v(x) = v(d(x)) + i$ 的 $0 \le i < k$，则

$$h(x)/O = b^i h_0(d(x))/O = b^i b^{v(d(x))}/O = b^{v(x)}/O.$$

这就完成了情形 1 的证明。

• 情形 2：H_A 是非紧的，而 O_A 是紧的。于是，$H_AO/O \cong H_A/O_A$ 是 H/O 的一个无限子群，因此 $H/(H_AO)$ 是有限的（利用我们的假设，即 H/O 与 $(\mathbb{Z}, +)$ 同构）。假设 $|H/(H_AO)| = k$。

将 $(\text{Multi-II})_n$ 应用于 H_A/O_A，存在一个可定义映射 $h_0 : (\mathbb{Q}_p^\times)^k \to H_AO$，使得

$$\bar{h}_0 : (\mathbb{Q}_p^\times)^k\mathbb{Z}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times \to H_AO/O,\ a/\mathbb{Z}_p^\times \mapsto h_0(a)/O$$

是一个同构。令 d：$\mathbb{Q}_p^\times \to (\mathbb{Q}_p^\times)^k$ 为一个可定义函数，若对 $i = 0, ..., k-1$ 有 $x \in p^i\mathbb{Z}_p^\times(\mathbb{Q}_p^\times)^k$，则该函数满足 $xd(x)^{-1} = p^i\mathbb{Z}_p^\times$。令 h：$\mathbb{Q}_p^\times \to H$ 定义为：若对 $i = 0, ..., k-1$ 有 $x \in p^i\mathbb{Z}_p^\times(\mathbb{Q}^\times)^k$，则 $h(x) = b^i h_0(d(x))$。那么，类似于情形 1 中的论证表明，h 是一个可定义函数，并且

$$\bar{h} : \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times \to H/O,\ \ x/\mathbb{Z}_p^\times \mapsto h(x)/O$$

是一个同构。

• 情形 3：H_A 和 $\pi_1(O)$ 是紧的，而 $\pi_1(H)$ 是非紧的。考虑短正合列

$$1 \to (H_A \times H_B)O/O \to H/O \to H/(H_A \times H_B)O \to 1.$$

由于 $\pi_1(H)$ 是非紧的，而 $\pi((H_A \times H_B)O) = H_A\pi_1(O)$ 是紧的，我们看到 $H/(H_A \times H_B)O$ 是无限的。由于 $(\mathbb{Z}, +)$ 的商群要么是有限的，要么就是 $(\mathbb{Z}, +)$ 本身，因此

我们有 $H_A \times H_B \leq O$。考虑短正合列

$$1 \to O/(H_A \times H_B) \to H/(H_A \times H_B) \to H/O \to 1.$$

and

$$1 \to \pi_1(O)/H_A \to \pi_1(H)/H_A \to \pi_1(H)/\pi_1(O) \to 1.$$

由于 $O/(H_A \times H_B) \cong \pi_1(O)/H_A$ 通过 $x/(H_A \times H_B) \mapsto \pi_1(x)/H_A$，且$H/(H_A \times H_B) \cong \pi_1(H)/H_A$ 也通过 $x/(H_A \times H_B) \mapsto \pi_1(x)/H_A$，我们看到

$$\bar{\pi}_1 : H/O \to \pi_1(H)/\pi_1(O),\ x/O \mapsto \pi_1(x)/\pi_1(O)$$

是一个同构。令 h_0 为 π_1的可定义截面，则

$$\bar{h}_0 : \pi_1(H)/\pi_1(O) \to H/O,\ a/\pi(O) \mapsto h_0(a)/O.$$

是一个同构。将 (Multi-II)$_1$ 应用于 $\pi_1(H)/\pi_1(O)$，存在一个可定义映射 $h_1 : \mathbb{Q}_p^\times \to \pi_1(H)$，使得

$$\bar{h}_1 : \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times \to \pi_1(H)/\pi_1(O),\ a/\mathbb{Z}_p^\times \mapsto h_1(a)/\pi_1(O).$$

是一个同构。将 (Multi-I)$_{n+1}$ 应用于 H，存在可定义映射

$$f : \pi_1(H) \to L_2 \times ... \times L_{n+1}$$

使得

$$H = \bigcup_{a \in \pi_1(H)} (aH_A) \times (f(a)H_B).$$

Let

$$h : \mathbb{Q}_p^\times \to H, x \mapsto (h_0(h_1(x)), f(h_0(h_1(x)))),$$

Then

$$\bar{h} : \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times \to H/O,\ a/\mathbb{Z}_p^\times \mapsto h(a)/H_A.$$

是一个同构。这就完成了情形 3 的证明。

• 情形 4: H_A 是紧的，而 $\pi_1(O)$是非紧的。将 (Multi-I)$_{n+1}$应用于 H 和 O，令 f_H 和 f_O 为从 L_1 到 $L_2 \times ... \times L_{n+1}$的可定义函数，使得

$$H = \bigcup_{a \in \pi_1(H)} (aH_A) \times (f_H(a)H_B)$$

and

$$O = \bigcup_{a\in\pi_1(O)} (aO_A) \times (f_O(a)O_B)$$

容易看出，对于每个 $a \in \pi_1(O)$， $f_O(a) - f_H(a) \in H_B$。因此

$$(H_A \times H_B)O = H \cap (\pi_1(O)H_A \times L_2 \times ... \times L_{n+1}),$$

因此 $H/(H_A \times H_B)O \cong \pi_1(H)/\pi_1(O)H_A$ 是有限的。我们看到，$(H_A \times H_B)O/O$ 是 H/O 的无限子群，因此与 $\mathbb{Z}$同构。由于H_A 是紧的，

$$H_AO/O \cong H_A/O \cap H_A = H_A/O_A$$

是 $(H_A \times H_B)O/O$的有限子群，因此是平凡的，我们得出$H_A = O_A$，所以

$$(H_A\times H_B)O/O \cong (H_A\times H_B)/(O\cap H_A\times H_B) = (H_A\times H_B)/(H_A\times O_B) \cong H_B/O_B.$$

假设 $|H/(H_A \times H_B)O| = k$。将 (Multi-II)$_n$ 应用于 H_B/O_B，存在一个可定义映射 $h_0 : (\mathbb{Q}_p^\times)^k \to (H_A \times H_B)O$，使得

$$\bar{h}_0 : (\mathbb{Q}_p^\times)^k\mathbb{Z}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times \to (H_A \times H_B)O/O, \quad a/\mathbb{Z}_p^\times \mapsto h_0(a)/O$$

是一个同构。

设 $d\colon \mathbb{Q}_p^\times \to (\mathbb{Q}_p^\times)^k$ 是一个可定义函数，使得若 $x \in p^i\mathbb{Z}_p^\times(\mathbb{Q}_p^\times)^k$，则对 $i = 0, ..., k-1$有 $xd(x)^{-1} = p^i\mathbb{Z}_p^\times$。设 $h\colon \mathbb{Q}_p^\times \to H$由下式定义：若 $x \in p^i\mathbb{Z}_p^\times(\mathbb{Q}_p^\times)^k$，则对 $i = 0, ..., k-1$有 $h(x) = b^i h_0(d(x))$。那么，类似于情形 1 中的论证表明 h 是一个可定义函数，并且

$$\bar{h} : \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times \to H/O, \quad x/\mathbb{Z}_p^\times \mapsto h(x)/O$$

是一个同构。

□

引理 4.7. (Multi-I)$_n$、(Multi-II)$_n$ $\Longrightarrow$ (Multi-I)$_{n+1}$ 对于 $n \geq 1$。

证明。设 H是 $L_1 \times ... \times L_{n+1}$的一个开子群。设 H_A和 H_B如上所述。若 $\pi_1(H)/H_A$ 是有限的，则 $H/H_A \times H_B$ 是有限的。根据 (Multi-I)$_n$，H_A 和 H_B 是可定义的，因此 H也是可定义的。

如果 $\pi_1(H)/H_A$ 是无限的，那么 $H_A \subseteq \mathbb{Z}_p^\times$，且 $\pi_1(H)$ 是非紧的。取一个函数 $f\colon \pi_1(H) \to L_2 \times ... \times L_{n+1}$，使得

$$H = \bigcup_{a\in\pi_1(H)} (aH_A) \times (f(a)H_B).$$

设 $C_A = \pi_1(H) \cap \mathbb{Z}_p^\times$。考虑短正合列

$$1 \to C_A/H_A \to \pi_1(H)/H_A \to \pi_1(H)/C_A \to 1.$$

由于 $\pi_1(H)/C_A$ 同构于 $\mathbb{Z}$，我们看到，C_A/H_A 正是 $\pi_1(H)/H_A$ 的挠元子群。取具有最小正赋值的 $\eta \in \pi_1(H)$。令 $\theta_1, ..., \theta_k \in C_A$ 使得 C_A 是 $\{\theta_1 H_A, ..., \theta_k H_A\}$ 的不交并。于是 $\pi_1(H)$ 是 $\{\theta_i \eta^m H_A |\ 1 \le i \le k,\ m \in \mathbb{Z}\}$ 的不交并。令 $f(\theta_i) = \gamma_i$ 对于 $1 \le i \le k$，则

$$H = \bigcup_{1 \le i \le k, m \in \mathbb{Z}} (\theta_i \eta^m H_A) \times (\gamma_i f(\eta^m) H_B).$$

令 $H^* = HC_A$，则 $\pi_1(H^*) = \pi_1(H)$，且 $\pi_{(2,...n+1)}(H^*) = \pi_{(2,...n+1)}(H)$。由于 $\pi_1(H^*) \cap \mathbb{Z}_p^\times = C_A$，我们有 $\pi_1(H^*)/C_A \cong (\mathbb{Z}, +)$。令 $C_B = H^* \cap (L_2 \times ... \times L_{n+1})$。由于 $H^* \cap L_1 = C_A$，我们看到，C_B 是 $\{\gamma_1 H_B, ..., \gamma_k H_B\}$ 与

$$H^* = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (\eta^m C_A) \times (f(\eta^m) C_B)$$

由于 $\pi_{(2,...,n+1)}(H^*)/C_B \cong \mathbb{Z}$，应用 (Multi-II)$_n$，存在一个可定义映射 $f^*: \pi_1(H^*) \to \pi_{(2,...,n+1)}(H^*)$，使得

$$\bar{f^*} : \pi_1(H^*)/C_A \to \pi_{(2,...,n+1)}(H^*)/C_B,\ \ a/C_A \mapsto f^*(a)/C_B$$

是一个同构，因此 $f^*(x)/C_B = f(x)/C_B$ 作为 $(\mathbb{Z}, +)$ 只有一个自同构。所以

$$H^* = \bigcup_{a \in \pi_1(H)} (aC_A) \times (f^*(a) C_B)$$

由 (Multi-I)$_n$，C_A 和 C_B 是可定义的，因此 H^* 是可定义的。

令 $S_A = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \eta^m H_A$ 和 $S_B = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} f(\eta)^m H_B$。那么由 (Multi-I)$_n$，$S_A$ 和 S_B 是可定义的。对于任意 $(x, y) \in H^*$，我们有

$$(x, y) \in H \iff (\bigwedge_{i=1}^{k} ({\theta_i}^{-1} x \in S_A \leftrightarrow {\gamma_i}^{-1} y \in S_B)),$$

因此，H 是可定义的，符合要求。 □

由引理 2.4、引理 4.5、引理 4.6 和引理 4.7 可知，定理 4.1 成立，即 $\mathbb{Q}_p^\times \times ... \times \mathbb{Q}_p^\times$ 的每个开子群都是可定义的。

引理 4.8. 假设 $G = L_1 \times ... \times L_n$ 其中每个 $L_i = \mathbb{Q}_p^\times$。令 $O \leq H$ 为 G 的开子群。则 H/O 要么是有限的，要么包含一个无挠元（即一个无限阶元素）。

证明. 对 n 作归纳法。

假设 H/O 是无限的。令 $H_A = H \cap L_1$、$O_A = O \cap L_1$、$H_B = H \cap （L_2 \times ... \times L_n）$ 以及 $O_B = O \cap （L_2 \times ... \times L_n）$。

• 情形 1. $\pi_1（H）/\pi_1（O）$ 是无限的。则 $\pi_1（O） \subseteq \mathbb{Z}_p^\times$ 且 $\pi_1（H）$ 是非紧的。任取 $a \in \pi_1（H）\backslash \mathbb{Z}_p^\times$，则 $（a，f_H（a））/O$ 是 H/O 中的无挠元。

• 情形 2. $\pi_1（H）/\pi_1（O）$ 是有限的且 H_A/O_A 是无限的。则 $O_A \subseteq \mathbb{Z}_p^\times$ 和 H_A 是非紧的。任取 $a \in H_A \backslash \mathbb{Z}_p^\times$，则 $（a，1，...，1）/O$ 是 H/O 中的无挠元。

• 情形 3. $\pi_1(H)/\pi_1(O)$ 和 H_A/O_A 均为有限的。设 $H^* = H \cap (\pi_1(O) \times L_2 \times .. \times L_n)$。则 $H/H^* \cong \pi_1(H)/\pi_1(O)$ 是有限的。因此 H^*/O 是无限的。要证明 H/O 含有无挠元，只需在 H^*/O 中找到一个无挠元。不失一般性，我们假设 $\pi_1(H) = \pi_1(O)$。

现在，$H_AO/O \cong H_A/O_A$ 是 H/O 的有限子群。设 $H_AO = O^*$，则 $O^* \cap L_1 = H_A$，且 H/O^* 是 H/O 的无限商群。要证明 H/O 含有无挠元，只需在 H/O^* 中找到一个无挠元。不失一般性，我们假设 $O_A = H_A$。

因此，我们只需考虑 $\pi_1(H) = \pi_1(O)$and $O_A = H_A$ 的情形。这意味着 $H/O \cong H_B/O_B$，因此根据归纳假设，它含有一个无挠元。

□

引理 4.9. 假设 $G = A \times B$，其中 A 是由 $(\mathbb{Q}_p, +)$ 的副本构成的（有限）乘积，且 B 是由 $\mathbb{Q}_p^\times$ 的副本构成的（有限）乘积。若 H 是 G 的开子群，则 H 是可定义的。

证明。设 π_A 和 π_B 分别为从 G 到 A 和 B 的投影。根据定理 3.3 和定理 4.1，$H_A = G \cap A$ 和 $H_B = G \cap B$ 是可定义的。根据引理 3.9 和引理 4.8，$\pi_A(H)/H_A$ 是一个挠群，而 $\pi_B(H)/H_B$ 要么是有限的，要么含有一个无挠元素。我们得出结论。

即 $\pi_A(H)/H_A \cong \pi_B(H)/H_B$ 是有限的。因此， H 是 $H_A \times H_B$的平移的有限并，因而是可定义的。

□

注意到，引理 4.9 正是命题 2.2；如第 2 节所述，命题 2.2 足以证明主要定理 1.3，即连通交换代数群在 $\mathbb{Q}_p$ 上的 $\mathbb{Q}_p$-点群的每个开子群都是 p-进半代数集。

5 约化情形

我们所说的 $\mathbb{Q}_p$ 上的约化代数群，是指 $\mathbb{Q}_p$ 上的连通代数群，它是半单群 G 与代数环面 T 的几乎直积，二者均定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上。

当 G 是约化代数群时，我们将对问题 1.1 给出肯定回答。事实上，我们将得到一个更一般的结论。首先回顾：若 G 是 k 上的连通代数群，则 G 有唯一的正规连通线性子群 L； L 定义在 k 上，而 G/L 是 k 上的阿贝尔簇。

命题 5.1. 设 G 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的连通代数群，并且 G 的线性部分 L 是半单群（定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上）与连通交换线性代数群（定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上）的几乎直积。那么， $G(\mathbb{Q}_p)$ 的任意开子群都是 p-进半代数集。

我们将着手证明命题 5.1。我们将用到 [1]和 [7]。令 k 表示 $\mathbb{Q}_p$。固定一个定义在 k上的半单代数群 G；回顾一下，这意味着 G是连通的，且其可解根基（ G的最大连通正规子群，必然定义在 k上）是平凡的。如果 G 没有定义在 k上的非平凡正规连通子群，就称其为几乎 k-单。有时人们会用 k-单代替几乎 k-单，我们也将如此称呼。

事实 5.2。假设 G 是半单的，且定义在 k 上，那么 G 是定义在 k上的 k-单群的几乎直积。

设 G 是半单的，且定义在 k上。若 G含有一个定义在 k 上的非平凡子群 T，且该子群是 k-分裂环面，也就是说， T 在 k 上同构于若干个乘法群的直积，则称 G是 k-各向同性的。否则，称 G 是 k-各向异性的。关于以下内容，参见 [7] 的定理 3.1：

事实 5.3. 若 G 是半单的，定义在 k 上且是 k-各向异性的，则 $G(k)$是紧的。

回顾一下，如果对于任意一个连通代数群 H，以及一个具有有限（中心）核的代数群满同态 $f\colon H \to G$，只要 f 是同构，那么就称连通代数群 G 为单连通的。

事实 5.4. 假设 G 是半单的且定义在 k 上。那么存在一个同样定义在 k 上的单连通群 G，以及一个定义在 k 上的满同态 $f\colon G \to G$，其核是有限（中心的）。

参见 [7] 的命题 2.10。

定义 5.5. 设 G 是 k 上的半单群。记 $G(k)^+$ 为由其幺幂元生成的 $G(k)$ 的（抽象）子群。

以下内容归功于 Tits [10]:

命题 5.6. 设 G 是 k-单的。那么， $G(k)$ 中每个被 $G(k)^+$ 正规化的子群，要么是 G 中心的，要么包含 $G(k)^+$。特别地， $G(k)^+$ 模去其有限中心后是抽象单的。

以下是关于 $k = \mathbb{Q}_p$ 的 Kneser-Tits 猜想的真确性。参见 [7] 的定理 7.6。

命题 5.7。假设 G 是 k-单、各向同性且单连通的。那么 $G(k)^+ = G(k)$。

这里给出 Tits 未发表定理的一个版本（或推论）；该定理由 Prasad 证明，见 [8]。

定理 5.8。设 G 是半单的、（在 k 上） k-单的且 k-各向同性的。那么 (i) $G(k)^+$ 是半代数的，且具有有限指数。(ii) $G(k)$ 的任意开子群 H 要么是紧的（因此是半代数的），要么包含 $G(k)^+$，因此具有有限指数且是半代数的。

证明。令 $f\colon G \to \tilde{G}$ 为由事实 5.4 给出的 G 的“普遍覆盖”。根据命题 5.7， $G(k) = G(k)^+$。根据 [1] 的推论 3.20， $f(G(k))$（$G(k)$ 的一个半代数子群）是 $\tilde{G}(k)$ 的有限指数正规开子群。但 $G(k)^+ = f(G(k)^+) = f(G(k))$，因此我们已经证明， $G(k)^+$是 $G(k)$ 的一个有限指数半代数（开、正规）子群。现在令H 为 $G(k)$ 的一个开子群。因此 $H \cap G(k)^+$ 是 $G(k)^+$ 的一个开子群。

[8] 的“定理（T）”表明，$G(k)^+$的任何真开子群都是紧的。因此，要么 $H \supseteq G(k)^+$，在这种情况下，H 是 $G(k)$ 中的一个有限指数半代数子群；要么 $H \cap G(k)^+$ 在 $G(k)$ 中既紧又开，因而是半代数的，并且由于 $G(k)^+$ 在 $G(k)$ 中具有有限指数，$H \cap G(k)^+$ 在 H 中具有有限指数，因此后者也是紧的半代数子群。

□

引理 5.9. 设 G 是定义在 k 上的连通代数群，它是定义在 k 上的连通代数群 G_1 和 G_2 的几乎直积，其中 G_1 是 k-单半单群。设 H 是 $G(k)$ 的开子群，且 $A = H \cap G_1(k)$，$B = H \cap G_2(k)$。那么群 AB 在 H 中的指数有限。

证明. 不妨设 G 是直积 $G_1 \times G_2$（其中 G_1 是 k-单群）。令 $A_1 = \pi_1(H)$ 为 H 在 G_1 上的投影。那么 $A \subseteq A_1$ 是 G_1 的开子群，且 A 在 A_1 中正规。

注意，$H/(A \times B)$ 与 A_1/A 自然同构，因此只需证明 A 在 A_1 中的指数有限。若 G_1 是 k-各向异性的，则 $G_1(k)$ 是紧群，所以 A 和 A_1 在 $G_1(k)$ 中的指数都有限，特别地，A_1/A 有限。否则，G_1 是 k-各向同性的。考虑 A。我们使用定理 5.8。若 A 是紧群，则 $A \cap G(k)^+$ 在 A 中的指数有限。现在，若 A_1 包含 $G(k)^+$，则 $A \cap G(k)^+$ 是 $G(k)^+$ 的一个真正规（无限）子群，这与命题 5.6 矛盾。因此 A_1 是紧群。由此，A_1/A 有限。否则，A 在 $G(k)$ 中的指数有限，因而在 A_1 中的指数也有限。 □

命题 5.1 的证明。与引理 2.1 的证明一样，我们可以假设G 是线性的（因为如果 A是 G 的最大阿贝尔簇商，那么 $A(k)$是紧的）。设 G是半单群 S（定义在 k上）与交换群 D（定义在 k 上）的几乎直积（二者均为连通群）。根据事实 5.2，我们可以将 S写成 k-单群 G_1、...、G_r的几乎直积。我们对 r作归纳法。若 $r = 0$，则 $G = D$ 是交换群，应用定理 1.3。设 $r = 1$，于是 G是 G_1 与 D的几乎直积。设H 是 G的一个开子群。设 $A = H \cap G_1(k)$和 $B = H \cap D(k)$。若 G_1 是 k-各向同性的，则 A 是半代数的（定理 5.8）；而当 G_1 是 k-各向异性的时，A 是紧的，因此也是半代数的。根据定理 1.3，B 是半代数的。因此 AB 是半代数的；根据引理 5.9，H也是半代数的。

现在假设 $r > 1$。将 G 写成 G_1 与群 L 的几乎直积，其中 L 是 G_2、...、G_r、D 的几乎直积。令 H 为 G 的一个开子群，并令 $A = H \cap G_1(k)$ 和 $B = H \cap L(k)$。根据

归纳法，A 和 B 都是半代数的，因此 AB 也是半代数的；由引理 5.9，H 也如此。 □

参考文献

[1] A. Borel 和 J. Tits，《简单代数群的“抽象”同态》，《数学年刊》第97卷（1973），499–571页。[2] A. Macintyre，《关于 p进域的可定义子集》，JSL，41（1976），605–610页。[3] J. S. Milne，《代数群：域上有限型群概形理论》，剑桥高级数学研究丛书，第170卷，剑桥大学出版社，2017年。[4] A. Nesin 和 A. Pillay，《 $GL_2(\mathbb{Q}_p)$的开子群》，研讨会报告第104号，《第七届复活节模型论会议论文集》（编者：Dahn、Wolter），柏林洪堡大学数学系，德意志民主共和国，柏林，1989年。[5] A. Onshuus 和 A. Pillay，《可定义群与紧 p进李群》，《伦敦数学会会刊》78（2008），233–247页。[6] A. Pillay，《模型论在实数和 p进代数群中的一个应用》，《代数杂志》126（1989），139–146页。[7] V. Platonov 和 A. Rapinchuk，《代数群与数论》，学术出版社，1994年。[8] G. Prasad，《Bruhat-Tits-Rousseau定理及Tits定理的初等证明》，《法国数学会公报》110（1982），197–202页。[9] P. Scowcroft，《关于可定义斯科伦函数的注记》，《符号逻辑杂志》53（1988），905–911页。[10] J. Tits，《代数简单群与抽象简单群》，《数学年刊》第80卷（1964），313–329页。