arXiv:2304.14843v1 [econ.TH] 28 Apr 2023

收益—损失对冲与累积前景理论

Lorenzo Bastianello、Alain Chateauneuf、Bernard Cornet*

2023年5月1日

摘要

如果两个行为在相同的自然状态下带来较高收益，则称它们为共单调。本文的主要目的是通过涉及共单调性的简单性质，推导出累积前景理论（CPT）的一种新刻画。本文的主要创新在于提出了一个名为收益—损失对冲的概念：即使行为是共单调的，将正行为与负行为混合也能创造对冲机会。这使我们能够阐明累积前景理论在何种意义上不同于Choquet期望效用。我们的分析采用边际效用为（分段）常数这一更简单的情形，从而能够清楚地区分对不确定性的感知与对结果的评价。

KEYWORDS: 累积前景理论、共单调性、收益—损失对冲、ˇSipoˇs积分、Choquet积分。

JEL CLASSIFICATION NUMBER: D81。

1 引言

在日常决策中，经济主体往往面临不确定性。例如，可以设想一位决策者（DM）需要决定如何在两种不同的资产组合之间分配自己的财富；或者一家企业需要决定是投资于创新技术还是传统技术。在风险和不确定性情形下，最常用的模型是期望效用模型。该模型最初由伯努利于18世纪初提出，后来由 de Finetti[6], Savage [13] 以及冯·诺依曼和 Morgenstern [27]公理化。然而，经验证据表明，期望效用理论并不能很好地描述决策者的实际选择。早期的例子包括著名的 Allais 悖论 [1] 和埃尔斯伯格悖论 [9]。

最突出且最成功的期望效用理论替代方案之一，是Tversky和Kahneman [21]提出的累积前景理论（CPT）。其目标是

*Bastianello（通讯作者）：威尼斯卡福斯卡里大学，（电子邮箱：lorenzo.bastianello@unive.it）；Chateauneuf：IPAG商学院、巴黎第一大学先贤祠-索邦分校和巴黎经济学院，（电子邮箱：chateaun@univ-paris1.fr）；Cornet：巴黎第一大学先贤祠-索邦分校和堪萨斯大学（电子邮箱：cornet@ku.edu）。初稿：2020年2月

本文包含两个方面：(i) 在（分段）常数边际效用的简化假设下，我们为累积前景理论泛函提供一种新的数学刻画 `仿照 Yaari [26]；(ii) 我们利用上一点的刻画，获得累积前景理论的一种新颖偏好公理化。

将行为视为从状态空间 S 到实数集的函数。因此，给定行为 $f:\ S \to \mathbb{R}$，$f(s)$ 可以解释为：如果状态最终为 s，决策者所获得的金钱或消费品数量。共单调行为发挥着核心作用。宽泛地说，如果两个行为呈正相关，则称它们是共单调的。混合两个共单调行为并不能提供针对不确定性的可行对冲。Schmeidler [14], [15] 在其开创性论文中利用了这一思想，将期望效用扩展为 Choquet期望效用。

CPT 相较于 Choquet模型 的一个优势在于，它能够将决策者在收益域中的行为与在损失域中的行为区分开来，即当结果分别高于或低于某一特定参考点时（在本文中，参考点自然取为 0）。这种行为差异可以分解为两个组成部分。第一部分称为损失厌恶，意指“损失的影响大于收益”（Tversky和Kahneman [21]）。从数学上说，这意味着损失会乘以一个常数 $\lambda > 1$。第二部分通常称为符号依赖，意指对于不确定性的态度（在数学上由容量表示）在收益和损失情形下有所不同。我们将这一行为作为 CPT 数学刻画及其公理化的共同出发点。我们所提出性质背后的直觉是，如果这些行为具有异号且支撑集不相交，那么相加共单调行为仍然可以提供某种对冲。我们将这一性质称为收益—损失对冲。

我们在此描述第3.1节中用于从数学上刻画累积前景理论泛函的两个主要性质。第一个性质广为人知，它分别针对收益和损失提出共单调独立性。共单调行为无法提供应对不确定性的潜在对冲，因此，将此类行为添加到原有行为中不应改变决策者的偏好。考虑三个行为 f、g 和 h，它们要么全部属于收益域，要么全部属于损失域，并且 h 与 f 和 g 共单调。那么，我们的条件要求，如果 f 和 g 无差异，那么将 h 同时添加到二者中，不会改变决策者的偏好，因为在这两种情况下，h 都不会增加或减少不确定性。

第二个性质，我们称之为收益—损失对冲，体现了本文在行为层面的主要创新。其核心思想是：将高于参考点的行为与低于参考点的行为相加，可能会对冲不确定性，除非这些行为的支撑集不相交。举例来说，假设有两个世界状态$S = \{s_1, s_2\}$，一位对结果采用线性效用函数的决策者对资产 $f = (20, 0)$（f 表示在 s_1 实现时支付20，否则支付0）和 $g = (10, 10)$无差异。现在考虑行为 $h = (0, -10)$，它与 f的支撑集不相交，但与 g的支撑集相交。当决策者评估 $f+h = (20, -10)$和 $g+h = (10, 0)$时，她可能会觉得$f+h$比 $g+h$更不确定，因此可能更偏好 $g+h$。请注意，期望效用模型（效用函数为恒等函数）不允许决策者对 f和 g无差异，继而严格偏好 $g+h$。更有意思的是，这种偏好

模式即使在 Schmeidler 的更一般的 Choquet期望效用模型 [15] （效用函数为恒等函数）中也会构成悖论。Choquet模型排除了通过混合共单调行为进行任何可能对冲的情形。然而，在这个例子中，行为 h 与行为 f 和 g 都共单调，因此 Choquet模型不会预期出现任何可能的对冲。因此，将 h 与 g 相加时，它可能成为对冲不确定性的手段，因为收益和损失彼此抵消，而不是因为共单调性。我们将在例1中进一步阐述这一观点。

在第3.2节中，我们为具有分段线性效用的累积前景理论模型给出了偏好公理化。我们不采用 Anscombe 和 Aumann 的框架 [2] ，而我们的公理仅涉及与共单调性相关的简单性质。此外，我们提出了一个新的简单公理，可用于识别损失厌恶系数λ。为了导出偏好的累积前景理论表示，我们采用第3.1节的数学刻画。从某种意义上说，我们的论文在前景理论的背景下，与 Schmeidler [14], [15]关于 Choquet 积分的研究相呼应。

经验证据不仅支持符号依赖，还进一步表明，主体对收益具有不确定性厌恶，而对损失具有不确定性偏好；综述可参见 Wakker [23], 第12.7节。第3.3节给出了刻画这两种相反行为的可检验公理。最后，我们探讨对收益的不确定性厌恶何时与对损失的不确定性偏好对称。从行为层面看，若一位决策者对某一行为 f 与某一货币结果 α 无差异，那么当其对$-f$ 与 $-\alpha$也无差异时，这种对称性便会出现。在这种情况下，我们证明，收益和损失权重互为对偶，且累积前景理论退化为 ˇSipoˇs 积分，见 ˇSipoˇs [18]。这一结果阐明了累积前景理论与 Sipoˇs 积分之间的关系；这一关系最初由 Starmer 和 Sudgen[19] 注意到（另见 Wakker [23] 和 Kothiyal等人 [12]）。

当然，文献中已有若干种累积前景理论的公理化。共单调性的概念以及行为按排名排序这一事实至关重要，参见 Diecidue和Wakker [8]。最早的公理化见于 Tversky和Kahneman [21] 的开创性论文，该公理化依赖共单调独立性以及一项称为双重匹配的性质。另见 Trautmann和Wakker [20] ，他们近期在（约化的） Anscombe 和 Aumann [2] 框架下运用这些公理给出了刻画。Wakker 和 Tversky [24]将共单调性与权衡一致性结合起来（关于风险的情形，另见 Chateauneuf和 Wakker [4] ）。共单调确定性结果原理方法（或其一种称为尾部独立性的弱化形式）由 Chew和Wakker [5], 、Zank [28] 以及 Wakker和Zank [25]提出。与我们的研究最接近的是 Schmidt和Zank [16]的论文。作者通过一条针对共单调行为、称为共同增量独立性的公理来刻画累积前景理论。有趣的是，他们得到了分段线性效用函数（在参考点附近有一个折点），这与我们的公理化结果相同。关于采用分段线性效用的优点，详细讨论请参阅 Schmidt和Zank [16] 的导言部分。

本文其余部分安排如下。第2节介绍我们将要考虑的框架、数学符号和行为模型。第3节分为三个小节，包含我们的主要结果。第3.1节介绍了娱乐主管

ˇ 累积前景理论和 Sipoˇs 泛函的数学刻画，第3.2节对累积前景理论进行了行为刻画，第3.3节讨论了决策者对不确定性的态度。第4节为结论。所有证明均收录于附录。

2 框架

设 S 是一个世界状态集合，并配备一个 σ-代数 $\mathcal{A}$。 $\mathcal{A}$ 的元素称为事件。我们用 $\mathcal{F}$ 表示定义在 S 上所有有界、实值、 $\mathcal{A}$-可测函数的集合，即 $\mathcal{F} = \{f : S \to \mathbb{R} | f$ 有界且 $\mathcal{A}$-可测 $\}$。函数 $f \in \mathcal{F}$ 称为行为。行为可以解释为一种资产，它在 $\mathbb{R}$ 中支付货币结果，而该结果取决于世界状态的实现。我们用 $f^+ = f \vee 0$ 表示行为 $f \in \mathcal{F}$ 的正部，用 $f^- = (-f) \vee 0$ 表示其负部。注意，正部和负部都大于 0。[1] 集合 $\mathcal{F}^+ = \{f \in \mathcal{F} | f(s) \geq 0、 \forall s \in S\}$ 是正行为集合；负行为集合 $\mathcal{F}^-$ 的定义类似。若两个行为 f、$g \in \mathcal{F}$ 满足 f、$g \in \mathcal{F}^+$ 或 f、$g \in \mathcal{F}^-$，则它们同号。若一个行为为正，另一个为负，则称这两个行为异号。 $f \in \mathcal{F}$ 中一个行为的支集是集合 $supp(f) = \{s \in S | f(s) \neq 0\}$。若对所有 s、$t \in S$， f、$g \in \mathcal{F}$ 满足 $(f(s) - f(t))(g(s) - g(t)) \geq 0$，则称这两个行为共单调。设 $A \subseteq S$，1_A 是集合 A 的示性函数，即 $1_A(s)$：若 $s \in A$ 则为 1，若 $s \in A^c$ 则为 0。若 $\alpha \in \mathbb{R}$，则 $\alpha 1_A$ 表示常数行为，其在每个状态 $s \in A$ 下都支付 α。

可测空间 $(S, \mathcal{A})$ 上的（规范化）容量 v 是一个集合函数 $v : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$，满足 $v(\emptyset) = 0, v(S) = 1$，且对于所有 $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \Rightarrow v(A) \leq v(B)$。若 v 是一个容量，我们将其共轭容量定义为 $\hat{v}(A) = 1 - v(A^c)$，对所有 $A \in \mathcal{A}$ 均成立。容量 $v : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ 是凸（凹）的，当且仅当对于所有 $A, B \in \mathcal{A}, v(A \cup B) + v(A \cap B) \geq (\leq) v(A) + v(B)$。给定可测空间 $(S, \mathcal{A})$ 上的容量 v，相对于 v 的 $f \in \mathcal{F}$ 的 Choquet 积分是一个泛函 $C : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$，定义为

$$C(f) = \int_S f \, dv := \int_{-\infty}^{0} (v(\{f \geq t\}) - 1) \, dt + \int_0^{+\infty} v(\{f \geq t\}) \, dt,$$

下文中，只要积分域明确，我们就会省略积分号中的下标 S。给定可测空间 $(S, \mathcal{A})$ 上的容量 v，相对于 v 的 ˇ$f \in \mathcal{F}$ 的 ˇSipoˇs积分（见 Sipoˇs [18]）是一个泛函 $\check{S} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$，定义为

$$\check{S}(f) = \int f^+ dv - \int f^- dv$$

其中两个积分都是 Choquet 积分。下面的引理给出了 Sipoš 积分的另一种表述：计算函数的负部时使用共轭容量。此外，它还阐明了 Choquet 积分与 Sipoš 积分之间的关系。

[1]请注意，若干研究前景理论的论文使用符号 f^- 表示 $f \wedge 0$。

引理 1. 设 v 为一个容量，$\hat{v}$ 为其共轭容量。则有 $:$

- $\check{S}(f) = \int f^+ dv + \int -f^- d\hat{v};$
- $C(f) = \int f^+ dv + \int -f^- dv = \int f^+ dv - \int f^- d\hat{v}.$

本文的主要研究对象是（分段线性的）累积前景理论（CPT）泛函 $CPT:$ $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$。它是 Choquet 积分和 ˇSipoˇs积分的推广。考虑两个容量 v^+, v^- 和一个实数 $\lambda > 0$，则（分段线性的）累积前景理论泛函 $CPT: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$CPT(f) = \int f^+ dv^+ - \int \lambda f^- dv^-.$$

偏好关系 $\succsim$ 关于 $\mathcal{F}$ 是一种完备且传递的二元关系，且其严格部分非空。和往常一样，$f \succsim g$ 表示“f 优于 g”。我们分别用 $\succ$ 和 $\sim$ 表示 $\succsim$ 的严格部分和弱部分。如果对于所有 f、$g \in \mathcal{F}$，$f \succsim g$ 当且仅当 $I(f) \geq I(g)$，则泛函 $I: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 表示 $\succsim$。

3 主要结果

本节包含我们的两个主要结果。第一个结果，即定理 2，对累积前景理论泛函进行了数学刻画。第二个结果，即定理 5，研究偏好关系应满足哪些行为公理，才能由累积前景理论泛函表示。

3.1 累积前景理论泛函

我们从 Schmeidler 的一项开创性定理入手，[14]他给出了 Choquet 泛函的刻画。在陈述该结果之前，我们回顾一下：若一个泛函 $I: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$满足 $f \geq g \Rightarrow I(f) \geq I(g)$，则称其具有单调性；其中 $f \geq g$表示对所有 $s \in S$，均有 $f(s) \geq g(s)$。此外，若在 f 和 g 共单调时，$I(f+g) = I(f) + I(g)$，则称 I 满足共单调可加性。

定理 1。 (Schmeidler [14]) 设 $I: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 是一个给定的泛函，且 $I(1_S) = 1$。那么以下条件等价。

(i) (a) I 具有单调性；(b) I 满足共单调可加性。

(ii) I 是一个 Choquet 积分。

累积前景理论泛函通过放宽共单调可加性，推广了 Choquet 泛函。更具体地说，共单调可加性仅适用于同号的共单调行为，以及支集不相交的异号（共单调）行为。以下是我们的第一个主要结果。

定理 2. 设 $I: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 是满足 $I(1_S) = 1$ 的给定泛函。则以下条件等价。

(i) (a) I 具有单调性；(b) I 在 $\mathcal{F}^+$ 和 $\mathcal{F}^-$ 上满足共单调可加性，并且对于异号的行为 f、g，满足 $supp(f) \cap supp(g) = \emptyset$。

(ii) I 是一个累积前景理论泛函。

考虑定理 1 和定理 2 的条目 (i)。注意，定理 1 的部分 (b) 推出定理 2 的部分 (b)，因为异号且支集不相交的行为是共单调的。这一放宽不仅刻画了一个比 Choquet 积分更一般的泛函，还从行为视角带来了一些重要见解。

请回想一下，共单调可加性是完全可加性的弱化形式；完全可加性会迫使泛函 I 呈线性，因此成为一种期望。共单调可加性背后的行为直觉是，将两个共单调行为相加，并不能对自然状态的选择进行对冲。

放宽共单调可加性使我们能够发现对不确定性更为复杂的态度以及更为微妙的对冲形式。累积前景理论泛函的第一个显著性质，是它区分了主体在收益域（即$\mathcal{F}^+$）中的行为与其在损失域（即 $\mathcal{F}^-$）中的行为。行为发生变化的结果，即货币结果 0，被称为参考点。[2] 只要所考虑的行为都位于参考点之上或都位于参考点之下，共单调可加性就得以保持。在 $\mathcal{F}^+$和 $\mathcal{F}^-$ 上的共单调可加性弱化了文献中早已熟知的一个条件，即同号独立性。若两个行为 f、$g \in \mathcal{F}$ 共单调，且不存在 $s \in S$ 使得 $f(s) > 0$ 以及 $g(s) < 0$，则称它们具有符号共单调性，或简称为同号行为；参见 Wakker 和 Tversky [24] 以及 Trautmann 和 Wakker [20]。

本文的主要贡献之一在于提出了刻画 CPT泛函的第二个共单调可加性要求，即对于异号的 f, g，若 $supp(f) \cap supp(g) = \emptyset$，则 $CPT(f + g) = CPT(f) + CPT(g)$。这意味着，当我们有异号的 f, g，且$supp(f) \cap supp(g) \neq \emptyset$ 时，共单调可加性可能失效（我们再次强调，这些行为是共单调的）。这一要求背后的行为直觉是，将两个行为的正部和负部相加，即使所考察的行为共单调，也能对冲自然界可能作出的选择。我们将这一性质称为收益—损失对冲。[3] 例如，在Choquet模型中并未考虑这种对冲可能性，因为对冲的唯一方式是将两个非共单调行为相加。下面的例子将针对累积前景理论退化为ˇSipoˇs积分这一特殊情形提供更多细节，即 $\lambda = 1$ 和 $v^+ = v^-$。

例1。设 $S = \{s_1, s_2, s_3\}$，并考虑一个满足 $\lambda = 1$ 和 $v = v^+ = v^-$ 的累积前景理论泛函（即 ˇSipoˇs积分）。设 v 定义为

[2]本文中，参考点是外生给定的，为方便起见将其标准化为 0（我们也可以选择其他任何参考点 $r \in \mathbb{R}$）。Schmidt和Zank [17] 提出了使参考点内生化的公理。[3]感谢 Peter Wakker 建议使用这一术语。

A	S	$\emptyset$	s_1	s_2	s_3	$s_1 \cup s_2$	$s_2 \cup s_3$	$s_1 \cup s_3$
v	*1*	*0*	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	*0*	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	*1*

现在考虑定义在 S 上的以下行为。

	s_1	s_2	s_3
f	*3*	*4*	*4*
g	*0*	*11*	*0*
h	*-3*	*0*	*-1*
$-h$	*3*	*0*	*1*
$f+h$	*0*	*4*	*3*
$g+h$	*-3*	*11*	*-1*

行为 f、g、h是共单调的，但 $supp(g) \cap supp(h) = \emptyset$，而 $supp(f) \cap supp(h) \neq \emptyset$。令$\succsim_S$表示由$\check{S}$泛函诱导的偏好关系，即 $f \succsim_S g \Leftrightarrow \check{S}(f) \geq \check{S}(g)$，而 $\succsim_C$ 表示由 C 泛函诱导的偏好关系（这两个泛函 $\check{S}$ 和 C 均在第2节中定义）。我们有

$$\check{S}(f) = C(f) = 3 + (4-3)\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$
$$\check{S}(g) = C(g) = 0 + (11-0)\frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

因此 $f \sim_{\check{S}} g$ 和 $f \sim_C g$。此外，由于 h 与 f 和 g共单调，根据共单调可加性，$f+h \sim_C g+h$（实际上可以验证 $C(f+h) = C(f) + C(h) = \frac{7}{3} = C(g) + C(h) = C(g+h)$）。不过，我们可以注意到，行为 $f+h$看起来比 $g+h$ “平滑”得多，而且 $f+h \geq 0$，因为收益与损失相抵。$\check{}$ 这种直觉由 Sipo$\check{}$s 积分所诱导的偏好关系体现如下

$$\check{S}(f+h) = 0 + (3-0)\frac{2}{3} + (4-3)\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$
$$\check{S}(g+h) = C(g) - C(-h) = \frac{11}{3} - (0 + (1-0)1 + (3-1)\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$$

因此 $f+h \succ_{\check{S}} g+h$。

例1表明，收益—损失对冲是累积前景理论和 Sipo$\check{}$s 积分的一项有趣行为特征。将支撑集不互斥的正行为与负行为相加，即使这些行为共单调，也可能产生对冲。这是因为收益会补偿损失。在下一节中，我们将以这一观察为出发点，为累积前景理论提出一种新的行为基础。

例1表明，由 Sipo$\check{}$s 积分表示的偏好足够丰富，能够体现收益—损失对冲行为。因此，从数学上刻画 Sipo$\check{}$s 积分颇有意义。定理 3 表明，对称条件能够确定一个累积前景理论泛函为 Sipo$\check{}$s 积分。

定理 3. 当且仅当对所有 $f \in \mathcal{F}$，$CPT(-f) = -CPT(f)$，累积前景理论泛函是一个 $\check{}$ Sipo$\check{}$s积分。

ˇ 定理 3 指出，当且仅当对于所有 $f \in \mathcal{F}$，条件 $CPT(-f) = -CPT(f)$ 成立时，累积前景理论才会简化为 Sipoˇs 积分。这是一个有趣的结果，因为这一条件相当严格。例如，如果 C 是一个 Choquet 泛函，那么对于所有 $f \in \mathcal{F}$， $C(-f) = -C(f)$ 成立，当且仅当容量 v 等于其共轭容量 $\hat{v}$ 时成立，因此该容量在事件 $\{A, A^c\}$ 上是可加的。

3.2 累积前景理论的行为刻画

本节给出累积前景理论的偏好公理化。回顾一下，偏好关系 $\succsim$ 在 $\mathcal{F}$ 之上是一个完备且传递的二元关系，其严格部分非空。

第一个公理是连续性公理。

A.1 Continuity. 对于所有$f \in \mathcal{F}$，集合 $\{\alpha \in \mathbb{R} | \alpha 1_S \succsim f\}$ 和 $\{\alpha \in \mathbb{R} | f \succsim \alpha 1_S\}$ 都是闭集。

请注意，该公理只要求比较行为与常数。这使我们无需在行为集合 $\mathcal{F}$上提出拓扑假设。

第二个公理是单调性。

A.2 Monotonicity. 设 f、$g \in \mathcal{F}$ 满足 $f \geq g$。则 $f \succsim g$。

现在考虑众所周知的共单调独立公理（Chateauneuf [3],Schmeidler [15]）。该公理指出，如果两个行为 f 和 g 彼此无差异，那么分别向二者加入一个共单调行为 h 不会改变决策者的偏好。该条件背后的思想是，加入共单调行为无法提供任何针对不确定性的可能对冲。

A.C Comonotonic Independence. 设 f、g、$h \in \mathcal{F}$ 满足： h 与f 以及 g共单调。则 $f \sim g$ 蕴含 $f + h \sim g + h$

满足 A.1、A.2 和 A.C 的偏好可由 Choquet 积分表示。我们将在下一个命题中给出这一结果

定理 4。 (Chateauneuf [3], Schmeidler [15]) 设 $\succsim$ 是定义在 $\mathcal{F}$上的偏好关系。则以下条件等价。

（i） $\succsim$ 满足 A.1、A.2 和 A.C。

（ii）存在一个（唯一的）容量 v ，使得 $\succsim$ 可由 Choquet 泛函表示。

然而，正如例1所示，共单调独立性可能过于严格，因为它没有考虑到将支集不相交的正行为与负行为相加时产生的（得失）对冲可能性。以下两个公理，即公理A.3和A.4，均可由共单调独立性推出。它们是我们行为刻画的核心。它们从两个方面推广了A.C。首先，公理A.3允许人们在收益域和损失域对不确定性持有不同态度。

其次，公理A.4考虑了例1这类情形中可能出现的得失对冲机会。

A.3 Comonotonic Independence for Gain and Losses. 设 f、g、$h \in \mathcal{F}^{+(-)}$ 满足：h 与 f 和 g 共单调。那么 $f \sim g$ 蕴含 $f+h \sim g+h$。

A.4 λ-Disjoint Independence. 存在 $\lambda > 0$，使得对于所有 $f \in \mathcal{F}^+$ 和$g \in \mathcal{F}^-$，满足 $supp(f) \cap supp(g) = \emptyset$，且满足 $f \sim \alpha 1_S$和 $g \sim \beta 1_S$

1. if $\alpha + \lambda\beta \geq 0$ then $f+g \sim (\alpha+\lambda\beta)1_S$;
2. 若 $\alpha + \lambda\beta < 0$ 则 $f+g \sim \left(\frac{\alpha+\lambda\beta}{\lambda}\right) 1_S$。

公理A.4体现了主要的行为创新。为了更好地理解这一点，请注意，以下（更强的）公理蕴含了它。

A.4* Disjoint Independence. 对于所有满足 $supp(f) \cap supp(g) = \emptyset$，且满足 $f \sim \alpha 1_S$ 和 $g \sim \beta 1_S$ 的 $f \in \mathcal{F}^+$ 和 $g \in \mathcal{F}^-$，都有 $f+g \sim (\alpha+\beta)1_S$。

显然，A.4* 是由 A.4 在施加条件 $\lambda = 1$ 后得出的。A.4* 要求将行为$f+g$ 评估为其确定性等价的总和。一般情况下，我们可能有$\lambda \neq 1$，此时 A.4 表明，$f+g$ 的确定性等价取决于$\alpha + \lambda\beta$的符号。对于损失厌恶的情况，即 $\lambda > 1$，其解释如下。决策者会将损失的权重放大 λ 倍，并考虑 $\lambda\beta$，而不是一概考虑 β。如果 $\alpha + \lambda\beta > 0$，那么决策者会觉得“总体上处于收益域”，且 $f+g$的确定性等价为正，并满足 $\alpha > 0$ 由 $\lambda\beta < \beta < 0$抵消的条件；也就是说，损失的确定性等价β 被放大 λ倍。如果 $\alpha + \lambda\beta < 0$，那么决策者会觉得“总体上处于损失域”，此时 $f+g$ 的确定性等价为负，等于 $\beta < 0$ 加上$\frac{\alpha}{\lambda} > 0$；也就是说，正部的确定性等价 α 按 λ 倍缩减（因为 $\frac{\alpha}{\lambda} < \alpha$）。

重要的是，λ可以在实验室中确定：取 $f \in \mathcal{F}^+$和 $g \in \mathcal{F}^-$，使得$supp(f) \cap supp(g) = \emptyset$，然后分别询问 f、g和 $f+g$的确定性等价 α、β和 γ。如果 $\gamma = \alpha + \beta$，则不存在损失厌恶或损失寻求。如果 $\gamma \neq \alpha + \beta$，那么若$\gamma > 0$，我们有 $\lambda = \frac{\gamma-\alpha}{\beta}$；若 $\gamma < 0$，我们有 $\lambda = \frac{\alpha}{\gamma-\beta}$。关于损失厌恶是否是真实存在的现象，学界仍有热烈争论，双方都有研究结果支持。参见例如Gal和Rucker [10]，以及G¨achter、Johnson和Herrmann [11]。因此，我们希望A.4有助于在个体偏好由具有分段常数边际效用的累积前景理论泛函表示的情境下，揭示损失厌恶。

当 A.C 被 A.3 和 A.4 替代时，我们得到累积前景理论泛函的一个刻画。以下是我们的第二个主要结果。

定理 5. 设 $\succsim$ 是集合 $\mathcal{F}$ 上的偏好关系。则以下条件等价。

(i) $\succsim$ 满足 A.1、A.2、A.3 和 A.4。

(ii) 存在两个（唯一的）容量 v^+、v^- 和一个实数 $\lambda > 0$，使得 $\succsim$ 可由累积前景理论泛函表示。

注意，如果我们在定理 5 中用 A.4* 替换 A.4，就会得到一个具有$\lambda = 1$的累积前景理论泛函，即损失中性。

3.3 对不确定性的态度

正如我们上文所述，累积前景理论的一个显著特性是，与 Choquet 泛函不同，它允许将决策者对收益域中不确定性的态度与其对损失域中不确定性的态度区分开来。这之所以可行，是因为对行为的评估是通过两个 Choquet 积分之和进行的：一个相对于用于收益的容量 v^+，另一个相对于用于损失的不同容量 v^-。

实验性证据表明，对于收益，决策者厌恶不确定性；对于损失，决策者则寻求不确定性。粗略地说，不确定性厌恶（寻求）意味着主体偏好事件的客观概率（不）可得的情形。在我们的框架中，客观概率根本不存在。因此，只有常数行为才是不确定的。直观而言，在纯粹主观的环境中，厌恶（寻求）不确定性的决策者会偏好"尽可能接近（远离）"常数行为的行为。我们用以下两条公理来刻画这一思想。

A.3' 设 f、g、$h \in \mathcal{F}^+$，且 h 与 g 共单调。则 $f \sim g \Rightarrow f+h \succsim g+h$。

A.3" 设 f、g、$h \in \mathcal{F}^-$，且 h 与 f 共单调。则 $f \sim g \Rightarrow f+h \succsim g+h$。

公理 A.3'体现了决策者在收益域中具有不确定性厌恶倾向的直觉 $\mathcal{F}^+$。考虑三个行为 f、g、$h \in \mathcal{F}^+$，满足 $f \sim g$，且 h与 f 和 g共单调。因此，将（可能非共单调的行为） h 添加到 f 中，会提高对 f 的评价，因为 h 可能构成对 f的一种对冲；与此同时，由于不确定性可能更高，这也会降低对 g 的评价。举例来说，设 $A \in \mathcal{A}$，并考虑 $f = 10 \cdot 1_A + 5 \cdot 1_{A^c}$、 $g = 5 \cdot 1_A + 10 \cdot 1_{A^c}$ 和 $h = 0 \cdot 1_A + 5 \cdot 1_{A^c}$。那么，$f+h = 10 \cdot 1_S$ 是一个常数行为，而 $g+h = 5 \cdot 1_A + 15 \cdot 1_{A^c}$ 甚至比 g具有更高的不确定性。显然，一个厌恶不确定性的决策者会更倾向于 $f+h$ 而非 $g+h$。公理 A.3"可以用类似的方式解释，但在这种情况下，决策者愿意提高感知到的不确定性。值得注意的是，Chateuneuf [3], 也提出了类似的条件，另见 Wakker [22]。

下述定理表明，如果决策者对收益不确定性厌恶、对损失不确定性寻求，那么累积前景理论泛函中的两个容量都是凸的。

定理 6. 设 $\succsim$ 是 $\mathcal{F}$ 上的一个偏好关系。那么，以下条件等价: .

(i) $\succsim$ 满足 A.1、A.2、A.3'、A.3" 和 A.4。

(ii) 存在两个（唯一的）凸容量 v^+、 v^- 和 $\lambda > 0$，使得 $\succsim$ 可由一个累积前景理论泛函表示。

Note 累积前景理论泛函可以改写为（使用附录中的引理 2）..... s

$$CPT(f) = \int f^+ dv^+ + \int -\lambda f^- d\hat{v}^-. \tag{3.1}$$

如果采用这一表述，那么定理 6 意味着共轭容量 $\hat{}v^-$是凹的。

我们在本节最后给出一条可检验的公理，用以刻画围绕参考点、针对不确定性的对称态度。事实上，一个有趣的问题是，了解何时可以在累积前景理论泛函中得到 $v^- = v^+$ 。[4] 注意，如果 $\check{\lambda} = 1$ 定理 3 适用，那么就会得到一个 Sipo$\check{}$s 积分。考虑以下公理。

A.5 Gain-Loss Symmetry. 令 $f \in \mathcal{F}$ 且 $\alpha \in \mathbb{R}$。则 $f \sim \alpha 1_S$ 当且仅当 $-f \sim -\alpha 1_S$。

公理 A.5 表明，如果决策者在（不确定）行为 f 与一个确定金额 α之间无差异，那么她在 $-f$ 与 $-\alpha$之间也应保持无差异。其直观含义是，决策者认为 f 和 $-f$ 相对于参考点 0 具有对称性，因此通过对称的确定金额 α 和 $-\alpha$对它们进行评价。下面的定理 $\check{}$ 给出了$\check{}$Sipo$\check{}$s积分的行为刻画。

定理 7。设 $\succsim$ 是定义在 $\mathcal{F}$上的偏好关系。则以下各项等价。

（i） $\succsim$ 满足 A.1、A.2、A.3、A.4 和 A.5。

（ii）存在一个（唯一的）容量 v ，使得 $\succsim$ 可由$\check{}$Sipo$\check{}$s积分表示。

4 结论

我们对采用分段线性效用的累积前景理论进行了公理化分析。这使我们能够聚焦于对不确定性的（依赖符号的）态度。首先，我们通过弱化 Choquet 积分的共单调可加性，给出了累积前景理论泛函的数学刻画。我们还给出了将累积前景理论简化为 Sipos积分的条件。随后，我们对累积前景理论进行了公理化刻画。其主要创新在于提出了收益-损失对冲性质：收益与损失相互平衡，从而对不确定性形成对冲。此外，我们还引入了一条公理，在效用为分段线性的情况下，可借此轻松确定损失厌恶系数。最后，我们刻画了损失情形下的不确定性厌恶和收益情形下的不确定性偏好。此外，我们还证明，当且仅当累积前景理论是 Sipos积分时，这些态度关于参考点对称。

[4]或者，等价地，如果使用公式（3.1），则得到 $v^- = \hat{}v^+$。

A 附录

我们从一个初等引理开始。给出证明是为了完整起见。

L 引理 2。设 $\hat{v}(A) = 1 - v(A^c)$ 且 $f \in \mathcal{F}^+$或 $f \in \mathcal{F}-$。则 $-\int f dv = \int -f d\hat{v}$。

证明。设 $f \in \mathcal{F}^+$，则有

$$\begin{aligned} -\int f dv &= -\int_0^\infty v(s \in S | f(s) \geq t) dt \\ &= -\int_0^\infty [1 - \hat{v}(s \in S | f(s) > t)] dt \\ &= -\int_0^{-\infty} [1 - \hat{v}(s \in S | f(s) > u)](-du) \\ &= \int_{-\infty}^0 [\hat{v}(s \in S | f(s) > u) - 1] du \\ &= \int -f d\hat{v} \end{aligned}$$

情形 $f \in \mathcal{F}^-$ 的证明类似。 □

引理 1 的证明。为证明第一点，只需应用引理 2。事实上，注意到 $f^- \in \mathcal{F}^+$，我们有 $\check{S}(f) = \int f^+ dv - \int f^- dv = \int f^+ dv + \int -f^- d\hat{v}$.

对于第二点，注意到 $f = f^+ + (-f^-)$，且 f^+ 和 $-f^-$ 共单调。根据定理 1 中证明的 Choquet 积分的共单调可加性，我们有

$$\int f dv = \int f^+ + (-f^-) dv = \int f^+ dv + \int -f^- dv.$$

注意，根据引理 2，也可以将其写为 $\int f dv = \int f^+ dv - \int f^- d\hat{v}$。 □

定理 2 的证明。$(i) \Rightarrow (ii)$。我们先给出一个辅助引理。

引理 3。对于所有 $\alpha > 0$，对于所有 $f \in \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^-$, $I(\alpha f) = \alpha I(f)$。此外，对于 $\alpha > 0$和 $f \in \mathcal{F}^+$, $I(f + \alpha 1_S) = I(f) + \alpha$。

引理 3 的证明。证明是标准的。 □

令 $v^+(A) = I(1_A)$，然后采用与 Schmeidler 相同的证明，可以证明对于所有$f \in \mathcal{F}^+$, $I(f) = \int f dv^+$。现在令 $\lambda := -I(-1_S)$。根据 I 的共单调可加性，$I(0) = 0$。根据 I 的单调性，$I(-1_S) \leq I(0) = 0$。于是 $\lambda \geq 0$。对所有 $A \in \mathcal{A}$ 定义，

$$v(A) = -\frac{I(-1_A)}{\lambda}.$$

我们有 $v(\emptyset) = 0$ 和 $v(S) = 1$。取 $A \subseteq B$ 使得 $-1_A \geq -1_B$。由于 I 具有单调性，$I(-1_A) \geq I(-1_B)$，因此 $v(A) \leq v(B)$。这表明 v 是一个容量。将 v^- 定义为 v的共轭容量，即对于所有 $A \in \mathcal{A}$,

$$v^-(A) = 1 - v(A^c).$$

We 将证明，对于所有 $f \in \mathcal{F}^-$、 f简单函数类， $I(f) = \int \lambda f dv^-$。令 $f \in \mathcal{F}^-$ 定义为

$$f = x_1 1_{A_1} + \cdots + x_n 1_{A_n}$$

其中， $\{A_1, \ldots, A_n\}$是 S和 $x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 0$的一个划分。注意，我们可以将 f改写为

$$f = (0 - x_n)(-1_S) + (x_n - x_{n-1})(-1_{A_{n-1} \cup \cdots \cup A_1}) + \cdots + (x_3 - x_2)(-1_{A_2 \cup A_1}) + (x_2 - x_1)(-1_{A_1}).$$

定义

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)(-1_{A_i \cup \cdots \cup A_1})$$

约定 $x_{n+1} = 0$。我们有

$$f = \sum_{i=0}^{n} h_i$$

现在证明 h_i与 $\sum_{k=i+1}^{n} h_k$共单调。设 s、 $t \in S$满足$s \in A_i \cup \cdots \cup A_1$且 $t \in (A_i \cup \cdots \cup A_1)^c$，并假设对 $l > i$有 $t \in A_l$。那么 $h_i(s) - h_i(t) = x_i - x_{i+1} \leq 0$且 $\sum_{k=i+1}^{n} h_k(s) - \sum_{k=i+1}^{n} h_k(t) = x_i - x_l \leq 0$，因此$(h_i(s) - h_i(t))\left(\sum_{k=i+1}^{n} h_k(s) - \sum_{k=i+1}^{n} h_k(t)\right) \geq 0$。若 s、 $t \in A_i \cup \cdots \cup A_1$或 s、 $t \in (A_i \cup \cdots \cup A_1)^c$，则前面的乘积为 0。这说明函数 h_i 和 $\sum_{k=i+1}^{n} h_k$ 共单调。

由于 h_i和 $\sum_{k=i+1}^{n} h_k$均为负数，根据 $\mathcal{F}^-$上的共单调可加性，我们有

$$I(f) = I(h_1 + \sum_{i=2}^{n} h_i) = I(h_1) + I(h_2 + \sum_{i=3}^{n} h_i) = \cdots = \sum_{i=1}^{n} I(h_i).$$

请注意，根据引理 3 和 v^- 的定义，我们有

$$I(h_i) = (x_{i+1} - x_i)\lambda(v^-(A_{i+1} \cup \cdots \cup A_n) - 1).$$

因此

$$\begin{aligned}
I(f) &= \sum_{i=1}^{n-1} I(h_i) + I(h_n) \\
&= \lambda \left[\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) v^-(A_{i+1} \cup \cdots \cup A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \right] + (x_{n+1} - x_n)(-\lambda) \\
&= \lambda \left[\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) v^-(A_{i+1} \cup \cdots \cup A_n) - x_n + x_1 \right] + \lambda x_n \\
&= \lambda \left[x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) v^-(A_{i+1} \cup \cdots \cup A_n) \right] \\
&= \lambda \int f dv^- \\
&= \int \lambda f dv^-
\end{aligned}$$

注意到，每个有界函数都可以按照 Schmeidler [14]中的方式由阶梯函数序列逼近。这表明，对于所有 $f \in \mathcal{F}^-$, $I(f) = \int \lambda f dv^+$。现在令 $f \in \mathcal{F}$，并注意到 $f = f^+ + (-f^-)$，此外 $supp(f^+) \cap supp(f^-) = \emptyset$。因此

$$I(f) = I(f^+ + (-f^-)) = I(f^+) + I(-f^-) = \int f^+ dv^+ + \int \lambda(-f^-) d\bar{v}^-$$

令 $\hat{v}^-$ 为 $\bar{v}^-$ 的共轭容量，即对于所有 $A \in \mathcal{A}$，$\hat{v}^-(A) = 1 - \bar{v}^-(A^c)$。根据引理 2，可得

$$\int -\lambda f^- d\bar{v}^- = -\int \lambda f^- d\hat{v}^-$$

定义 $v^- = \hat{v}^-$，即可完成证明的"⇒"部分。

$(ii) \Rightarrow (i)$。我们证明 (a)。假设 $f \geq g$。那么 $f^+ \geq g^+$ 且 $g^- \geq f^-$。众所周知，Choquet 积分具有单调性。因此 $I(f) = \int f^+ dv^+ - \int \lambda f^- dv^- \geq g^+ dv^+ - \int \lambda g^- dv^- = I(g)$。

我们证明 (b)。设 f, g 共单调，且满足 $f, g \geq 0$（ $f, g \leq 0$ 的情形类似）。那么 $(f+g)^+ = f + g = f^+ + g^+$ 且 $(f+g)^- = 0 = f^- = g^-$。因此

$$I(f+g) = \int (f+g)^+ dv^+ = \int f^+ dv^+ + \int g^+ dv^+ = \int f^+ dv^+ - \int \lambda f^- dv^- + \int g^+ dv^+ - \int \lambda g^- dv^- = I(f) + I(g).$$

我们证明 (ii) 的 (b) 部分。设 f, g 异号（例如 $f \geq 0$ 和 $g \leq 0$），且满足 $supp(f) \cap supp(g) = \emptyset$。注意到 $(f+g)^+ = f = f^+$，$(f+g)^- = -g = g^-$，且 $f^- = 0, g^+ = 0$。因此

$$I(f+g) = \int (f+g)^+ dv^+ - \int \lambda (f+g)^- dv^- = \int f^+ dv^+ - \int \lambda g^- dv^- = \int f^+ dv^+ - \int \lambda f^- dv^- + \int g^+ dv^+ - \int \lambda g^- dv^- = I(f) + I(g)$$

由此完成了（b）部分的证明。 □

定理 3 的证明。$(i) \Rightarrow (ii)$ 设 CPT 是一个 ˇSipoˇs积分。那么 $\lambda = 1$ 且 $v^+ = v^-$，因此

$$CPT(-f) = \int (-f)^+ dv - \int (-f)^- dv = \int f^- dv - \int f^+ dv = -CPT(f)$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ 注意到 $\lambda = 1$，因为 $-\lambda = CPT(-1_S) = -CPT(1_S) = -1$。设 $A \in \mathcal{A}$，并考虑 $f = 1_A$。那么

$$CPT(-f) = 0 - \int 1_A dv^- = -v^-(A) \text{ and } -CPT(f) = -\int 1_A dv^+ = -v^+(A)$$

因此

$$CPT(-f) = -CPT(f) \Leftrightarrow v^-(A) = v^+(A).$$

由于这 对所有 $A \in \mathcal{A}$、$v^- = v^+$ 都成立，且累积前景理论泛函是一个 ˇSipoˇs积分。 □

定理 5 的证明。$(ii) \Leftarrow (i)$ 我们只证明 A.4。取累积前景理论泛函的 $\lambda > 0$。固定 f 和 g，使得 $f \in \mathcal{F}^+$ 且 $g \in \mathcal{F}^-$，并使得 $supp(f) \cap supp(g) = \emptyset$。假设 $f \sim \alpha 1_S$ 且 $g \sim \beta 1_S$。注意到 $\alpha \geq 0$ 和 $\beta \leq 0$。因此

$$CPT(f) = CPT(\alpha 1_S) \Leftrightarrow CPT(f) = \alpha$$

$$CPT(g) = CPT(\beta 1_S) \Leftrightarrow CPT(g) = -\lambda \int \beta^- dv^- = -\lambda(-\beta) = \lambda\beta.$$

此外，由于 f 和 g 异号且具有不相交的支撑集，我们有

$$CPT(f+g) = CPT(f) + CPT(g) = \alpha + \lambda\beta.$$

现在，若 $\alpha+\lambda\beta > 0$, $CPT((\alpha+\lambda\beta)1_S) = \alpha+\lambda\beta$，且由于累积前景理论表示 $\succsim$, $f+g \sim (\alpha+\lambda\beta)1_S$。若 $\alpha+\lambda\beta < 0$, $CPT\left(\frac{\alpha+\lambda\beta}{\lambda}1_S\right) = -\lambda\int\left(\frac{\alpha+\lambda\beta}{\lambda}\right)^{-} dv^{-} = -\lambda\frac{-\alpha-\lambda\beta}{\lambda} = \alpha+\lambda\beta$。因此$f+g \sim \frac{\alpha+\lambda\beta}{\lambda}1_S$。

$(i) \Rightarrow (ii)$ 首先，注意对于所有 $f \in \mathcal{F}^{+}$, $f = f^{+}$，以及对于所有 $f \in \mathcal{F}^{-}$, $f = -f^{-}$。（可以证明）根据 A.1 和 A.2，对于所有 $f \in \mathcal{F}^{+}$，存在唯一的 $\alpha_{f^{+}} \geq 0$，使得

$$f^{+} \sim \alpha_{f^{+}}1_S.$$

令 $\lambda > 0$ 为公理A.4中的那个对象。再根据 A.1 和 A.2，对于所有 $f \in \mathcal{F}^{-}$，存在唯一的 $\alpha_{-f^{-}} \leq 0$，使得

$$-f^{-} \sim \left(\frac{\alpha_{-f^{-}}}{\lambda}\right)1_S.$$

定义 $I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 为

$$I(f) = I(f^{+}) + I(-f^{-})$$

其中 $I(f^{+}) = \alpha_{f^{+}}$ 且 $I(-f^{-}) = \alpha_{-f^{-}}$。注意，$f^{+} \sim I(f^{+})1_S$ 且 $-f^{-} \sim \left(I(-f^{-})_{\lambda}\right)1_S$。此外，根据单调性，$I(1_S) = 1$。

我们将证明 I 满足定理 2 的条件，因此它是一个累积前景理论函数。

步骤 1。固定 $f \in \mathcal{F}$，则 $I(f) \geq 0$蕴含 $f \sim I(f)1_S$，且 $I(f) < 0$蕴含 $f \sim {}^{I(f)}_{\lambda}1_S$。

证明。设 $f \in \mathcal{F}$。

- 情形 1：$I(f) \geq 0$。注意，$f = f^{+} + (-f^{-})$，且根据定义，$f^{+} \sim I(f^{+})1_S$ 且 $-f^{-} \sim {}^{I(-f^{-})}_{\lambda}1_S$。此外，$I(f^{+}) + \lambda{}^{I(-f^{-})}_{\lambda} = I(f) \geq 0$，因此根据 A.4 以及 $I(f)$ 的定义

$$f = f^{+} + (-f^{-}) \sim \left(I(f^{+}) + \lambda\frac{I(-f^{-})}{\lambda}\right)1_S = I(f)1_S.$$

- 情形 2：$I(f) < 0$。然后按前述推理并应用 A.4，我们得到

$$f = f^{+} + (-f^{-}) \sim \left(\frac{I(f^{+}) + \lambda\frac{I(-f^{-})}{\lambda}}{\lambda}\right)1_S = \left(\frac{I(f^{+}) + I(-f^{-})}{\lambda}\right)1_S = \frac{I(f)}{\lambda}1_S.$$

□

步骤 2。I 具有单调性。

证明。设 f、$g \in \mathcal{F}$ 满足 $f \geq g$。则 $f^{+} \geq g^{+}$ 且 $-f^{-} \geq -g^{-}$。然后根据单调性，$f^{+} \succsim g^{+}$ 且 $-f^{-} \succsim -g^{-}$。然后根据步骤 1 $I(f^{+})1_S \sim f^{+} \succsim g^{+} \sim I(g^{+})1_S$和$I(-f^{-})_{\lambda}1_S \sim -f^{-} \succsim -g^{-} \sim {}^{I(-g^{-})}_{\lambda}1_S$。单调性意味着 $I(f^{+}) \geq I(g^{+})$ 且 $I(-f^{-}) \geq I(-g^{-})$。综上可得 $I(f) \geq I(g)$。 □

步骤 3. I满足关于 $\mathcal{F}^{+}$和 $\mathcal{F}^{-}$的共单调可加性。

证明。我们证明关于 $\mathcal{F}^-$的共单调可加性；关于 $\mathcal{F}^+$的证明方法类似。

取 $f, g \in \mathcal{F}^-$，使得 f 和 g 共单调。根据步骤 1，$f \sim I(f)_\lambda 1_S$ 且 $g \sim I(g)_\lambda 1_S$。由于常数行为与所有其他行为都共单调，且 $I(f)_\lambda, I(g)_\lambda \leq 0$，根据 A.3 可得 $f + g \sim I(f)_\lambda 1_S + g$ 且 $g + I(f)_\lambda 1_S \sim I(g)_\lambda 1_S + I(f)_\lambda 1_S$。由于 $f + g \in \mathcal{F}^-$，根据步骤 1 $f + g \sim I(f+g)_\lambda 1_S$。因此 $I(f+g)_\lambda 1_S \sim \left(I(f)_\lambda + I(g)_\lambda\right) 1_S$，而单调性意味着 $I(f+g) = I(f) + I(g)$。

步骤 4. 对于所有 $f \in \mathcal{F}^{+(-)}$和 $g \in \mathcal{F}^{-(+)}$，使得 $supp(f) \cap supp(g) = \emptyset$，$I(f+g) = I(f) + I(g)$.

证明。固定满足 $supp(f) \cap supp(g) = \emptyset$ 的 $f \in \mathcal{F}^+$ 和 $g \in \mathcal{F}^-$。定义 $h = f + g$，并注意到 $h^+ = f$ 和 $-h^- = g$。因此，根据 I 的定义，$I(f+g) = I(h) = I(h^+) + I(-h^-) = I(f) + I(g)$】【。 □

步骤 5。I 表示 $\succsim$ 在 $\mathcal{F}$ 上的情况（即 $f \succsim g \Leftrightarrow I(f) \geq I(g)$）。

证明。固定 f、$g \in \mathcal{F}$。然后我们需要考虑 4 种情况。

- 情形 1：$I(f)\ I(g) \geq 0$。利用步骤 1 和单调性 $I(f)1_S \sim f \succsim g \sim I(g)1_S \Leftrightarrow I(f) \geq I(g)$。
- 情形 2：$I(f)\ I(g) \leq 0$。使用步骤 1 和单调性 $I(f)_\lambda 1_S \sim f \succsim g \sim I(g)_\lambda 1_S \Leftrightarrow I(f) \geq I(g)$，因为 $\lambda > 0$。
- 情形 3：$I(f) \geq 0 > I(g)$。利用步骤 1 和单调性 $I(f)1_S \sim f \succsim g \sim I(g)_\lambda 1_S \Leftrightarrow I(f) \geq I(g)$。注意，在此情形下，我们不可能有 $g \succsim f$。
- 情形 4：$I(g) \geq 0 > I(f)$。这与情形 3 相同。

□

由于 $I(1_S) = 1$，步骤 2、3 和 4 证明 I 满足定理 2 的条件 (i)，因此 I 是一个累积前景理论泛函。此外，步骤 5 表明 I 表示 $\succsim$。因此，证明完毕。

□

定理 6 的证明。$(i) \Rightarrow (ii)$ 注意到 A.3' 和 A.3" 蕴含 A.3。因此，定理 5 适用，且 I 可表示为一个累积前景理论泛函。接下来只需证明 v^+ 和 v^- 是凸的。我们仅证明 v^-的凸性。固定 A、$B \in \mathcal{A}$，并注意到 $CPT(-1_A) = -\lambda v^-(A) = CPT(-v^-(A)1_S)$，对于 $B \in \mathcal{A}$也有类似的结论。因此，$-1_A \sim -v^-(A)1_S$ 且 $-1_B \sim -v^-(B)1_S$。由于 -1_B与 $-v^-(A)1_S$共单调，根据 A.3"，有 $-v^-(A)1_S - 1_B \succsim -1_A - 1_B$。此外，由于$-v^-(A)1_S$ 与 -1_B 以及 $-v^-(B)1_S$ 均共单调，根据 A.3"，可得 $-1_B - v^-(A)1_S \sim -v^-(B)1_S - v^-(A)1_S$。因此

$$-v^-(B)1_S - v^-(A)1_S \sim -1_B - v^-(A)1_S \succsim -1_A - 1_B$$

注意，$-1_A - 1_B = -1_{A\cup B} - 1_{A\cap B}$，且由于 $1_{A\cup B}$ 和 $1_{A\cap B}$ 共单调。 ，

$$\begin{aligned} CPT(-1_{A\cup B} - 1_{A\cap B}) &= -\int \lambda(-1_{A\cup B} - 1_{A\cap B})^- dv^- \\ &= -\lambda\left(\int 1_{A\cup B} dv^- + \int 1_{A\cap B} dv^-\right) \\ &= -\lambda[v^-(A\cup B) + v^-(A\cap B)]. \end{aligned}$$

因此 $-\lambda[v^-(A) + v^-(B)] = CPT(-v^-(A)1_S - v^-(B)1_S) \geq CPT(-1_{A\cup B} - 1_{A\cap B}) = -\lambda[v^-(A\cup B) + v^-(A\cap B)]$ 这意味着 $v^-(A) + v^-(B) \leq v^-(A\cup B) + v^-(A\cap B)$，即 v^- 是凸的。

$(ii) \Rightarrow (i)$ 留给读者。 □

定理 7 的证明。$(i) \Rightarrow (ii)$ 由于 $\succsim$ 满足 A.1、A.2、A.3 和 A.4，根据定理 5，它可以表示为累积前景理论泛函 I。因此，对所有 $f \in \mathcal{F}$， $f \sim I(f)1_S$ 且 $-f \sim I(-f)1_S$。注意，根据 A.5，还有 $-f \sim -I(f)1_S$，因此 A.2 意味着 $I(-f) = -I(f)$。根据定理 3， I 是 Sipoš 积分。

$(ii) \Rightarrow (i)$ 留给读者。 □

参考文献

[1] Allais, M. 理性人在风险面前的行为：对 ′美国 ′学派假设和公理的批判。《计量经济学》，第503-546页，1953年。[2] Anscombe. F.J. 和 R. Aumann. 主观概率的定义。《数学统计年刊》，34，199-205，1963年。[3] Chateauneuf, A. 通过 Choquet 积分对不确定性和风险态度建模。《运筹学年刊》，52，1–20，1994年。[4] Chateauneuf, A. 和 Wakker, P. 风险下决策的累积前景理论公理化。《风险与不确定性杂志》，18(2)，第137-145页，1999年。[5] Chew SH. 和 Wakker, P. 共单调确定性原则。《风险与不确定性杂志》，12(1)，第5-27页，1996年。[6] De Finetti, B. 关于概率主观意义的论述。Fundamenta Mathemati- cae，17(1)，第298-329页，1931年。[7] Denneberg D. 非加性测度与积分。Kluwer，Dodrecht，1994年。[8] Diecidue, E. 和 Wakker, PP. 关于秩依赖效用的直觉。《风险与不确定性杂志》，23(3)，第281-298页，2001年。[9] D. 埃尔斯伯格。风险、模糊性与 Savage公理。《经济学季刊》，643-669，1961年。

[10] Gal, D. 和 Rucker, D.D. 损失厌恶的消退：它会比收益更引人注目吗？《消费者心理学杂志》，28(3)，第497-516页，2018年。[11] G¨achter, S., Johnson, E.J. 和 Herrmann, A. 无风险与风险选择中的个体层面损失厌恶。《理论与决策》，第1-26页，2021年。[12] Kothiyal, A., Spinu, V. 和 Wakker, PP. 一项关于前景理论预测模糊性下选择能力的实验检验。《风险与不确定性杂志》，48(1)，第1-17页，2014年。[13] Savage, L.J. 统计学基础。Courier Corporation，1972年。[14] Schmeidler, D. 无可加性的积分表示。美国数学会会刊，97:255-261，1986年。[15] Schmeidler, D. 无可加性的主观概率与期望效用理论。《计量经济学》，57，571-587，1989年。[16] Schmidt, U. 和 Zank, H. 一个简单的累积前景理论模型。《数理经济学杂志》，45(3-4)，第308-319页，2009年。[17] Schmidt, U. 和 Zank, H.，2012年。前景理论的真正基础。《风险与不确定性杂志》，45(2)，第97-113页。[18] ˇSipoˇs, J. 关于前测度的积分。《斯洛伐克数学》，29(2)，第141-155页，1979年。[19] Starmer, C. 和 Sugden, R. 共同比率问题中独立性公理的违反：对若干相互竞争假说的实验检验。《运筹学年刊》，19(1)，第79-102页，1989年。[20] Trautmann, S. 和 Wakker, P. 使 Anscombe-Aumann 方法适用于描述性应用。《风险与不确定性杂志》，56(1)，第83-116页，2018年。[21] Tversky, A. 和 Kahneman, D. 前景理论的进展：不确定性的累积表示。《风险与不确定性杂志》，5(4)，第297-323页，1992年。[22] P. Wakker. 通过共单调性直接刻画乐观主义和悲观主义。《经济理论杂志》，52:453-463，1990年。[23] Wakker, PP. 前景理论：针对风险与模糊性。剑桥大学出版社，2010年。[24] Wakker, P. 和 Tversky, A. 累积前景理论的公理化。《风险与不确定性杂志》，7(2)，第147-175页，1993年。

[25] Wakker, PP. 和 Zank, H. 幂效用累积前景理论的简单偏好基础。《欧洲经济评论》，46(7)，第1253-1271页，2002年。[26] Yaari, ME. 风险选择的对偶理论。《计量经济学》，第95-115页，1987年。[27] 冯·诺伊曼，J. 和 Morgenstern, O. 《博弈论与经济行为》。普林斯顿大学出版社，1944年。[28] Zank, H. 参数化效用和多属性效用的累积前景理论。《运筹学数学》，26(1)，第67-81页，2001年。