arXiv:2304.14858v3 [math.AP] 8 Aug 2023

度量测度空间上双相问题的梯度高阶可积性

JUHA KINNUNEN, ANTONELLA NASTASI, CINTIA PACCHIANO CAMACHO

摘要。我们研究一类具有非标准增长条件的双相积分的拟极小化子的局部和全局高阶可积性性质。我们完全在变分层面上，研究配备倍增测度并满足庞加莱不等式的度量测度空间。本文的主要创新在于采用了一种针对双相 Sobolev-Poincaré 不等式的内在方法。

1. 引言

假设 (X, d, μ) 是一个完备度量测度空间，配备度量 d 和倍增测度 μ，并满足弱 $(1,p)$-庞加莱不等式。令 Ω 为 X 的一个开子集。本文讨论双相积分的拟极小化子的最小 p- 弱上梯度的正则性性质

$$\int_\Omega H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega (g_u^p + a(x) g_u^q)\,\mathrm{d}\mu, \tag{1.1}$$

with

$$1 < \frac{q}{p} \le 1 + \frac{\alpha}{Q}, \quad 0 < \alpha \le 1, \quad Q = \log_2 C_D,$$

其中 $p > 1$ 和 C_D 是测度的倍增常数。注意，Q 是与测度 μ 相关的维数概念。例如，在带有勒贝格测度的欧几里得 n 空间中，我们有 $Q = n$。(1.1) 中的双相泛函记为

$$H(x, z) = |z|^p + a(x)|z|^q, \quad x \in \Omega, \quad z \in \mathbb{R}.$$

假设非负系数函数 a 关于与底层测度 μ 相关的拟距离满足 α-赫尔德连续性，精确定义见下文 (2.3)。如果测度是 Q-Ahlfors–David 正则的，这便简化为指数为 α 的标准赫尔德连续性。

泛函 (1.1) 的主要特点是，它会在由系数函数 a 决定的两种不同类型的增长条件之间切换。当 $a(x) = 0$ 时，(1.1) 中的变分积分退化为熟悉的 p-增长问题；而当 $a(x) \ge c > 0$ 时，我们得到 (p,q)-问题。因此，零点集 $\{a(x) = 0\}$ 在 (1.1) 中起着决定性作用。拟极小化函数这一概念的主要优势在于，它同时涵盖了一大类问题，其中变分被积函数 $F\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足卡拉西奥多里条件，并且

$$\lambda H(x, z) \le F(x, u, z) \le \Lambda H(x, z), \quad 0 < \lambda < \Lambda < \infty,$$

对每个 $x \in \Omega$ 和 $u, z \in \mathbb{R}$。关于欧几里得空间中具有 p-增长的拟极小化子，见 [4, 14, 15],；关于度量测度空间中的相关结果，见 [1, 2, 24, 25, 26]。本文将度量测度空间中拟极小化子的理论拓展至双相问题。

方程 (1.1) 的局部拟极小化子的自然函数空间是 $u \in N^{1,1\,\mathrm{loc}}(\Omega)$，且满足 $H(\cdot, g_u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，其中 $N^{1,1}$ 表示度量测度空间上的牛顿–索伯列夫空间，参见 [1], [21] 和 [38]。我们证明，若 u 是方程 (1.1) 的局部拟极小化子，则 $H(x, g_u)$ 局部可积到略高于 1 的幂次，参见定理 4.2。我们还讨论了具有边界值的拟极小化函数在边界处的相应问题，参见定理 4.4。关于欧几里得情形下此类局部高阶可积性结果，参见 [3, 13, 14, 15, 16, 33, 34]。关于相应的整体结果，请参见 [18, 23]。关于欧几里得情形下具有 (1.1) 型泛函的结果，请参见 [5, 6, 7, 8, 9,28, 29, 30, 35, 36]。度量测度空间上的变分问题的高阶可积性问题已经

日期：2022年7月。2020 数学主题分类。49Q20, 49N60, 31C45, 35J60, 46E35。关键词与短语。拟极小化子，双相问题，反 Hölder 不等式。

在 [10, 11, 12, 19, 20, 27, 32, 31, 37] 中得到研究。我们的工作表明，相应理论可以发展到度量测度空间上的双相问题。论证基于能量估计、双相 Sobolev-Poincaré 不等式以及反 Hölder 不等式的自改进性质。

2. 预备知识

全文中，正的常数记为 C，参数依赖关系列于括号内。假设 (X, d, μ) 是一个完备度量测度空间，其度量为 d，Borel 正则测度为 μ。假设测度 μ 是倍增的，即存在一个常数 $C_D \geq 1$，使得

$$0 < \mu(B_{2r}) \leq C_D \mu(B_r) < \infty, \tag{2.1}$$

对于 X 中的每个球 B_r，均有此性质。这里，$B_r = B_r(x) = \{x \in X : d(y, x) < r\}$ 是一个开球，其中心为 $x \in X$，半径为 $0 < r < \infty$。下面的结果给出了与倍增测度相关的一种维数概念。

引理 2.1 ([1], 引理 3.3). 设 (X, d, μ) 是一个度量测度空间，且其测度 μ 为倍增测度。那么

$$\frac{\mu(B_r(y))}{\mu(B_R(x))} \geq C \left(\frac{r}{R}\right)^Q, \tag{2.2}$$

对每个 $0 < r \leq R < \infty$、$x \in X$ 和 $y \in B_R(x)$。这里 $Q = \log_2 C_D$ 和 $C = C_D^{-2}$。

带有倍增测度的完备度量测度空间是适当的，即闭且有界的子集都是紧集，参见 [1, 命题 3.1]。我们讨论上梯度这一概念，借此将欧几里得情形中的梯度模推广到度量情形。更多细节请参阅 Björn 和 Björn [1] 的著作。

定义 2.2. 若非负 Borel 函数 g 满足以下条件，则称其为函数 $u : X \to [-\infty, \infty]$的上梯度：对于连接 x 和 y的所有路径 γ，均有

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_\gamma g \, \mathrm{d}s,$$

当且仅当 $u(x)$ 和 $u(y)$ 均有限时；否则为 $\int_\gamma g \mathrm{d}s = \infty$。这里 x 和 y 是 γ的端点。此外，若非负可测函数 g 对 p-几乎处处的路径满足上述不等式，也就是说，除去一个 p-模数为零的路径族，则称 g 为 u的 p-弱上梯度。

对于 $1 \leq p < \infty$ 以及一个开集 $\Omega \subset X$，令

$$\|u\|_{N^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \inf \|g\|_{L^p(\Omega)},$$

其中，下确界取遍 u的所有上梯度 g。考虑由具有上梯度 $g \in L^p(\Omega)$ 的函数 $u \in L^p(\Omega)$ 构成的集合，并令

$$\widetilde{N}^{1,p}(\Omega) = \{u : \|u\|_{N^{1,p}(\Omega)} < \infty\}.$$

Newton 空间定义为

$$N^{1,p}(\Omega) = \{u : \|u\|_{N^{1,p}(\Omega)} < \infty\} / \sim,$$

其中 $u \sim v$ 当且仅当 $\|u - v\|_{N^{1,p}(\Omega)} = 0$。

相应的局部牛顿空间定义为 $u \in N^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，若对于所有 $\Omega' \Subset \Omega$ 均有 $u \in N^{1,p}(\Omega')$，参见[1, 命题 2.29]，，其中 $\Omega' \Subset \Omega$ 表示 Ω' 是 Ω 的一个紧子集。若 u 具有上梯度$g \in L^p(\Omega)$，则存在唯一的最小 p-弱上梯度 $g_u \in L^p(\Omega)$，使得对于 u的所有 p-弱上梯度 $g \in L^p(\Omega)$，几乎处处有 $g_u \leq g$ μ，参见 [1, 定理 2.5]。此外，最小的 p-弱上梯度在零测集意义下唯一。对于 $u \in N^{1,p}(\Omega)$，我们有

$$\|u\|_{N^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|g_u\|_{L^p(\Omega)},$$

其中，g_u 是 u的最小 p-弱上梯度。其主要优点在于，与上梯度相比，p-弱上梯度在 L^p-收敛下表现更好，参见 [1, 命题 2.2]。不过，两者的差异相对较小，因为每个 p-弱上梯度都可以在 L^p中由一列上梯度逼近，参见 [1, 引理 1.46]。这意味着，如果将下确界的取值范围从 p-弱上梯度改为上梯度，上面的 $N^{1,p}$-范数仍保持不变。

设 Ω 是 X的一个开子集。我们将 $N^{1,q}_0(\Omega)$定义为函数 $u \in N^{1,q}(X)$的集合，这些函数在 $X \setminus \Omega$ 上 μ-几乎处处为零。空间 $N^{1,q}_0(\Omega)$赋予范数$\|\cdot\|_{N^{1,q}}$。另请注意，如果 $\mu(X \setminus \Omega) = 0$，那么$N^{1,q}_0(\Omega) = N^{1,q}(X)$。因此，我们始终假设 $\mu(X \setminus \Omega) > 0$。

积分平均记为

$$u_B = \fint_B u \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B u \, \mathrm{d}\mu.$$

我们假设 X 满足以下庞加莱不等式。

定义 2.3。设 $1 \le p < \infty$。若存在常数 C_{PI} 和膨胀因子 $\lambda \ge 1$，使得度量测度空间 (X, d, μ) 满足弱 $(1,p)$-庞加莱不等式，则称该空间满足弱 $(1,p)$-庞加莱不等式。

$$\fint_{B_r} |u - u_{B_r}| \, \mathrm{d}\mu \le C_{PI} r \left(\fint_{B_{\lambda r}} g_u^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

对于每个球 B_r in X 以及每个 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$。

正如 Keith 和 Zhong 在 [22, 定理 1.0.1] 中所示，另见 [1, 定理 4.30], ，庞加莱不等式具有自改进性质。

定理 2.4。设(X, d, μ)是一个完备度量测度空间，具有倍增测度 μ，并满足弱$(1,p)$-庞加莱不等式，其常数为 $p > 1$。那么，存在 $\varepsilon > 0$，使得 X对每个 $q > p - \varepsilon$都满足弱$(1,q)$-庞加莱不等式。此处，ε以及与$(1,q)$-庞加莱不等式相关的常数仅依赖于 C_D、C_{PI} 和 p。

下面的结果表明，庞加莱不等式蕴含索об列夫–庞加莱不等式，见 [1,定理 4.21 和推论 4.26]。

定理 2.5。假设 μ 是一个倍增测度，且 X 满足弱$(1,p)$-庞加莱不等式；设 $Q = \log_2 C_D$ 如(2.2)所示。令 $1 \le p^* \le \frac{Qp}{Q-p}$ 对 $1 \le p < Q$ 成立，且 $1 \le p^* < \infty$ 对 $Q \le p < \infty$成立。则 X满足弱(p^*, p)-庞加莱不等式，也就是说，存在一个常数 $C = C(C_D, C_{PI}, p)$ 使得

$$\left(\fint_{B_r} |u - u_{B_r}|^{p^*} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p^*}} \le Cr \left(\fint_{B_{2\lambda r}} g_u^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

对每个包含于 X 中的球 B_r 以及每个 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$,

本文将始终使用以下记号和假设。对于 (1.1) 中的系数函数a： $X \to [0, \infty)$，我们假设存在 α, $0 < \alpha \le 1$, 使得

$$[a]_\alpha = \sup_{x,y \in \Omega, x \ne y} \frac{|a(x) - a(y)|}{\delta_\mu(x,y)^\alpha} < \infty, \tag{2.3}$$

其中 δ_μ 是一个拟距离，定义如下:

$$\delta_\mu(x,y) = \left(\mu(B_{d(x,y)}(x)) + \mu(B_{d(x,y)}(y)) \right)^{1/Q}, \quad x, y \in X, \, x \ne y.$$

这里 $Q = \log_2 C_D$ 如 (2.2) 所示，并令 $\delta_\mu(x,x) = 0$。

注 2.6. 如果存在常数 $0 < C_1 \le C_2 < \infty$，则称一个测度为 Ahlfors–David 正则。

$$C_1 r^Q \le \mu(B_r(x)) \le C_2 r^Q, \tag{2.4}$$

对于每个 $x \in X$ 和 $0 < r \le \operatorname{diam}(X)$。如果测度 μ 是 Ahlfors–David 正则的，那么对于每个 x、y，$\delta_\mu(x,y) \approx d(x,y)$，并且因此，$[a]_\alpha < \infty$ 当且仅当 a 是指数为 α 的赫尔德连续函数。

我们假设 that

$$1 < \frac{q}{p} \le 1 + \frac{\alpha}{Q}, \tag{2.5}$$

其中 $p > 1$, α 如 (2.3) 所示，$Q = \log_2 C_D$ 如 (2.2) 所示。

由 (2.5)、定理 2.4 和定理 2.5，存在 $s = s(C_D, p, q)$，其中 $1 < s < p < q < s^*$，使得X 支持一个 (s^*, s)-庞加莱不等式，即

$$\left(\fint_{B_r} |u - u_{B_r}|^{s^*} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{s^*}} \le Cr \left(\fint_{B_{2\lambda r}} g_u^s \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{s}}, \tag{2.6}$$

对于 X 中的每个球 B_r 以及每个满足 $C = C(C_D, C_{PI}, \lambda, p, q)$ 的 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$。我们记录这些依赖关系，并记为

$$C(\mathrm{data}) = C(C_D, C_{PI}, \lambda, p, q, K, \alpha, [a]_\alpha).$$

这里， K 是下文定义 2.7 中的拟极小常数。根据双相泛函的结构，我们有 $g_u \in L^p(\Omega)$。然而，我们无法得出 $g_u \in L^q(\Omega)$，因为函数 a 可能在 Ω 的某个子集上为零。接下来我们讨论局部拟极小化子的定义。

定义 2.7。 函数 $u \in N^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，满足 $H(\cdot, g_u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，称为 Ω 上的局部拟极小化子，若存在一个常数 $K \geq 1$ 使得

$$\int_{\Omega' \cap \{u \neq v\}} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \leq K \int_{\Omega' \cap \{u \neq v\}} H(x, g_v)\,\mathrm{d}\mu,$$

对于每个开子集 $\Omega' \Subset \Omega$，以及每个函数 $v \in N^{1,1}(\Omega')$，且满足 $u - v \in N^{1,1}_0(\Omega')$.

然后我们给出具有边界值的拟极小解的定义。

定义 2.8。 设 $w \in N^{1,1}(\Omega)$ 满足 $H(\cdot, g_w) \in L^1(\Omega)$。若函数 $u \in N^{1,1}(\Omega)$ 满足 $H(\cdot, g_u) \in L^1(\Omega)$，且 $u - w \in N^{1,1}_0(\Omega)$，并存在一个常数 $K \geq 1$，使得

$$\int_{\Omega' \cap \{u \neq v\}} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \leq K \int_{\Omega' \cap \{u \neq v\}} H(x, g_v)\,\mathrm{d}\mu,$$

对每个开子集 $\Omega' \subset \Omega$，以及每个满足 $u - v \in N^{1,1}_0(\Omega')$ 的函数 $v \in N^{1,1}(\Omega')$,

上述定义的主要区别在于：局部情形中，条件 $u \in N^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且满足 $H(\cdot, g_u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，被替换为 $u \in N^{1,1}(\Omega)$ 且满足 $H(\cdot, g_u) \in L^1(\Omega)$。显然，具有边界值的拟极小化函数是局部拟极小化子。

我们给出双相问题的局部能量估计。

引理 2.9。 假设 $u \in N^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 满足 $H(\cdot, g_u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 是 Ω 中的局部拟极小化子，并令$B_r \subset B_R \Subset \Omega$ 为同心球。那么存在常数 $C = C(K, q)$ 使得

$$\int_{B_r} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \leq C \int_{B_R} H\left(x, \frac{u - u_{B_R}}{R - r}\right)\mathrm{d}\mu.$$

证明。 令 η为一个 $(R-r)^{-1}$-Lipschitz 截断函数，使得在 B_r 上 $0 \leq \eta \leq 1, \eta = 1$，且在 $X \setminus B_R$中 $\eta = 0$。令 $v = u - \eta(u - u_{B_R})$。根据上梯度的 Leibniz 法则（[1], 引理 2.18]），我们有

$$g_v \leq |u - u_{B_R}| g_\eta + (1 - \eta) g_u \leq \frac{|u - u_{B_R}|}{R - r} + (1 - \chi_{B_r}) g_u.$$

由于 u 是局部拟极小化子且 $u - v \in N^{1,1}_0(B_R)$，由定义 2.7 可得

$$\begin{aligned} \int_{B_r} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu &\leq \int_{B_R} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \leq K \int_{B_R} H(x, g_v)\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq 2^q K \left(\int_{B_R} H\left(x, \frac{u - u_{B_R}}{R - r}\right)\mathrm{d}\mu + \int_{B_R \setminus B_r} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

在 (2.7) 两边加上 $K 2^q \int_{B_r} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu$，得到

$$(1 + K2^q) \int_{B_r} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \leq K 2^q \left(\int_{B_R} H\left(x, \frac{u - u_{B_R}}{R - r}\right)\mathrm{d}\mu + \int_{B_R} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \right).$$

这意味着

$$\begin{aligned} \int_{B_r} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu &\leq \theta \left(\int_{B_R} H\left(x, \frac{u - u_{B_R}}{R - r}\right)\mathrm{d}\mu + \int_{B_R} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \right) \\ &\leq (R - r)^{-p} \int_{B_R} |u - u_{B_R}|^p\,\mathrm{d}\mu + (R - r)^{-q} \int_{B_R} a |u - u_{B_R}|^q\,\mathrm{d}\mu + \theta \int_{B_R} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu, \end{aligned}$$

其中 $\theta = \frac{K2^q}{1+K2^q} < 1$。我们应用一个标准的迭代引理，参见 [17, 引理 6.1], ，得到

$$\int_{B_r} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \le C \int_{B_R} H\left(x, \frac{u-u_{B_R}}{R-r}\right)\,\mathrm{d}\mu,$$

其中 $C = C(q, K)$. □

接下来，我们讨论具有边界值的拟极小解的全局能量估计　　.

引理 2.10. 设 $w \in N^{1,1}(\Omega)$ 满足 $H(\cdot, g_w) \in L^1(\Omega)$。假设 $u \in N^{1,1}(\Omega)$ 满足 $H(\cdot, g_u) \in L^1(\Omega)$，是 Ω 上的拟极小化函数，且满足Ω 上的 $u - w \in N^{1,1}_0(\Omega)$，并设 $B_r \subset B_R$ 为同心球。则存在一个常数 $C = C(K, q)$，使得

$$\int_{B_r\cap\Omega} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \le C\left(\int_{B_R\cap\Omega} H\left(x, \frac{u-w}{R-r}\right)\,\mathrm{d}\mu + \int_{B_R\cap\Omega} H(x, g_w)\,\mathrm{d}\mu\right).$$

证明. 设 η是一个 $(R-r)^{-1}$-Lipschitz 截断函数，使得 $0 \le \eta \le 1$, $\eta = 1$ 在 B_r 上且 $\eta = 0$ 在 $X \setminus B_R$中。令 $v = u - \eta(u-w)$。于是 $\eta(u-w) \in N^{1,1}_0(B_R \cap \Omega)$，因此 $v - u \in N^{1,1}_0(B_R \cap \Omega)$。根据定义 2.8，我们得到

$$\int_{B_R\cap\Omega} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \le K \int_{B_R\cap\Omega} H(x, g_v)\,\mathrm{d}\mu,$$

其中 $v = u + \eta(w-u)$。因此

$$g_v \le |u-w| g_\eta + (1-\eta) g_u + \eta g_w \le \frac{|u-w|}{R-r} + (1-\chi_{B_r}) g_u + g_w,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\int_{B_r\cap\Omega} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu &\le \int_{B_R\cap\Omega} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \le K \int_{B_R\cap\Omega} H(x, g_v)\,\mathrm{d}\mu \\ &\le 3^q K\left(\int_{B_R\cap\Omega} H\left(x, \frac{u-w}{R-r}\right)\,\mathrm{d}\mu + \int_{(B_R\setminus B_r)\cap\Omega} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu + \int_{B_R\cap\Omega} H(x, g_w)\,\mathrm{d}\mu\right).\end{aligned}$$

通过填补空洞并按照引理 2.9 的证明进行迭代，我们得到

$$\int_{B_r\cap\Omega} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \le C\left(\int_{B_R\cap\Omega} H\left(x, \frac{u-w}{R-r}\right)\,\mathrm{d}\mu + \int_{B_R\cap\Omega} H(x, g_w)\,\mathrm{d}\mu\right),$$

其中 $C = C(q, K)$。 □

3. 双相 Sobolev–Poincaré 不等式

本节讨论双相 Sobolev–Poincaré 不等式。我们分别讨论内部估计和边界估计。首先介绍内部估计。

引理 3.1. 假设 $u \in N^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且 $H(\cdot, g_u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。令 $a_0 = \inf_{x\in B_{2\lambda r}} a(x)$。那么存在一个常数 $C = C$(数据) 以及指数 $0 < d_2 < 1 \le d_1 < \infty$，满足 $d_1 = d_1(C_D, p, q)$ 和 $d_2 = d_2(C_D, p, q)$，使得

$$\left(\fint_{B_r}\left(\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^p + a_0\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^q\right)^{d_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}} \le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} (g_u^p + a_0 g_u^q)^{d_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}}, \tag{3.1}$$

只要 $B_{2\lambda r} \Subset \Omega$。

证明. 由式 (2.6)，存在 s，满足 $1 < s < p < q < s^*$，使得

$$\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{s^*}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s^*}} \le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} g_u^s\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{3.2}$$

令 $\frac{s}{p} < d_2 < 1$ 和 $1 \le d_1 < \frac{s^*}{q}$。由于 $pd_1 < qd_1 < s^*$ 和 $s < pd_2 < qd_2$，由 Hölder不等式可得

$$\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{pd_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{pd_1}} \le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} g_u^{pd_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{pd_2}}, \tag{3.3}$$

and

$$\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{qd_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{qd_1}}\le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}}g_u^{qd_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{qd_2}}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\left(\fint_{B_r}\left(\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{p}+a_0\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{q}\right)^{d_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}}\\
&\quad\le\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{pd_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}}+a_0\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{qd_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}}\\
&\quad\le C\left(\left(\fint_{B_{2\lambda r}}g_u^{pd_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}}+a_0\left(\fint_{B_{2\lambda r}}g_u^{qd_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}}\right)\\
&\quad\le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}}g_u^{pd_2}\,\mathrm{d}\mu+\fint_{B_{2\lambda r}}(a_0g_u^q)^{d_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}}\\
&\quad\le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}}(g_u^p+a_0g_u^q)^{d_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}},
\end{aligned}$$

其中 $C=C(C_D,C_{PI},\lambda,p,q)$。注意，所有积分都是有限的，因为

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{B_{2\lambda r}}(g_u^p+a_0g_u^q)^{d_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}}&\le\left(\fint_{B_{2\lambda r}}(g_u^p+a(x)g_u^q)^{d_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}}\\
&\le\fint_{B_{2\lambda r}}(g_u^p+a(x)g_u^q)\,\mathrm{d}\mu\\
&=\fint_{B_{2\lambda r}}H(x,g_u)\,\mathrm{d}\mu<\infty.
\end{aligned}$$

□

接下来考虑一个内部双相 Sobolev–Poincaré 不等式。

引理 3.2. 假设 $u\in N^{1,1\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且 $H(\cdot,g_u)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。那么存在一个常数 $C=C(\mathrm{data})$以及指数 $0<d_2<1\le d_1<\infty$，其中 $d_1=d_1(\mathrm{data})$ 且 $d_2=d_2(\mathrm{data})$，使得

$$\left(\fint_{B_r}H\left(x,\frac{u-u_{B_r}}{r}\right)^{d_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}}\le C\left(1+\|g_u\|^{q-p}_{L^p(B_{2\lambda r})}\mu(B_{2\lambda r})^{\frac{\alpha}{Q}-\frac{q-p}{p}}\right)\left(\fint_{B_{2\lambda r}}H(x,g_u)^{d_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}},$$

只要 $B_{2\lambda r}\Subset\Omega$。

证明。 首先假设

$$a_0=\inf_{x\in B_{2\lambda r}}a(x)>2[a]_\alpha(2C_D^2\mu(B_{2\lambda r}))^{\alpha/Q},\tag{3.4}$$

其中 $Q=\log_2 C_D$ 与引理 2.1 中的定义相同。注意，对于任意 x、$y\in B_{2\lambda r}$，我们有

$$\begin{aligned}
\delta_\mu(x,y)&=\big(\mu(B_{d(x,y)}(x))+\mu(B_{d(x,y)}(y))\big)^{1/Q}\\
&\le(\mu(B_{4\lambda r}(x))+\mu(B_{4\lambda r}(y)))^{1/Q}\\
&\le(2\mu(B_{6\lambda r}))^{1/Q}\le(2C_D^2\mu(B_{2\lambda r}))^{1/Q}.
\end{aligned}$$

由 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}2a_0 &= 2a(x) - 2\left(a(x) - a_0\right) \geq a(x) + a_0 - 2\left(a(x) - a_0\right)\\ &\geq a(x) + 2[a]_\alpha (2C_D^2\mu(B_{2\lambda r}))^{\alpha/Q} - 2\left(a(x) - a_0\right)\\ &\geq a(x) + 2\sup_{\substack{x,y\in B_{2\lambda r}\\ x\neq y}} \frac{|a(x)-a(y)|}{\delta_\mu(x,y)^\alpha}(2C_D^2\mu(B_{2\lambda r}))^{\alpha/Q} - 2\left(a(x) - a_0\right)\\ &\geq a(x) + 2\sup_{x,y\in B_{2\lambda r}} |a(x)-a(y)| - 2\left(a(x) - a_0\right)\\ &\geq a(x) + 2\sup_{x,y\in B_{2\lambda r}} (a(x)-a(y)) - 2\left(a(x) - a_0\right)\\ &\geq a(x) + 2a(x) - 2\inf_{y\in B_{2\lambda r}} a(y) - 2\left(a(x) - a_0\right) = a(x),\end{aligned}$$

对每个 $x \in B_{2\lambda r}$ 都成立。另一方面，对每个 $x \in B_{2\lambda r}$，我们有 $a(x) \geq \inf_{x\in B_{2\lambda r}} a(x) = a_0$。这意味着，对每个 $x \in B_{2\lambda r}$，$a_0 \leq a(x) \leq 2a_0$。根据引理 3.1，我们得出

$$\begin{aligned}\left(\fint_{B_r} H\left(x, \frac{u-u_{B_r}}{r}\right)^{d_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}} &= \left(\fint_{B_r}\left(\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^p + a(x)\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^q\right)^{d_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}}\\ &\leq C\left(\fint_{B_r}\left(\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^p + a_0\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^q\right)^{d_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}}\\ &\leq C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} (g_u^p + a_0 g_u^q)^{d_2} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}}\\ &\leq C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} (g_u^p + a(x) g_u^q)^{d_2} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}}\\ &\leq C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} H(x, g_u)^{d_2} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}},\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $C = C(\text{data})$、$d_1 = d_1(\text{data})$ 和 $d_2 = d_2(\text{data})$，且 $0 < d_2 < 1 \leq d_1 < \infty$。

接下来，我们考虑与 (3.4) 互补的情形，即

$$a_0 = \inf_{x\in B_{2\lambda r}} a(x) \leq 2[a]_\alpha (2C_D^2\mu(B_{2\lambda r}))^{\alpha/Q}. \tag{3.6}$$

注意，对每个 $x \in B_{2\lambda r}$ 和 $y \in B_r$，若 $y \neq x$，则有

$$a(y) - a(x) \leq |a(x) - a(y)| = \frac{|a(x)-a(y)|}{\delta_\mu(x,y)^\alpha}\delta_\mu(x,y)^\alpha \leq [a]_\alpha \delta_\mu(x,y)^\alpha. \tag{3.7}$$

注意，对于每个 $x \in B_{2\lambda r}$ 和 $y \in B_r$，当 $y \neq x$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\delta_\mu(x,y) &= \left(\mu(B_{d(x,y)}(x)) + \mu(B_{d(x,y)}(y))\right)^{1/Q}\\ &\leq \left(\mu(B_{3\lambda r}(x)) + \mu(B_{3\lambda r}(y))\right)^{1/Q}\\ &\leq \left(2\mu(B_{5\lambda r})\right)^{1/Q} \leq C\mu(B_{2\lambda r})^{1/Q},\end{aligned}$$

其中 $C = C(C_D)$。由 (3.7) 可得

$$a(y) \leq a(x) + C[a]_\alpha \mu(B_{2\lambda r})^{\alpha/Q},$$

其中 $C = C(C_D, \alpha)$。对所有 $x \in 2\lambda B_r$ 取下确界，可得

$$\begin{aligned}a(y) &\leq \inf_{x\in B_{2\lambda r}} a(x) + C[a]_\alpha \mu(B_{2\lambda r})^{\alpha/Q}\\ &\leq 2[a]_\alpha (2C_D^2\mu(B_{2\lambda r}))^{\alpha/Q} + C[a]_\alpha \mu(B_{2\lambda r})^{\alpha/Q}\\ &= C[a]_\alpha \mu(B_{2\lambda r})^{\alpha/Q},\end{aligned}$$

其中 $C = C(C_D, \alpha)$。对 $y \in B_r$ 取上确界，可得

$$\sup_{y\in B_r} a(y) \le C[a]_\alpha \mu(B_{2\lambda r})^{\alpha/Q}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{B_r} H\left(x, \frac{u-u_{B_r}}{r}\right)^{d_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}} &= \left(\fint_{B_r} \left(\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^p + a(x)\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^q\right)^{d_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}} \\
&\le \left(\fint_{B_r} \left(\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^p + C[a]_\alpha \mu(B_{2\lambda r})^{\alpha/Q}\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^q\right)^{d_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}} \\
&\le \left(\fint_{B_r} \left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{pd_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}} + C[a]_\alpha \mu(B_{2\lambda r})^{\alpha/Q}\left(\fint_{B_r} \left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{q\,d_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}} \\
&\le C\left(\fint_{B_r} \left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{qd_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}\frac{p}{q}} \left(1 + [a]_\alpha \mu(B_{2\lambda r})^{\alpha/Q}\left(\fint_{B_r} \left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{qd_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q-p}{qd_1}}\right),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 $C = C(C_D, \alpha)$。由于 $qd_1 < s^*$ 和 $s < p$，由 (3.2) 和 Hölder不等式可得

$$\left(\fint_{B_r} \left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{qd_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{qd_1}} \le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} g_u^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $C = C$(数据)。因此我们有

$$\left(\fint_{B_r} \left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{qd_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q-p}{qd_1}} \le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} g_u^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q-p}{p}} = C\|g_u\|^{q-p}_{L^p(B_{2\lambda r})}\mu(B_{2\lambda r})^{-\frac{q-p}{p}},$$

其中 $C = C$(数据)。由 (3.8) 可得

$$\left(\fint_{B_r} H\left(x, \frac{u-u_{B_r}}{r}\right)^{d_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}} \le C\left(\fint_{B_r} \left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{qd_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}\frac{p}{q}} \left(1 + \|g_u\|^{q-p}_{L^p(B_{2\lambda r})}\mu(B_{2\lambda r})^{\frac{\alpha}{Q}-\frac{q-p}{p}}\right),$$

其中 $C = C$(数据)。由于 $qd_1 < s^*$ 和 $s < pd_2$，由 (3.2) 可得

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{B_r} \left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{qd_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}\frac{p}{q}} &\le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} g_u^{p\,d_2} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}} \\
&\le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} (g_u^p + a(x) g_u^q)^{d_2} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}} \\
&= C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} H(x, g_u)^{d_2} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}}.
\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

接下来我们讨论一个关于在一个大集合上取值为零的函数的 Sobolev不等式，见 [26]。

引理 3.3. 假设 $u \in N^{1,1\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ 满足 $H(\cdot, g_u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。设 B_r 为一个球，且 $a_0 = \inf_{x\in B_{2\lambda r}} a(x)$。假设存在 γ、$0 < \gamma < 1$，使得

$$\mu(\{x \in B_r : |u(x)| > 0\}) \le \gamma \mu(B_r).$$

那么存在一个常数 $C = C$(数据 γ) 以及指数 $0 < d_2 < 1 \le d_1 < \infty$，满足 $d_1 = d_1$(数据) 且$d_2 = d_2$(数据)，使得

$$\left(\fint_{B_r} \left(\left|\frac{u}{r}\right|^p + a_0\left|\frac{u}{r}\right|^q\right)^{d_1} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}} \le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} (g_u^p + a_0 g_u^q)^{d_2} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}}.$$

证明。与引理 3.1 的证明类似，存在 s，满足 $1<s<p<q<s^*$，使得 (3.2) 成立。令$A=\{x\in B_r:\ |u(x)|>0\}$。我们注意到

$$\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u}{r}\right|^{s^*}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s^*}}\le\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{s^*}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s^*}}+\left|\frac{u_{B_r}}{r}\right|. \tag{3.9}$$

由 Hölder不等式可得

$$|u_{B_r}|\le\frac{1}{\mu(B_r)}\int_A|u|\,\mathrm{d}\mu\le\left(\frac{\mu(A)}{\mu(B_r)}\right)^{1-\frac{1}{s^*}}\left(\fint_{B_r}|u|^{s^*}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s^*}}\le\gamma^{1-\frac{1}{s^*}}\left(\fint_{B_r}|u|^{s^*}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s^*}}.$$

由 (3.9) 和 (3.2) 可知

$$(1-\gamma^{1-\frac{1}{s^*}})\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u}{r}\right|^{s^*}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s^*}}\le\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u-u_{B_r}}{r}\right|^{s^*}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s^*}}\le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}}g_u^s\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{3.10}$$

其中 $C=C$(data)。由于 $pd_1<qd_1<s^*$ 和 $s<pd_2<qd_2$，由 Hölder不等式可得

$$\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u}{r}\right|^{pd_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{pd_1}}\le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}}g_u^{pd_2}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{pd_2}},$$

and

$$\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u}{r}\right|^{qd_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{qd_1}}\le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}}g_u^{qd_2}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{qd_2}},$$

其中 $C=C$(data γ)。其余证明与引理 3.1 的证明相同。 □

接下来我们考虑局部双相 Sobolev–Poincaré 不等式。

引理 3.4. 假设 $u\in N^{1,1\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且 $H(\cdot,g_u)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。令 B_r 为一个球，并假设存在 γ, $0<\gamma<1$，使得

$$\mu(\{x\in B_r:|u(x)|>0\})\le\gamma\mu(B_r).$$

那么存在常数 $C=C(\mathrm{data}\ \gamma)$ 以及指数 $0<d_2<1\le d_1<\infty$，其中 $d_1=d_1(\mathrm{data})$ 且$d_2=d_2(\mathrm{data})$，使得

$$\left(\fint_{B_r}H\left(x,\frac{u}{r}\right)^{d_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}}\le C\left(1+\|g_u\|^{q-p}_{L^p(B_{2\lambda r})}\mu(B_{2\lambda r})^{\frac{\alpha}{Q}-\frac{q-p}{p}}\right)\left(\fint_{B_{2\lambda r}}H(x,g_u)^{d_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}}.$$

证明。与引理 3.2 的证明一样，我们考虑两种情形 (3.4) 和 (3.6)。若 (3.4) 成立，则如同在 (3.5) 中那样用 $\frac{u}{r}$ 代替 $\frac{u-u_{B_r}}{r}$，并利用引理 3.3，可得

$$\left(\fint_{B_r}H\left(x,\frac{u}{r}\right)^{d_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}}\le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}}H(x,g_u)^{d_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}},$$

其中 $C=C$(data γ)、 $d_1=d_1$(data) 和 $d_2=d_2$(data)，且 $0<d_2<1\le d_1<\infty$。另一方面，若 (3.6) 成立，则如同在 (3.8) 中那样，可得

$$\begin{aligned}\left(\fint_{B_r}H\left(x,\frac{u}{r}\right)^{d_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}}&\le\left(\fint_{B_r}\left(\left|\frac{u}{r}\right|^p+C[a]_\alpha\mu(B_{2\lambda r})^{\alpha/Q}\left|\frac{u}{r}\right|^q\right)^{d_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}}\\&\le\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u}{r}\right|^{pd_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}}+C[a]_\alpha\mu(B_{2\lambda r})^{\alpha/Q}\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u}{r}\right|^{qd_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}}\\&\le C\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u}{r}\right|^{qd_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{p}{qd_1}}\left(1+[a]_\alpha\mu(B_{2\lambda r})^{\alpha/Q}\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u}{r}\right|^{qd_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q-p}{qd_1}}\right),\end{aligned}$$

其中 $C=C(C_D,\alpha)$。由于 $qd_1<s^*$ 和 $s<pd_2$，由 (3.10) 和 Hölder不等式可得

$$\left(\fint_{B_r}\left|\frac{u}{r}\right|^{qd_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{qd_1}}\le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}}g_u^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $C = C(\text{data } \gamma)$。与引理 3.2 的证明中一样，我们有

$$\left(\fint_{B_r} \left|\frac{u}{r}\right|^{qd_1} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q-p}{qd_1}} \le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} g_u^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q-p}{p}} = C\|g_u\|^{q-p}_{L^p(B_{2\lambda r})}\mu(B_{2\lambda r})^{-\frac{q-p}{p}},$$

因此

$$\left(\fint_{B_r} H\left(x, \frac{u}{r}\right)^{d_1} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_1}} \le C\left(\fint_{B_r} \left|\frac{u}{r}\right|^{qd_1} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{p}{q\,d_1}} \left(1 + \|g_u\|^{q-p}_{L^p(B_{2\lambda r})}\mu(B_{2\lambda r})^{\frac{\alpha}{Q}-\frac{q-p}{p}}\right),$$

其中 $C = C(\text{数据 } \gamma)$。由于 $qd_1 < s^*$ 且 $s < pd_2$，按照引理 3.3 的证明应用 (3.10)，可得

$$\begin{aligned}\left(\fint_{B_r} \left|\frac{u}{r}\right|^{qd_1} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{p}{qd_1}} &\le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} g_u^{pd_2} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}} \\ &\le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} (g_u^p + a(x)g_u^q)^{d_2} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}} \\ &= C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} H(x, g_u)^{d_2} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d_2}},\end{aligned}$$

其中 $C = C(\text{数据 } \gamma)$。证明完毕。 □

4. 局部与整体高阶可积性结果

本文的主要目标是证明拟极小化子的全局高阶可积性。在度量情形下，通过使用 Gehring 引理的度量空间版本来提高可积性；例如，可在 [1] 或 [39]中找到其证明。

引理 4.1。 设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 和 $g \in L^\sigma_{\mathrm{loc}}(X)$、 $\sigma > 1$ 均为非负函数，且 $\lambda > 1$。假设存在常数 C_1 和指数 $0 < d < 1$，使得

$$\fint_{B_R} f \,\mathrm{d}\mu \le C_1\left(\left(\fint_{B_{\lambda R}} f^d \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}} + \fint_{B_{\lambda R}} g \,\mathrm{d}\mu\right),$$

对每个满足 $B_{\lambda R} \Subset \Omega$ 的球 B_R，均有此性质。则存在常数 $C_2 = C_2(C_D, C_1, d, \lambda)$ 和指数$\varepsilon = \varepsilon(C_D, C_1, d, \lambda) > 0$，使得

$$\left(\fint_{B_R} f^{1+\varepsilon} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \le C_2\left(\fint_{B_{\lambda R}} f \,\mathrm{d}\mu + \left(\fint_{B_{\lambda R}} g^\sigma \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right),$$

对每个满足 $B_{\lambda R} \Subset \Omega$ 的球 B_R，均有此性质。

接下来，我们讨论局部拟极小化子的上梯度的局部高阶可积性。

定理 *4.2*。设 Ω 是 X 的一个开子集，且 $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$。假设 $u \in N^1$,***1 loc (Ω)*** 且$H(\cdot, g_u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 是 Ω 中的局部拟极小化函数。则存在常数 $C = C(\textit{data}, \Omega'', \|g_u\|_{L^p(\Omega'')})$ 和指数 $\varepsilon = \varepsilon(\textit{data},\Omega'',\|g_u\|_{L^p(\Omega'')}) > 0$，使得

$$\left(\int_{\Omega'} H(x, g_u)^{1+\varepsilon} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \le C\int_{\Omega''} H(x, g_u) \,\mathrm{d}\mu.$$

证明。设 $B_{2\lambda r} \Subset \Omega''$。由引理 2.9，存在一个常数 $C = C(K, q)$，使得

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}} H(x, g_u) \,\mathrm{d}\mu \le C\int_{B_r} H\left(x, \frac{u - u_{B_r}}{r}\right) \,\mathrm{d}\mu.$$

另一方面，由引理 3.2，我们得到

$$\fint_{B_r} H\left(x, \frac{u - u_{B_r}}{r}\right) \,\mathrm{d}\mu \le C\left(1 + \|g_u\|^{q-p}_{L^p(B_{2\lambda r})}\mu(B_{2\lambda r})^{\frac{\alpha}{Q}-\frac{q-p}{p}}\right)\left(\fint_{B_{2\lambda r}} H(x, g_u)^d \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}},$$

其中 $0 < d = d$（数据）< 1 且 $C = C$（数据）。这意味着

$$\fint_{B_{\frac{r}{2}}} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \le C\left(1 + \|g_u\|^{q-p}_{L^p(B_{2\lambda r})}\mu(B_{2\lambda r})^{\frac{\alpha}{Q}-\frac{q-p}{p}}\right)\left(\fint_{B_{2\lambda r}} H(x, g_u)^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}},$$

其中 $C = C$(data)。

由 (2.5) 可得 $\frac{\alpha}{Q} - \frac{q-p}{p} \ge 0$，因此我们得到

$$\fint_{B_{r/2}} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \le C\left(1 + \|g_u\|^{q-p}_{L^p(\Omega'')}\mu(\Omega'')^{\frac{\alpha}{Q}-\frac{q-p}{p}}\right)\left(\fint_{B_{2\lambda r}} H(x, g_u)^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}},$$

其中 $C = C$(data)。这意味着

$$\fint_{B_{r/2}} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} H(x, g_u)^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}}, \tag{4.1}$$

对于每个满足 $B_{2\lambda r} \Subset \Omega''$ 且 $C = C$(data, Ω″,$\|g_u\|_{L^p(\Omega'')}$) 的球。常数 C 取决于 Ω″ 和 $\|g_u\|_{L^p(\Omega'')}$，但一旦固定 u 和 Ω″，所得到的反向 Hölder 不等式便对所有满足 $B_{2\lambda r} \Subset \Omega''$ 的球一致成立。由引理 4.1，存在一个常数 $C = C$(data, Ω″,$\|g_u\|_{L^p(\Omega'')}$) 和一个指数$\varepsilon = \varepsilon$(data, Ω″,$\|g_u\|_{L^p(\Omega'')}$) > 0，使得

$$\left(\fint_{B_{r/2}} H(x, g_u)^{1+\varepsilon}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \le C\fint_{B_{2\lambda r}} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu,$$

对每个满足 $B_{2\lambda r} \Subset \Omega''$ 的球。由于 Ω' 是紧的，我们可以用有限个这样的球覆盖它，并得出

$$\left(\int_{\Omega'} H(x, g_u)^{1+\varepsilon}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \le C\int_{\Omega''} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu.$$

□

注记 4.3。如果测度是 Ahlfors–David 正则的，见 (2.4)，则有

$$\mu(B_{2\lambda r})^{\frac{\alpha}{Q}-\frac{q-p}{p}} \le Cr^{\alpha - Q(\frac{q}{p}-1)},$$

其中 $\alpha - Q(\frac{q}{p} - 1) \ge 0$，由 (2.5) 得出。与定理 4.2 的证明类似，存在一个常数 $C = C$(data) 和一个指数 $0 < d = d$(data)，使得

$$\fint_{B_{\frac{r}{2}}} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \le C\left(1 + \|g_u\|^{q-p}_{L^p(B_{2\lambda r})}\right)\left(\fint_{B_{2\lambda r}} H(x, g_u)^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}},$$

当 $B_{2\lambda r} \Subset \Omega$ 时　　且满足 $0 < r \le 1$。类似的论证也可用于引理 3.2 和引理 3.4　　.

最后，我们可以证明本文的主要结果：在区域满足一致测度密度性质的假设下，拟极小化函数在整个区域上的弱上梯度具有高阶可积性。

定理 4.4。假设Ω 是 X 中的有界开集，并且存在常数 γ、$0 < \gamma < 1$，使得

$$\mu(B_R(x) \cap \Omega) \le \gamma\mu(B_R(x)),$$

对每个 $x \in X \setminus \Omega$ 和 $R > 0$。设 $w \in N^1$,*1(Ω)* 满足，对于某个 $\sigma > 1$，$H(\cdot, g_w) \in L^\sigma(\Omega)$。设 $u \in N^1$,*1(Ω)* 满足 $H(\cdot, g_u) \in L^1(\Omega)$ 是 Ω 中的拟极小化函数，且 $u - w \in N^1$,*1 0 (Ω)*。则存在一个常数 $C = C$ *(data* γ, Ω $\|g_{u-w}\|_{L^p(\Omega)}$*)* 和一个指数 $\varepsilon = \varepsilon$*(data* γ, Ω $\|g_{u-w}\|_{L^p(\Omega)}$*)*，$> 0$ 使得

$$\left(\int_\Omega H(x, g_u)^{1+\varepsilon}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \le C\left(\int_\Omega H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu + \left(\int_\Omega H(x, g_w)^\sigma\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right).$$

证明。令 B_r 为一个满足 $B_r \cap \Omega \neq \emptyset$ 且 $0 < r \leq 1$ 的球。则存在两种情况：或者 $B_{3\lambda r} \subset \Omega$，或者 $B_{3\lambda r} \setminus \Omega \neq \emptyset$。若 $B_{3\lambda r} \subset \Omega$，则 $B_{2\lambda r} \Subset \Omega$，并且如同（4.1）中一样，我们有

$$\fint_{B_{r/2}} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \leq C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} H(x, g_u)^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}}, \tag{4.2}$$

其中 $C = C$（数据，$\Omega\|g_u\|_{L^p(\Omega)}$）。

接下来讨论 $B_{3\lambda r} \setminus \Omega \neq \emptyset$ 的情形。设 $x_0 \in B_{3\lambda r} \setminus \Omega$，并考虑满足 $R = 8\lambda r$ 的 $B_R(x_0)$。由于 B_r 的中心包含于 $B_{3\lambda r}(x_0)$，因此有 $B_r \subset B_{4\lambda r}(x_0) = B_{\frac{R}{2}}(x_0)$。设 $B_R = B_R(x_0)$。注意，$B_{3\lambda r} \subset B_R$ 且 $\mu(B_R \cap \Omega) \leq \gamma\mu(B_R)$，其中 $0 < \gamma < 1$。由于在 $X \setminus \Omega$ 中几乎处处有 $u - w = 0$ μ，我们得到

$$\mu(\{x \in B_R : |u(x) - w(x)| > 0\}) \leq \gamma\mu(B_R).$$

根据引理 2.10，存在常数 $C = C(K, q)$，使得

$$\int_{B_{\frac{R}{2}} \cap \Omega} H(x, g_u)\,\mathrm{d}\mu \leq C\left(\int_{B_R \cap \Omega} H\left(x, \frac{u-w}{R}\right)\,\mathrm{d}\mu + \int_{B_R \cap \Omega} H(x, g_w)\,\mathrm{d}\mu\right). \tag{4.3}$$

我们考察 (4.3) 右侧的第一项。由于在 $X \setminus \Omega$ 中几乎处处有 $u - w = 0$ μ，且在 $X \setminus \Omega$ 中几乎处处有 $g_{u-w} = 0$ μ，应用引理 3.4 并令 $u - w$，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B_R)}\int_{B_R \cap \Omega} H\left(x, \frac{u-w}{R}\right)\,\mathrm{d}\mu &= \fint_{B_R} H\left(x, \frac{u-w}{R}\right)\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq C\left(1 + \|g_{u-w}\|^{q-p}_{L^p(B_{2\lambda R})}\mu(B_{2\lambda R})^{\frac{\alpha}{Q} - \frac{q-p}{p}}\right)\left(\fint_{B_{2\lambda R}} H(x, g_{u-w})^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}},\end{aligned}$$

其中 $C = C$（数据 γ）且 $0 < d = d$（数据）< 1。由于 $B_r \subset B_{\frac{R}{2}}(x_0)$，$B_r \cap \Omega \neq \emptyset$ 和 $0 < r \leq 1$，我们有 $B_R \cap \Omega \neq \emptyset$ 和 $2\lambda R = 16\lambda^2 r \leq 16\lambda^2$。这意味着

$$B_{2\lambda R} \subset \Omega^* = \{y \in X : \operatorname{dist}(y, \Omega) < 24\lambda^2\}.$$

由 (2.5) 可得 $\frac{\alpha}{Q} - \frac{q-p}{p} \geq 0$，因此我们得到

$$\frac{1}{\mu(B_R)}\int_{B_R \cap \Omega} H\left(x, \frac{u-w}{R}\right)\,\mathrm{d}\mu \leq C\left(1 + \|g_{u-w}\|^{q-p}_{L^p(\Omega)}\mu(\Omega^*)^{\frac{\alpha}{Q} - \frac{q-p}{p}}\right)\left(\fint_{B_{2\lambda R}} H(x, g_{u-w})^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}}.$$

这意味着

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B_R)}\int_{B_R \cap \Omega} H\left(x, \frac{u-w}{R}\right)\,\mathrm{d}\mu &\leq C\left(\fint_{B_{2\lambda R}} H(x, g_{u-w})^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}} \\ &= C\left(\frac{1}{\mu(B_{2\lambda R})}\int_{B_{2\lambda R} \cap \Omega} H(x, g_{u-w})^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}},\end{aligned}$$

其中 $C = C$(数据 $\gamma, \Omega\,\|g_{u-w}\|_{L^p(\Omega)}$)。因此我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B_R)}\int_{B_R \cap \Omega} H\left(x, \frac{u-w}{R}\right)\,\mathrm{d}\mu &\leq C\left(\frac{1}{\mu(B_{2\lambda R})}\int_{B_{2\lambda R} \cap \Omega} H(x, g_{u-w})^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}} \\ &\leq C\left(\frac{1}{\mu(B_{2\lambda R})}\int_{B_{2\lambda R} \cap \Omega} H(x, g_u + g_w)^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}} \\ &\leq C\left(\frac{1}{\mu(B_{2\lambda R})}\int_{B_{2\lambda R} \cap \Omega} \left(H(x, g_u)^d + H(x, g_w)^d\right)\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}} \\ &\leq C\left(\left(\frac{1}{\mu(B_{2\lambda R})}\int_{B_{2\lambda R} \cap \Omega} H(x, g_u)^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}} + \left(\frac{1}{\mu(B_{2\lambda R})}\int_{B_{2\lambda R} \cap \Omega} H(x, g_w)^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}}\right) \\ &\leq C\left(\left(\frac{1}{\mu(B_{2\lambda R})}\int_{B_{2\lambda R} \cap \Omega} H(x, g_u)^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}} + \frac{1}{\mu(B_{2\lambda R})}\int_{B_{2\lambda R} \cap \Omega} H(x, g_w)\,\mathrm{d}\mu\right),\end{aligned} \tag{4.4}$$

其中 $C = C$(数据 $\gamma, \Omega \|g_{u-w}\|_{L^p(\Omega)}$)。由 (4.3)、(4.4) 和倍增性质 (2.1)，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu(B_{\frac{R}{2}})}\int_{B_{\frac{R}{2}}\cap\Omega} H(x,g_u)\,\mathrm{d}\mu \\
&\quad\le C\left(\frac{1}{\mu(B_R)}\int_{B_R\cap\Omega} H\left(x,\frac{u-w}{R}\right)\,\mathrm{d}\mu+\frac{1}{\mu(B_{2\lambda R})}\int_{B_{2\lambda R}\cap\Omega} H(x,g_w)\,\mathrm{d}\mu\right) \\
&\quad\le C\left(\left(\frac{1}{\mu(B_{2\lambda R})}\int_{B_{2\lambda R}\cap\Omega} H(x,g_u)^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}}+\frac{1}{\mu(B_{2\lambda R})}\int_{B_{2\lambda R}\cap\Omega} H(x,g_w)\,\mathrm{d}\mu\right),
\end{aligned}$$

其中 $C = C$（数据 γ，$\Omega \|g_{u-w}\|_{L^p(\Omega)}$）。

设 $f = H(x,g_u)\chi_\Omega$ 和 $g = H(x,g_w)\chi_\Omega$。由于 $B_{\frac{r}{2}} \subset B_r \subset B_{\frac{R}{2}}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\fint_{B_{\frac{r}{2}}} f\,\mathrm{d}\mu &\le C\fint_{B_{\frac{R}{2}}} f\,\mathrm{d}\mu \le C\left(\left(\fint_{B_{2\lambda R}} f^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}}+\fint_{B_{2\lambda R}} g\,\mathrm{d}\mu\right) \\
&= C\left(\left(\fint_{B_{16\lambda^2 r}} f^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}}+\fint_{B_{16\lambda^2 r}} g\,\mathrm{d}\mu\right),
\end{aligned}$$

当 $B_{3\lambda r}\setminus\Omega \neq \emptyset$ 时成立。若 $B_{3\lambda r} \subset \Omega$，由 (4.2) 可得

$$\fint_{B_{\frac{r}{2}}} f\,\mathrm{d}\mu \le C\left(\fint_{B_{2\lambda r}} f^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}} \le C\left(\left(\fint_{B_{16\lambda^2 r}} f^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}}+\fint_{B_{16\lambda^2 r}} g\,\mathrm{d}\mu\right).$$

由此可得

$$\fint_{B_{\frac{r}{2}}} f\,\mathrm{d}\mu \le C\left(\left(\fint_{B_{16\lambda^2 r}} f^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}}+\fint_{B_{16\lambda^2 r}} g\,\mathrm{d}\mu\right)$$

对每个满足 $0 < r \le 1$ 的球 B_r，都有 X。注意，对于满足 $B_r \cap \Omega = \emptyset$ 的球，这显然成立，因为左侧为零。通过直接的覆盖论证，我们得到

$$\fint_{B_{\frac{r}{2}}} f\,\mathrm{d}\mu \le C\left(\left(\fint_{B_r} f^d\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{d}}+\fint_{B_r} g\,\mathrm{d}\mu\right)$$

对每个满足 $0 < r \le 1$ 的球 B_r，都有 X。这里，$C = C$(数据，Ω γ，$\|g_{u-w}\|_{L^p(\Omega)}$)，且 $0 < d = d$(数据) < 1。请注意，常数 C 取决于底层集合 Ω 和 $\|g_{u-w}\|_{L^p(\Omega)}$；但一旦区域 Ω 和边界函数 w 固定，所得的反向 Hölder 不等式便对满足 $0 < r \le 1$ 的所有球 B_r 和 X 一致。应用引理 4.1，可得一个常数 $C = C$(数据 γ，$\Omega \|g_{u-w}\|_{L^p(\Omega)}$) 和一个指数 $\varepsilon = \varepsilon$(数据，$\Omega$ γ，$\|g_{u-w}\|_{L^p(\Omega)}$) > 0，使得

$$\left(\fint_{B_{\frac{r}{2}}} f^{1+\varepsilon}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \le C\left(\fint_{B_r} f\,\mathrm{d}\mu+\left(\fint_{B_r} g^\sigma\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right),$$

对每个满足 $0 < r \le 1$ 的球 B_r，其中 X。因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\mu(B_{\frac{r}{2}})}\int_{B_{\frac{r}{2}}\cap\Omega} H(x,g_u)^{1+\varepsilon}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \\
&\quad\le C\left(\frac{1}{\mu(B_r)}\int_{B_r\cap\Omega} H(x,g_u)\,\mathrm{d}\mu+\left(\frac{1}{\mu(B_r)}\int_{B_r\cap\Omega} H(x,g_w)^\sigma\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right),
\end{aligned}$$

对每个满足 B_r in X with $0 < r \le 1$ 的球都成立。由于 Ω 有界，我们可以用有限个球$B_{r_j}(x_j)$，$j = 1, 2, \ldots, N$ 覆盖它，其中 $0 < r_j \le 1$。对 $j = 1, \ldots, N$ 求和，可得

$$\left(\int_\Omega H(x,g_u)^{1+\varepsilon}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \le C\left(\int_\Omega H(x,g_u)\,\mathrm{d}\mu+\left(\int_\Omega H(x,g_w)^\sigma\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right),$$

其中 $C = C$(数据 $\gamma, \Omega \|g_{u-w}\|_{L^p(\Omega)}$)。 □

致谢

部分内容基于以下资助所支持的工作：瑞典研究委员会在第一作者和第二作者于2022年研究计划“非线性偏微分方程的几何方面”期间驻留于瑞典Djursholm的Institut Mittag-Leffler时提供了支持。

第二作者是意大利国家高等数学研究所（INdAM）数学分析、概率及其应用国家研究组（GNAMPA）的成员。第二作者获得了GNAMPA-INdAM 2022年项目“非线性现象中的偏微分方程”以及GNAMPA-INdAM 2023年项目“具有非标准增长的椭圆型和抛物型问题的正则性”的部分资助。

第三位作者获得了2022年的博士培养资助，以及来自Väisälä基金的差旅资助。

参考文献

[1] A. Björn 和 J. Björn，《度量空间上的非线性位势理论》，EMS数学专著丛书，17，欧洲数学学会（EMS），苏黎世，2011。[2] J. Björn、P. MacManus 和 N. Shanmugalingam，《度量空间中 p-调和函数的胖集与逐点边界估计》，J. Anal. Math. 85 (2001), 339–369。[3] B. V. Bojarski，《一阶椭圆型微分方程组的广义解及其系数不连续情形》（俄文），Mat. Sb. N.S. 43(85) (1957), 451–503。[4] E. DiBenedetto 和 N.S. Trudinger，《变分积分拟极小值的Harnack不等式》，Ann. Inst. H. Poincaré Anal Non Linéaire 1 1984 295 308 ( ), – M. Colombo 和 G. Mingione，《双相变分积分的有界极小化子》，[5] Arch. Rational. Mech. Anal. 218 (2015), 219–173。[6] M. Colombo 和 G. Mingione，《双相变分问题的正则性》，Arch. Rational. Mech. Anal. 215 (2015), 443–496。[7] C. De Filippis，《低维情形下具有(p, q)-增长的积分泛函之约束极小化子的高阶可积性》，Nonlinear Anal. 170 (2018), 1–20。[8] C. De Filippis 和 G. Mingione，《流形约束非一致椭圆问题》，J. Geom. Anal. 30 (2020), 1661–1723。[9] L. Esposito、F. Leonetti 和 G. Mingione，《具有(p, q)增长的积分泛函之极小化子的高阶可积性》，微分方程杂志 157 (1999), 414–438。[10] Y. Fujishima 和 J. Habermann，《度量测度空间上非二次抛物型拟极小化子的全局高阶可积性》，Adv. Calc. Var. 10 (2017), 267–301。[11] Y. Fujishima 和 J. Habermann，《度量测度空间中抛物型拟极小化子的稳定性》，Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. 29 (2018), 343–376。[12] Y. Fujishima、J. Habermann、J. Kinnunen 和 M. Masson，《抛物型拟极小化子的稳定性》，Potential Anal. 41 (2014), 983–1004。[13] F. W. Gehring，《拟共形映射偏导数的 L^p-可积性》，Acta Math. 130 (1973), 265–277。[14] M. Giaquinta 和 E. Giusti，《变分积分极小值的正则性》，Acta Math. 148 (1982), 31–46。[15] M. Giaquinta 和 E. Giusti，《拟极小值》，Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 1 (1984), 79–107。[16] M. Giaquinta 和 G. Modica，《若干类高阶非线性椭圆系统的正则性结果》，J. Reine Angew. Math. 311/312 (1979), 145–169。[17] E. Giusti，《变分法的直接方法》，World Scientific Publishing Co., River Edge, NJ, 2003。[18] S. Granlund，《极值函数梯度的 L^p-估计》，Math. Scand. 50 (1982), 66–72。[19] J. Habermann，《非二次向量值抛物型拟极小化子的全局梯度估计》，Nonlinear Anal. 114 (2015), 42–73。[20] J. Habermann，《度量测度空间上向量值抛物型拟极小化子的高阶可积性》，Ark. Mat. 54 (2016), 85–123。[21] J. Heinonen、P. Koskela、N. Shanmugalingam 和 J. Tyson，《度量测度空间上的Sobolev空间：基于上梯度的方法》，New Mathematical Monographs, 27, Cambridge University Press, Cambridge, 2015。[22] S. Keith 和 X. Zhong，《庞加莱不等式是一个开端条件》，Ann. of Math. (2) 167 (2008), 575–599。[23] T. Kilpeläinen 和 P. Koskela，《偏微分方程解的梯度的全局可积性》，Nonlinear Anal. 23 (1994), 899–909。[24] J. Kinnunen、N. Marola 和 O. Martio，《拟极小化子的Harnack原理》，Ricerche Mat. 56 (2007), 73–88。[25] J. Kinnunen 和 O. Martio，《拟极小化子的位势理论》，芬兰科学院数学年刊 28 (2003), 459–490。[26] J. Kinnunen 和 N. Shanmugalingam，《度量空间上拟极小化子的正则性》，Manuscripta Math. 105 (2001), 401–423。

[27] O. *Zatorska-Goldstein*，具有变化的 p 的度量空间上 p*-Dirichlet* 积分拟极小化子的稳定性，伦敦数学会杂志 *(2) 77 (2008), 771–788.* [28] *P. Marcellini*，具有 p, q-增长条件的椭圆方程解的正则性与存在性，微分方程杂志 *90 (1991), 1–30.* [29] *P. Marcellini*，具有一般增长条件的椭圆方程正则性，微分方程杂志 *105 (1993), 296–333.* [30] *P. Marcellini*，具有非标准增长条件的变分法积分极小化子的正则性，*Arch. Rational Mech. Anal. 105 (1989), 267–284.* [31] *M. Masson*、*M. Miranda Jr.*、*F. Paronetto* 和 *M. Parviainen*，度量空间上抛物型拟极小化子的局部高阶可积性，《数学研究》*62 (2013), 279–305.* [32] *M. Masson* 和 *M. Parviainen*，度量测度空间上抛物型拟极小化子的全局高阶可积性，*J. Anal. Math. 126 (2015), 307–339.* [33] *N.G. Meyers*，二阶椭圆散度型方程解的梯度的一个 L^p-估计，比萨高等师范学校科学类年刊 *(3) 17 (1963), 189–206.* [34] *N.G. Meyers* 和 *A. Elcrat*，非线性椭圆系统解的正则性及拟正则函数的一些结果，杜克数学杂志 *42 (1975), 121–136.* [35] *G. Mingione*，极小值的正则性：邀您走进变分法的暗面，*Appl. Math. 51 (2006), 355–425.*[36] *G. Mingione* 和 *V. R˘adulescu*，非标准增长和非一致椭圆性问题的最新进展，数学分析与应用杂志 *501 (2021)* 第 *125197* 号论文，*41* 页。 [37] *A. Nastasi* 和 *C. Pacchiano Camacho*，*(p, q)*-拟极小化子的高阶可积性与稳定性，微分方程杂志 *342 (2023), 121–149.* [38] *N. Shanmugalingam*，*Newton* 空间：将 *Sobolev*空间扩展到度量测度空间，*Rev. Mat. Iberoameri- cana 16 (2000), 243–279.* [39] *A. Zatorska-Goldstein*，非线性次椭圆方程的非常弱解，芬兰科学院数学年刊 *30 (2005), 407–436.*

J.K.：数学系，阿尔托大学，邮政信箱 11100，FI-00076 阿尔托，芬兰电子邮箱：juha.k.kinnunen@aalto.fi A.N.：工程系，巴勒莫大学，科学大道，90128，巴勒莫，意大利电子邮箱：antonella.nastasi@unipa.it C.P.C.：数学与统计系，卡尔加里大学，西北大学大道 2500 号，卡尔加里，AB T2X 3B5，加拿大电子邮箱：cintia.pacchiano@ucalgary.ca