arXiv:2304.14868v1 [math.CO] 28 Apr 2023

通过超弧重定向增强有向超图连通度

Moritz Mühlenthaler、Benjamin Peyrille、Zoltán Szigeti

2023年5月1日

摘要

Nash-Williams 定向定理指出，无向图存在一个k-弧连通定向，当且仅当它是 $2k$-边连通的。最近，Ito 等人 [8]证明，任何 $2k$-边连通无向图的定向，都可以通过每次重新定向一条弧，转化为 k-弧连通定向，且在每一步中弧连通度都不会降低，从而给出了 Nash-Williams 定理的算法化证明。我们将他们的结果推广到超图，从而为 Frank 等人 [6] 最初给出的、关于存在 k-超弧连通定向的超图的刻画提供了算法化证明。我们证明，任何 (k,k)-划分连通无向超图的定向，都可以通过每次重新定向一条超弧，转化为 k-超弧连通定向，且在每一步中超弧连通度都不会降低。此外，我们还提供了一种简单的组合算法，可在多项式时间内计算出这种转换。

1 引言

如果每一对有序顶点之间都存在至少 k 条边不相交（分别为弧不相交）的路径，则称无向图（分别为有向图）是 k-**边连通** （分别为 k-弧连通）的。对于任意无向图，我们都可以通过将每条边以两种可能方式之一定向，得到该图的一个**定向** 。在一项经典定理中，Nash-Williams [11] 证明，无向图存在一个 k-弧连通定向，当且仅当它是 $2k$-边连通的。Frank [4]引入了无向图的重新定向，并证明：给定无向图的任意两个 k-弧连通定向，都可以通过对有向圈和有向路径重新定向相互转化。最近，Ito 等人 [8] 证明，任何$2k$-边连通无向图的定向，都可以通过每一步改变一条弧的定向，转化为一个 k-弧连通定向。此外，每一步得到的定向的弧连通度至少与前一步得到的定向相同。他们的结果为 Nash-Williams 定理中非平凡方向的证明提供了一种算法化证明。事实上，Ito 等人证明，这种长度为 kn^3 的转换可以在多项式时间内计算，其中 n 是输入图的顶点数。

我们提出了 Ito 等人结果在超图上的一种推广。若无向超图是 (k,k)-划分连通的，则对于顶点集的任意划分 $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_t\}$，至少有 kt 条超边与 $\mathcal{P}$ 中的至少两个部分相交（其他定义见第 2 节）。Frank 等人 [6] 推广了 Nash-Williams 定理，证明无向超图存在 k-超弧连通定向，当且仅当它是 (k,k)-划分连通的。我们证明，任意无向 (k,k)-划分连通超图的定向，都可以通过每次重新定向一条超弧转化为 k-超弧连通定向，且每一步都不会降低超弧连通度。此外，这种

长度至多为 kn^3 的变换可以在关于输入超图规模的多项式时间内计算出来。这为 Frank 等人 [6] 对存在 k- 超弧连通定向的超图所作的刻画提供了一种算法化证明。据我们所知，我们的结果是首个用于计算超图的 k-超弧连通定向的高效算法（如果这种定向存在的话）。

我们的方法与 Ito 等人 [8] 的方法类似：从任意一个（k,k）-划分连通输入超图的定向出发，沿着精心选择的超路径反复重新定向超弧，直到得到一个 k-超弧连通定向。我们的方法推广了 Ito 等人 [8]，的工作，为他们关于图的结果提供了更简单的证明，并明确给出了一种算法。

2 定义

设 $\mathcal{H} := (V, \mathcal{E})$ 为一个超图，其中 $\mathcal{E}$ 是 V 的子集构成的多重集。$\mathcal{E}$ 的元素称为超边。顶点集合 X 的度 $d_{\mathcal{H}}(X)$，是满足 Z 同时与 X 和 $V - X$ 相交的超边 Z 的数量。若对任意非空真顶点子集 X，都有 $d_{\mathcal{H}}(X) \geq k$，则称超图 $\mathcal{H}$ 为 k-超边连通。$\mathcal{H}$ 的超边连通度记为 $\lambda(\mathcal{H})$，它是使 $\mathcal{H}$ 为 k-超边连通的最大整数 k。

我们可以将超边 $X \in \mathcal{E}$ 定向为朝向 $v \in X$，从而得到超弧 $(X - v, v)$，其中 $X - v$ 是该超弧的尾顶点集合，而 v 是该超弧的头顶点。通过对 $\mathcal{H}$ 的每条边进行定向，我们得到 $\mathcal{H}$ 的一个定向 $\vec{\mathcal{H}} = (V, \mathcal{A})$，它是一个有向超图。我们对有向超图的定义与 Gallo 等人在 [7] 中给出的 B-超图定义一致。设 $X \subsetneq V$，且 $X \neq \emptyset$。顶点 X 的入度 $d^-_{\vec{\mathcal{H}}}(X)$ 是 $\vec{\mathcal{H}}$ 中满足以下条件的超弧 (Y, v) 的数量：头顶点 v 属于 X，且至少有一个尾顶点不包含在 X 中，即 $Y - X \neq \emptyset$。顶点 X 的出度 $d^+_{\vec{\mathcal{H}}}(X)$ 是 $\vec{\mathcal{H}}$ 中满足 $v \notin X$ 且 $X \cap Y \neq \emptyset$ 的超弧 (Y, v) 的数量。对于 $d^-_{\vec{\mathcal{H}}}(\{v\})$，我们使用 $d^-_{\vec{\mathcal{H}}}(v)$；对于 $d^+_{\vec{\mathcal{H}}}(\{v\})$，我们使用 $d^+_{\vec{\mathcal{H}}}(v)$。注意，$d^-_{\vec{\mathcal{H}}}(X) = d^+_{\vec{\mathcal{H}}}(V - X)$。如果对于顶点的任意非空真子集 X，都有 $d^+_{\vec{\mathcal{H}}}(X) \geq k.$，则称 $\vec{\mathcal{H}}$ 是 k-超弧连通的。$\vec{\mathcal{H}}$ 的超弧连通度记为 $\lambda(\vec{\mathcal{H}})$，其定义为满足 $\mathcal{H}$ 是 k-超弧连通的最大整数 k。当上下文明确所考虑的超图和定向时，我们将省略度函数中 $\mathcal{H}$ 和 $_{\rightarrow}\mathcal{H}$ 的说明。

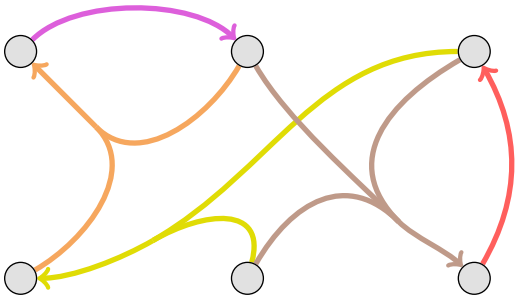

图 1：包含 5 条超弧的有向超图

对于 $s, t \in V$， V的一个子集 X，若包含 s但不包含 t，则称为一个 (s,t)-分隔集。设 $\mathcal{P}$为 V的一个划分。我们用 $e_{\mathcal{H}}(\mathcal{P})$ 表示 $\mathcal{H}$ 中与 $\mathcal{P}$至少两个成员相交的超边数。如果对于 V 的任意划分 $\mathcal{P}$，都有 $e_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}) \geq k|\mathcal{P}|$，则称超图 $\mathcal{H}$ 为 (k,k)-划分连通 。将 (k,k)-划分连通性应用于任意大小为 2 的划分，可知 (k,k)-划分连通性蕴含 $2k$-超边连通性。反之则不成立：

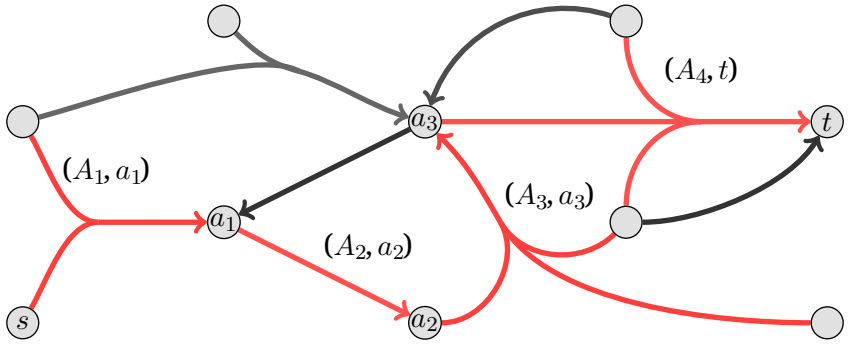

图 2：红色的 (s,t)-超路径

考虑顶点集为 $\{a,b,c\}$ 且含有两条相同超边 $\{a,b,c\}$ 的超图。该图是 2-超边连通的，但不是 (1,1)-划分连通的。

设 $P=(A_1,a_1),(A_2,a_2)\ldots,(A_\ell,a_\ell)$ 是 $\vec{\mathcal{H}}$ 的一个有限超弧序列。那么，如果 $s\in A_1$, $t=a_\ell$, $a_i\in A_{i+1}$ for $i\in 1,\ldots,\ell-1$，且顶点 a_i 互不相同，则 P 是一条 (s,t)-超路径。图 2 展示了一条 (s,t)-超路径的例子。如果 $s=t$，则称这条 (s,t)-超路径为有向超圈。(s,t)-超路径 P 的修剪是一条有向 (s,t)- 路径 P'，其顶点顺序为 $s,a_1,a_2,\ldots,a_{\ell-1},t$。我们将 $\vec{\mathcal{H}}$ 中的一条超弧 (X,v) 重定向至 $u\in X$, $u\neq v$，即用超弧 $(X-u+v,u)$ 替换 (X,v)。

我们称函数 f 为次模 函数，若对于任意两个顶点集 X,Y，都有 $f(X)+f(Y)\geq f(X\cap Y)+f(X\cup Y)$。请注意，本文给出的每个度函数都是次模的（见 [5]）。若两个顶点集 X,Y 满足 $X\cap Y\neq\emptyset$, $X\cup Y\neq V$ 和 $X-Y\neq\emptyset\neq Y-X$，则称它们交叉。

3 先前工作

以下关于无向图定向的基本结果归功于 Nash-Williams [11]。Nash-Williams 的原始证明并非算法性的，但此后已有许多不同的证明，其中包括算法性证明 [10]。

定理 1. *[11]* 无向图 G 存在一个 k-边连通定向，当且仅当 G是 $2k$-边连通的。

此后，无向图的定向得到了广泛研究 [1, 12, 3]。

在他的 开创性著作中， [4], Frank 研究了对 k 弧连通有向图进行重新定向的问题 s.

定理 2. *[4,* 定理 *1]* 如果 $\vec{G}$ 和 $\vec{G'}$ 是无向图 G 的两个 k 弧连通定向，那么存在一个序列 $\vec{G}=\vec{G}_0$, $\vec{G}_1$、.....、$\vec{G}_\ell=\vec{G'}$，其中各项都是 $\vec{G}$ 的 k 弧连通定向，并且每个 G_i 都可由 G_{i-1} 通过反转一个有向圈或有向路径得到。

在 [8], Ito 等人注意到，给定无向图 G的两个 k-弧连通定向 $\vec{G}$ 和 $\vec{G'}$，并不总能通过逐条重新定向弧，从 $\vec{G}$ 得到 $\vec{G'}$，同时保证每个中间定向都是 k-弧连通的。例如，考虑长度为 3 的圈的两个 1-弧连通定向。然而，对于一个 $(2k+2)$-边连通无向图，他们利用定理 2 和以下结果作为子程序，证明了这种重新定向是可能的。他们还提到，该结果提供了定理 1 的一种新的算法化证明。

定理 3. *[8, 定理 1.1]* 设 $G=(V,E)$ 是一个 $2k$-边连通图，$\vec{G}$ 是 G的一个定向$\vec{}$。那么存在一个 G 的定向序列 $G=G_0,G_1,G_2,\ldots,G_\ell$，使得$\vec{}$对于 $1\le i\le \ell$，定向 G_i 可由 G_{i-1} 通过对 G_{i-1}的一条弧重新定向得到，$\lambda(\vec{G}_{i-1})\le\lambda(\vec{G}_i)$，且 $\lambda(\vec{G}_\ell)=k$。此外，这样一个满足 $\ell\le(k-\lambda(\vec{G}))|V|^3$ 的序列可以在关于 G规模的多项式时间内计算得出。

利用定理 2 和定理 3，可得到以下由 Ito 等人 [8] 给出的结果。

定理 4。 *[8, 定理 1。2]* 如果 $\vec{G}$ 和 $\vec{G}'$ 是一个 $(2k+2)$-边连通图 G 的两个 k-弧连通定向，那么存在一个序列 $\vec{G}=\vec{G}_0$，$\vec{G}_1$，.....，$\vec{G}_\ell=\vec{G}'$ 其中的每个定向都是 k-弧连通的$\vec{}$，且 G 中的每个 G_i 都可以通过重新定向单条弧而由 G_{i-1} 得到。

本文研究超图的重新定向。以下关于存在 k-超弧连通定向的超图的刻画归功于 Frank、Király 和 Király [6]。

定理 5。 *[6, 推论 3。5]* 超图 $\mathcal{H}$ 存在一个 k-超弧连通定向，当且仅当 $\mathcal{H}$ 是 (k,k)-划分连通的。

值得注意的是，定理 5 不仅是 Nash-Williams 定理在超图中的对应形式，也是对它的推广。

4 新结果

我们的目标是将定理 3 推广到超图，为定理 5 提供组合算法化证明，并给出一种通过重新定向超弧来增强有向超图连通性的显式算法。本文的主要结果如下定理所述。

定理 6. 设 $\mathcal{H}=(V,\mathcal{E})$ 是一个 (k,k)-划分连通无向超图，且 $\vec{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个$\vec{}$定向。那么，存在 $\mathcal{H}$ 的一个定向序列 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_\ell$，使得对于 $1\le i\le\ell$，定向 $\mathcal{H}_i$ 可由 $\mathcal{H}_{i-1}$ 通过对 $\vec{\mathcal{H}}_{i-1}$ 的单条超弧重新定向得到，$\lambda(\vec{\mathcal{H}}_{i-1})\le\lambda(\vec{\mathcal{H}}_i)$，且 $\lambda(\vec{\mathcal{H}}_\ell)=k$。此外，这样一个满足 $\ell\le(k-\lambda(\vec{\mathcal{H}}))|V|^3$ 的序列可以在关于 $\mathcal{H}$ 大小的多项式时间内计算得到。

定理 6 给出了定理 5 中充分性的证明。注意到，$\vec{}$定理 5 中的必要性是显而易见的。事实上，设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{H}$的一个 k-超弧连通定向。那么，对于 V的任意划分 $\mathcal{P}$，我们有 $e_{\mathcal{H}}(\mathcal{P})=\sum_{X\in\mathcal{P}}d^-_{\vec{\mathcal{H}}}(X)\ge k|\mathcal{P}|$，因此 $\mathcal{H}$ 是 (k,k)-划分连通的。

定理 6 是通过将定理 7 应用 $k-\lambda(\vec{\mathcal{H}})$ 次得到的。

定理 7。设 $\mathcal{H}=(V,\mathcal{E})$ 是一个 $(k+1,k+1)$-划分连通超图，且 $\vec{\mathcal{H}}$是 $\mathcal{H}$的一个 k-$\vec{}$超弧连通定向。则存在一个序列 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\ldots,\mathcal{H}_\ell$，其中包含 $\mathcal{H}$ 的$\vec{}$个定向，使得对于 $1\le i\le\ell$，定向 $\mathcal{H}_i$ 可由定向 $\mathcal{H}_{i-1}$ 通过重新定向 $\vec{\mathcal{H}}_{i-1}$，$\lambda(\vec{\mathcal{H}}_{i-1})\le\lambda(\vec{\mathcal{H}}_i)$ 的单个超弧得到，并且 $\lambda(\vec{\mathcal{H}}_\ell)=k+1$。此外，这样的包含 $\ell\le|V|^3$ 的序列可以在关于 $\mathcal{H}$大小的多项式时间内计算出来。

定理 7 的证明可见于第 5 至 9 节和第 11 节。

我们还可以将定理 2 推广到超图，如下所示。

定理 8. 如果 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$ 是无向超图的两个 k-超弧连通定向$\mathcal{H}$，那么存在一个序列 $\vec{\mathcal{H}}=\vec{\mathcal{H}}_0$，$\vec{\mathcal{H}}_1$，...，$\vec{\mathcal{H}}_\ell=\vec{\mathcal{H}}'$，其中每个都是 $\mathcal{H}$$\vec{}$的 k-超弧连通定向，并且每个 $\mathcal{H}_i$ 都可由 $\mathcal{H}_{i-1}$ 通过反转一个有向超圈或超路径得到。

定理 8 的证明与 Frank 在 [3] 对定理 2 的证明类似。我们简要说明，为了将该证明应用于超图，需要做哪些修改。Frank 首先考虑所有 G顶点均满足 $d^-_{\vec{G}}(v) = d^-_{\vec{G}'}(v)$ 的情形。他将 $\vec{G}$ 中在 $\vec{G}$和 $\vec{G}'$中的定向不同的弧称为红色弧。注意，在由红色弧导出的有向图 D^r 中，每个顶点的入度都等于出度。随后，Frank 将 D^r 分解为有向圈，并分别重新定向。对于超图，我们将 $\mathcal{H}$ 中在 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$中的定向不同的超边称为红色超边。我们在 $\mathcal{H}$的顶点上定义有向图 D^r 。对于每条红色超边X，我们添加从 uv 到 D^r 的弧，其中 u和 v 分别是 $\vec{\mathcal{H}}$的对应超弧 $(X-v,v)$ 与 $\vec{\mathcal{H}}'$的对应超弧 $(X-u,u)$ 的头顶点。接着，我们将 D^r 分解为有向圈，并重新定向相应的有向超圈。证明的其余部分完全相同。

最后，我们将定理 4 推广到超图。

定理 9. 若 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$ 是划分连通超图 $\mathcal{H}$ $(k+1,k+1)$ 的两个 k-超弧连通定向，则存在一个序列 $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_0, \vec{\mathcal{H}}_1, \ldots, \vec{\mathcal{H}}_\ell = \vec{\mathcal{H}}'$，其中包含 $\mathcal{H}$ 的 k-超弧-$\vec{}$ $\vec{}$连通定向，并且每个 $\mathcal{H}_i$ 都可由 $\mathcal{H}_{i-1}$ 通过重新定向一条超弧得到。

正如定理 4 是由定理 2 和定理 3 在 [8] 中推得的那样，定理 9 是通过使用定理 6 和定理 8 得到的。

5 紧集合与危险集合

在本文余下部分，我们固定一个 $(k+1,k+1)$-划分连通超图 $\mathcal{H}=(V,\mathcal{E})$。为避免核查两个集合 X、$Y \subseteq V$ 是否交叉时需要验证 $X \cup Y = V$，我们在以下定义中固定一个任意顶点 $r \in V$。为证明定理 7，我们遵循 Ito 等人 [8] 的论文，并针对 $\mathcal{H}$ 的一个任意 k-超弧连通 $\vec{}$定向 $\mathcal{H}$ 引入以下集合；具体含义将根据上下文明确。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_- &= \{X \subseteq V - r : d^-(X) = k\} \cup \{V\} \\
\mathcal{T}_+ &= \{X \subseteq V - r : d^+(X) = k\} \cup \{V\} \\
\mathcal{M}_- &= \text{ inclusion-wise minimal members of } \mathcal{T}_- \\
\mathcal{M}_+ &= \text{ inclusion-wise minimal members of } \mathcal{T}_+ \\
\mathcal{M} &= \text{ inclusion-wise minimal members of } \mathcal{M}_- \cup \mathcal{M}_+ \\
\mathcal{D}_- &= \{X \subseteq V - r : d^-(X) = k+1\} \\
\mathcal{D}_+ &= \{X \subseteq V - r : d^+(X) = k+1\} \\
\mathcal{R} &= \{R \subseteq V - r : R \text{ is inclusion wise minimal such that} \\
&\qquad\qquad \text{either } R \in \mathcal{T}_- \text{ and } R \text{ contains a member of } \mathcal{T}_+ \\
&\qquad\qquad \text{or } R \in \mathcal{T}_+ \text{ and } R \text{ contains a member of } \mathcal{T}_-\}
\end{aligned}
$$

我们简要介绍这些集合的一些性质，这些性质是由度函数的次模性推得的。

断言 1. 设 X, Y 是 V 中两个交叉的集合。
(a) 若 $X, Y \in \mathcal{T}_-$，则 $X \cup Y$且 $X \cap Y \in \mathcal{T}_-$。*(b)* 若 $X, Y \in \mathcal{T}_+$，则 $X \cup Y$且 $X \cap Y \in \mathcal{T}_+$。*(c)* 若 $X \in \mathcal{T}_-$且 $Y \in \mathcal{T}_+$，则 $X - Y \in \mathcal{T}_-$且 $Y - X \in \mathcal{T}_+$。*(d)* 若 $X \in \mathcal{M}_-$且 $Y \in \mathcal{T}_+ \cup \mathcal{D}_+$，则 $Y \in \mathcal{D}_+$且 $Y - X \in \mathcal{T}_+$。*(e)* 若 $X \in \mathcal{T}_- \cup \mathcal{D}_-$且 $Y \in \mathcal{M}_+$，则 $X \in \mathcal{D}_-$且 $X - Y \in \mathcal{T}_-$。

证明。(a) 根据 X、$Y \in \mathcal{T}_-$，d^-、$X \cap Y \neq \emptyset$、$X \cup Y \neq V$ 的次模性，以及 $\lambda(\vec{\mathcal{H}}) = k$，我们有

$$k + k = d^-(X) + d^-(Y) \geq d^-(X \cup Y) + d^-(X \cap Y) \geq k + k.$$

因此处处取等号，所以我们有 $X \cup Y, X \cap Y \in \mathcal{T}_-$。

(b) 将 d^- 替换为 d^+，即可按照 (a) 的相同方式证明。

(c) 根据 $X \in \mathcal{T}_-, Y \in \mathcal{T}_+, d^-(V - Y) = d^+(Y)$、$d^-, X - Y \neq \emptyset \neq Y - X$ 的次模性以及 $\lambda(\vec{\mathcal{H}}) = k$，我们有

$$\begin{aligned} k + k &= d^-(X) + d^-(V - Y) \\ &\geq d^-(X \cap (V - Y)) + d^-(X \cup (V - Y)) \\ &= d^-(X - Y) + d^+(Y - X) \\ &\geq k + k. \end{aligned}$$

因此处处取等号，所以我们有 $X - Y \in \mathcal{T}_-$ 和 $Y - X \in \mathcal{T}_+$。

(d) 根据 $X \in \mathcal{T}_-, Y \in \mathcal{T}_+, X \cap Y \neq \emptyset, X \cup Y \neq V$、以及 λ 的次模性，我们得到

$$\begin{aligned} k + (k + 1) &\geq d^-(X) + d^+(Y) \\ &= d^-(X) + d^-(V - Y) \\ &\geq d^-(X - Y) + d^-(V - (Y - X)) \\ &= d^-(X - Y) + d^+(Y - X) \\ &\geq (k + 1) + k. \end{aligned}$$

由此可得 $d^+(Y) = k + 1$，且 $d^+(Y - X) = k$。

(e) 可用与 (d) 类似的方法证明。 ■

根据断言 1，$\mathcal{M}_-$、$\mathcal{M}_+$ 和 $\mathcal{M}$ 中的每个族都是 V 的子划分。

6 主算法

我们沿用 [8] 提出的框架，并将其调整以适用于超图。

对于 $S \in \mathcal{M}_-$，顶点 $s \in S$ 在 S 中是一个 **安全源点**，如果

(a) 对于每个 $s \in X \in \mathcal{T}_+$，我们都有 $S \subsetneq X$,；(b) 对于每个满足 $S - X \neq \emptyset$ 的 $s \in X \in \mathcal{D}_+$，都存在满足 $s \notin Y \subsetneq X$ 的 $Y \in \mathcal{T}_+$。

对于 $T \in \mathcal{M}_+$，顶点 $t \in T$ 在 T 中是一个 **安全汇点**，如果

(a) 对于每个 $t \in X \in \mathcal{T}_-$，我们都有 $T \subsetneq X$,；(b) 对于每个满足 $T - X \neq \emptyset$ 的 $t \in X \in \mathcal{D}_-$，都存在满足 $t \notin Y \subsetneq X$ 的 $Y \in \mathcal{T}_-$。

设 P 是 $\vec{\mathcal{H}}$ 中一条有向 (s,t)-超路径，且 R 是 $\mathcal{R}$ 中的一个集合。若满足以下条件，则称 P 在 R 中是 **可容许的**：

(a) s 是集合 $S \in \mathcal{M}_-$ 中的一个安全源点，t 是集合 $T \in \mathcal{M}_+$ 中的一个安全汇点，S 和 T 包含于 R 中；(b) 将 P 中的所有超弧逐一重新定向，若 $R \in \mathcal{R} \cap \mathcal{T}_+$ 则从起点到终点，若 $R \in \mathcal{R} \cap \mathcal{T}_-$ 则从终点到起点，当前有向超图的超弧连通度绝不会降低；(c) P 的所有超弧都重新定向后，新定向的 $\mathcal{M}'$ 集合中的元素数量要么少于 $\mathcal{M}$，要么与 $\mathcal{M}$ 相同但覆盖的顶点多于 $\mathcal{M}$。

算法 1 旨在从给定的 k-超弧连通定向 $\mathcal{H}$ （属于 $\mathcal{H}$）出发，计算 $\mathcal{H}$ 的一个 $(k+1)$-超弧连通定向。算法首先任意选取 $\mathcal{H}$ 的一个顶点 r ，以便我们能够根据 $\mathcal{H}$ 和 r 计算集合 $\mathcal{R}$、$\mathcal{M}_-$、$\mathcal{M}_+$ 。如果 $\mathcal{M}_- = \mathcal{M}_+ = \{V\}$ ，那么对所有 $X \subseteq V - r$，都有 $d^-_{\vec{\mathcal{H}}}(X) \geq k+1$ 且 $d^+_{\vec{\mathcal{H}}}(X) \geq k+1$，这意味着我们已经得到一个 $(k+1)$-超弧连通定向，算法到此结束。否则，我们在 $\mathcal{R}$ 中任意选取一个集合 R ，并在 R 中找出一条可容许的 (s,t)-超路径 P 。根据 R 是否属于 $\mathcal{T}_+$ 或 $\mathcal{T}_-$，我们逐一重新定向 P 的每条超弧：要么从起点到 $\vec{}$ 终点，要么从终点到起点，使得每一步重新定向都不会降低 $\mathcal{H}$ 的超弧连通度。我们用新的定向重复这一过程，直到 $|\mathcal{M}| = \{V\}$。由于 $\mathcal{M}$ 是 V 的一个子划分，且根据可容许超路径的定义，情形 $|\mathcal{M}'| = |\mathcal{M}|$ 至多发生 $|V|$ 次，之后才会出现 $|\mathcal{M}'| < |\mathcal{M}|$，而后者本身至多发生 $|V|$ 次。因此，由于一条超路径中的任意两条超弧都不具有相同的头顶点，我们至多重新定向$|V|^3$ 条超弧，故算法必然终止。要证明定理 7，只需证明可容许路径的存在性，并证明逐一重新定向其中的超弧不会降低超弧连通度。

算法 1： 超图连通性增强算法

输入： A k-超弧连通定向 $\vec{\mathcal{H}}$ 一个（$k+1, k+1$）-划分连通超图 $\mathcal{H}$。

输出： A（$k+1$）-超弧连通定向 $\vec{\mathcal{H}'}$ 的 $\mathcal{H}$。

从 $\mathcal{H}$ 中任取一个顶点 r ；
令 $\mathcal{H}' := \vec{\mathcal{H}}$;
计算 $\mathcal{R}$、$\mathcal{M}_-$、$\mathcal{M}_+$ 的集合 $\vec{\mathcal{H}'}$;
如果 $\mathcal{M}_- = \mathcal{M}_+ = \{V\}$ **，则**
    返回 $\vec{\mathcal{H}'}$;
取集合 $R \in \mathcal{R}$;
在 R 中，使用 查找一个可容许的 (s,t)-超路径 $P = (A_1, a_1), (A_2, a_2) \ldots, (A_\ell, a_\ell)$ 。
  当 $R \in \mathcal{T}_-$ 时使用算法 2，当 $R \in \mathcal{T}_+$ 时使用算法 3;
如果 $R \in \mathcal{T}_-$ **，则**
    对于 $i = \ell, \ell-1, \cdots, 2$ **do**
        将 (A_i, a_i) 重新定向至 a_{i-1};
    将 (A_1, a_1) 重新定向至 s;
否则
    将 (A_1, a_1) 重新定向至 s;
    对于 $i = 2, 3, \ldots, \ell$ **do**
        将 (A_i, a_i) 朝 a_{i-1} 重新定向;
转至第3行

7 安全源点和安全汇点的存在性

我们首先证明，任意 $S \in \mathcal{M}_-$ 都包含一个安全源点，任意 $T \in \mathcal{M}_+$ 都包含一个安全汇点。请注意，这两个证明并不相同；由于有向超图具有非对称性，证明安全源点存在的方法不能用于证明安全汇点存在，反之亦然。我们先证明安全源点的存在性，其证明思路受到 Lovász[9] 的一个证明启发。

引理 10. 对于 $S \in \mathcal{M}_-$， S中存在一个安全源点 s 。

证明。Le t $S \in \mathcal{M}_-$。如果 $S = V$ ，那么 $s = r$ 是安全源点，因此假设 $S \neq V$。Le t

$\mathcal{X}=\{X_1,X_2,\cdots,X_\ell\}$ 是一个顶点集族，使得 $X_i\subseteq S$、$X_i\in\mathcal{T}_+\cup\mathcal{D}_+$ 和 $\mathcal{X}$ 尽可能多地覆盖 S 的顶点，并在此条件下使 ℓ 最小。

断言 10.1. 族 $\mathcal{X}$ 并未覆盖 S的所有顶点。

证明。反设 $\bigcup_{X\in\mathcal{X}}X=S$。由于 $S\in\mathcal{T}_-$、$S\neq V$和 $\mathcal{H}$ 是$(k+1,k+1)$-划分连通的，因此我们有 $d^+(S)\geq 2(k+1)-d^-(S)=k+2$。于是，$S\notin\mathcal{T}_+\cup\mathcal{D}_+$且 $\ell\geq 2$。我们还有

$$2\leq d^+(S)-d^-(S)=d^-(\bar{S})-d^+(\bar{S}). \tag{1}$$

对于每个 $1\leq i\leq\ell$，令 $Y_i=X_i-\bigcup_{i\neq j}X_j$。根据 ℓ的极小性，我们有 $Y_i\neq\emptyset$。令$X_0=Y_0=S\neq\emptyset$。我们证明

$$\sum_{i=0}^{\ell}d^-(Y_i)\leq\sum_{i=0}^{\ell}d^+(X_i). \tag{2}$$

事实上，由于 $\{Y_1,\ldots,Y_\ell\}$ 是 V的子划分，每条超弧对左端的贡献至多为 1。此外，如果一条超弧(Z,v)对左端的贡献为 1，那么对于某个 $i\in\{0,1,\ldots,\ell\}$，$v\in Y_i^-$，并且存在某个尾部 $u\in Z$使得 $u\in Y_i=\bigcup_{j\neq i}X_j$。因此，对于某个 $j\neq i$，有$u\in X_j$，所以(Z,v)对右端的贡献至少为 1，结论(2)得证。

此外，对于 $1\leq i\leq\ell$，由 $\ell\geq 2$, $X_i\in\mathcal{T}_+\cup\mathcal{D}_+$, $\lambda(\vec{\mathcal{H}})=k$，以及 $\emptyset\neq Y_i\subsetneq S\in\mathcal{M}_-,$，我们有

$$d^+(X_i)\leq k+1\leq d^-(Y_i)。 \tag{3}$$

由方程 (1)–(3)，我们得到

$$2\leq d^-(\bar{S})-d^+(\bar{S})=d^-(Y_0)-d^+(X_0)\leq\sum_{i=1}^{\ell}(d^+(X_i)-d^-(Y_i))\leq 0,$$

这与结论矛盾，从而证明断言 10.1。 □

由断言 10.1，存在一个顶点 $s\in S-\bigcup_{i=1}^{\ell}X_i$。我们旨在证明 s 是 S 中的安全源点。假设 $s\in X\in\mathcal{T}_+\cup\mathcal{D}_+$。根据 s 和 X 的定义，我们有 $X-S\neq\emptyset$。现在假设 $S-X\neq\emptyset$。由断言 1(d)，我们有 $d^+(X)=k+1$，以及 $d^+(X-S)=k$。于是，对于每个 $s\in X\in\mathcal{T}_+$，我们有 $S\subsetneq X,$；对于每个满足 $S-X\neq\emptyset$ 的 $s\in X\in\mathcal{D}_+$，我们有$X-S\in\mathcal{T}_+$。因此，s 是 S 中的安全源点。■

接下来，我们证明一个安全汇点的存在性，其证明与 [8]中的证明类似。

引理 11。对于 $T\in\mathcal{M}_+$，在 T 中存在一个安全汇点 t。

证明。令 $T\in\mathcal{M}_+$。若 $T=V$，则 $t=r$ 是安全汇点，因此我们考虑 $T\neq V$。令 $\mathcal{Y}=\{Y_1,\ldots,Y_\alpha\}$ 为属于 $\mathcal{T}_-$ 且包含于 T 的按包含关系极大的顶点集。根据断言 1，若 $\mathcal{Y}$ 中的两个成员交叉，则它们的并集将属于 $\mathcal{T}_-$，因此族 $\mathcal{Y}$ 是一个子划分。

令 $\mathcal{Z}=\{Z_1,\ldots,Z_\beta\}$ 为 $\mathcal{D}_-$ 中包含于 $T-\bigcup_{Y\in\mathcal{Y}}Y$ 的按包含关系极大的顶点集。我们证明 $\mathcal{Z}$ 是一个子划分；反设并非如此。于是存在互不相同的指标 $i\neq j$，使得 $Z_i\cap Z_j\neq\emptyset$。若 $d^-(Z_i\cap Z_j)=k$，则 $Z_i\cap Z_j\subseteq Y_\ell\in\mathcal{Y}$ 对某个 ℓ 成立，这与 $Z_i\subseteq T-\bigcup_{Y\in\mathcal{Y}}Y$ 矛盾。同样，若 $d^-(Z_i\cup Z_j)=k$，则 $Z_i\cup Z_j\subseteq Y_\ell\in\mathcal{Y}$ 对某个 ℓ 成立，这与 $Z_i\subseteq T-\bigcup_{Y\in\mathcal{Y}}Y$ 矛盾。因此，根据 d^- 的次模性以及 $\lambda(\vec{\mathcal{H}})=k$,

$$2(k+1)=d^-(Z_i)+d^-(Z_j)\geq d^-(Z_i\cap Z_j)+d^-(Z_i\cup Z_j)\geq 2(k+1),$$

因此 $d^-(Z_i\cup Z_j)=k+1$，这与 Z_i 的极大性矛盾。

断言 11.1. $\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$ 这一族未覆盖 T 的所有顶点。

证明。假设情况并非如此。那么 $\mathcal{P} = \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z} \cup \{T\}$ 是 V的一个划分。注意，$d^-(\bar{T}) = d^+(T) = k$且 $e_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}) = \sum_{X\in\mathcal{P}} d^-(X)$。于是，根据 $\mathcal{H}$的 $(k+1,k+1)$-分划连通性，我们得到矛盾： $\alpha k+\beta(k+1)+k = e_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}) \geq |\mathcal{P}|(k+1) = (\alpha+\beta+1)(k+1)$. □

根据断言 11.1，存在一个顶点 $t \in T - \bigcup_{Y\in\mathcal{Y}} Y - \bigcup_{Z\in\mathcal{Z}} Z$。我们首先证明，任何包含 t 的集合 $X \in \mathcal{T}_-$ 也包含 T。若 $X \subseteq T$，则对于某个 i，有 $X \subseteq Y_i$，这与 t的选取矛盾。因此我们假设 $X - T \neq \emptyset$。若 $T - X \neq \emptyset$，则根据断言 1(c)，有$T - X \in \mathcal{T}_+$，这与 T的极小性矛盾。由此证明了 $T \subsetneq X$。

现在我们证明，任何满足 $X \in \mathcal{D}_-$、$t \in X$ 和 $T - X \neq \emptyset$ 的集合都包含一个满足 $Y \subseteq X - t$ 和 $Y \in \mathcal{T}_-$ 的集合。首先，假设 $X \subsetneq T$。由于 $t \in X \subsetneq T, X \in \mathcal{D}_-$, 和 $t \notin \bigcup_{Z\in\mathcal{Z}} Z$，可知 X 不包含于 $T - \bigcup_{Y\in\mathcal{Y}} Y$。因此，对某个 i， X 必与集合 Y_i 相交。由 d^- 的次模性、 $\lambda(\vec{\mathcal{H}}) = k$，以及 Y_i的极大性，我们得到

$$(k+1)+k = d^-(X)+d^-(Y_i) \geq d^-(X\cap Y_i)+d^-(X\cup Y_i) \geq k+(k+1).$$

因此， $X \cap Y_i \in \mathcal{T}_-$. 。最后，假设 $X - T \neq \emptyset$。那么，由 T 的极小性和断言 1(e)，可得 $X - T \in \mathcal{T}_-$，这证明 t 是 T 中的安全汇点。■

对于 $v \in V$， Q^v_- 表示包含 v 且按包含关系极小的 $\mathcal{T}_-$ 集合； Q^v_+ 表示包含 v 且按包含关系极小的 $\mathcal{T}_+$ 集合。注意，这里没有歧义，因为根据断言 1(a)，集合 Q^v_- 和 Q^v_+ 是唯一的。

引理 12 （见 [8, 引理 4.12]）。

（a）对于每个 $s \in V$和 $t \in Q^s_+$，都存在一条（s， t）-超路径 P，它不会离开 Q^s_+。

（b）对于每个 $t \in V$和 $s \in Q^t_-$，都存在一条（s， t）-超路径 P，它不会离开 Q^t_-。

证明。 （a）假设该结论不成立，因此存在 $s \in V$ 和 $t \in Q^s_+$，使得任意（s， t）-超路径都会离开 Q^s_+。于是存在一个顶点集 $s \in Z \subseteq Q^s_+ - t$，使得任何离开 Z 的超弧也会离开 Q^s_+。因此，我们有 $k \geq d^+(Q^s_+) \geq d^+(Z) \geq k$，这意味着 $Z \in \mathcal{T}_+$，与 Q^s_+的极小性矛盾。

（b）可用与（a）类似的方法证明。假设该结论不成立，因此存在$t \in V - r$ 和 $s \in Q^t_-$，使得任意（s， t）-超路径都会离开 Q^t_-。于是存在一个顶点集 $t \in Z \subseteq Q^t_- - s$，使得任何进入 Z 的超弧也会进入 Q^t_-。因此，我们有$k \geq d^-(Q^t_-) \geq d^-(Z) \geq k$，这说明 $Z \in \mathcal{T}_-$，与 Q^t_-的极小性矛盾。■

引理 13. 设 $R \in \mathcal{R}, S \in \mathcal{M}_-, T \in \mathcal{M}_+$ 满足 $S, T \subseteq R$。此外，设 s 是 S 中的一个安全源点， t 是 T 中的一个安全汇点。那么，对于所有满足 $s \in X, t \notin X$ 的集合 $X \subseteq V - r$，有 $d^+(X) \geq k+1$；对于所有满足 $t \in X, s \notin X$ 的集合 $X \subseteq V - r$，有 $d^-(X) \geq k+1$。

证明。 若结论不成立，则根据 $\lambda(\vec{\mathcal{H}}) = k$，存在 $X \subseteq V - r$ 使得以下情况之一成立：(a) $s \in X$、$t \notin X$ 和 $X \in \mathcal{T}_+$；或 (b) $t \in X$、$s \notin X$ 和 $X \in \mathcal{T}_-$。

(a) 根据 $S \in \mathcal{T}_-$、 $s \in X \in \mathcal{T}_+$，并且由于 s 是一个安全源点，我们有 $S \subsetneq X$。由于 $t \in R - X$ 和 $R \in \mathcal{R}$，我们有 $X \not\subseteq R$，这意味着 $X - R \neq \emptyset$。

- 如果 $R \in \mathcal{T}_-$，那么根据 $t \in R - X$、 $X \in \mathcal{T}_+$ 以及关于 X 和 R 的断言 1，我们得到 $R - X \in \mathcal{T}_-$。如果 $X \cap T \neq \emptyset$，那么根据断言 1，我们得到 $X \cap T \in \mathcal{T}_+$，这与 T 的极小性矛盾。因此 $T \subseteq R - X$。根据 $T \in \mathcal{T}_+$ 和 $R - X \in \mathcal{T}_-$，这与 $R \in \mathcal{R}$ 矛盾。

- 如果 $R \in \mathcal{T}_+$，根据 $X \in \mathcal{T}_+$ 和断言 1，我们得到 $X \cap R \in \mathcal{T}_+$。根据 $S \in \mathcal{T}_-$、$S \subseteq R \cap X$ 和 $t \in R - X$，这与 $R \in \mathcal{R}$ 矛盾。

(b) 由 $T \in \mathcal{T}_+$、$t \in X \in \mathcal{T}_-$，并且由于 t 是安全汇点，我们有 $T \subsetneq X$。由于 $s \in R - X$ 和 $R \in \mathcal{R}$，因此我们有 $X \not\subseteq R$，这意味着 $X - R \neq \emptyset$。

- 若 $R \in \mathcal{T}_-$，则由 $X \in \mathcal{T}_-$ 和断言 1，我们得到 $X \cap R \in \mathcal{T}_-$。根据 $T \in \mathcal{T}_+$、$T \subseteq X \cap R$ 和 $t \in R - X$，这与 $R \in \mathcal{R}$ 矛盾。- 若 $R \in \mathcal{T}_+$，则由 $s \in R - X$、$X \in \mathcal{T}_-$ 以及断言 1 对 X 和 R 的应用，我们得到 $R - X \in \mathcal{T}_+$。若 $X \cap S \neq \emptyset$，则由断言 1，我们得到 $X \cap S \in \mathcal{T}_-$，这与 S 的极小性矛盾。因此 $S \subseteq R - X$。根据 $S \in \mathcal{T}_-$ 和 $R - X \in \mathcal{T}_+$，这与 $R \in \mathcal{R}$ 矛盾。

■

8 寻找可容许超路径

本节介绍两种算法，用于在一组 R $\mathcal{R}$ 中寻找可容许超路径。当 R 位于 $\mathcal{T}_-$ 中时，我们使用算法 2；当 R 位于 $\mathcal{T}_+$ 中时，我们使用算法 3。

算法 2 找到一条 (s,t)-超路径 P，使得其修剪 P' 既不离开 R，也不离开其进入的任何 $\mathcal{T}_+$ 集合。算法如下。首先，我们选择一个包含于 R 中的极小集合 S（可能是 R 本身），使得 $S \in \mathcal{M}_-$，且 S 中有一个安全源点 s。我们跟踪一个已探索顶点的集合Z（初始包含 s）、一棵搜索 s-出树 F，以及一个可能会被探索的顶点集合 V'，其初始值为 R。当存在一条离开 Z、且其头顶点 v 属于 V' 的超弧 (X,v) 时，我们任意选取一个顶点 $u \in X \cap Z$。该顶点 u 将作为修剪后超弧的尾部。注意，根据 (X,v) 的选取，u 存在。我们将头顶点 v 标记为已探索，将超弧 (X,v) 修剪为弧 uv，并将其加入 F。我们确保如果搜索进入 $\mathcal{T}_+$ 中的某个集合，就不会离开该集合（见算法 2 的第 11 行）。令 T 为 $\mathcal{T}_+$ 中最后进入的集合。我们将看到 $T \in \mathcal{M}_+$，并在 T 中找到一个安全汇点 t。最后，令 P' 为 F 中唯一的有向 (s,t)-路径，记作 $F[s,t]$。注意，P' 是一条 (s,t)-超路径 P 的修剪结果，并且 P' 的顶点集包含于

R。算法返回 S,T,s,t,P并终止。

算法 2： $R \in \mathcal{T}_-$中的可容许超路径

输入： 一个集合 $R \in \mathcal{R} \cap \mathcal{T}_-$。

输出： $S \in \mathcal{M}_-$ 中的一个安全源点 s，满足 $S \subseteq R$；$T \in \mathcal{M}_+$ 中的一个安全汇点 t，满足 $T \subseteq R$，以及一个 (s,t)-超路径 P，它不会离开 R。

```
1  取一个集合 S ∈ M_-，满足 S ⊆ R;
2  在 S 中取一个安全源点 s；
3  Z := {s};
4  F := (Z, ∅);
5  V' := R;
6  当 X, v) 中存在一条超弧时  使得 v ∈ V' − Z 且 X ∩ Z ≠ ∅ 执行
7  |  任取一个顶点 u ∈ X ∩ Z;
8  |  Z := Z ∪ {v};
9  |  F := F + uv;
10 |  如果 Q_+^v ⊊ V'，则
11 |  |  V' := Q_+^v;
12 T := V';
13 在 T 中取一个安全汇点 t；
14 P' := F[s,t];
15 设 P 为.....中的超路径  对应于 P';
16 返回 S,T,s,t,P;
```

我们应用算法 2 证明以下引理；为了证明在 $R \in \mathcal{R} \cap \mathcal{T}_-$ 的情形下存在可容许路径，我们需要该引理。

引理 14. 如果 $R \in \mathcal{R} \cap \mathcal{T}_-$，那么存在 $S \in \mathcal{M}_-$、$T \in \mathcal{M}_+$、S 中的安全源点 s、T 中的安全汇点 t，以及一条(s,t)-超路径 P，使得 $S \subseteq R$、$T \subsetneq R$, P 不离开 R、$Q_-^t = R$，并且对每个满足 $s,t \notin X$ 的 $X \in \mathcal{T}_+$，$\delta_{P'}^+(X) = \emptyset$，其中 P' 是由 P 修剪后得到的唯一有向(s,t)-路径。

证明。该算法首先在 S 中选取一个安全源点。根据引理 10，这样的安全源点必然存在。

我们证明，算法 2 给出了所需的超路径 P。设 $T' \in \mathcal{M}_+$，其中 $T' \subsetneq R$，且 t' 是 T' 中的一个安全汇点，由引理 11 可知该汇点存在。那么，根据安全汇点的定义和断言 1(a)，$T' \subsetneq Q_-^{t'} \subseteq R.$ 因此，根据 R 的极小性，我们有 $Q_-^{t'} = R.$。于是，由引理 12(b)，t' 可通过一条不离开 $Q_-^{t'}$ 的超路径 P 从 s 到达。这意味着算法最终会进入集合 $T \in \mathcal{M}_+$，其中包含一个安全汇点 t，由引理 11 可知该汇点存在。因此，算法以 $S \in \mathcal{M}_-$ 中的一个安全源点 s（满足 $S \subseteq R$）、$T \in \mathcal{M}_+$ 中的一个安全汇点 t（满足 $T \subseteq R$），以及一条不离开 R 的 (s,t)-超路径 P 终止。

回顾，$P' = F[s,t].$仍需证明，对于所有满足 s的 $X \in \mathcal{T}_+$，都有 $t \notin X$,$\delta_{P'}^+(X) = \emptyset$。假设 $\delta_{P'}^+(X) \neq \emptyset$。由于 $s \notin X$，路径 P'进入 X。设 uv为 P'中首条进入 X的弧。令 $Y = Q_+^v$，并注意到 P'进入 Y。由于 $v \in X \cap Y, X, Y \in \mathcal{T}_+$，根据断言 1(b)应用于 X和 Y，并结合 Y的极小性，可得 $Y \subseteq X \subsetneq V - t$。由于 $Y \in \mathcal{T}_+$且 $t \in T \in \mathcal{M}_+$，根据断言 1(b)并结合 T的极小性，可得 Y和 T互不相交。若$Y - R \neq \emptyset$，则根据 $Y \in \mathcal{T}_+, R \in \mathcal{T}_-, t \in R - Y$以及断言 1(c)，可得 $R - Y \in \mathcal{T}_-$。由于 $T \subseteq R - Y$，这与 $R \in \mathcal{R}$矛盾。因此，$Q_+^v = Y \subsetneq R$。于是，由于 $Q_v^+ \subseteq Q_u^+$，根据算法 2 第 10 行的 if 条件，有 F，因此 P' 不包含离开 Q_+^v的弧，也就不包含离开 X的弧。这与 $d_{P'}^+(X) \neq \emptyset$矛盾，证明完毕。■

算法 3 找到一条（s,t）-超路径 P，使得其修剪 P'既不离开 R，也不进入任何不同时包含 s 和 t的 $\mathcal{T}_-$ 集合。

算法 3： $R \in \mathcal{T}_+$中的可容许超路径

输入： 集合 $R \in \mathcal{R} \cap \mathcal{T}_+$

输出： $S \in \mathcal{M}_-$ 中的安全源点 s（具有 $S \subseteq R$），$T \in \mathcal{M}_+$ 中的安全汇点 t（具有 $T \subseteq R$），以及不离开 R 的 (s,t)-超路径 P。

```
1  取一个具有 T ⊆ R 的集合 T ∈ M_+ ;
2  取 T 中的一个安全汇点 t ;
3  Z := {t};
4  F := (Z, ∅);
5  V' := R;
6  当 存在一条 (X, v) 超弧时，在 H⃗ 使得 v ∈ Z 且(X ∩ V') − Z ≠ ∅ 执行
7  |  当 (X ∩ V') − Z ≠ ∅ 时执行
8  |  |  取 u 于 (X ∩ V') − Z;
9  |  |  Z := Z ∪ {u};
10 |  |  F := F + uv;
11 |  |  如果 Q^u_− ⊊ V'，则
12 |  |  |  V' := Q^u_−;
13 S := V';
14 在 S 中选取一个安全源点 s ;
15 P' : = F[s, t];
16 令 P 为.....中的超路径  H⃗ 对应于 P';
17 返回 S、T、s、t、P;
```

算法 3 的工作过程如下。首先，我们选择一个包含于 R 中的极小集合 T（可能就是 R 本身），使得 $T \in \mathcal{M}_+$ 以及 T 中的一个安全汇点 t。我们记录一个由已探索顶点组成的集合 Z（初始时包含 t）、一棵搜索 t-入树 F，以及一个将要被探索的顶点集合 V'，其初始化为 R。当存在一条进入 Z 的超弧（X, v），且其尾顶点集 X 包含 V' 中尚未探索的顶点时，我们考虑将超弧（X, v）修剪为（u, v）的所有可能方式，其中 $u \in$（$X \cap V'$）$- Z$。我们将尾顶点 u 标记为已探索，把超弧（X, v）修剪为弧 uv，并将其加入 F。我们确保：如果搜索进入 $\mathcal{T}_-$ 中的某个集合，就不会离开该集合（见算法 3 的第 11 行）。我们将看到，搜索进入的 $\mathcal{T}_-$ 中的最后一个集合属于 $\mathcal{M}_-$，并令 S 为该集合。我们在 S 中找到一个安全源点 s。最后，令 P' 为唯一的有向（s, t）-路径 $F[s, t]$。注意，P' 是一条（s, t）-超路径 P 的修剪，且 P' 的顶点集包含于 R 中。算法返回 S、T、s、t、P，并终止。

引理 15 的证明与引理 14 的证明类似。

引理 15. 如果 $R \in \mathcal{R} \cap \mathcal{T}_+$，那么存在 $S \in \mathcal{M}_-$、$T \in \mathcal{M}_+$、S中的一个安全源点 s、T中的一个安全汇点 t，以及一条 (s,t)-超路径 P，使得 $S \subsetneq R, T \subseteq R, P$不离开 R，$Q^s_+ = R$和$\delta^-_{P'}(X) = \emptyset$对每个满足 $s, t \notin X$ 的 $X \in \mathcal{T}_-$都成立，其中 P'是由 P 经修剪得到的唯一有向(s,t)-路径。

证明。T 该算法首先在 T 中选取一个安全汇点。根据引理 11，这样的安全汇点确实存在。

我们证明，算法 3 提供了所需的超路径 P。由引理 10，令 $S' \in \mathcal{M}_-$ 满足 $S' \subsetneq R$，且 s' 是 S' 中的安全汇点。于是，根据断言 1(a)，$S' \subsetneq Q^{s'}_+ \subseteq R.$。因此，由 R的极小性，$Q^{s'}_+ = R.$。接着，根据引理 12(a)，t 可通过一条不离开 $Q^{s'}_+$ 的超路径 P 从 s' 到达。这意味着算法最终会进入集合 $S \in \mathcal{M}_-$，其中包含一个由引理 10 所保证的安全源点 s。因此，算法以如下结果终止：$S \in \mathcal{M}_-$ 中的安全源点 s，满足$S \subsetneq R,$；$T \in \mathcal{M}_+$ 中的安全汇点 t，满足 $T \subseteq R$；以及一条不离开 R的 (s,t)-超路径 P。

回顾，$P' = F[s,t]$.还需证明，对于所有满足 s 的 $X \in \mathcal{T}_-$，$t \notin X$,$\delta^-_{P'}(X) = \emptyset$。假设 $\delta_{P'}(X) \neq \emptyset$。由于 $t \notin X$，路径 P'离开 X。令 uv为 P' 中第一个离开 X 的弧。令 $Y = Q^u_-$，并注意到 P' 离开 Y。由于 $u \in X \cap Y, X, Y \in \mathcal{T}_-$，根据断言 1(a) 对 X 和 Y 的应用，以及 Y 的极小性，我们得到 $Y \subseteq X \subsetneq V - t$。由于 $Y \in \mathcal{T}_-$ 且 $s \in S \in \mathcal{M}_-$，根据断言 1(a)，我们得到 Y 和 S 不相交。若 $Y - R \neq \emptyset$，则根据 $Y \in \mathcal{T}_-, R \in \mathcal{T}_+, s \in R - Y$ 以及断言 1(c)，我们得到 $R - Y \in \mathcal{T}_+$。由于 $S \subseteq R - Y$，这与 $R \in \mathcal{R}$ 矛盾。因此，$Q^u_- = Y \subsetneq R$。于是，由于 $Q^u_- \subseteq Q^v_-$，根据算法 3 第 12 行的 if 条件，我们有 F，因此 P' 不含有进入 Q^u_-、从而进入 X 的弧。这与 $\delta^-_{P'}(X) \neq \emptyset$ 矛盾，证明完毕。■

9 证明超路径的可容许性

本节中，我们证明算法 2 和算法 3 能够给出一条可容许超路径。

设 $R \in \mathcal{R}$ 和 $\mathcal{M} \neq \{V\}$。根据引理 14 和引理 15，存在 S 属于 $\mathcal{M}_-$、T 属于 $\mathcal{M}_+$，满足S, $T \subseteq R$; 还存在一个安全源点 s属于 S、一个安全汇点 t属于 T，以及一条(s,t)-超路径 P，它不会离开R。设 P' 为通过算法 2 或算法 3 找到的 P 的修剪。此外，若$R \in \mathcal{T}_-, \delta^+_{P'}(X) = \emptyset$对所有满足 $s, t \notin X$ 的 $X \in \mathcal{T}_+$均成立。类似地，若 $R \in \mathcal{T}_+, \delta^-_{P'}(X) = \emptyset$对所有满足 $s, t \notin X$的 $X \in \mathcal{T}_-$均成立。显然，根据该算法的搜索方法，$\ell := |\mathcal{A}(P)| < |V|$。对于 $i = 0$，1，...，ℓ，令 $\vec{\mathcal{H}}^i$由 $\vec{\mathcal{H}}$通过将 P最后（分别为最先）的 i条超弧（A_j, a_j）朝向 a_{j-1}重新定向而得到，若 $R \in \mathcal{T}_-$（分别为 $R \in \mathcal{T}_+$）。

我们首先证明，对 P 的超弧重新定向时，超弧连通度不会降低。

引理 16. 对于 $i = 1, \ldots, \ell$, $\lambda(\vec{\mathcal{H}}^i) \geq k$。

证明。 假设存在 i 和 $X \subseteq V - r$，使得以下情况之一成立：(a) $d^+_{\vec{\mathcal{H}}^i}(X) < k$，或 (b)$d^-_{\vec{\mathcal{H}}^i}(X) > k$。我们取第一个这样的 i。

(a) – 若 $R \in \mathcal{T}_-$，则由 $\lambda(\vec{\mathcal{H}}^{i-1}) \geq k$，可得 $t \notin X \in \mathcal{T}_+$ 和 $d^+_{P'}(X) \neq \emptyset$。根据 P 的定义和引理 14，我们有 $s \in X$。因此，由引理 13 可知，由于我们沿一条路径重新定向超弧，产生矛盾：$k + 1 \leq d^+_{\vec{\mathcal{H}}^0}(X) \leq d^+_{\vec{\mathcal{H}}^i}(X) + 1 \leq k$.– 若 $R \in \mathcal{T}_+$，则由 $\lambda(\vec{\mathcal{H}}^{i-1}) \geq k$，可得 $s \in X \in \mathcal{T}_+$。根据 $s \in R \in \mathcal{T}_+$ 和断言 1(b)，可得 $X \cap R \in \mathcal{T}_+$。由引理 15，我们有 $R = Q^s_+$ 和 $\delta^+_{P'}(X) \neq \emptyset$。因此产生矛盾。(b) – 若 $R \in \mathcal{T}_-$，则由 $\lambda(\vec{\mathcal{H}}^{i-1}) \geq k$，可得 $t \in X \in \mathcal{T}_-$。根据 $t \in R \in \mathcal{T}_-$ 和断言 1(a)，可得 $X \cap R \in \mathcal{T}_-$。由引理 14，我们有 $R = Q^t_-$ 和 $\delta^-_{P'}(X) \neq \emptyset$。因此产生矛盾。– 若 $R \in \mathcal{T}_+$，由 $\lambda(\vec{\mathcal{H}}^{i-1}) \geq k$，可得 $s \notin X \in \mathcal{T}_-$ 和 $d^-_{P'}(X) \neq \emptyset$。根据 P 的定义和引理 15，我们有 $t \in X$。因此，由引理 13 可知，由于我们沿一条路径重新定向超弧，产生矛盾：$k + 1 \leq d^-_{\vec{\mathcal{H}}^0}(X) \leq d^-_{\vec{\mathcal{H}}^i}(X) + 1 \leq k$.

■

设 $\vec{\mathcal{H}}' = \vec{\mathcal{H}}^\ell$。我们将 $\mathcal{T}_-$、$\mathcal{T}_+$ 和 $\mathcal{M}$ 定义为 $\vec{\mathcal{H}}'$ 的集合，其定义方式与 $\vec{\mathcal{H}}$ 的集合 $\mathcal{T}'_-$、$\mathcal{T}'_+$ 和 $\mathcal{M}'$ 相同。注意，若 R 属于 $\mathcal{T}_-$（分别地，属于 $\mathcal{T}_+$），则由引理 14（分别地，引理 15）可得 R 属于 $\mathcal{T}'_-$（分别地，属于 $\mathcal{T}'_+$）。要使 P 可容许，还需证明以下内容。

17. 以下两者之一成立：*(a)* $|\mathcal{M}'| < |\mathcal{M}|$；或 *(b)* $|\mathcal{M}'| = |\mathcal{M}|$ 且 $\sum_{X\in\mathcal{M}'} |X| > \sum_{X\in\mathcal{M}} |X|$。

引理

证明。若 $T \neq R \neq S$，那么根据断言 1(c)以及 S 和 T的极小性，可得 S 和T不相交。因此，由于 $s \in S$和 $t \in T$，路径 P'离开 S并进入 T。若 $S = R$，那么由于 s是 R中的安全源点，$T \in \mathcal{T}_+$和 $T \subsetneq R,$，我们有 $s \notin T$。因此，由于 $t \in T$，路径 P'进入 T。若 $T = R$，那么由于 t是 R中的安全汇点，$S \in \mathcal{T}_-$和 $S \subsetneq R,$，我们有 $t \notin S$。因此，由于 $s \in S$，路径 P'离开 S。由于 $\mathcal{H}$是$(k+1,k+1)$-划分连通的，如果 P'进入 T，则有 $d^-_{\vec{\mathcal{H}}'}(T) = d_{\mathcal{H}}(T) - d^+_{\vec{\mathcal{H}}'}(T) \geq (2k+2) - (k+1) = k+1$；如果 P'离开 S，则有$d^+_{\vec{\mathcal{H}}'}(S) = d_{\mathcal{H}}(S) - d^-_{\vec{\mathcal{H}}'}(S) \geq (2k+2) - (k+1) = k+1$。因此，若 P' 离开 S，则有 $S \in \mathcal{M} - (\mathcal{T}'_- \cup \mathcal{T}'_+)$；若 P' 进入 T，则有 $T \in \mathcal{M} - (\mathcal{T}'_- \cup \mathcal{T}'_+)$。接下来，我们通过以下两个断言刻画$\mathcal{M}' - \mathcal{M}$ 中的每个元素。

断言 17.1. 如果 $X \in (\mathcal{T}_- \cup \mathcal{T}_+) \cap (\mathcal{M}' - \mathcal{M})$，那么 $X = R$。

证明。由于 $X \in (\mathcal{T}_- \cup \mathcal{T}_+) \cap (\mathcal{T}'_- \cup \mathcal{T}'_+)$，要么是 $s,t \notin X$，要么是 $s,t \in X$。在前一种情况下，$X \in \mathcal{M}'$意味着 $X \in \mathcal{M}$，这与假设矛盾。因此，我们考虑 $s,t \in X$。我们区分几种情况。

(a) 如果 $X \in \mathcal{T}_-$，那么由于 t 是 T 中的安全汇点，我们得到 $T \subsetneq X$。

- 如果 $R \in \mathcal{T}_-$，那么根据断言 1(a)，我们知道 s、$t \in X \cap R \in \mathcal{T}_-$，因此有 $X \cap R \in \mathcal{T}'_-$。于是，根据 $X \in \mathcal{M}'$，我们得到 $X = X \cap R \subseteq R$。因此，根据 $T \in \mathcal{T}_+$、$X \in \mathcal{T}_-$ 和 $T \subsetneq X \subseteq R \in \mathcal{R},$，我们有 $X = R$。- 如果 $R \in \mathcal{T}_+$，那么如果 $R - X \neq \emptyset \neq X - R$，根据断言 1(c)，我们得到 $X - R \in \mathcal{T}'_-$，这与 $X \in \mathcal{M}'$ 矛盾。因此，要么 $R \subseteq X$，要么 $X \subseteq R$。如果 $R = X$，则由 $\mathcal{H}$ 的 $(k+1,k+1)$-分划连通性可得矛盾。因此，在前一种情况下，我们得到 $X \notin \mathcal{M}'$；而在后一种情况下，根据 $T \in \mathcal{T}_+$、$X \in \mathcal{T}_-$ 和 $T \subsetneq X \subsetneq R,$，我们得到 $R \notin \mathcal{R}$。在这两种情况下，我们都得到矛盾。

(b) 若 $X \in \mathcal{T}_+$，则由于 s 是 S 中的安全源点，我们得到 $S \subsetneq X$。

- 若 $R \in \mathcal{T}_-$，则若 $R - X \neq \emptyset \neq X - R$，根据断言 1(c)，我们得到 $X - R \in \mathcal{T}'_+$，这与 $X \in \mathcal{M}'$ 矛盾。因此，$R \subseteq X$ 或 $X \subseteq R$。若 $R = X$，则由 $\mathcal{H}$ 的 $(k+1,k+1)$-分划连通性可得矛盾。因此，在前一种情况下，我们得到 $X \notin \mathcal{M}'$；在后一种情况下，根据 $S \in \mathcal{T}_-$、$X \in \mathcal{T}_+$ 和 $S \subsetneq X \subsetneq R,$，我们得到 $R \notin \mathcal{R}$。两种情况下都得出矛盾。- 若 $R \in \mathcal{T}_+$，则根据断言 1(b)，我们知道 s、$t \in X \cap R \in \mathcal{T}_+$，因此有 $X \cap R \in \mathcal{T}'_+$。于是，根据 $X \in \mathcal{M}'$，我们得到 $X = X \cap R \subseteq R$。因此，根据 $S \in \mathcal{T}_-$、$X \in \mathcal{T}_+$ 和 $S \subsetneq X \subseteq R \in \mathcal{R},$，我们有 $X = R$。

□

断言 17.2。若 $X \in \mathcal{M}' - (\mathcal{T}_- \cup \mathcal{T}_+)$，则 $S \subsetneq X \subsetneq R$ 或 $T \subsetneq X \subsetneq R$。

证明。由于 $X \in \mathcal{M}' - (\mathcal{T}_- \cup \mathcal{T}_+)$，(a) $s \notin X, t \in X \in \mathcal{D}_-$ 或 (b) $t \notin X, s \in X \in \mathcal{D}_+$成立。

(a) 我们先证明 $T \subsetneq X$。事实上，若 $T - X \neq \emptyset$，那么根据 t 是安全汇点这一事实，存在 $Y \subseteq X - t$ 使得 $Y \in \mathcal{T}_-$。由于 $s,t \notin Y$，这与 $X \in \mathcal{M}'$矛盾。

– 如果 $R \in \mathcal{T}_-$，那么 $R \in \mathcal{T}'_-$，因此根据断言 1(a)和 $X \in \mathcal{M}'_-$，我们得到 $X \subseteq R.$。由于$s \in R - X$，我们得出 $X \subsetneq R$。

– 如果 $R \in \mathcal{T}_+$，那么根据 $X \in \mathcal{M}' \cap \mathcal{T}'_-$、$R \in \mathcal{T}'_+$ 以及断言 1(c)关于 X 和 R的结论，我们得到X 和 R 不交叉。因此，根据 $s \in R - X$、$t \in X \cap R$ 和 $r \in V - (X \cup R)$，我们有 $X \subsetneq R$。

(b) 我们首先证明 $S \subsetneq X$。事实上，如果 $S - X \neq \emptyset$，那么根据 s 是安全源点这一事实，存在 $Y \subseteq X - s$ 使得 $Y \in \mathcal{T}_+$。由于 s，$t \notin Y$、$Y \in \mathcal{T}'_+$ 与 $X \in \mathcal{M}'$ 矛盾。

– 如果 $R \in \mathcal{T}_-$，那么根据 $X \in \mathcal{M}' \cap \mathcal{T}'_+$、$R \in \mathcal{T}'_-$ 以及关于 X 和 R 的断言 1(c)，可得 X 和 R 不交叉。因此，根据 $s \in R - X$、$t \in X \cap R$ 和 $r \in V -$（$X \cup R$），有 $X \subsetneq R$。– 如果 $R \in \mathcal{T}_+$，那么 $R \in \mathcal{T}'_+$，所以根据断言 1(b) 和 $X \in \mathcal{M}'_+$，可得 $X \subseteq R$。由于 $t \in R - X$，我们得到 $X \subsetneq R$。

□

根据断言17.1和17.2，$\mathcal{M}' - \mathcal{M}$ 中的每个元素都严格包含至少一个 $\mathcal{M} - \mathcal{M}'$的元素（$S$ 或 T）。此外，根据断言 1，$\mathcal{M}' - \mathcal{M}$ 中的元素两两不相交。因此，$|\mathcal{M}' - \mathcal{M}| \leq |\mathcal{M} - \mathcal{M}'|$；若 $|\mathcal{M}' - \mathcal{M}| = |\mathcal{M} - \mathcal{M}'|$，则有 $\sum_{X \in \mathcal{M}'} |X| > \sum_{X \in \mathcal{M}} |X|$。■

10 有向超图中的最小（s，t）-分隔集

对于有向图，众所周知，Edmonds-Karp 最大流最小割算法[2] 可以求得一个最小出度（s,t）-分隔集，且该分隔集包含于所有最小出度（s,t）-分隔集中。根据次模性，对于有向超图 $\vec{\mathcal{H}}$，也有这样的结论：对每个 $s,t \in V$，都存在一个最小出度（s,t）-分隔集，该分隔集包含于所有最小出度（s,t）-分隔集中。我们将这个唯一的集合记为$S^{\mathcal{H}}_{s,t\cdot}$。类似地，也存在一个最小入度（$t,s$）-分隔集，该分隔集包含于所有最小入度（$t,s$）-分隔集中。我们将这个唯一的集合记为$T^{\mathcal{H}}_{t,s\cdot}$。问题在于如何在多项式时间内找到它们。为此，我们给出一种简单的归约，将问题转化为有向图上的同一问题。类似地，也可以得到针对一般有向赋权超图的归约。对于 $\vec{\mathcal{H}} =$（V, $\mathcal{A}$），我们考虑由其有向二部关联图 $\vec{G} =$（V', A'）按如下方式构造的有向图。令 $V' = V \cup \{w_{(X,v)} : (X, v) \in \mathcal{A}\}$。弧集 A' 中，对于每个（X, v）$\in \mathcal{A}$，都包含弧$w_{(X,v)}v$；对于每个 $x \in X$，还包含 $|\mathcal{A}| + 1$ 条平行弧$xw_{(X,v)}$。注意，$|V'| = |V| + |\mathcal{A}|$和 $|A'| \leq |V||\mathcal{A}|$（$|\mathcal{A}| + 1$）。图3展示了这一构造的一个例子。令 G 为由 G通过反转所有弧的定向而得到的$\vec{}$有向图。

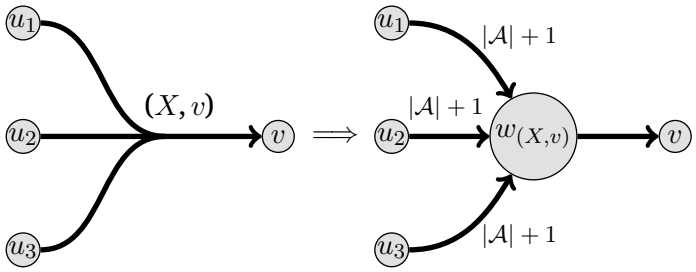

图3：由 $\vec{\mathcal{H}}$ 的超边 (X, v) 产生的、与 $\vec{G}$ 中的 $w_{(X,v)}$ 相关联的弧

引理 18。 $S^{\vec{\mathcal{H}}}_{s,t} = V \cap S^{\vec{G}}_{s,t}$ 和 $T^{\vec{\mathcal{H}}}_{t,s} = V \cap S^{G}_{t,s}$.

证明。令 $Z' = S_s^{\vec{G}}{}_{,t}$, $Z = V \cap Z'$ 和 $X = S_s^{\vec{\mathcal{H}}}{}_{,t}$。由于 Z' 是 $\vec{G}$ 中的 (s,t)-分隔集，我们有 $s \in Z \subseteq V - t$。对于一个集合 $W \subseteq V$，令 $\varphi(W) = W \cup \{w_{(Y,v)} \colon (Y,v) \in \mathcal{A}, W \cap Y \neq \emptyset\}$. 注意，根据 Z 的定义，我们有 $\varphi(Z) \subseteq Z'$. 。令 $X' = \varphi(X)$。注意，如果一条弧在 $\vec{G}$ 中离开 X'，那么存在一条有向超边在 $\vec{\mathcal{H}}$ 中离开 X。还要注意，如果一条有向超边在 $\vec{\mathcal{H}}$ 中离开 Z，那么存在一条弧在 $\vec{G}$ 中离开 Z'。于是，根据 Z' 和 X 的定义，我们有 $d^+_{\vec{G}}(Z') \leq d^+_{\vec{G}}(X') \leq d^+_{\vec{\mathcal{H}}}(X) \leq d^+_{\vec{\mathcal{H}}}(Z) \leq d^+_{\vec{G}}(Z')$。由此可知各处均取等号；特别地，我们得到 X' 是 $\vec{G}$ 中一个最小出度 (s,t)-分隔集，且 Z 是 $\vec{\mathcal{H}}$ 中一个最小出度 (s,t)-分隔集。于是我们有 $Z' \subseteq X'$ 和 $X \subseteq Z$。因此，根据 $\varphi(Z) \subseteq Z'$，我们得到 $X' = \varphi(X) \subseteq \varphi(Z) \subseteq Z' \subseteq X'$. 。由此可知各处均取等号；特别地，我们得到 $\varphi(X) = \varphi(Z)$，因此 $X = Z$.

令 $U' = S_t^G$、$_s$、$U \colon = V \cap U'$ 和 $X = T_t^{\vec{\mathcal{H}}}{}_s$，。由于 U' 是 t、s 在 G 中的分隔集，我们有 $t \in U \subseteq V - s$。对于集合 $W \subseteq V$，令 $\phi(W) = W \cup \{w_{(Y,v)} \colon Y$、$v \in \mathcal{A}$、$Y \cup \{v\} \subseteq W\}$.。注意，根据 U 的定义，我们有 $\phi(U) \subseteq U'$.。令 $X' = \phi(X)$。注意，如果一条弧离开 X' 中的 G，那么存在一条有向超边进入 X 中的 $\mathcal{H}$。还要注意，如果一条有向超边进入 U 中的 $\vec{\mathcal{H}}$，那么存在一条弧离开 U' 中的 G。于是，根据 U' 和 X 的定义，我们有 $d^+_G(U') \leq d^+_G(X') \leq d^-_{\vec{\mathcal{H}}}(X) \leq d^-_{\vec{\mathcal{H}}}(U) \leq d^+_{\vec{G}}(U')$。由此可知处处取等，特别地，我们得到 X' 是 G 中使 t、s 分离的最小出度分隔集，而 U 是 $\vec{\mathcal{H}}$ 中使 t、s 分离的最小入度分隔集。于是我们有 $U' \subseteq X'$ 和 $X \subseteq U$。因此，根据 $\phi(U) \subseteq U'$，我们得到 $X' = \phi(X) \subseteq \phi(U) \subseteq U' \subseteq X'$.。由此可知处处取等，特别地，我们得到 $\phi(X) = \phi(U)$，从而 $X = U$. ■

因此，我们可以应用 Edmonds-Karp 算法 [2]，在多项式时间内计算集合 $S_s^{\vec{G}}$、$_t$ 和 S_t^G、$_s$，并根据引理 18 得到集合 $S_s^{\vec{\mathcal{H}}}$、$_t$. 和 $T_t^{\vec{\mathcal{H}}}$、$_s$.

11 算法的复杂度

为了计算算法 1 中使用的集合 $\mathcal{R}$、$\mathcal{M}_-$ 和 $\mathcal{M}_+$，我们应用第 10 节中的算法。

引理 19。存在一种算法，能够在关于 $\mathcal{H}$ 大小的多项式时间内计算集合 $\mathcal{R}$、$\mathcal{M}_-$、$\mathcal{M}_+$。

证明。令 $\mathcal{Q} = \bigcup_{v \in V} \{Q^v_-\} \cup \{Q^v_+\}$。我们可以通过应用第 10 节中的算法，在多项式时间内计算 $S_u^{\vec{\mathcal{H}}}$、$_v$ 和 $T_u^{\vec{\mathcal{H}}}$、$_v$，其中对 $\vec{\mathcal{H}}$ 的每一对顶点 (u,v) 都进行计算，从而得到 $\mathcal{Q}$。

我们证明 $\mathcal{R}$、$\mathcal{M}_-$、$\mathcal{M}_+ \subseteq \mathcal{Q}$。如果 $v \in S \in \mathcal{M}_-$，那么 $Q^v_- = S$；如果 $v \in T \in \mathcal{M}_+$，那么 $Q^v_+ = T$，因此 $\mathcal{M}_-$、$\mathcal{M}_+ \in \mathcal{Q}$。令 $R \in \mathcal{R}$。如果 $R \in \mathcal{T}_-$，那么 R 包含 $T \in \mathcal{M}_+$，且根据引理 11，T 中存在一个安全汇点 t。我们在算法 2 的证明中已经看到 $Q^t_- = R$。类似地，如果 $R \in \mathcal{T}_+$，那么 R 包含 $S \in \mathcal{M}_-$，且根据引理 10，S 中存在一个安全源点 s。我们在算法 3 的证明中已经看到 $Q^t_+ = R$。因此，$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$。

最后，我们可以在多项式时间内迭代地消去不属于 $\mathcal{R}$、$\mathcal{M}_-$ 和 $\mathcal{M}_+$ 的集合 $\mathcal{Q}$。■

引理 20. 算法 *2* 和算法 *3* 的运行时间关于输入规模呈多项式级 $\mathcal{H}$.

证明。两种算法都执行一种简单的搜索，其运行时间关于超边的数量为多项式时间。接下来需要证明我们可以在多项式时间内找到一个安全源点和一个安全汇点。根据对称性，我们只说明如何在给定的 $S \in \mathcal{M}_-$ 中找到一个安全源点。对于 u、$v \in S$，令 $X^u_v = S_u^{\mathcal{H}}{}_{,v}$。

命题 20.1。 顶点 u 在 S 中不是安全源点，当且仅当存在一个顶点 $v \in S-u$，使得 $X_v^u \in \mathcal{T}_+$ 或 $X_v^u \in \mathcal{D}_+$，并且 X_v^u 不包含集合 $Z \in \mathcal{T}_+$。

证明。 充分性由安全源点的定义直接得出。为证明必要性，我们假设对于所有 $v \in S-u$，u 在 S 和 $X_v^u \notin \mathcal{T}_+$ 中都不是安全源点。根据定义，对于某个顶点 $v \in S-u$，存在一个最小出度 (u,v)-分隔集 Y_v^u，使得 $Y_v^u \in \mathcal{D}_+$，且不存在满足 $Z \subseteq Y_v^u - u$ 的集合 $Z \in \mathcal{T}_+$。由于 $X_u^v \subseteq Y_u^v$，我们得到 X_v^u 不包含集合 $Z \in \mathcal{T}_+$。□

要计算 u 是否为 S 中的安全源点，只需对所有 $v \in S-u$ 检查 $X_v^u \in \mathcal{T}_+$ 是否成立，或者 $X_v^u \in \mathcal{D}_+$ 是否包含集合 $Z \in \mathcal{T}_+$；这可以在多项式时间内完成。根据引理 10， S 包含一个安全源点，因此至少存在一个不满足上述条件的顶点 $s \in S$，而这可以在多项式时间内检验。■

由前面的引理可知，算法 1 在多项式时间内运行。

12 结语

我们将 Ito 等人 [8] 的结果推广到了超图，并给出了定理 5 的算法化证明。还有几个有趣的问题尚未解决。我们不知道超弧重新定向次数的 $|V|^3$ 界是否紧。若将这一结果推广到每条超弧都具有尾顶点集和头顶点集的一般有向超图，还可以给出可定向的 k-超弧连通超图的一般刻画；据我们所知，目前尚无此类刻画。

参考文献

[1] Attila Bernáth、Satoru Iwata、Tamás Király、Zoltán Király 和 Zoltán Szigeti。关于良平衡定向的最新结果。《离散优化》，5(4):663–676，2008年。[2] Jack Edmonds 和 Richard M Karp。网络流问题算法效率的理论改进。《美国计算机协会会刊》（*JACM*），19(2):248–264，1972年。[3] András Frank。关于图的定向。《组合理论杂志 *B*辑》，28(3):251–261，1980年。[4] András Frank。关于无向图的 k-强连通定向的注记。《离散数学》，39(1):103–104，1982年。[5] András Frank。组合优化中的连接，第38卷。牛津大学出版社 牛津，2011年。[6] András Frank、Tamás Király 和 Zoltán Király。关于图和超图的定向。《离散应用数学》，131(2):385–400，2003年。[7] Giorgio Gallo、Giustino Longo、Stefano Pallottino 和 Sang Nguyen。有向超图及其应用。《离散应用数学》，42(2-3):177–201，1993年。[8] Takehiro Ito、Yuni Iwamasa、Naonori Kakimura、Naoyuki Kamiyama、Yusuke Kobayashi、Shun-ichi Maezawa、Yuta Nozaki、Yoshio Okamoto 和 Kenta Ozeki。将单调边翻转应用于 Nash-Williams 意义下的最大边连通度定向。《美国计算机协会算法汇刊》（*TALG*），19(1)，2023年。

[9] 拉斯洛·洛瓦兹。有向图的连通性。《组合理论杂志 *B*辑》，15(2):174–177，1973年。[10] 拉斯洛·洛瓦兹。组合问题与习题。北荷兰出版社，1979年。[11] 克里斯平·圣约翰·安东尼·纳什-威廉姆斯。关于有限图中的定向、连通性和奇数顶点配对。加拿大数学杂志，12:555–567，1960年。[12] Zoltán Szigeti。图的定向。当代数学，39:179–188，2010年。