arXiv:2305.00045v2 [math.AC] 2 Dec 2024

关于广义变形问题

QIURUI LI

Abstract. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环， I 是一个 R-理想，且 $\mathrm{pd}_R R/I<\infty$。如果 R/I 满足某个性质 $\mathcal{P}$，自然会问 R 是否也具有性质 $\mathcal{P}$；我们称之为广义变形问题。本文给出了一些适用于广义变形问题的性质。本文分为两个主要部分。第一部分讨论广义变形问题中的 F-奇点。受 Aberbach 工作的启发，我们证明，若 R/I 上的每个极大正则序列都是 Frobenius 闭的，则 R 上的每个正则序列都是 Frobenius 闭的。此外，在温和的假设下，可以用紧闭替代 Frobenius 闭。借助这两个结果，我们解决了 Cohen–Macaulay 情形下关于 F-单射性以及在温和假设下关于 F-有理性的广义变形问题。具体而言，若R 是特征为 p 的诺特局部环， I 是一个 R-理想，且 $\mathrm{pd}_R R/I<\infty$，那么如果 R 是 Cohen–Macaulay 的且 R/I 具有 F-单射性，则 R具有 F-单射性。如果 R是优良的且 R/I具有 F-有理性，则 R具有 F-有理性。第二部分讨论任意特征下环的一些基本性质。我们证明，若 R 是诺特局部环， I 是一个 R-理想，且 $\mathrm{pd}_R R/I<\infty$，那么如果 R/I是 S_k、 R_k+S_{k+1}、正规的、既约的或整环，则 R也具有相同性质。

1. Introduction

我们先回顾一下变形问题。

问题 1.1。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 $x\in\mathfrak{m}$ 是一个正则元。如果 R/xR 满足性质 $\mathcal{P}$，那么 R 本身是否也满足性质 $\mathcal{P}$?

这个问题在特征 $p>0$ 下已有广泛研究；当 $\mathcal{P}=$$F$-奇点时，我们列出相关工作的已知最佳进展。

(1) 强 F-正则性一般不具有变形性质 [28], ，但对于正规 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 环则可以变形 [2]。(2) F-纯性一般不具有变形性质 [10, 27], ，但对于正规 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 环则可以变形 [15, 25, 20]。(3) F-有理性总是可以变形 [13]。(4) F-内射性的变形在一般情形下仍是一个公开问题。但已知 F-内射性对于 Cohen–Macaulay 环可以变形 [10], ，并且 F-纯性总是可以变形为 F-内射性 [14]。

更准确地说，Singh 在 [28] 构造了一个例子，其中 R 是一个特征为 $p>2$ 的三维 Cohen-Macaulay 环，并且 R 上存在一个正则元 t ，使得 R/tR 是强 F-正则的；但在某些情况下， R 不是 F-纯的。由于强 F-正则性蕴含 F-纯性，这个例子表明，强 F-正则性和 F-纯性的变形问题并不成立。

我们还列举了一些在环的特征方面没有特殊要求的性质所取得的进展:

（1）正则性总能变形 [7, 第 0 章，推论 17.1。8]。（2）Cohen-Macaulay 环总能变形 [5, 定理 2.1.3(a)]。（3）Gorenstein 环总能变形 [5, 命题 3.1.19(b)]。（4）完全交总能变形 [5, 定理 2.3.4(a)]。（5）正规环总能变形 [26, 命题 I.7。4]。（6）约化环总能变形 [8, 命题 3.4。6]。（7） S_k 总能变形 [6, 引理 0(i)]。（8） R_k 在 R 等维且余维为一的条件下总能变形 [16, 引理 2。1]。（9） $R_k + S_{k+1}$ 总能变形 [6, 引理 0(ii)]。（10）整环总能变形 [8, 命题 3.4。5]

显然，如果 x 在 R 上正则，则我们有 $\mathrm{pd}_R R/xR = 1 < \infty$，因此自然引出了对变形问题的推广:

问题 1.2（广义变形问题）。设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环， $I \subseteq R$ 是一个理想，且 $\mathrm{pd}_R R/I < \infty$。如果 R/I 满足性质 $\mathcal{P}$，那么 R 本身是否也满足 $\mathcal{P}$?

本文第一部分（第 3 节和第 4 节）仍聚焦于由 Frobenius 定义的 $\mathcal{P}$。由于 Singh 的反例表明，强 F-正则性和 F-纯性的变形问题并不成立，因此本文将重点关注 $\mathcal{P}$ =F-单射性和 $\mathcal{P} = F$-有理性的情形。本文第二部分（第 5 节）则聚焦于上文列出的十项中的最后六种情形，因为

（1）正则性满足广义变形问题 [3, 定理 6.1(1)]。（2）科恩–麦考利环满足广义变形问题 [3, 定理 2.1]。（3）Gorenstein 环满足广义变形问题 [3, 定理 4.3(1)(a)]。（4）完全交满足广义变形问题 [3, 定理 5.3(i)⇒(iii)]。本文的主要定理如下:

定理 1.3（定理 4.3 和定理 4.4）。设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个特征为 $p > 0$ 的诺特局部环，$I \subseteq R$ 是一个满足 $\mathrm{pd}_R R/I < \infty$ 的理想。那么

(1) 若 R 是 Cohen–Macaulay 环，且 R/I 是 F-内射的，则 R 是 F-内射的。(2) 若 R 是优良环，且 R/I 是 F-有理的，则 R 是 F-有理的。

定理 1.4（定理 5.7、定理 5.9、定理 5.10、推论 5.11、推论 5.12 和定理 5.14）。设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环， $I \subseteq R$ 是一个满足 $\mathrm{pd}_R R/I < \infty$ 的理想。那么

(1) 如果 R 是等维且串联的， I 是完美理想且 R/I 是 R_k，那么 R 是 R_k。(2) 如果 R/I 是 S_k，那么 R 是 S_k。(3) 如果 R/I 是 R_k 且 S_{k+1}，那么 R 是 R_k 且 S_{k+1}。(4) 如果 R/I 是既约的，那么 R 是既约的。(5) 如果 R/I 是正规的，那么 R 是正规的。(6) 如果 R/I 是整环，那么 R 是整环。

本文的组织结构如下:

在第 2 节中，我们介绍本文所需的基本定义和记号。在第 3 节中，我们旨在证明两个重要命题 3.8 和 3.9，它们将在第 4 节两个定理的证明中用到。为此，我们将 [1, 引理 1.2]证明中的方法应用于 Frobenius 闭包的情形，然后运用 [1, 定理 1.1] 中证明 (6)⇒(2) 的方法，得到命题 3.8。我们用类似的方法得到命题 3.9。完成所有准备工作后，我们在第 4 节完成关于 F-奇点的主要定理的证明。在第 5 节中，我们首先证明两个引理（即引理 5.6 和引理 5.8），以帮助解决 R的 R_k 和 S_k 中 P为素理想的情形；随后，我们证明关于变形问题中 Serre 条件 R_k、 S_k 和 $R_k + S_{k+1}$ 的三个定理，这有助于解决正规环和约化环的情形；最后，我们利用 Auslander 零因子猜想（根据 Robert 的工作 [22]，该猜想已成为一个定理）证明广义变形问题中关于整环的定理。

2. Preliminaries

定义 2.1. 设 p 为素数， R 为满足$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subseteq R$的交换环。我们称 R 具有特征 p。设 $F\colon R \to R$ 定义为：对任意 $r \in R$， $F(r) = r^p$ ，则它是一个环自同态，称为 Frobenius自同态。设 $\mathcal{F}$ 为 Peskine-Szpiro 的 Frobenius基变换函子，它将R-模映到 R-模，并将 $\mathcal{F}^e$ 记作 $\mathcal{F}$的 e次迭代复合。

注 2.2. (1) 对任意 $e > 0$， $\mathcal{F}^e(R) = R$ 。

(2) $\mathcal{F}^e$ 与任意直和及任意直极限可交换。(3) $\mathcal{F}^e(R/I) = R/I^{[q]}$，其中 $q = p^e$ 且 $I^{[q]} = \{x^q | \, x \in I\}$。(4) 对每个 R-模 M ，自然映射 $\varphi\colon M \to \mathcal{F}^e(M)$ 满足：对所有 $r \in R$ 及所有 $u \in M$， $\varphi(ru) = r^q\varphi(u)$。因此，我们将用 u^q表示 u 在此映射下的像。

定义 2.3. 设 $N \subseteq M$ 是两个 R-模。注意，映射 $\mathcal{F}^e(N) \to \mathcal{F}^e(M)$ 是包含映射 $N \hookrightarrow M$ 的基变换 $F^e\colon R \to R$。映射$\mathcal{F}^e(N) \to \mathcal{F}^e(M)$ 不一定是单射，我们将诱导映射 $\mathcal{F}^e(N)$ 的像记作 $N_M^{[q]}$ ；若上下文已明确 M ，也可记作 $N^{[q]}$ 。设 $\psi\colon N \to M$ 是一个 R- 线性映射，则诱导映射 $\psi^{[q]}\colon \mathcal{F}^e(N) \to \mathcal{F}^e(M)$ 定义为

$$\psi^{[q]}(x) = (\psi(x))^q.$$

定义 2.4. 设 R 是一个特征为 $p > 0$ 的诺特环，且 R° 是 R 的所有极小素理想之并的补集。若 I 是一个 R-理想，我们将 I 的紧闭包 I^* 定义为所有满足以下条件的元素 $x \in R$ 的集合：存在 $c \in R^\circ$，使得对所有 $q \gg 0$，都有 $cx^q \in I^{[q]}$ 。显然， $I \subseteq I^*$ ，因为我们可以取 $c = 1$；若理想 I 满足 $I^* = I$，则称其为紧闭理想。对于 R-模 $N \subseteq M$， N 在 M 中的紧闭包N_M^* 由满足以下条件的元素 $u \in M$ 构成：存在某个 $c \in R^\circ$，

$$cu^q \in N_M^{[q]} \subseteq \mathcal{F}^e(M)$$

对所有 $q \gg 0$ 均成立。类似地， I 的 Frobenius 闭包 I^F 是所有满足以下条件的元素$x \in R$ 的集合：存在 $q = p^e > 0$ 使得 $x^q \in I^{[q]}$。若理想 I 满足 $I^F = I$，则称其为 Frobenius 闭。有时为简便起见，我们会说一个序列是紧闭或 Frobenius 闭，意指该序列生成的理想是紧闭或 Frobenius 闭。

定义 2.5. 对于一个元素属于 R 的 $n \times m$ 矩阵 φ，我们用 $I_t(\varphi)$ 表示由所有 φ 的 $t \times t$ 子式生成的 R-理想。按照惯例，$I_t(\varphi) = R$ 当 $t \leqslant 0$，且 $I_t(\varphi) = 0$ 当 $t > \min\{m, n\}$。我们将 φ 的秩定义为 $\operatorname{rank}(\varphi) = \max\{r \mid I_r(\varphi) \neq 0\}$。

定义 2.6. 设 R 是一个环，M 是一个 R-模，则我们将M的对偶定义为 $\operatorname{Hom}_R(M, R)$，记作 $M^\vee$。若有一个 $\varphi\colon R^m \to R^n$ 线性映射，则存在一个诱导映射 $\varphi^\vee : (R^n)^\vee \to (R^m)^\vee$，其中 $\varphi^\vee$ 是 φ作为矩阵的转置。注意，对于任意 $l > 0$，$(R^l)^\vee$ 都同构于 R^l。

定义 2.7. 若诺特局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 是 F-有理的，即它是 Cohen-Macaulay 环的一个同态像，且每个由参数系生成的理想都是紧闭的，则称其为 F-有理环。

注记 2.8. 实际上，F-有理局部环是 Cohen-Macaulay 的（例如，参见 [11,第 125] 页上的定理）。

我们来回顾一下 Frobenius 作用在顶次局部上同调上的情形。设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个特征为 p 的诺特局部环，且 $\dim R = d$。设 $x_1, \ldots, x_d$ 是 R的一个参数系，则顶次局部上同调模 $H^d_{\mathfrak{m}}(R)$ 同构于

$$\frac{R_{x_1 \ldots x_d}}{\sum_i \operatorname{im}(R_{x_1 \ldots \widehat{x_i} \ldots x_d})},$$

其中 $\sum_i \operatorname{im}(R_{x_1 \ldots \widehat{x_i} \ldots x_d})$ 是最后一个映射的像

$$R_{x_2 \ldots x_d} \oplus \ldots \oplus R_{x_1 \ldots x_{d-1}} \longrightarrow R_{x_1 \ldots x_d}$$

在 ˇCech 复形中。元素 $y \in H^d_{\mathfrak{m}}(R)$ 是 $\frac{a}{x^t}$ 的同调类，记作 $[\frac{a}{x^t}]$，其中 $a \in R$ 且 $x = x_1 \ldots x_d$。注意，$F([\frac{a}{x^t}]) = [\frac{a^p}{x^{tp}}]$；若 R 是 Cohen–Macaulay，则当且仅当 $a \in (x_1^t, \ldots, x_d^t)$ 时，$[\frac{a}{x^t}] = 0$。其他局部上同调上的 Frobenius ˇ 作用也可以用类似的方法，通过 Cech 复形显式描述。

注 2.9。Smith 用局部上同调给出了 F-有理性的一个重要刻画：一个 d 维诺特局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 是 F-有理的，当且仅当 R 是 Cohen–Macaulay 且 $0^*_{H^d_{\mathfrak{m}}(R)} = 0$。

定义 2.10. 若特征为 $p > 0$ 的诺特局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 满足：对所有 i，自然的 Frobenius 作用在 $H^i_{\mathfrak{m}}(R)$ 上都是单射，则称其为 F-单射的。

注 2.11. 注意，由 $[9, \text{命题 A.3.(ii)}]$ 可知，F-有理蕴含 F-单射。

定义 2.12. 若诺特局部环 R 满足：对于 R 的任意极小素理想 P，都有 $\dim R/P = \dim R$，则称其为等维的。

定义 2.13. 若诺特局部环 R 满足：对于 R 中任意两个素理想 $P \subsetneq Q$，都存在一条素理想链 $P = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n = Q$，该链无法进一步细化，且所有此类链的长度都相同，则称其为串联的。

命题 2.14. $[18, \text{第 } 250]$ 页的引理 2 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为诺特局部环，且 R 是等维且串联的，则对于任意 $P \in \operatorname{Spec}(R)$，都有 $\dim R = \operatorname{ht} P + \dim R/P$。

定义 2.15. 设 R 是一个诺特环，I 是一个 R-理想，则称 I 为完美的，当且仅当深度 $I =$ 投射维数$_R$ R/I。

定义 2.16. 设 R 是一个诺特环， $k \geqslant 0$ 是一个整数，则 R 满足 Serre 条件 R_k ，如果当 $P \in$ 谱(R) 且 $\dim R_P \leqslant k$ 时， R_P 是正则的。并且，如果对任意 $P \in$ 谱(R)，都有深度 $R_P \geqslant \min\{k, \dim R_P\}$，则 R 满足 Serre 条件 S_k。

3. Proof of the Main Propositions

本节将证明主要命题 3.8 和 3.9。我们首先证明定理 3.3，它可以看作是 Aberbach 关于 Frobenius 闭包的以下结果的类比。

定理 3.1。 [1, 引理 1。2] 设 R 是特征为 $p > 0$ 的诺特环。设 $(L_\bullet, a_\bullet)$ 和 $(G_\bullet, b_\bullet)$ 是长度为 d 的有限生成自由模复形，其中 $L_\bullet$ 无挠。若 $\phi_\bullet : G_\bullet \to L_\bullet$ 是链映射，且 $\operatorname{im} \phi_0 \subseteq (\operatorname{im} a_1)^*_{L_0}$，则

(1) $\operatorname{im} \phi_d \subseteq (I_1(b_d)L_d)^*_{L_d}$，且
(2) $\operatorname{im} \phi_d^\vee \subseteq (\operatorname{im} b_d^\vee)^*_{G_d^\vee}$。

为了证明其 Frobenius 闭包版本定理 3.3，我们还需要以下结果：

定理 3.2（Buchsbaum-Eisenbud）。设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，

$$G_\bullet : 0 \to R^{\oplus b_n} \xrightarrow{\alpha_n} R^{\oplus b_{n-1}} \to \ldots \to R^{\oplus b_1} \xrightarrow{\alpha_1} R^{\oplus b_0} \to 0$$

是一个在 R 上的有限自由复形。令 $r_i = \operatorname{rank}(\alpha_i) = \max\{r | I_r(\alpha_i) \neq 0\}$。那么，当且仅当以下两个条件成立时， $G_\bullet$ 是无挠的：

(1) 对任意满足 $1 \leqslant i \leqslant n$ 的 i， $r_i + r_{i+1} = b_i$。
(2) 对任意满足 $1 \leqslant i \leqslant n$ 的 i， $\operatorname{depth}_{I_{r_i}(\alpha_i)} R \geqslant i$。

该定理可见于 [4, 推论 1], ，我们将在定理 3.3 的证明中使用它，以说明对正合列施加 Frobenius 作用不会改变该列的正合性。

定理 3.3。设 R 是一个特征为 $p > 0$ 的诺特环。设 $(L_\bullet, a_\bullet)$ 和 $(G_\bullet, b_\bullet)$ 是长度为 d 的有限生成自由模复形，其中 $L_\bullet$ 无挠。若 $\phi_\bullet : G_\bullet \to L_\bullet$ 是一个链映射，且 $\operatorname{im} \phi_0 \subseteq (\operatorname{im} a_1)^F_{L_0}$，则

(1) $\operatorname{im} \phi_d \subseteq (I_1(b_d)L_d)^F$，以及
(2) $\operatorname{im} \phi_d^\vee \subseteq (\operatorname{im} b_d^\vee)^F$。

证明。我们的证明与 [1, 引理 1.2] 中的论证类似。

对于 (1)，由于 $\operatorname{im} \phi_0 \subseteq (\operatorname{im} a_1)^F_{L_0}$，存在 $q = p^e > 0$，使得 $(\operatorname{im} \phi_0)^{[q]} \subseteq (\operatorname{im} a_1)^{[q]}$，即 $\operatorname{im}(\phi_0^{[q]}) \subseteq \operatorname{im}(a_1^{[q]})$。因此我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^e(L_d) & \xrightarrow{a_d^{[q]}} & \mathcal{F}^e(L_{d-1}) & \xrightarrow{a_{d-1}^{[q]}} & \ldots & \xrightarrow{a_1^{[q]}} & \mathcal{F}^e(L_0) & \longrightarrow & H_0(\mathcal{F}^e(L_\bullet)) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \phi_d^{[q]}} & & \uparrow{\scriptstyle \phi_{d-1}^{[q]}} & & & & \uparrow{\scriptstyle \phi_0^{[q]}} & & \uparrow{\scriptstyle 0} \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^e(G_d) & \xrightarrow{b_d^{[q]}} & \mathcal{F}^e(G_{d-1}) & \xrightarrow{b_{d-1}^{[q]}} & \ldots & \xrightarrow{b_1^{[q]}} & \mathcal{F}^e(G_0) & \longrightarrow & H_0(\mathcal{F}^e(G_\bullet)) \longrightarrow 0
\end{array}$$

并且我们断言第一行是正合的。

根据我们的条件，

$$0 \to L_d \xrightarrow{a_d} L_{d-1} \to \ldots \to L_1 \xrightarrow{a_1} L_0 \to 0$$

是无挠的，因此根据定理 3.2，对于任意 $1 \leqslant i \leqslant d$，我们有秩$(a_i)$ +秩(a_{i+1}) = 秩(L_i)，并且深度$_{I_{r_i}(a_i)}$ $R \geqslant i$ 。根据定义 2.3， $a_i^{[q]}$ 的各项正是 a_i的各项的q次幂；如果 x_1、……、 x_c 在局部环中是正则的，那么对于任意 $t > 0$， x_1^t、……、 x_c^t也同样是正则的，因此我们有深度$_{I_{r_i}(a_i^{[q]})}$ $R =$ 深度$_{I_{r_i}(a_i)}$ $R \neq 0$。并且， $a_i^{[q]}$ 的每个 $r_i \times r_i$ 子式都是 a_i的 $r_i \times r_i$ 子式的 q次幂。但是由于深度$_{I_{r_i}(a_i)}$ $R \geqslant i > 0$， a_i 至少有一个 $r_i \times r_i$ 子式是 R上的正则元，因此其 q次幂仍然是正则元，所以 $r_i \leqslant$ 秩$(a_i^{[q]})$。但显然秩$(a_i^{[q]})$ 6 秩(a_i)，于是我们有 $r_i =$秩$(a_i^{[q]})$。所以

$$\operatorname{rank}(a_i^{[q]}) + \operatorname{rank}(a_{i+1}^{[q]}) = \operatorname{rank}(L_i) = \operatorname{rank}(\mathcal{F}^e(L_i)).$$

再次由定理 3.2 可知，

$$0 \to \mathcal{F}^e(L_d) \xrightarrow{a_d^{[q]}} \mathcal{F}^e(L_{d-1}) \to \ldots \to \mathcal{F}^e(L_1) \xrightarrow{a_1^{[q]}} \mathcal{F}^e(L_0) \to 0$$

是无挠的，因此该结论成立。

由于 im $\phi_0^{[q]} \subseteq$im $a_1^{[q]}$ ，链映射同伦于零映射。因此我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^e(L_d) & & \\ {\scriptstyle \phi_d^{[q]}}\uparrow & \nwarrow^{\exists\ \psi} & \\ \mathcal{F}^e(G_d) & \xrightarrow{b_d^{[q]}} & \mathcal{F}^e(G_{d-1}) \end{array}$$

其中 ψ 是一个从 $\mathcal{F}^e(G_{d-1})$ 到 $\mathcal{F}^e(L_d)$ 的 R-线性映射。因此 $\phi_d^{[q]} = \psi \circ b_d^{[q]}$ ，于是 im $\phi_d^{[q]} \subseteq I_1(b_d^{[q]})\mathcal{F}^e(L_d) = (I_1(b_d)L_d)^{[q]}$。因此 im $\phi_d \subseteq (I_1(b_d)L_d)^F$。

对于 (2)，将上述交换图对偶化，得到

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^e(L_d)^\vee & & \\ {\scriptstyle \phi_d^{[q]\vee}}\downarrow & \searrow^{\psi^\vee} & \\ \mathcal{F}^e(G_d)^\vee & \xleftarrow{b_d^{[q]\vee}} & \mathcal{F}^e(G_{d-1})^\vee. \end{array}$$

因此 $\phi_d^{[q]\vee} = b_d^{[q]\vee} \circ \psi^\vee$，因此

$$\operatorname{im}(\phi_d^\vee)^{[q]} = \operatorname{im}(\phi_d^{[q]\vee}) \subseteq \operatorname{im}(b_d^{[q]\vee}) = (\operatorname{im}\ b_d^\vee)^{[q]}.$$

因此 im $\phi_d^\vee \subseteq$(im $b_d^\vee)^F$。

□

引理 3.4. [1, 引理 1.3] 设 R 是一个交换环。设 $(L_\bullet, d_\bullet)$ 和 $(G_\bullet, e_\bullet)$ 是长度为 d 的有限生成自由模复形，且 $G_\bullet^\vee$ 无挠。设$\phi_\bullet : G_\bullet \to L_\bullet$ 是一个链映射。若 im $\phi_d^\vee \subseteq$ im $e_d^\vee$，则 im $\phi_0 \subseteq$ im d_1。

引理 3.5。设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个特征为 $p > 0$ 的诺特局部环。 I an R-理想。设 $S = R/I$ and J 是一个包含 I 的 R-理想。若对于 J， J^- 在 S 中的像满足 J 是一个 Frobenius 闭的 S-理想，则 J 是一个 Frobenius 闭的 R-理想，即任何包含 I 的 R-理想都是 Frobenius 闭的。

证明。设 $R \to R/I$ 是自然投影映射。设 $x \in J_R^F$，其中 J_R^F 表示 J 作为一个 R-理想的 Frobenius 闭包，则存在 $q = p^e > 0$ 使得 $x^q \in J^{[q]}$。设 $\bar{x}$ 是 x 在 R/I 中的像。于是 $\bar{x}^q \in \bar{J}^{[q]}$。由于 $\bar{J}$ 作为一个 S-理想是 Frobenius 闭的，我们得到 $\bar{x} \in \bar{J}$，即 $x \in J$。因此 $J_R^F = J$。□

接下来，我们需要证明：若 $\mathrm{pd}_R R/I < \infty$，且 $\underline{x} = x_1$、.....、$x_c \in \mathfrak{m} - I$是 R/I上的极大正则序列，则 $\mathrm{pd}_R R/(I + (\underline{x})) < \infty$。这是对 R-模 $R/(I + (\underline{x}))$ 使用 Auslander-Buchsbaum 公式的前提。只需证明 $c = 1$ 的情形，即引理 3.7，因为随后可以通过归纳得到一般情形。

我们回顾下面这个标准证明中的引理。

引理 3.6. 设 $(R, \mathfrak{m}, K)$ 是一个诺特局部环。给定一个 R-模的短正合列

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

若 $\{M', M, M''\}$ 中任意两个具有有限投射维数，则第三个也具有有限投射维数。

引理 3.7. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 I 是一个 R-理想。假设 $\mathrm{pd}_R R/I < \infty$，并且 $y \in \mathfrak{m} - I$ 是 R/I上的正则元，则 $\mathrm{pd}_R R/(I + (y)) < \infty$。

证明。由于 y 在 R/I上是正则的，我们有短正合列

$$0 \to R/I \xrightarrow{\cdot y} R/I \to R/(I + (y)) \to 0.$$

根据引理 3.6，我们得到 $R/(I + (y))$具有有限投射维数，因为 $\mathrm{pd}_R R/I < \infty$。□

现在我们可以证明第一个命题了。

命题 3.8。设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个特征为 p 且维数为 $R = d$ 的诺特局部 Cohen–Macaulay 环。假设存在一个 R-理想 I，使得 $\mathrm{pd}_R R/I < \infty$，并且 R/I 上的每个极大正则序列都是 Frobenius 闭的，那么 R 上的每个正则序列都是 Frobenius 闭的。

证明。取 $\underline{x} = x_1, \ldots, x_c$ 为 R/I上的一个极大正则序列，则我们有 $\mathrm{depth}_R R/(I + (\underline{x})) = 0$。根据引理 3.7，我们知道 $\mathrm{pd}_R R/(I + (\underline{x})) < \infty$，因此根据 Auslander-Buchsbaum 公式，我们有 $\mathrm{pd}_R R/(I + (\underline{x})) = \mathrm{depth}\ R$，记作 g。设 $\underline{y} = y_1, \ldots, y_g$ 为 R上的一个极大正则序列。令

$$0 \to G_g \xrightarrow{a_g} G_{g-1} \to \ldots \to G_1 \xrightarrow{a_1} G_0 \to 0$$

是 $R/(I + (\underline{x}))$ 的投射分解。令 $K_\bullet(\underline{y})$ 表示 $\underline{y} = y_1, \ldots, y_g$ 的 Koszul复形，它是 $R/(\underline{y})$ 的自由分解。我们首先证明 $(\underline{y})$ 是 Frobenius 闭的。

若否，首先我们断言存在 $w \in (\underline{y})^F - (\underline{y})$，使得 $\mathfrak{m}w \subseteq (\underline{y})$。考虑有限生成的 $R/(\underline{y})$-模 $M = (\underline{y})^F/(\underline{y})$。由于 $\underline{y}$ 是 R上的极大正则元组，我们有深度$_{R/(\underline{y})} M = 0$，这意味着 $\mathrm{soc}_{R/(\underline{y})} M \neq 0$。因此，对于任意 $0 \neq \bar{w} \in \mathrm{soc}_{R/(\underline{y})} M$，其在 R 中的提升 w 满足我们的条件。接下来我们

构造一个从 $G_\bullet^\vee$ 到 $K_\bullet(\underline{y})$的链映射。

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longleftarrow & H_0(G_\bullet^\vee) & \longleftarrow & G_g^\vee & \xleftarrow{a_g^\vee} & G_{g-1}^\vee & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & G_1^\vee & \xleftarrow{a_1^\vee} & G_0^\vee & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \exists\ \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{g-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_g} & & \\
0 & \longleftarrow & R/(\underline{y}) & \longleftarrow & R & \longleftarrow & R^{\oplus g} & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & R^{\oplus g} & \longleftarrow & R & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

为自由模 G_g 固定一组基，从而得到 $G_g^\vee$ 的对应对偶基。设 e_1 是 $G_g^\vee$ 的一组对偶基中的一个元素。令 $\phi_0\colon G_g^\vee \to R$ 通过延拓 $\phi_0(e_1) = w$ 和 $\phi_0(e_i) = 0$ 得到，其中 $i > 1$。我们要证明存在 $\varphi\colon H_0(G_\bullet^\vee) \to R/(\underline{y})$，使图的左侧方块交换，也就是说，证明 $\phi_0(\mathrm{im}\ a_g^\vee) \subseteq (\underline{y})$。由于 $(G_\bullet, a_\bullet)$ 是极小自由的，矩阵 a_g 的所有项都属于 $\mathfrak{m}$，并且作为矩阵，$a_g^\vee$ 正是 a_g 的转置，因此 $a_g^\vee$ 的所有项也都属于 $\mathfrak{m}$。所以只需证明 $\phi_0(\mathfrak{m}G_g^\vee) \subseteq (\underline{y})$。

根据我们对 ϕ_0 的定义，$\phi_0(G_g^\vee) = Rw$，因此 $\phi_0(\mathfrak{m}G_g^\vee) \subseteq \mathfrak{m}w \subseteq (\underline{y})$。于是存在一个诱导映射 $\varphi\colon H_0(G_\bullet^\vee) \to R/(\underline{y})$，使左侧方块交换。由于每个 G_i 都是自由的，$G_i^\vee \cong G_i$ 也自由。由于第二行无挠，我们可以得到 $\phi_i\colon G_{g-i}^\vee \to R^{\oplus\binom{g}{i}}$，它是 ϕ_0 的提升，使图交换。根据定理 3.3，由于 $w \in (\underline{y})^F$，即 $\mathrm{im}\ \phi_0 \subseteq (\mathrm{im}\ (\underline{y}))^F$，我们有 $\mathrm{im}\ \phi_g^\vee \subseteq (\mathrm{im}\ (a_1^{\vee\vee}))^F = (\mathrm{im}\ a_1)^F$。根据命题 3.8 中的条件，我们知道 $(\underline{x})$ 在 R/I 中是 Frobenius 闭的，因此根据引理 3.5，我们知道 $I + (\underline{x})$ 在 R 中是 Frobenius 闭的。根据我们对 $R/(I + (\underline{x}))$ 的投射分解的构造，我们知道 $\mathrm{im}\ a_1 = I + (\underline{x})$，因此 $(\mathrm{im}\ a_1)^F = \mathrm{im}\ a_1$，进而 $\mathrm{im}\ \phi_g^\vee \subseteq \mathrm{im}\ a_1$。由于 $G_\bullet^{\vee\vee}$ 是无挠的，因为 $G_\bullet^{\vee\vee} = G_\bullet$ 是 $R/(I + (\underline{x}))$ 的一个投射分解，根据引理 3.4，我们得到 $\mathrm{im}\ \phi_0 \subseteq \mathrm{im}\ (\underline{y})$，即 $w \in (\underline{y})$，这与我们的断言矛盾。因此 $(\underline{y})^F = (\underline{y})$。现在我们已经证明，$R$ 中的任意极大正则序列都是 Frobenius 闭的。

现在，对于作为极大正则序列一部分的 $y_1, \dots, y_{c'}$，其中 $c' < g$，我们可以将 $y_1, \dots, y_{c'}$ 扩展为极大正则序列 $y_1, \dots, y_{c'}, \dots, y_g$，于是有

$$\begin{aligned}
(y_1, \dots, y_{c'})^F &\subseteq \bigcap_{n>0} (y_1, \dots, y_{c'}, y_{c'+1}^n, \dots, y_g^n)^F \\
&= \bigcap_{n>0} (y_1, \dots, y_{c'}, y_{c'+1}^n, \dots, y_g^n) \\
&= (y_1, \dots, y_{c'}),
\end{aligned}$$

其中，第一个等式成立是因为 $y_1, \dots, y_{c'}, y_{c'+1}^n, \dots, y_g^n$ 也是一个极大正则序列，而第二个等式成立是因为 Krull 交定理。因此，任何由正则序列生成的理想都是 Frobenius 闭的。□

现在我们完成一个主要命题的证明。接下来证明第二个命题。

命题 3.9. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个特征为 $p > 0$、维数为 $R = d$ 的诺特优良局部 Cohen-Macaulay 环。假设存在一个 R-理想 I，使得 ${}_R R/I < \infty$ 具有有限投射维数，并且 R/I 上的每个极大正则序列都是紧闭的。那么 R 上的每个正则序列都是紧闭的。

我们希望将命题 3.8 中的 Frobenius 闭包条件改为紧闭包条件。正如我们所见，定理 3.3 在紧闭包情形下有相应版本，即定理 3.1。但要在引理 3.5 中将 Frobenius 闭包改为紧闭包并非易事。为了使其成立，我们需要假设一些温和的条件，即 R 是一个优良局部环。现在我们证明引理 3.5 的紧闭包类比命题。

以下两个引理出自 Hochster 关于紧闭包的笔记。

引理 3.10. [11, 第 51] 页上的命题 R 设 $p > 0$是特征为 $N \subseteq M$的诺特环，设 R是 $u \in M$-模，并设 $u \in N_M^*$。当且仅当 u 在 M/N 中的像 $\bar{u}$ 属于 $0_{M/N}^*$时， $u \in N_M^*$成立。

因此，若将自由模 G映到 M上，例如 $\varphi\colon G \to M$，设 $H = \varphi^{-1}(N) \subseteq G$，并设 $v \in G$ 满足 $\varphi(v) = u$，那么 $u \in N_M^*$ 当且仅当 $v \in H_G^*$成立。

引理 3.11. [11, 第 183] 页上的紧闭包保持性 R 设 F是一个诺特环，它是 $R \to S$ -有限的，或是某个优良半局部环上的本质有限型环。设 $N \subseteq M$ 是诺特环之间的一个同态，并假设 R是任意的 $u \in N_M^*$-模。设 $1 \otimes u \in \langle S \otimes_R N\rangle_{S\otimes_R M}^*$，则。

注意，根据 Kunz 定理，如果 R 是一个特征为 p 的 F-有限环，那么 R 是优良的。并且，若一个局部环本质上是某个优良半局部环上的有限型，则它仍是优良局部环，因此我们只需假设 R 是优良局部环。这就是我们的温和条件的由来。

现在我们可以证明引理 3.5 的紧闭包版本了。

引理 3.12. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个特征为 $p > 0$ 的诺特优良局部环，且 I 是一个 R-理想。设 $S = R/I$，并设 J 是一个包含 I 的 R-理想。若对于 $\bar{J}$， J 在 S 中的像 J 是一个紧闭的 S- 理想，则 J 是一个紧闭的 R- 理想；也就是说， R 中每个包含 I 的理想都是紧闭的。

证明。令 $\varphi : R \to R/I$ 为自然投影映射。设 $x \in J^*$，则根据 $\bar{}$，令 $R = G$、 $R/I = M$、 $J = N$ 和 $J = H$ 如引理 3.10 中所述，可得 $\bar{\varphi}(x) = \bar{x} \in J_R^*$，其中 J_R^* 被视为 J 作为 R-理想的紧闭包。接下来，根据引理 3.11，$\bar{\bar{x}} = \bar{x} \otimes 1 \in J_S^*$，其中此 J_S^* 被视为 J 作为 S-理想的紧闭包。由条件可知， $J_S^* = J$，于是 $\bar{x} \in J$，因此 $x \in J$。□

现在我们可以证明命题 3.9 了。

命题 3.9 的证明。证明几乎与命题 3.8 的证明相同，只是需要将 Frobenius 闭（或 Frobenius 闭包）替换为紧闭（或紧闭包）。请注意，在此证明中，定理 3.1 替代定理 3.3，引理 3.12 替代引理 3.5。□

4. Generalized Deformation Problems for F-injectivity and F-rationality

本节中，我们使用命题 3.8 解决关于 F-单射性的广义变形问题（见定理 4.3），并使用命题 3.9 解决关于 F-有理性的广义变形问题（见定理 4.4）。首先，我们聚焦于 F-单射性。为此，我们需要以下内容。

命题 4.1。设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个特征为$p > 0$的 F-注入局部环。那么，由正则序列生成的每个理想都是 Frobenius 闭的。

备注 4.2。这个命题与 [24, 命题 3.13], 几乎相同，只是我们的命题删除了 R 是 F-有限的条件。实际上，这个条件可以删除，因为在原命题 [24, 3.13], 的证明中， F-有限性假设被用于 [24, 引理 3.11], , 该引理表明：如果 $(R, \mathfrak{m}, K)$ 是一个 F-注入局部环，并且 R 是 F-有限的，那么对于所有 $P \in \operatorname{Spec}(R)$， R_P 都是 F-注入的。然而，根据 [17, 定理 4.13]， [24, 引理 3.11] 中的这一表述并不要求 R 是 F-有限的。

现在我们可以证明第一个主要结果——定理 4.3。

定理 4.3. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个特征为 $p > 0$、维数为 $\dim R = d$ 的诺特局部 Cohen–Macaulay 环。假设存在一个 I R-理想，使得 $\operatorname{pd}_R R/I < \infty$，且 R/I 是 F-单射的，那么 R 是 F-单射的。

证明. 由于 R/I 是 F-单射的，根据命题 4.1，由 R/I 的正则序列生成的每个理想都是 Frobenius 闭的。再根据命题 3.8， R 上的每个正则序列都是 Frobenius 闭的。由于 R 是 Cohen–Macaulay 的，这意味着每个参数理想都是 Frobenius 闭的。最后，由 [24, 推论 3.9], , 我们得到 R 是 F- 单射的。□

本节剩余部分，我们将在温和的假设下解决关于 F-有理性的广义变形问题。

定理 4.4. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个特征为 $p > 0$ 的诺特优良局部环，且 $\dim R = d$。假设存在 I 一个 R-理想，使得 $\operatorname{pd}_R R/I < \infty$，并且 R/I 是 F-有理的，则 R 是 F-有理的。

证明. 根据定义 2.7 和注记 2.8， F-有理性意味着该环是 Cohen–Macaulay 环，且每个参数理想都是紧闭的。由于 R/I 是 F-有理的，因此它是 Cohen–Macaulay 环，所以 R/I 上的每个极大正则序列都是紧闭的。因此，根据命题 3.9， R 上的每个正则序列都是紧闭的。一旦证明 R 是 Cohen–Macaulay 环，就可以得出每个参数理想都是紧闭的。因此，只需证明 R 是 Cohen–Macaulay 环。由于 R/I 是 F-有理的，根据注记 2.8，它是 Cohen–Macaulay 环。因此，根据 [3, 定理 2.1], , 我们有 R 是 Cohen–Macaulay 环。□

5. Generalized Deformation Problems for Serre's Conditions

要证明环 R 是 R_k 或 S_k，自然会假设存在一个满足某些条件的素理想 $P \subset R$ （对于 R_k，条件是 $\operatorname{ht} P \leqslant k$；对于 S_k，条件是深度 $R_P \leqslant k$）。通常， $I \subseteq P$ 的情形比较容易处理。本节针对 $I \nsubseteq P$ 的情形建立两个引理：若理想 $P + I$ 在诺特局部环（R， $\mathfrak{m}$）中是 $\mathfrak{m}$-primary，则 $\operatorname{pd}_R R/I \geqslant \dim R/P$，且 $\operatorname{pd}_R R/I \geqslant \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} R_P$。前一个引理有助于证明关于 R_k 的结果，后一个则有助于证明关于 S_k 的结果。二者都有助于证明关于 $R_k + S_{k+1}$ 的结果。由此，我们得到正规环和约化环的推论。最后，我们引用由 Robert 提出的 Auslander 零因子猜想（见 [22]），以及关于约化环的广义变形问题的推论，以证明整环的定理。

引理 5.1. [3, 定理 6.1(1)] 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环， I 是一个 R-理想，且 $\operatorname{pd}_R R/I < \infty$。如果 R/I 是正则的，那么 R 也是正则的。

接下来，我们列出新交叉定理，从而得到一组不等式（推论 5.4），适用于 R中具有有限投射维数的理想 I；本节中，我们将在证明关于 R_k 的第一个重要定理（定理 5.7）时用到这些不等式。

定理 5.2（新交叉定理）。 [21, 定理 13.4。1] 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个局部环，且 $\dim\ R=d$。令

$$F_\bullet : 0 \to F_k \to \ldots \to F_0 \to 0$$

是一个非正合复形，其中 F_i 自由，并且对于任意 i, $l(H_i(F_\bullet)) < \infty$。那么 $k \geqslant d$。

命题 5.3（Hochster [12], Peskine-Szpiro [19] 和 Roberts [23]）。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环， I 是一个 R-理想，且 $\mathrm{pd}_R\, R/I < \infty$，则 $\dim\ R \leqslant \dim\ R/I + \mathrm{pd}_R\, R/I$。

证明。设 $s=\dim\ R/I$。设 x_1, ..., x_s 是 R/I 的一个参数系，并令

$$F_\bullet : 0 \to F_g \to \ldots \to F_0 \to 0$$

是 R/I 的一个极小自由分解，其中 $g=\mathrm{pd}_R\, R/I$。考虑 $C_\bullet = F_\bullet \otimes_R K_\bullet(\underline{x})$。由于 $F_\bullet$ 与复形拟同构

$$F'_\bullet : \ldots \to 0 \to 0 \to R/I \to 0$$

其中 R/I 位于复形的同调次数 0 处，我们有

$H_i(C_\bullet) = H_i(K_\bullet(\underline{x}) \otimes_R F_\bullet) \cong H_i(K_\bullet(\underline{x}) \otimes_R F'_\bullet) \cong H_i(K_\bullet(\underline{x}) \otimes_R R/I) \cong H_i(\underline{x};\ R/I)$，它被 $(\underline{x}) + I$ 湮灭。由于 $(\underline{x}) + I$ 是一个 $\mathfrak{m}$- 初等理想，我们有 $l(H_i(C_\bullet)) < \infty$。又由于 $F_\bullet$ 的长度为 g，且 $K_\bullet(\underline{x})$的长度为 s，因此 $C_\bullet$ 的长度为 $g+s$。所以，对于 $0 \leqslant i \leqslant$， $C_i \neq 0\ \mathrm{pd}_R\, R/I + s$。此外， $H_0(C_\bullet) \cong H_0(\underline{x};R/I) \cong R/(I+(\underline{x})) \neq 0$。现在由定理 5.2，我们有 $g+s \geqslant \dim\ R$，即 $\mathrm{pd}_R\, R/I + \dim\ R/I \geqslant \dim\ R$。□

因此我们得到以下推论：

推论 5.4. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环， I 是一个 R-理想，且 $\mathrm{pd}_R\, R/I < \infty$。那么 $\mathrm{depth}_I\, R \leqslant \mathrm{ht}\ I \leqslant \dim\ R - \dim\ R/I \leqslant \mathrm{pd}_R\, R/I$。特别地，如果 I 是完美的，则这些量都相等。

引理 5.5. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环， I 是一个完美的 R-理想，且 $\mathrm{pd}_R\, R/I < \infty$。那么对任意 $P \in \mathrm{Spec}(R)$， IR_P 是一个完美的 R_P-理想。

证明。我们要证明 $\mathrm{grade}(IR_P, R_P) = \mathrm{pd}_{R_P}\, R_P/IR_P$，也就是说，根据推论 5.4，我们只需证明 $\mathrm{grade}(IR_P, R_P) \geqslant \mathrm{pd}_{R_P}\, R_P/IR_P$。

根据 [11, 第 114], 页的推论，$\mathrm{grade}(IR_P, R_P) \geqslant \mathrm{grade}\ I$。因此我们有

$$\mathrm{grade}(IR_P, R_P) \geqslant \mathrm{grade}\ I = \mathrm{pd}_R\, R/I \geqslant \mathrm{pd}_{R_P}\, R_P/IR_P.$$

□

引理 5.6. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环， I 是一个 R-理想，且 $\mathrm{pd}_R\, R/I < \infty$； P 是 R 的一个素理想，满足 $I \nsubseteq P$； $P+I$ 是 $\mathfrak{m}-primary$，则 $\dim\ R/P \leqslant \mathrm{pd}_R\, R/I$。

证明。由于 $\mathrm{pd}_R\, R/I < \infty$，我们可以写出一个极小自由分解

$$0 \to F_n \to \ldots \to F_0 \to 0$$

关于自由 R-模 F_i的 R/I。将其与 R/P张量积，得到

$$0 \to F_n \otimes_R R/P \to \ldots \to F_0 \otimes_R R/P \to 0. \tag{5.1}$$

由于 $\mathrm{Tor}_0^R(R/I,R/P) = R/I\otimes_R R/P = R/(I+P) \neq 0$，复形 (5.1) 不是正合的。并且每个 $F_i\otimes_R R/P$都是自由 R/P-自由模。由于每个 $\mathrm{Tor}_i^R(R/I,R/P)$ 都可以被 P 和 I消去，因此也可以被 $P+I$消去。又由于 $P+I$ 是 $\mathfrak{m}$-一次的，$\mathrm{Tor}_i^R(R/I,R/P)$ 可以被 $\mathfrak{m}$的某个幂消去。因此，若将 $\mathrm{Tor}_i^R(R/I,R/P)$ 视为一个 R/P-模，则它可以被 $\mathfrak{m}/P$ 的某个幂消去，即 $l_{R/P}(\mathrm{Tor}_i^R(R/I,R/P)) <\infty$。因此，由定理 5.2 可得 $n \geqslant \dim\ R/P$，即 $\mathrm{pd}_R\, R/I \geqslant \dim\ R/P$。□

现在我们可以开始证明广义变形问题的 R_k。

定理 5.7. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个等维且串联的诺特局部环，I 是一个完美 R-理想，且 $\mathrm{pd}_R\, R/I<\infty$。若 R/I 是 R_k，则 R 是 R_k。

证明。设 $P\in \mathrm{Spec}(R)$，且 $\mathrm{ht}\ P\leqslant k$，我们要证明 R_P 是正则的。

若 $I\subseteq P$，则 $\mathrm{ht}_{R/I}\, P(R/I) 6 \mathrm{ht}\ P \leqslant k$。因此 $(R/I)_{P(R/I)} \cong R_P/IR_P$ 是正则的。并且对于 $\mathrm{pd}_{R_P}\, R_P/IR_P \leqslant \mathrm{pd}_R\, R/I<\infty$，由引理 5.1 可知，$R_P$ 是正则的。

若 $I\nsubseteq P$，则取一个包含 $P+I$ 的极小素理想 Q，我们断言 $\mathrm{ht}_{R/I}\, Q/I \leqslant k$。为证明这一断言，只需证明 $\dim\ R_Q/IR_Q \leqslant \mathrm{ht}_{R_Q}\ PR_Q$，因为 $\dim\ R_Q/IR_Q = \mathrm{ht}_{R/I}\, Q/I$，且由 R 等维且串联这一条件可得 $\mathrm{ht}_{R_Q}\, PR_Q = \mathrm{ht}\ P$。由于局部化保持等维性和串联性，且根据引理 5.5，局部化也保持完美理想和有限投射分解，因此我们可以用 $(R,\mathfrak{m})$ 替换 R_Q，此时目标变为 $\dim\ R/I \leqslant \mathrm{ht}\ P$。又由推论 5.4，$\dim\ R/I = \dim\ R - \mathrm{ht}\ I$，故只需证明 $\dim\ R - \mathrm{ht}\ I \leqslant \mathrm{ht}\ P$。由推论 5.4，我们有 $\mathrm{ht}\ I = \mathrm{pd}_R\, R/I$。由命题 2.14，我们有 $\dim\ R/P = \dim\ R - \mathrm{ht}\ P$。因此只需证明 $\dim\ R/P \leqslant \mathrm{pd}_R\, R/I$，这由引理 5.6 可知成立。

因此该断言成立。由于 R/I 是 R_k，我们有 $(R/I)_{Q/I} \cong R_Q/IR_Q$ 是正则的。又因 $\mathrm{pd}_{R_Q}\, R_Q/IR_Q \leqslant \mathrm{pd}_R\, R/I<\infty$，由引理 5.1 可知，$R_Q$ 是正则的。并且由于 R_P 是 R_Q 的局部化，我们得到 R_P 是正则的。□

引理 5.8. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，I 是一个具有 $\mathrm{pd}_R\, R/I<\infty$ 的 R-理想。设 P 是 R 的一个素理想，使得 $I\nsubseteq P$ 且 $P+I$ 是 $\mathfrak{m}$- 初等的，则 $\mathrm{depth}\ R \leqslant \mathrm{depth}\ R_P + \mathrm{pd}_R\, R/I$。

证明. 由引理 5.6，我们已经有 $\dim\ R/P \leqslant \mathrm{pd}_R\, R/I$。此外，我们还有 $\mathrm{depth}_P\, R \leqslant \mathrm{depth}\ R_P$，因此只需证明

$$\mathrm{depth}\ R - \mathrm{depth}_P\, R \leqslant \dim\ R/P. \tag{5.2}$$

设 $x_1,\dots,x_i$ 是包含于 P 中的一个极大正则序列，并将其扩展为 $x_1,\dots,x_i,x_{i+1},\dots,x_n$，该序列是在 m 中包含的极大正则序列。于是 $n-i = \mathrm{depth}\ R - \mathrm{depth}_P\, R$，且 $x_{i+1},\dots,x_n$ 在 $R/(x_1,\dots,x_i)$ 上是极大正则的，因此 $n-i = \mathrm{depth}\ R/(x_1,\dots,x_i)$。

由于 $x_1,\dots,x_i$是包含于 P中的极大正则序列，P在 $R/(x_1,\dots,x_i)$上不包含任何正则元素，因此 P由 $R/(x_1,\dots,x_i)$的零因子组成，故 P包含于 $R/(x_1,\dots,x_i)$的关联素理想之并中，即 $P\subseteq Q$，其中某个 $Q\in$属于 $\mathrm{Ass}(R/(x_1,\dots,x_i))$。因此 $n-i = \mathrm{depth}\ R/(x_1,\dots,x_i) 6 \dim\ R/Q \leqslant \dim\ R/P$.□

定理 5.9. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，I 是一个 R-理想，且 $\mathrm{pd}_R\, R/I<\infty$。如果 R/I 是 S_k，那么 R 是 S_k。

证明. 只需考虑满足深度 $R_P < k$ 的那些 $P \in$ 谱(R)，并证明深度 $R_P =$ 高度 P。

若 $I \subseteq P$，则深度 $(R/I)_P =$深度 $R_P -$投射维数$_{R_P} R_P/IR_P \leqslant$深度 $R_P < k$。由于 R/I 是 S_k，因此

$$\mathrm{ht}_{R/I}\, P(R/I) = \mathrm{depth}\,(R/I)_{P(R/I)}. \tag{5.3}$$

我们要证明高度 $P =$深度 R_P。由于投射维数$_R\, R/I < \infty$ 意味着投射维数 $_{R_P} R_P/IR_P <\infty$，我们可以用 R 替换 R_P，于是 (5.3) 变为

$$\dim\, R/I = \mathrm{depth}\, R/I,$$

我们要证明维数 $R =$深度 R。由 [3, 定理 2.1] 可知，这成立。

若 $I \nsubseteq P$，令 Q 为 $P + I$ 上的一个极小素理想。我们断言，深度 $(R/I)_Q < k$。由于我们有投射维数$_{R_Q} R_Q/IR_Q < \infty$，由引理 5.8 可得，深度 $R_Q \leqslant$ 深度 $R_P +$ 投射维数$_{R_Q} R_Q/IR_Q$。进而由 Auslander-Buchsbaum 公式可得，深度 $(R/I)_Q =$ 深度 $R_Q -$ 投射维数$_{R_Q} R_Q/IR_Q \leqslant$ 深度 $R_P < k$，因此断言成立。

由于 R/I 是 S_k，我们有 $\mathrm{depth}(R/I)_Q = \mathrm{ht}_{R/I}\, Q(R/I)$，即 R_Q/IR_Q 是 Cohen–Macaulay。因此，再次由 [3, 定理 2.1] 可知，R_Q 是 Cohen–Macaulay。又因为 R_P 是 R_Q的一个局部化，所以 R_P 是 Cohen–Macaulay，即 $\mathrm{depth}\ R_P = \mathrm{ht}\ P$。□

定理 5.10. 设（$R, \mathfrak{m}$）是一个诺特局部环，I 是一个 R-理想，且 $\mathrm{pd}_R\, R/I <\infty$。若 R/I 是 S_{k+1} 且 R_k，则 R 也具有 S_{k+1} 且 R_k。

证明。由定理 5.9，我们已经证明，R/I 是 S_{k+1} 将推出R 是 S_{k+1}。因此只需证明 R 是 R_k。设 $P \in \in$谱(R)且 $\mathrm{ht}\ P \leqslant k$，我们需要证明 R_P 是正则的。

若 $I \subseteq P$，则 $\mathrm{ht}_{R/I}\, P/I \leqslant \mathrm{ht}\ P \leqslant k$，因此 $(R/I)_{P/I} \cong R_P/IR_P$ 是正则的。由于 $\mathrm{pd}_{R_P}\, R_P/IR_P < \infty$，根据引理 5.1 可知 R_P 是正则的。这部分与定理 5.7 证明的第二段相同。

若 $I \nsubseteq P$，我们选取一个包含于 $P + I$ 的极小素理想 Q，接着断言 $\mathrm{depth}\,(R/I)_{Q/I} \leqslant k$。根据 Auslander-Buchsbaum 公式，$\mathrm{depth}\,(R/I)_{Q/I} =$depth $R_Q -$pd $_{R_Q} R_Q/IR_Q$，因此只需证明

$$\mathrm{depth}\ R_Q - \mathrm{pd}_{R_Q} R_Q/IR_Q \leqslant \mathrm{ht}_{R_Q}\, PR_Q = \mathrm{ht}\ P \leqslant k.$$

注意，我们有如下

$$\begin{aligned}\mathrm{depth}\ R_Q &\leqslant \mathrm{depth}_{PR_Q}\, R_Q + \dim\, R_Q/PR_Q \\ &\leqslant \mathrm{ht}_{R_Q}\, PR_Q + \dim\, R_Q/PR_Q \\ &\leqslant \mathrm{ht}_{R_Q}\, PR_Q + \mathrm{pd}_{R_Q}\, R_Q/IR_Q,\end{aligned}$$

其中，第一行由引理 5.8 中的 (5.2) 得出，第三行由引理 5.6 得出。因此该断言成立，即 $\mathrm{depth}(R/I)_{Q/I} \leqslant k$。

由于 R/I 是 S_{k+1}，我们有

$$k \geqslant \mathrm{depth}\,(R/I)_{Q/I} \geqslant \min\{k+1, \mathrm{ht}_{R/I}\, Q/I\},$$

由此得到 $k \geqslant \mathrm{ht}_{R/I}\, Q/I$。又因为 R/I 是 R_k，所以 $(R/I)_{Q/I}$ 是正则的，即 R_Q/IR_Q 是正则的。由引理 5.1，R_Q 是正则的。因此，由于 R_P 是 R_Q的局部化，R_P 是正则的。□

众所周知，一个环是既约的，当且仅当它是 R_0 且 S_1；一个环是正规的，当且仅当它是 R_1 且 S_2。因此，我们自然得到以下两个推论。

推论 5.11。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环， I 是一个 R-理想，且 $\mathrm{pd}_R R/I<\infty$。若 R/I 既约，则 R 既约。

推论 5.12。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环， I 是一个 R-理想，且 $\mathrm{pd}_R R/I<\infty$。若 R/I 正规，则 R 正规。

最后，我们来讨论整环的最后一种情形。我们需要以下结果作为引理：

引理 5.13。 [22, 猜想 1] 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环， M 是一个非零的有限投射维数 R-模。若 $x\in R$ 在 M 上正则，则 x 在 R 上正则。

这个猜想称为 Auslander 零因子猜想，但由于 Peskine-Szpiro 交定理（见 [22]），它已经成为一个定理，因此我们可以直接使用。现在，我们准备证明关于整环的广义变形问题的最后一个定理。

定理 5.14. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环， P 是一个 R-理想，且 $\mathrm{pd}_R R/P<\infty$。若 R/P 是整环，则 R 是整环。

证明。由于 R/P 是整环，所以它是既约的。由推论 5.11 可知，R 是既约的。因此，要证明 R 是整环，只需证明 R 有唯一的极小素理想。

设 $M=R/P$ 如引理 5.13 中所述，则该引理表明，若 $x\notin P$，则 x 在 R 上正则。等价地，若 x 是 R 上的零因子，则 $x\in P$。因此， R 的所有关联素理想都包含于素理想 P 中。由于 R 是既约的，这等价于说 R 的所有极小素理想都包含于 P 中。

由于 $\mathrm{pd}_R R/P<\infty$，我们有 $\mathrm{pd}_{R_P} R_P/PR_P<\infty$，即 R_P 是正则局部环。因此 R_P 是整环，这说明 R_P 有唯一的极小素理想。由于 R 的所有极小素理想都包含于 P 中，且 R 的极小素理想与 R_P 的极小素理想之间存在一一对应，我们知道 R 有唯一的极小素理想。因此 R 是整环。□

Acknowledgement

在此，我谨感谢马林泉教授向我介绍这些主题，并对这项工作提出许多非常重要的意见。作者得到 NSF-DMS 资助项目 1901672 的部分资助。作者感谢审稿人提出的宝贵意见。

References

[1] Aberbach, Ian M.(1-MO) *Tight closure in F-rational rings.*《名古屋数学杂志》135(1994),43-54. [2] Aberbach, Ian M.(1-MO); Katzman, Mordechai(1-MN); MacCrimmon, Brian(1-MO) *Weak F-regularity deforms in $\mathbb{Q}$-Gorenstein rings.*《代数杂志》204(1998), no.1, 281- 285.

[3]Avramov, Luchezar L.(BG-SOFI); Foxby, Hans-Bjørn(DK-CPNH); Halperin, Stephen(3 72 *Descent and ascent of local properties along homomorphisms of* -TRNT) 纯粹 *finite flat dimension.* **38** 1985 2 3, 167 185 与应用代数杂志 ( ), no. - - .[4] Buchsbaum, David A.; Eisenbud, David *What makes a complex exact?.* 《代数杂志》25(1973), 259-268. [5] Bruns, Winfried; Herzog, H. J¨ urgen *Cohen-Macaulay Rings*. 剑桥：剑桥大学出版社 39(1998). [6] Brezuleanu, A.; Rotthaus, C. *Eine Bemerkung über Ringe mit geometrisch normalen formalen Fasern.* **39** 1982 1, 19 27 巴塞尔数学文 献 ( ), no. - .[7]Dieudonn´e, J.; Grothendieck, A. *Éléments de géométrie algéque. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I.* Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. 20(1964), 1-259.[8] Dieudonn´e, J.; Grothendieck, A. *Éléments de géométrie algéque. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II.* Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. 24(1965), 1-231. [9] Datta, Rankeya; Murayama, Takumi *Permanence properties and* F*-injectivity.*, 即将发表于《数学研究快报》, 可见于 https://arxiv.org/abs/1906.11399. [10] Fedder, Richard(1-MO) F*-purity and rational singularity.* 美国数学会会刊 278(1983), no.2, 461-480. [11] Hochster, Melvin *Foundations of tight closure theory.*, 可见于 https://dept.math.lsa.umich.edu/~hochster/711F07/fndtc.pdf.[12] Hochster, Melvin *Topics in the Homological Theory of Modules over Commutative Rings.* **24** 1975 CBMS数学区域 会议系列 ( ).[13] Hochster, Melvin(1 1 F*-regularity test elements and* -MI); *smooth base change.* **346** 1994 1, 1 62 Huneke, Craig(-PURD) , , 美国数学会会刊 ( ), no. - .[14] Horiuchi, Jun(J-NPIT); Miller, Lance Edward(1-AR); Shimomoto, Kazuma(J- MEIJ2T) *Deformation of* F*-injectivity and local cohomology.* 印第安纳大学数学杂志 63(2014), no.4, 1139-1157.[15] Hara, Nobuo(J-WASES); Watanabe, Kei-Ichi(J-NIHOH) *F-regular and F-pure rings vs. log terminal and log canonical singularities.* **11** 2002 代数几何杂志 ( ), no.2, 363 392- .[16] Ionescu, Cristodor(R-ASRR) *Sur les anneaux aux fibres formelles géométriquement régulières en codimension* n*.* **31** 1986 7, 599 罗马尼亚纯粹 与应用数学杂志 ( ), no. - 603.[17] 马林泉 and Thomas Polstra F*-singularities: a commutative algebra approach.*, 可见于 https://www.math.purdue.edu/~ma326/F-singularitiesBook.pdf. [18] Matsumura, Hideyuki *Commutative Ring Theory*. 剑桥：剑桥大学出版社 8 (1987). [19] Peskine, C.; Szpiro, L. *dimension projective finie et cohomologie locale. Applications à la démonstration de conjectures de M. Auslander H. Bass et A. Grothendieck.* , Inst. Hautes ´ Etudes Sci. Publ. Math. (1973), no.42, 47-119. [20] Polstra, Thomas; Simpson, Austyn F*-purity deforms in* $\mathbb{Q}$*-Gorenstein rings.*, 即将发表于 Int. Math. Math. Res. Not., 可见于 https://arxiv.org/abs/2009.13444. [21] Roberts, Paul C. *Multiplicities and Chern Classes in Local Algebra.* 剑桥数学专著 133(1998). [22] Roberts, Paul C. *Intersection theorems*载于：交换代数，载于：数学科学研究所出版物 15(1989), 施普林格出版社，柏林, 417-436. [23] Roberts, Paul C. *Le théorème d'intersection.* 巴黎科学院报告 S´er. I, N° 7, t.304 (1987), 177-180.[24] Quy, Pham Hung(VN-FPT-M); Shimomoto, Kazuma(J-NIHOH) *F-injective and Frobenius closure of ideals in Noetherian rings of characteristic* $p > 0$*.* 数学进展 313(2017), 127-166. [25] Schwede, Karl(1-MI) F*-adjunction.* 代数与数论 3(2009), no.8, 907-950. [26] Seydi, Hamet *La théorie des anneaux japonais.* 雷恩大学，雷恩，1972年。 ´Singh, Anurag K.(1- MI) [27] 纯粹与应用代数杂志 140(1999), no.2, 137-148. *Deformation of* F*-purity and* F*-regularity.* Singh, Anurag K.(1-MI) [28] 美国数学杂志 121(1999), no.4, 919-929.

Department of Mathematics, Purdue University, 150 N. University St., W. Lafayette, IN 47907 , U.S.A.
Email address: li2889@purdue.edu