Prepared for submission to JHEP

arXiv:2305.00049v3 [hep-th] 6 Jul 2023

扭量单极子与手征代数

Niklas Garner[1] Natalie M. Paquette[1]

[1]华盛顿大学物理系，西雅图，美国
电子邮箱：nkgarner@uw.edu，npaquett@uw.edu

Abstract:我们从 Costello 与第二作者提出的四维/二维扭量对应角度出发，开始研究在渐近零无穷远处的天球上支撑的二维手征代数中插入磁荷态，会如何影响四维自对偶规范理论。通过将六维扭量理论约化为具有适当边界条件的三维全纯-拓扑理论，我们可以为天球手征代数的某些非微扰增强提供动机；这些增强对应于由三维边界单极子算符产生的模所进行的扩展。我们还将四维（非阿贝尔）单极子的插入识别为天球手征代数的一族谱流自同构。

目录

1 引言 **2**

2 三维规范理论中的单极子 **4**

2.1 HT-扭曲 $\mathcal{N}=2$ 5 2.1.1 阿贝尔单极子 9 2.1.2 非阿贝尔单极子 11

2.2 边界单极子 12 2.2.1 阿贝尔规范理论中的边界单极子与谱流 13 2.2.2 非阿贝尔规范理论中的边界单极子 17

3 扭量单极子算符 **18**

3.1 自对偶规范理论，来自 $\mathbb{PT}$ 19 3.1.1 上的反常 $\mathbb{PT}$ 19 3.1.2 降至三维 20 3.1.3 天球手征代数作为边界手征代数 21 3.1.4 由 Koszul 对偶得到的威尔逊线模 22

3.2 天球单极子算符 25 3.2.1 降至三维与天球手征代数 25 3.2.2 自对偶量子电动力学中的天体谱流 27 3.2.3 四维诠释 28 3.2.4 自对偶单极子 31

4 非阿贝尔单极子的初步探索 **33**

4.1 来自全纯丛的单极子 $\mathbb{PT}$ 33 4.2 天体谱流 34 4.3 扭量球面的缩放与旋转 36 4.4 成对螺旋度 37 4.5 胶子与单极子的天球算符乘积展开 38

5 结论与推测 **40**

A 扭量空间约定 **43** A.1 旋转扭量空间 44

1 引言

人们近来逐渐认识到，在渐近平坦时空上、可能与引力耦合的四维量子场论具有经典渐近对称性，这些对称性组织成手征代数 [1, 2]。代数元素上的算符乘积源于无质量态散射振幅的某些共线极限。利用四维零动量与渐近零无穷远处球面上各点之间的标准映射，人们可以将手征代数理解为一种特殊二维共形场论的全纯对称代数；该理论由天球承载，并被认为与四维“体内”理论全息对偶。

量子修正对这些经典手征代数及其四维起源的影响，近期已由多个研究团队展开探索，例如 [3–9]。 [7] 中发现，在一种自对偶杨–米尔斯（SDYM）理论的表述中，若将该理论的单圈共线劈裂振幅纳入渐近对称性的手征代数，该代数便不再满足结合律。这种“量子”层面的结合律失效，与将四维理论提升为扭量空间上局域全纯理论时遇到的障碍直接相关。该障碍表现为六维全纯理论中的规范反常 [10]。反过来，也可以将 SDYM 与一种具有四次动能项的特定标量场耦合，通过扭量空间上的格林–施瓦茨类机制抵消六维规范反常，从而得到一个包含圈效应且满足结合律的手征代数 [6–8]。本文聚焦于手征代数满足结合律的理论：既包括树级的自对偶理论，也包括在超越经典物理时所考虑的这类可积“扭量”四维理论。它们可提升为扭量空间上的局域无反常全纯理论，从而保证手征代数满足结合律。这类理论有时还能提升为真正的拓扑弦理论 [11], ，并沿着扭曲全息计划的思路 [13, 14]，构造平直时空全息的可积玩具模型 [12], 。值得探究的是，能否通过其他方式恢复结合律，或者能否以某种方式放宽手征代数的公理，以容纳一种奇异的共形场论对偶，或许可以参考 [15] 的思路。

关于天球共形场论及其相关手征代数的物理，诸多开放问题之一是如何表述四维磁荷态在二维中的对应物。文献 [16, 17] 研究了含有磁荷对象的（阿贝尔）规范理论中的软定理。本文则将着重讨论此类态的共形软模的手征代数表述，并借助文献 [6] 的扭量构造。在此过程中，我们将揭示非幺正二维手征代数表示论中一系列新颖或尚未充分探索的现象。

接下来，让我们回顾文献 [6] 中的部分基本设定。扭量空间是一个由如下非平凡纤维化给出的复流形

$$\mathbb{PT} := \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \to \mathbb{CP}^1 \tag{1.1}$$

即 $\mathbb{PT}$ 是 两个 $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^1$ 线丛副本的全空间，以及作为实流形

等价于

$$\mathbb{PT} \simeq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{CP}^1. \tag{1.2}$$

我们可以研究 $\mathbb{PT}$ 上各种局部、无反常的全纯理论；沿 $\mathbb{CP}^1$ 进行维数约化后，这些理论会化为我们感兴趣的四维理论。特别是，我们关注 [10] 中研究的六维理论，它们由带有特定规范代数 $\mathfrak{g}$ 的全纯 BF 理论构成，并通过系数经过谨慎选择的全纯 Chern-Simons 项，与 Kodaira-Spencer“引力”理论（复结构变形）的自由极限 [18] 耦合。这些理论约化后会得到四维非幺正共形场论，由与四次轴子样场耦合的自对偶杨-米尔斯理论构成。渐近对称性的二维手征代数通过 [6]，中阐述的扭量方法构造而成，并支撑在扭量丛的零截面上；该零截面又可识别为零无穷远处的天球。

文献 [6]，中提出了对这一手征代数的另一种理解方式，它非常适合我们当前的目的，具体如下。考虑 $\mathbb{PT}\backslash\mathbb{CP}^1 \simeq S^3 \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{CP}^1$，其中我们移除了对应于 $\mathbb{R}^4$原点的球面。我们通过沿 S^3约化，将六维理论以另一种方式紧化至三维；与通常沿 $\mathbb{CP}^1$进行的约化不同，为了涵盖手征代数真空模中的所有（无穷多个）态，必须纳入一列无穷的卡鲁扎-克莱因模。以这种方式紧化六维全纯“引力”理论，会在 $\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{CP}^1$上得到一个三维全纯-拓扑非引力理论，其中手征代数构成了支撑在无穷远处、径向坐标中全纯 $\mathbb{CP}^1$ 上的边界局域算符的代数。已知某些三维$\mathcal{N}=2$ 理论经超对称扭曲 [19] 后会产生三维全纯-拓扑理论；事实上，很容易从“低维”视角辨认出哪种三维 $\mathcal{N}=2$ 理论可以经扭曲，得到最终的全纯-拓扑理论，并使“天界”手征代数成为其边界手征代数[6]。这一三维视角将是我们了解磁性态及其对手征代数影响的主要窗口。

另一方面，三维 $\mathcal{N}=2$ 规范理论长期以来一直是研究的热点。它们通常流向强相互作用超共形场论，并具有丰富的红外对偶性；此外，它们与非超对称近亲理论在定性上也有相似之处，并在凝聚态物理中有实用的应用。人们从多个角度研究了这些三维理论中的磁单极子（例如，参见经典论文 [20, 21]）。对本文而言尤其重要的是，这些理论的半 BPS 边界条件已在 [22–25]，中得到广泛研究，而 [25] 表明，规范场上的狄利克雷边界条件也支持非平凡的边界单极算符。此类半 BPS 边界条件与全纯-拓扑扭曲相容，并可从这一角度直接在一阶形式体系中研究 [26]。此外，研究者还探讨了由此得到的体内局域算符（包括单极子）的（结合、交换）手征代数，以及边界（结合、非交换）手征代数；后者也可能包含单极子 [26]。在非阿贝尔规范理论中，边界单极子仍难以直接处理[1]，但三维阿贝尔体内和边界单极子则可以通过具体方法加以研究

[1]从几何角度看，必须在仿射 Grass-的 Dolbeault 同调上构造一种手征代数结构

在扭曲形式体系中 [27]。本文主要旨在研究支持“天界”手征代数边界条件的三维全纯-拓扑理论中的单极子。将这些态拉回到扭量空间，再将它们“推”回四维后，我们便能探索平直时空全息词典的各个方面，包括相应的非微扰场构型。

本文其余部分的安排如下。在第2节中，我们回顾全纯-拓扑扭曲理论中三维磁单极子的物理，以及局域于全纯边界上的磁单极子如何在微扰边界手征代数中实现谱流自同构，至少在阿贝尔情形下如此。我们还着重说明，边界磁单极子如何确保微扰手征代数的模的荷为整数（在适当的约定下），并对这类模施加关系。这类模在物理上可由带边界的三维理论中的威尔逊线实现：威尔逊线终止于边界手征代数平面。接着，我们通过 Koszul 对偶，构造与3.1.4节中微扰天体手征代数相关的、扭量空间上类似的（全纯）威尔逊线模。这些模将与产生谱流自同构的天体边界磁单极子相互作用，并受到它们的约束。

在第3 节中，我们回顾四维自对偶规范理论向六维局域全纯理论的提升，并进而回顾后者如何也可视为带边界的三维全纯-拓扑理论，其中包含无穷多个场，遵循[6]。我们讨论自对偶量子电动力学中微扰三维边界代数（在此背景下等价地说，即四维天体手征代数）可能存在的非微扰扩展，并进一步讨论四维阿贝尔自对偶磁荷态，以及试图将此类态映射到三维边界代数时出现的一些疑难。最后，在第4 节中，我们研究自对偶非阿贝尔规范理论，并展示四维磁荷态如何在天球手征代数上导出谱流自同构。由插入四维自对偶磁荷态所产生的天球手征代数上的谱流自同构（及其逆变换）见式（4.31）、（4.32）。最后，我们以开放问题和未来方向作结。

为便于阅读，我们列出下表，汇总相关的数学符号。在此表中， $\mathcal{M}$ 是具有THF结构的三维流形； G 是（定义在 $\mathbb{C}$上）的代数群； X 是带有Dolbeault算子$\overline{\partial}$ 的复流形，而 $\mathcal{E}$ 是 X 上的全纯向量丛。

2 三维规范理论中的磁单极子

我们首先回顾三维 $\mathcal{N}=2$ 规范理论中磁单极子的基本方面，主要关注阿贝尔规范理论，以及狄利克雷边界条件下边界磁单极子的相关方面。关于后者的更多细节，请参见 [25, 26]。

三维规范理论中的局域算符具有一种自然的味对称性，称为拓扑味对称性，并带有一个称为单极子数的相应守恒荷。这

与规范群 G相关联的mannian Gr_G ，其取值于某个线丛；对于非阿贝尔 G，Gr_G 的非平凡几何使得难以明确写出手征代数结构。

$\Omega = \Omega(\mathcal{M})/(\mathrm{d}z)$	$\mathcal{M}$ 上的微分分次形式代数，模去与 $\mathrm{d}z$ 成比例的微分形式
$\mathbf{\Omega}^{(j)}$	由 $\mathrm{d}z^j$ 扭曲的 Ω
ΠV	超向量空间 V 的奇偶移位算子
$\mathcal{O} = \mathbb{C}[\![z]\!]$	变量 z 的形式级数代数
$\mathbb{D} = \mathrm{Spec}\mathcal{O}$	形式圆盘
G_c	G 的极大紧子群
$G_{\mathcal{O}} = \mathrm{Maps}(\mathbb{D}, G)$	$\mathcal{O}$取值的 G元素
$\mathcal{K} = \mathbb{C}((z))$	变量 z 的形式洛朗级数代数
$\overset{\circ}{\mathbb{D}} = \mathrm{Spec}\mathcal{K}$	形式穿孔圆盘
$G_{\mathcal{K}} = \mathrm{Maps}(\overset{\circ}{\mathbb{D}}, G)$	$\mathcal{K}$取值的 G元素
$\mathbb{B} = \mathbb{D} \cup_{\overset{\circ}{\mathbb{D}}} \mathbb{D}$	形式气泡
$\mathbb{P}^n$	n 维射影空间
$\mathcal{O}(m) \to \mathbb{P}^n$	$\mathbb{P}^n$ 上的可逆线丛
$\mathbb{PT} = \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^1$	4 维扭量空间
$H^{\bullet}_{\overline{\partial}}(X, \mathcal{E}) = \bigoplus_i H^i_{\overline{\partial}}(X, \mathcal{E})$	X 的 Dolbeault 上同调，其系数取值于 $\mathcal{E}$
$H_{\bullet,\overline{\partial}}(X, \mathcal{E}) = \bigoplus_i H_{i,\overline{\partial}}(X, \mathcal{E})$	X 的 Dolbeault 同调，其系数取值于 $\mathcal{E}$

Table 1：常用数学符号及其含义汇总 .

个单极子数的确定方法是用球面 S^2 包围给定的局域算符，并测量该算符产生的规范场的拓扑类型。若 G_c 是（紧致、连通的）规范群，则主丛在 S^2 上的拓扑分类由 $\pi_1(G_c)$给出：若用两个坐标图覆盖 S^2，分别覆盖北半球和南半球，那么重叠区域上的过渡函数在拓扑上等价于一个从赤道 S^1 到 G_c的映射。具有非平凡单极子数的局域算符称为单极子算符。[2]

2.1 HT-扭曲的 $\mathcal{N} = 2$ 中的单极子

对于我们后续的应用而言，一类尤为重要的单极子是在经过扭曲的 $\mathcal{N} = 2$ 规范理论中出现的单极子。回顾一下，三维 $\mathcal{N} = 2$ 超对称代数有两个费米生成元 Q_α、$\overline{Q}_\alpha$，它们相对于 $\mathrm{Spin}(3) \cong SU(2)$ 按旋量变换；它们的反对易子（在没有中心荷的情况下）具有如下形式

$$\{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\} = (\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu = \begin{pmatrix} P_1 + iP_2 & -P_3 \\ -P_3 & -P_1 + iP_2 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

其中 $(\sigma^\mu)^\alpha{}_\beta$ 是泡利矩阵，我们用 Levi-Civita 张量 $\epsilon_{\alpha\beta}$升降 $SU(2)$ 指标，约定 $\epsilon_{+-} = \epsilon^{+-} = 1$，且 $\chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\chi^\beta$ 和 $\chi^\alpha = \chi_\beta \epsilon^{\beta\alpha}$。该

[2]我们注意到，在非阿贝尔规范理论中，存在单极子数为零但仍值得称为单极子算符的局域算符，例如具有单连通规范群的规范理论中的单极子。

$U(1)_R$ R-对称性以权 -1（分别为 1）旋转 Q_α（分别为 $\overline{Q}_\alpha$）。我们注意到 $Q_{HT} := \overline{Q}_+$是一个平方为零的超荷；此外，动量 $P_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(P_1 + iP_2) = \{Q_{HT}, \frac{1}{2}Q_+\}$和 $P_t = P_3 = \{Q_{HT}, -Q_-\}$属于扭曲超荷 Q的像。特别地，我们可以考虑三维 $\mathcal{N} = 2$ 理论的 Q_{HT} 扭曲（即 Q_{HT}-上同调），所得的扭曲理论在 x^1-x^2 平面上表现为全纯，并沿剩余的 x^3 方向呈拓扑性质；相应地，由 Q_{HT} 给出的扭曲称为全纯-拓扑（HT）扭曲。

由于该扭曲理论具有全纯—拓扑性质，我们可以预期，自然地将其定义在一个三维流形 $\mathcal{M}$ 上，该流形局部形如 $\mathbb{C}_{z,\bar{z}} \times \mathbb{R}_t$，其过渡函数 $(z, \bar{z}, t) \to (w(z)\ \overline{w}(\bar{z})\ s(t, z, \bar{z}))$ 与复结构相容。具有这种与 HT 扭曲相容结构的流形称为允许横向全纯叶状结构（THF）[19]。为了实施扭曲，我们需要利用 $U(1)_R$ R 对称性来定义一个扭曲自旋 Spin(2)′，它旋转 $\mathbb{C}_{z,\bar{z}}$，使超荷 Q_{HT} 成为标量；这种选择称为扭曲同态，我们取 $J = \frac{1}{2}R - J_3$。采用这一选择后，$\mathcal{N} = 2$ 理论的各种场的变换性质会发生改变，以体现其扭曲自旋；例如，一个 R-荷为 r 的标量将变成典范丛 $K^{r/2}$的 $r/2$ 次根的一个截面，也就是说，它自然带有一个因子 $(\mathrm{d}z)^{r/2}$。

我们将聚焦于 $\mathcal{N} = 2$ 规范手征多重态理论，这类理论通常与超势耦合。此类理论的数据包括：选择一个紧致规范群 G_c（其复化为 G）以及 G_c 的酉（复）表示 R（G）；选择一组 Chern-Simons 层数 $k \in H^4(BG_c)$，其精确量子化取决于所选的 R（粗略地说，k 是 G_c的每个简单因子对应的一组整数或半整数）；以及选择一个规范不变全纯函数 $W : R \to \mathbb{C}$，即超势。我们还将要求该理论实现 $\mathcal{N} = 2$ 代数的 $U(1)_R$ R对称性。这意味着可以为手征多重态 $R = \bigoplus_r R_r$指定一个 R-荷，其中 R_r 是 R-荷为 $r \in \mathbb{Z}$的手征多重态子表示，从而使 W 具有 R-荷 2。

文献 [19] 以极为简洁的方式，在 Batalin-Vilkovsky（BV）形式主义中描述了这一类规范理论的 HT 扭曲；另见较近期的文献 [26]。为了写出该理论，我们需要引入一些记号。令 Ω 表示 $\mathcal{M}$上微分形式的微分分次代数。$\mathcal{M}$ 上的 THF 意味着存在一个由与 $\mathrm{d}z$成比例的微分形式构成的自然子代数；我们用 Ω 表示所有微分形式对与 $\mathrm{d}z$成比例的微分形式取商所得的空间。$\mathcal{M}$ 上的 THF 还赋予我们一个特殊的线丛 K，即复平面 $\mathbb{C}$（或更一般地，THF 的复叶）上的典范丛；我们用 $\Omega^{(j)}$ 表示所有取值于 K^j 的微分形式对与 $\mathrm{d}z$成比例的微分形式取商所得的空间。形式的楔积诱导出一个自然乘积 $\Omega^{(j)} \times \Omega^{(j')} \to \Omega^{(j+j')}$，此外还有一个自然的积分映射 $\int : \Omega^{(1)} \to \mathbb{C}$。在局部坐标中，$\Omega^{(j)}$ 的截面形如 $C^\infty(\mathbb{R}^3)[\mathrm{d}t, \mathrm{d}\bar{z}]\,\mathrm{d}z^j$，其中 $\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\bar{z}$视为费米变量，而 $\mathrm{d}z$ 视为玻色变量。我们用 d' 表示 $\Omega^{(j)}$ 上由德拉姆微分诱导的费米微分；在局部坐标中，它的形式为 $\mathrm{d}' = \partial_t \mathrm{d}t + \partial_{\bar{z}} \mathrm{d}\bar{z}$。类似地，我们用 ∂ 表示将 $\Omega^{(j)} \to$ 映到 $\Omega^{(j+1)}$的自然玻色导子；在局部坐标中为 $\partial = \partial_z \mathrm{d}z$。

采用上述记号，我们终于可以陈述文献 [19] 给出的模型，它描述了上述规范理论的 HT 扭曲。首先，荷为 r 的手征多重态 Φ （其 R-荷为 r ）变为一个取值于 $\Omega^{(r/2)}$ 的玻色场$\mathbf{\Phi} \in$ ，以及一个取值于 $\Omega^{(1-r/2)}$的费米场 $\mathbf{\Psi} \in \Pi$，其中 Π 表示宇称移位—— $\mathbf{\Psi}$ 的最低分量是费米子，而 $\mathbf{\Phi}$ 的最低分量是玻色子。[3] 按形式次数齐次的分量来表示，我们可以写成 $\mathbf{\Phi} = \phi + \eta^* + \psi^*$ 和$\mathbf{\Psi} = \psi + \eta + \phi^*$； ϕ 和 ψ 分别对应手征多重态中的复标量，以及反手征多重态中的一个费米子分量。高形式次数的场是 ϕ 和 ψ的全纯-拓扑后裔。例如， η 的分量对应于共轭标量$\overline{\phi}$的导数。同理，矢量多重态 V变为一个取值于 $\Omega^{(0)} \otimes \mathfrak{g}$ 的伴随表示值费米场 $\mathrm{A} \in \Pi$，以及一个取值于 $\Omega^{(1)} \otimes \mathfrak{g}^*$的余伴随表示值玻色场 $\mathrm{B} \in$；我们将这些场按分量展开为 $\mathrm{A} = c + A + B^*$ 和 $\mathrm{B} = B + A^* + c^*$。在这个展开中，1-形式 $A = A_t \,\mathrm{d}t + A_{\overline{z}} \mathrm{d}\overline{z}$ 对应于物理规范场的分量（A_t 实际上经实标量 σ复化）， c 是 BRST鬼场，而 B对应于 F_{zt} ，但相差陈-西蒙斯项。在纯陈-西蒙斯理论中，或在其 $\mathcal{N} = 2$ 超对称增强的 HT扭曲中，$B = B_a T^a$ 对应于 $K_{ab} A^b_z$，其中 K_{ab}表示陈-西蒙斯作用量中使用的配对，参见第 2 节 [19, 。HT-扭曲理论由以下作用量描述：

$$S = \int \mathbf{B} F'(\mathbf{A}) + \tfrac{k}{4\pi} \mathrm{Tr}(\mathbf{A} \partial \mathbf{A}) + \mathbf{\Psi}\, \mathrm{d}'_{\mathbf{A}} \mathbf{\Phi} + \mathbf{W} \tag{2.2}$$

在此表达式中，$\mathrm{d}'_{\mathbf{A}} = \mathrm{d}' + \mathrm{A}$ 是协变外微分，而 $F'(\mathrm{A}) = \mathrm{d}'\mathrm{A} + \mathrm{A}^2$是其曲率。我们省略了一个表示及其对偶表示的自然规范不变配对；Tr 表示 $\mathfrak{g}$ 上用于陈-西蒙斯项的非退化双线性型，例如经过适当归一化的 Killing 型，其中 k 是层数（可能为零）。

在 BV 形式体系中，运动方程由一个平方为零的超荷Q编码：

$$\begin{aligned} Q\mathbf{A} &= F'(\mathbf{A}) & Q\mathbf{B} &= \mathrm{d}'_{\mathbf{A}} \mathbf{B} - \mu + \tfrac{k}{2\pi} \partial \mathbf{A} \\ Q\mathbf{\Phi} &= \mathrm{d}'_{\mathbf{A}} \mathbf{\Phi} & Q\mathbf{\Psi} &= \mathrm{d}'_{\mathbf{A}} \mathbf{\Psi} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{\Phi}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

在当前语境中，超荷 Q 是两个超荷的组合：物理理论的 BV/BRST 超荷 Q_{BV} 以及 HT 超荷 Q_{HT}。最后，我们注意到，该理论具有一种自然的 $\mathbb{Z}$ 分次，传统上称为鬼数，但实际上还 R 荷 r 和形式次数的贡献；矢量多重态的场 A 和 B 的次数分别为 1 和 0，而 R-荷为 r的手征多重态中的场 $\mathbf{\Phi}$ 和 $\mathbf{\Psi}$ 的次数分别为 r 和 $1-r$。分量场的鬼数由如下约定唯一确定：微分形式 $\mathrm{d}t$、$\mathrm{d}\overline{z}$ 的次数为 1，而 $\mathrm{d}z$ 的次数为

[3]更准确地说，场 $\mathbf{\Phi}$ 和 $\mathbf{\Psi}$ 具有齐次的格拉斯曼宇称（玻色或费米），但它们的分量并不具有齐次宇称。例如， $\mathbf{\Phi}$ 的 0-形式和 2-形式部分是玻色微分形式（其分量是玻色的），而 1-形式部分是费米微分形式（其分量是费米子）。

0。我们注意到，这种分次是上同调的，也就是说，超荷 Q 的鬼数为 1。

在 HT 扭曲中的微扰局部算符可以由 Q-上同调类表示，它们是由基本场的最低分量 G 构成的、在 ϕ下不变的算符，ψ以及∂c、B和它们的导数组成。 ∂ [4] 为了探究完整的非微扰局域算符代数，可以利用态-算符对应，将这些算符与理论在球面上的态联系起来 $\mathbb{P}^1$。此类态的空间可通过对运动方程在 $\mathbb{P}^1$上的解的模空间进行几何量子化，从上述扭曲描述中获得。

考虑形如 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}_t$ 的时空。运动方程 $F'(A) = 0$ 的鬼数为 0 部分，在满足 $A_t = 0$ 的规范下，$\partial_t A_{\overline{z}} = 0$ 可写为 $\partial_t A_{\overline{z}} = 0$ 。因此，协变导数$\mathcal{D}_{\overline{z}} = \partial_{\overline{z}} + A_{\overline{z}}$是定义在 $\mathbb{P}^1$ 上的全纯 G 丛 E，并且此丛在 t上局部为常值。这一分析的一个显著特征是，解的模空间自然纤维化于 $\mathbb{P}^1$ 上的全纯 G 丛的模空间 $\mathrm{Bun}_G(\mathbb{P}^1)$之上——局域算符的许多有趣性质都蕴含在这一简单事实中。

值得注意的是，人们通常会采用一种略有不同的 G 丛模空间。与其考虑有限球面 $\mathbb{P}^1$，不如使用“形式气泡”或“raviolo” $\mathbb{B}$。粗略地说，形式气泡是将两个无穷小圆盘（又称“形式圆盘”）在原点之外粘合而成的非豪斯多夫空间。在任何混合全纯-拓扑量子场论中考虑态-算符对应时，都会自然出现形式气泡：形式气泡 $\mathbb{B}$上的态预期与气泡中心的局部算符相对应。本质上，THF 三维流形中的任意足够小的邻域都呈现为一个小圆柱$D \times I$；量子场论的全纯-拓扑性质意味着，远离算符插入处的场构型在 D 上是全纯的，并沿 I保持不变。特别是，区间 I 的长度无关紧要，场构型的数据由 D上的数据所概括。然而，存在局部算符时， D 上的这些全纯数据可能发生跳变。这种跳变不能任意发生，而应体现算符的局部性质：远离局部算符的插入点时，全纯数据应当等价。综上，这个无穷小圆柱边界上的场构型可以由 D 上的两份必要全纯数据，以及原点之外这些数据之间的一个同构来刻画。更多细节可参见 [27] 第3.1节之前的讨论。

[4]之所以应考虑 ∂c ，而不是 c 本身，是因为它的协变导数 $\mathcal{D}_z c$与一个规范微子 λ_-上同调等价；局域算符不应包含这个规范微子的反导数，参见[26, 第3节2]。虽然这看起来有些临时拼凑，但从以导出方式取规范不变量的角度来看，这其实相当自然；也就是说，这种做法与取 Q上同调相容。相比之下，对无穷小规范变换取规范不变量，也就是考虑李代数上同调，与此不同：对常数的有限 G 规范变换取规范不变量是一个正合函子，因此尤其不应借助鬼场来完成。全体规范变换群 $\mathcal{G}$ 具有半直积的形式，由 G和一个幺幂群构成；由于幺幂群等价于其（幂零）李代数，取导出的 $\mathcal{G}$不变量时，需要手动取 G 不变量，并对其余部分使用鬼场。

形式气泡可以通过将两个开集彼此粘合，以类似于 $\mathbb{P}^1$ 的方式构造。首先，将复平面 $\mathbb{C}$（其函数代数由单个变量 $\mathbb{C}[z]$的多项式构成）替换为形式圆盘 $\mathbb{D}$（其函数代数由单个变量 $\mathcal{O} = \mathbb{C}[\![z]\!]$的形式级数构成）；可以将 $\mathbb{D}$ 视为上述无穷小圆盘的代数几何化身。正如 $\mathbb{P}^1$ 是通过将两份 $\mathbb{C}$ 沿 $\mathbb{C}^\times$粘合而实现的，气泡 $\mathbb{B}$ 则是通过将两份形式圆盘 $\mathbb{D}$ 沿着

。“形式穿孔圆盘” $\mathbb{D}$。形式穿孔圆盘上的函数代数由单个变量 $\mathcal{K} = \mathbb{C}((z))$ 的形式洛朗级数构成；相比之下， $\mathbb{C}^\times$ 上的函数是洛朗多项式。除了使用多项式上的级数之外，形式气泡的主要区别在于，过渡函数通过 $w = z$ 将两个形式圆盘 $\mathbb{D}_z$ 和 $\mathbb{D}_w$ 联系起来，而非用于 $\mathbb{P}^1$ 的、更为熟悉的 $w = 1/z$ 。

使用形式气泡 $\mathbb{B}$ 的便利之处在于，它能将全纯丛的模空间具体地实现为一个特别简洁的陪集。如果我们先在两个形式圆盘上将丛平凡化，那么只需给出过渡函数，

。形式穿孔圆盘 $\mathbb{D}$上的一个规范变换；全纯丛的模空间随后可表示为对平凡化变换（在

。两个图块或形式圆盘上的规范变换）取商。 $\mathbb{D}$ 上的规范变换群记作$G_{\mathcal{K}}$；当 G 是矩阵群时， $G_{\mathcal{K}}$ 中的元素就是条目为洛朗级数的矩阵。类似地， $\mathbb{D}$ 上的规范变换群记作 $G_{\mathcal{O}}$；这是一个条目为泰勒级数的群。由此可见， $\mathbb{B}$ 上的 G 丛的模空间是一个双陪集

$$\mathrm{Bun}_G(\mathbb{B}) = G_{\mathcal{O}} \backslash G_{\mathcal{K}} / G_{\mathcal{O}} = G_{\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_G \tag{2.4}$$

其中，单个陪集 $\mathbf{Gr}_G = G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}$ 称为仿射格拉斯曼量。 $G_{\mathcal{O}}$ 的两个因子分别作用于 $G_{\mathcal{K}}$ 的左侧和右侧：$(h_1, h_2) \cdot g = h_1 g h_2^{-1}$。

实际上，单纯由于形式级数比洛朗多项式更容易处理，这个模空间就比其 $\mathbb{P}^1$ 对应物容易管理得多。例如，确保一个由洛朗多项式构成的矩阵可逆，要比确保一个由洛朗级数构成的矩阵可逆困难得多——在 $G = \mathbb{C}^\times$ 的例子中，群$G[z, z^{-1}]$ 仅包含元素 z^n，而 $G_{\mathcal{K}}$ 则包含所有非零洛朗级数。从几何角度来看，这种困难源于定义该丛的过渡函数必须在除 0 和 ∞ 之外的所有地方都可逆；从某种意义上说，形式气泡 $\mathbb{B}$只包含这些点，也就是说，我们不必担心z取有限值时出现的奇点，因此对过渡函数的选择所施加的限制要少得多。

2.1.1 阿贝尔单极子

考虑 $G_c = U(1)$ $G = \mathbb{C}^\times$ 的情形； $\mathbb{B}$ 上彼此不等价的全纯 $\mathbb{C}^\times$ 丛由整数 $\mathfrak{m} \in \mathbb{Z}$ 标记。对于任意非零洛朗级数 $g(z) = az^{\mathfrak{m}} + \ldots \in \mathbb{C}^\times_{\mathcal{K}}$ ，都存在一个形式为 $h(z) = a + \ldots \in \mathbb{C}^\times_{\mathcal{O}}$ 的可逆泰勒级数（可逆意味着它具有

非零常数项），使得 $g(z)h(z)^{-1} = z^{\mathfrak{m}}$。[5] 特别地，上述运动方程的解的模空间具有不连通的分量 $\mathrm{EOM} = \bigoplus \mathrm{EOM}_{\mathfrak{m}}$，其中 $\mathrm{EOM}_{\mathfrak{m}}$ 表示解空间中底层规范丛的过渡函数为 $z^{\mathfrak{m}}$ 的分量。源自 $\mathrm{EOM}_{\mathfrak{m}}$ 的态对应于具有磁荷（或者更确切地说，单极子数） $\mathfrak{m}$ 的算符。整数 $\mathfrak{m}$ 可自然地视为 $\mathbb{C}^\times$ 的一个余特征。

我们注意到，从 $\mathbb{P}^1$ 的角度来看，上述丛可与线丛 $\mathcal{O}(\mathfrak{m})$ 等同。这个线丛由以下要求刻画：截面 σ 在射影坐标 $z^\alpha \to \lambda z^\alpha$ 的齐次缩放下按 $\sigma \to \lambda^{\mathfrak{m}}\sigma$ 变换。用仿射坐标 z，$w = 1/z$ 表示，这相当于说， $\mathcal{O}(\mathfrak{m})$ 的一个截面在坐标变换 $z \to w$ 下按 $\sigma_z(z) \to \sigma_w(w) = w^{\mathfrak{m}}\sigma_z(1/w)$ 变换。 $\mathbb{P}^1$ 上的线丛 $\mathcal{O}(m)$ 是著名的（荷为 $\mathfrak{m}$ 的）磁单极丛在全纯意义下的对应物，它定义在 S^2 上。

对于更一般的阿贝尔规范群 $T_c = U(1)^r$ ，情况几乎完全相同；运动方程的模空间由不连通的分量组成，这些分量由整数 r-元组标记，并产生具有相应单极子数的态。Zeng [27] 近期的工作描述了 $\mathbb{P}^1$ 上阿贝尔 $\mathcal{N} = 2$ 理论的 HT 扭曲的运动方程模空间的一种显式几何量子化，从而实现了这些扭曲理论中的局部算符（的向量空间）。

继续之前，我们注意到，单极子算符的碰撞继承自 $G_{\mathcal{K}}$ 上的群结构。我们考虑两个气泡 $\mathbb{B}$，它们分别对应两个单极子算符，并将它们上下堆叠；那么双气泡上的丛模空间就是双陪集

$$G_{\mathcal{O}}\backslash G_{\mathcal{K}} \times_{G_{\mathcal{O}}} G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}} \tag{2.5}$$

其中 $G_{\mathcal{K}} \times_{G_{\mathcal{O}}} G_{\mathcal{K}}$ 表示规范变换对 $[g_1, g_2]$ 在 $G_{\mathcal{O}}$ 作用下的等价类，即 $[g_1, g_2] \sim [g_1 h^{-1}, h g_2]$；这种等价对应于共享圆盘上的规范变换。随后我们可以构造如下卷积图：

$$\mathrm{Bun}_G(\mathbb{B}) \times \mathrm{Bun}_G(\mathbb{B}) \xleftarrow{\pi_1\times\pi_2} G_{\mathcal{O}}\backslash G_{\mathcal{K}} \times_{G_{\mathcal{O}}} G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\mu} \mathrm{Bun}_G(\mathbb{B}) \tag{2.6}$$

其中 π_i 是从 $G_{\mathcal{K}} \times_{G_{\mathcal{O}}} G_{\mathcal{K}}$ 到 $G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}$ 和 $G_{\mathcal{O}}\backslash G_{\mathcal{K}}$ 的自然投影映射（在商空间上诱导的映射），而 μ 是自然乘法映射 $[g_1, g_2] \to g_1 g_2$（在商空间上诱导的映射）。

上述卷积结构的一个重要推论是，单极子算符通过修改单极子算符所在点处的规范丛来发挥作用。对于最简单的单极子算符，这在物理上对应于执行一次大规范变换（数学上，这一过程称为赫克修改）。例如，我们可以执行如下形式的亚纯规范变换 $g = z^{\mathfrak{m}}$；这样的规范变换将

[5] 如果我们要恰当地处理上述双陪集，就应该注意到存在保持这一过渡函数不变的非平凡规范变换——由于该群是阿贝尔群，如果我们在两个圆盘上执行相同的规范变换（h、h），则这一过渡函数保持不变 $\cdot\, g = hgh^{-1} = g$。

一个 s of $\mathcal{O}(n)$ 的截面映射为一个 gs of $\mathcal{O}(n+\mathfrak{m})$ 的截面，用仿射坐标定义为 $(gs)_z(z) = z^{\mathfrak{m}} s_z(z)$。[6]

2.1.2 非阿贝尔单极子

一般规范群 G_c 的情况要复杂一些。我们选取一个极大环面 $T_c \subseteq G_c$。任何全纯 G 丛都等价于上述形式的一个 $T = (T_c)_{\mathbb{C}}$ 丛。（我们总能在两个圆盘上进行 G 规范变换，使过渡函数落在所选的极大环面中。）特别地，对于每个磁荷/余特征 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, T) \cong \mathbb{Z}^r$（其中 r 是 G的秩），我们得到一个全纯G 丛，其过渡函数仍为 $g = z^{\mathfrak{m}}$。[7] 当两个余特征 $\mathfrak{m}$、$\mathfrak{m}'$ 相差 Weyl 群的作用时，它们对应的 G 丛等价。如果我们选取一组正根，就可以用支配余特征来标记这样的丛——即与所有正根的配对均非负的余特征。从磁荷 m转到单极子数 $\gamma \in \pi_1(G_c)$，对应于取其在商映射$\Lambda^\vee_{\mathrm{weight}} \to \Lambda^\vee_{\mathrm{weight}}/\Lambda^\vee_{\mathrm{root}} \cong \pi_1(G_c)$下的像。

为方便读者理解，我们指出，对于 $G_c = U(r)$ 和 $T_c = U(1)^r$ 对角环面， T的余特征可以等同于由整数构成的 r 元组 $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_r)$；支配余特征满足 $\mathfrak{m}_i \geq \mathfrak{m}_j$ if $j \geq i$（对于正根的标准选取），而单极子数就是总和 $\mathfrak{m}_1 + \ldots + \mathfrak{m}_r \in \mathbb{Z}$。类似地，对于 $SU(r)$（及其对角环面），余特征可等同于满足 $\mathfrak{m}_1 + ... + \mathfrak{m}_r = 0$ 的 r 元组；对于$PSU(r) \cong SU(r)/\mathbb{Z}_r$（及其对角环面），则可等同于模去 $(1, ..., 1)$ 平移后的 r 元组 $(\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_r)$。由于 $SU(r)$ 是单连通的，其单极子数恒为零；而 $PSU(r)$ 的单极子数就是 $\mathfrak{m}_1 + \ldots + \mathfrak{m}_r \mod r$。

用支配余特征这一离散点集来描述全纯 G 丛，不足以捕捉非阿贝尔单极子的复杂性；我们可以描述一列磁荷为 $\mathfrak{m}$ （一个支配余特征）的全纯 G 丛，使得极限丛的磁荷 $\mathfrak{m}'$ 不同于 $\mathfrak{m}$，这种现象称为单极子冒泡。作为这一现象的例子，考虑带有过渡函数 $g(z) = z^{(2,0)}$ 的$GL(2, \mathbb{C})$丛，它对应于磁荷为 $\mathfrak{m} = (2, 0)$的单极子算符，也就是说， g 是一个对角 2×2 矩阵，其元素为 z^2 和 1。我们可以与任意非奇异规范变换复合（前复合和后复合），从而得到等价的丛；例如，我们可以考虑这一族全纯 $GL(2)$ 丛

[6]严格来说，这个规范变换并未在截面之间给出映射。事实上， $\mathcal{O}(n)$ 的一般光滑截面会被映射为 $\mathcal{O}(n+\mathfrak{m})$ 的奇异截面：当 $\mathfrak{m} > 0$ （分别地， $\mathfrak{m} < 0$）时，为使 $g\sigma$ 光滑，截面 σ 必须在 $w = 0$ （分别地， $z = 0$）处至少有 $\mathfrak{m}$ 阶零点。更精确地说， g定义了 $\mathcal{O}(n)$ 的截面与 $\mathcal{O}(n+\mathfrak{m})$ 的截面之间的一个 *correspondence*。例如，参见 [28]，其中讨论了单极子算符背景下的对应。[7]如果 G_c 是矩阵群，而 T 是对角环面，那么 $z^{\mathfrak{m}}$ 就表示以 $z^{\mathfrak{m}_i}$ 为对角元的对角矩阵。更一般地，它表示将上述 $\mathbb{C}^\times$ 值的大规范变换与余特征 $m : \mathbb{C}^\times \to T$ 复合，从而得到一个 T 值的大规范变换。

由过渡函数给出

$$\begin{pmatrix} z^2 & az \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & az \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

它与上述丛的区别仅在于上圆盘上的一次规范变换。取极限 $a \to \infty$，我们得到磁荷为 $\mathfrak{m}' = (1, 1)$ 的规范丛：在 $a = 0$ 之外，我们可以在下圆盘上施加以下规范变换

$$\begin{pmatrix} z^2 & az \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ (1-z)/a & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ (1-z)/a & z \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

由此可直接得到 $a \to \infty$ 极限。特别地，我们得到一个磁荷为 $\mathfrak{m}' = (1, 1)$ 的规范丛。更一般地，磁荷 $\mathfrak{m}'$ 总是被 $\mathfrak{m}$ 支配（即 $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}'$ 是占优的），并映射到相同的单极子数 $\gamma = [\mathfrak{m}] = [\mathfrak{m}']$。与上面的阿贝尔情形相对照，一般 G 的全纯 G 丛模空间具有由 $\pi_1(G)$ 标记的不连通分量——对于三维中的局域算符而言，单极子数而非磁荷才是良好的量子数。

研究 HT-扭曲的 $\mathcal{N}$ =2 理论中非阿贝尔规范群的单极子算符，主要障碍之一在于必须应对丛模空间高度非平凡的结构。标准 A理论的拓扑 $\mathcal{N} = 4$ 扭曲也会带来相关问题，但拓扑扭曲所提供的更强控制力使研究得以推进——这些理论中完整的非微扰局域算符代数已由 Braverman-Finkelberg-Nakajima 明确描述 [29, 30]；参见 [31] 其中对这一代数进行了物理分析，并通过等变上同调中的不动点定位与 Braverman-Finkelberg-Nakajima 的工作建立了联系。[8]

2.2 边界磁单极子

尽管三维规范理论体内的单极子算符本身相当引人入胜，但我们更感兴趣的是它们如何出现在这些规范理论边界条件上的局域算符代数中。在三维 $\mathcal{N} = 2$ 规范理论中，当矢量多重态满足半 BPS 狄利克雷边界条件时，规范场强 F 和实标量场 σ 的 BPS 方程$F = \star D\sigma$ 和 $D \star \sigma = 0$ 存在非平凡的单极子解；更多详情参见 [25] 第3.4节。狄利克雷边界条件上的局域算符可以用与体内局域算符类似的方式得到；我们可以通过态-算符对应，将它们实现为附着在边界上的半球上的态。同样，这个态空间可以通过对适当的运动方程空间进行几何量子化来确定。我们注意到，[32], 中研究的手征代数是作为三维 $\mathcal{N} = 2$ 理论在区间上的紧化所产生的局域算符代数来实现的，而非定义在边界上；它们具有下文将要描述的许多特征。

[8]实际上，造成困难的并非丛模空间 $G_{\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_G$ 本身，而是随着我们在丛模空间中移动，通常很难对模空间 EOM 加以控制。阿贝尔 G 的丛模空间格外简单，这一事实为我们理解这些情形下的模空间 EOM 提供了一种途径。能够处理拓扑 A扭曲中的非阿贝尔规范群，完全归因于 EOM 相对简单。

算符，而非边界上的算符；它们具有下文将要描述的许多特征。

使用半球的无穷小版本会更方便，即一个形式

。圆盘 $\mathbb{D}$，其边界上施加边界条件：形式穿孔圆盘 $\mathbb{D}$；狄利克雷边界条件要求全纯规范丛在边界上配备一个平凡化。沿用上述论证，我们看到，运动方程解的模空间自然地纤维化在仿射格拉斯曼量 Gr_G 上，该空间参数化了这类丛。特别地，我们再次看到，这些运动方程的解具有由单极子数 $\pi_1(G)$ 标记的非连通分量——这也是边界局域算符的一个良好量子数。我们得到的是仿射格拉斯曼量，而非其对 $G_{\mathcal{O}}$ 的商，这是因为在狄利克雷边界条件下，我们无需要求局域算符满足规范不变性。

运动方程解空间纤维化在仿射格拉斯曼量 Gr_G 之上这一事实可以成为强有力的概念工具，但完整的非微扰局域算符代数仍可能相当难以描述。文献 [26] 提出了对局域算符代数的一种猜想性描述，具体如下；更多细节见该文献第 7 节。假设在不存在规范场时，局域算符代数实现了某个顶点代数 $\mathcal{V}$（它不一定具有全纯应力张量）；$\mathcal{V}$ 则必然带有 $G_{\mathcal{O}}$的作用。随后我们可以利用这一作用构造一个有趣的向量丛 $\mathcal{V}_{\mathrm{Gr}_G}$，它是仿射格拉斯曼量上的乘积 $\mathcal{V}_{\mathrm{Gr}_G} = G_{\mathcal{K}} \times_{G_{\mathcal{O}}} \mathcal{V}$；对于给定的全纯$G$ 丛 P，纤维 $\mathcal{V}_P$ 在 P 之上应被视为 $\mathcal{V}$ 与丛 P 耦合。于是猜想，这种狄利克雷边界条件上的局域算符代数，是 Gr_G 的 Dolbeault 同调，其系数取为这个向量丛，并经某个幂次的行列式线丛扭曲 $\mathcal{L}$:

$$H_{\bullet,\overline{\partial}}(\mathrm{Gr}_G, \mathcal{V}_{\mathrm{Gr}_G} \otimes \mathcal{L}^{-\kappa}) = \bigoplus_n H_{n,\overline{\partial}}(\mathrm{Gr}_G, \mathcal{V}_{\mathrm{Gr}_G} \otimes \mathcal{L}^{-\kappa}) \tag{2.9}$$

其中，对于复流形，X, $H_{n,\overline{\partial}}(X,\mathcal{E})$定义为取值于对偶丛 $H_{n,\overline{\partial}}(X,\mathcal{E})$ 的 Dolbeault 上同调的线性对偶：$= H^n_{\overline{\partial}}(X,\mathcal{E}^*)^*$，参见同上文献中的式（7.13）。有关线丛 $\mathcal{L} \to \mathrm{Gr}_G$ 的详细描述，参见例如 [33, 第 1 节5] 。幂κ 表示有效陈–西蒙斯能级，参见[25, 式 3.32], ，并编码了边界上 G 味对称性的反常。实际上，修正项$\mathcal{L}^{-\kappa}$ 的作用是在存在陈–西蒙斯项时，使磁荷算符（边界单极子）具有非平凡的电荷。需要注意的是，式（2.9）仅仅描述了局域算符的向量空间。为这个向量空间赋予顶点代数结构绝非易事；在不存在物质场的情况下，[26, 第 7 节2] 对此作了概述。

2.2.1 阿贝尔规范理论中的边界磁单极子与谱流 w

对于$_T$ 阿贝尔规范群 T 而言，仿射格拉斯曼量 Gr 的相对简单性再次意味着，式 (2.9) 中对边界局域算符的描述可以变得相当

具体。回想一下，Gr_T 本质上是与全纯 $T=(\mathbb{C}^\times)^r$ 丛相关的格 $\mathbb{Z}^r$，其过渡函数为 $z^{\mathfrak{m}}$；因此，向量空间 $H_\bullet(\mathrm{Gr}_T,\mathcal{V}_{\mathrm{Gr}_T}\otimes\mathcal{L}^{-\kappa})$ 按磁荷/单极子数 $\mathbb{Z}^r$ 分级。

磁荷为零的局域算符，就是由基本场构成的微扰局域算符 $\mathcal{V}$；由于磁荷具有可加性，完整的非微扰代数构成了这个微扰子代数的一个模。按照构造，该子代数具有阿贝尔流 J_a、$a=1$、……、r，它们生成味对称性 T 在边界上的作用。味对称性具有反常 κ 这一说法，转化为以下算符乘积展开：

$$J_a(z)J_b(w)\sim\frac{\kappa_{ab}}{(z-w)^2}. \tag{2.10}$$

这些流与由物质场构成的微扰局域算符 $\mathcal{O}$ 的算符乘积展开，只是测量它在 T 下的荷 q_a：[9]

$$J_a(z)\mathcal{O}(w)\sim\frac{q_a}{z-w}\mathcal{O}(w). \tag{2.11}$$

给定与 J_a 的算符乘积展开，我们可以通过施行大规范变换 $z^{\mathfrak{m}}$，立即写出与磁荷为 $\mathfrak{m}\in\mathbb{Z}^r$ 的规范丛耦合后的结果。令 $\mathfrak{m}^a\in\mathbb{Z}$ 表示磁荷的各个分量。若局域算符 $\mathcal{O}$ 具有荷 q_a，则其变换为 $\mathcal{O}\to z^{\langle q,\mathfrak{m}\rangle}\mathcal{O}$，其中 $\langle q,\mathfrak{m}\rangle=\sum q_a\mathfrak{m}^a$ 是权 $q\in\mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^\times)$ 与余特征 $\mathfrak{m}\in\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times,T)$ 之间的自然配对。另一方面，流 J_a 变换为 $J_a\to J_a-\frac{\kappa_{ab}\mathfrak{m}^b}{z}$；若 κ_{ab} 非退化，则可以说 $\kappa^{ab}J_b$ 如联络般变换。事实上，这并非偶然：流 J_a 可与第 2.1 节中出现的场 B_a 的边界值等同，而该场本身又与规范场的分量 A_z^a 相等，如 $B_a=\kappa_{ab}A_z^b$ 所示。

值得注意的是，刚才描述的变换是微扰子代数（模代数）的自同构，称为谱流自同构；对于每个阿贝尔流 $\sigma_{\mathfrak{m}}$，都存在一个由此类自同构构成的格。更一般地，若 B 是一个阿贝尔流，则其模代数存在一族自同构，它将 $B\to B+\frac{\lambda}{z}$ 发送到……；如果该流是更大顶点代数 $\mathcal{V}$ 的流子代数，这些自同构未必能提升为整个 $\mathcal{V}$ 的自同构，参见 [34] 的第 2.4 节。例如，若 $\mathcal{O}\in\mathcal{V}$ 是权为 q 的流代数主场，那么我们需要 $\lambda q\in\mathbb{Z}$。$\sigma_{\mathfrak{m}}$ 的逆自同构就是 $\sigma_{-\mathfrak{m}}$。给定自同构 $\sigma_{\mathfrak{m}}$ 和一个模 M，我们可以通过与该自同构复合，构造一个新的模 $\sigma_m(M)$，称为 M 的谱流：算符 $\mathcal{O}$ 在模 $\sigma_m(M)$ 上的作用，由 $\sigma_{-\mathfrak{m}}(\mathcal{O})$ 在 M 上的作用给出：

$$\mathcal{O}\sigma_{\mathfrak{m}}(|\psi\rangle)=\sigma_{\mathfrak{m}}(\sigma_{-\mathfrak{m}}(\mathcal{O})\,|\psi\rangle) \tag{2.12}$$

在当前情形中，我们关注真空模 $\mathcal{V}$ 的谱流；我们声称，作为微扰代数 $\mathcal{V}$ 的模，完整的非微扰代数

[9] 严格来说，这是 J_a 与一个所谓的初级算符的算符乘积展开。一个一般算符可以表示为初级算符的导数的（线性组合）。

局域算符的代数只是所有此类谱流的直和： $\bigoplus_{\mathfrak{m}\in\mathbb{Z}^r}\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathcal{V})$。值得注意的是，谱流和谱流模的概念完全独立于三维体的存在；例如，二维自由玻色子（的对称代数） $\varphi(z,\overline{z})$具有谱流自同构，由此得到的模由通常的顶点算符 $:e^{\lambda\varphi}:$ 生成。当具有谱流自同构 σ_n 的顶点代数 $\mathcal{V}$ 被实现为三维拓扑量子场论的边界顶点代数时，真空 $\sigma_n(\mathcal{V})$的谱流被认定为涡旋线算符以及三维拓扑量子场论的一形式对称性的生成元，参见相关文献中的物理命题 6.2。

为说明这一机制在实践中如何运作，考虑最简单的情形：只有一个层数为 $\kappa\in\mathbb{Z}_{>0}$、且没有任何物质场的阿贝尔流 J。该流代数的真空模由真空矢量 $|0\rangle$ 生成，模 J_n（属于 $J=\sum J_n z^{-n-1}$）在其上的作用为

$$J_n|0\rangle=\begin{cases}0 & n\geq 0\\ J_n|0\rangle & n<0\end{cases} \tag{2.13}$$

真空模 $\mathcal{V}$ 由形如 $J_{n_1}...J_{n_m}|0\rangle$ 的矢量张成，其中 $n_1\leq ...\leq n_m<0$。谱流自同构 $\sigma_{\mathfrak{m}}$ 的形式为 $\sigma_{\mathfrak{m}}(J)(z)=J(z)-\frac{\kappa m}{z}$，本质上就是对零模 J_0的平移。这意味着，真空模的谱流 $\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathcal{V})$由真空矢量的谱流 $\sigma_{\mathfrak{m}}(|0\rangle)$生成，在该矢量上，模的作用为

$$J_n\sigma_{\mathfrak{m}}(|0\rangle)=\sigma_{\mathfrak{m}}(\sigma_{-\mathfrak{m}}(J_n)|0\rangle)=\begin{cases}0 & n>0\\ \kappa m\sigma_{\mathfrak{m}}(|0\rangle) & n=0\\ \sigma_{\mathfrak{m}}(J_n|0\rangle) & n<0\end{cases} \tag{2.14}$$

真空矢量的谱流 $\sigma_{\mathfrak{m}}(|0\rangle)$对应于一个算符 $V_{\mathfrak{m}}(0)$，即磁荷为 $\mathfrak{m}$的边界单极子；模 J_n 的这一作用对应于算符乘积展开

$$J(z)V_{\mathfrak{m}}(w)\sim\frac{\kappa\mathfrak{m}}{z-w}V_{\mathfrak{m}}(w). \tag{2.15}$$

如上所述，非平凡层数 κ 的作用是赋予带磁荷的算符 $V_{\mathfrak{m}}(w)$ 一个非平凡电荷 $\kappa\mathfrak{m}$。

上述分析很容易推广到更有趣的例子。话虽如此，值得注意的是，边界单极算符的精确算符乘积展开并未编码在微扰代数对具有非平凡磁荷的扇区的作用中。人们认为，谱流态射 $\sigma_{\mathfrak{m}}$ 与微扰代数 $\mathcal{V}$ 的模的融合相容；给定两个模 M_1、M_2，预期有 $\sigma_{\mathfrak{m}_1}(M_1)\times\sigma_{\mathfrak{m}_2}(M_2)\simeq\sigma_{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2}(M_1\times M_2)$。特别是，由于 $\mathcal{V}\times\mathcal{V}=\mathcal{V}$，模 $\sigma_{\mathfrak{m}}(V)$ 的融合遵循按磁荷 $\mathfrak{m}$ 的分次。因此，对 $\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathcal{V})$ 取直和，便得到微扰代数 $\mathcal{V}$ 的一个简单流扩张。

实际上，$\sigma_{\mathfrak{m}_1}(\mathcal{V})$ 和 $\sigma_{\mathfrak{m}_2}(\mathcal{V})$ 中各场的精确算符乘积展开由 $\mathcal{V}$ 的自由场实现所确定。在上述阿贝尔流 J 的例子中，我们可以将其实现为 $J=\partial\varphi$，其中手征玻色子为 $\varphi(z)$；于是，边界单极算符 $V_{\mathfrak{m}}(z)$

可与顶点算符对应：$e^{\mathfrak{m}\varphi}$。因此，这个例子中的完整非微扰代数可与一个格点顶点算子代数对应。关于如何在更有趣的例子中实现这一过程，参见例如 [34–36]；文献 [35] 研究了（三维） B-扭曲下，在狄利克雷边界条件上的局域算符代数，其中的理论为三维 $\mathcal{N}=4$ SQED；而较新的文献 [34, 36] 则运用相同技术研究更复杂的阿贝尔$\mathcal{N}=4$ 规范理论。早期得多的文献 [37] 则完全从 VOA 的角度研究了相关的简单流扩张。

继续之前，我们注意到，由真空模的谱流产生的这类简单流扩张具有重要的物理作用。[38, 39], 中描述了这些简单流扩张的一般性质，下面我们将对此作简要概述。首先，对于微扰代数的任意模 M，我们都可以考虑直和$\bigoplus_{\mathfrak{m}}\sigma_{\mathfrak{m}}(M)$。重要的是，并非所有 $\bigoplus_{\mathfrak{m}}\sigma_{\mathfrak{m}}(M)$ 都能成为完整非微扰代数的模：磁荷为 $\mathfrak{m}$ 的单极子与权为 q 的算符 $\mathcal{O}$ 的算符乘积展开具有如下形式

$$V_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}\sim(z-w)^{q\mathfrak{m}}\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathcal{O})+\dots \tag{2.16}$$

要确保得到的是简单流扩张的一个真正的模，而非扭曲模，指数 $q\mathfrak{m}$ 必须对所有 $\mathfrak{m}$都取整数值，也就是说， q 是整数。特别地，

1. 边界磁单极子会排除那些不具有整数权的模 M

此外，给定一个诱导出非微扰代数之模的微扰模 M，映射 $M\mapsto\bigoplus_{\mathfrak{m}}\sigma_{\mathfrak{m}}(M)$并非单射：模 M与 $\sigma_{\mathfrak{m}'}(M)$都会给出同一个非微扰代数之模。若要用微扰代数的模来描述非微扰代数的模，我们可以看到

2. 边界磁单极子标识出相差谱流的微扰模。

人们通常用物理语言将这一现象表述为：“威尔逊线正被规范涡旋线屏蔽。”

为使这一点更加明确，我们再来考虑 $U(1)_k$ 陈-西蒙斯理论的情形。微扰代数只是层数为 k 的海森堡代数；通过对真空进行谱流扩张而得到的完整非微扰代数，可以认作基于 $\sqrt{k}\mathbb{Z}$ 的格点顶点算子代数。对于每个无穷小权 $q\in\mathbb{C}$，都有一个微扰海森堡代数的福克模 F_q，可将其视为权为 q 的表示所对应的威尔逊线；谱流的作用是将权 $\sigma_{\mathfrak{m}}(F_q)=F_{q+k\mathfrak{m}}$ 平移。直接计算可知，只要 $q\in\mathbb{Z}$， $\bigoplus\sigma_{\mathfrak{m}}(F_q)$ 就定义了格点顶点算子代数的一个模，也就是说，我们只能考虑整数荷的威尔逊线。最后，由于 F_q 和 $F_{q+k\mathfrak{m}}$ 为格点顶点算子代数诱导出相同的模，我们看到，荷为 k 的倍数的威尔逊线会被规范涡旋线屏蔽；换言之，格点顶点算子代数的模由模 k 的整数标记。

2.2.2 非阿贝尔规范理论中的边界单极子

或许并不令人意外，非阿贝尔规范理论中的边界磁单极子比阿贝尔规范理论中的情形要困难得多。这种难度的增加直接源于非阿贝尔群的仿射格拉斯曼量具有非平凡的几何与拓扑性质。

即使只有流代数，也就是说没有物质顶点算子代数 $\mathcal{V}$，边界单极子的情况仍未得到充分理解。为说明其中的困难，简单起见，考虑层数为 κ（正整数）的 $SU(2)$ 陈-西蒙斯理论。在微扰层面，上述狄利克雷边界条件下的边界局域算符代数由三个全纯流 J_H、J_E、J_F 生成（它们分别对应 $\mathfrak{sl}(2)$ 的三个切瓦利生成元 H、E、F），其奇异算符乘积展开为

$$\begin{aligned} J_H(z)J_H(w) &\sim \frac{2\kappa}{(z-w)^2} & J_E(z)J_F(w) &\sim \frac{\kappa}{(z-w)^2}+\frac{J_H(w)}{z-w} \\ J_H(z)J_E(w) &\sim \frac{2J_E(w)}{z-w} & J_H(z)J_F(w) &\sim \frac{-2J_F(w)}{z-w}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

另一方面，完整的非微扰边界代数预期是一个 WZW 电流代数 [25, 26]；这是通过从微扰流代数中去除奇异向量（本质上是）：${J_E}^{\kappa+1}$ 及其后代得到的一个简单顶点算子代数。我们立刻看出，这与阿贝尔情形有显著差异：完整的非微扰代数是微扰代数的一个商，而不是阿贝尔情形中出现的简单流扩张。更一般地，当规范群 G 不是单连通时，非微扰代数是简单商代数通过简单流的扩张，这些简单流实现基本群 $\pi_1(G)$；因此，简单流扩张按阿贝尔群 $\pi_1(G)$ 分级，刻画了按给定单极子数划分的扇区。

说到这里，我们注意到仍然存在谱流自同构 $\sigma_{\mathfrak{m}}$，可以将其视为围绕具有过渡函数 $z^{(\mathfrak{m},-\mathfrak{m})}$的全纯 $SL(2)$丛进行扰动；等价地，我们可以将其视为通过对角矩阵对微扰代数施加大规范变换

$$g(z)=\begin{pmatrix} z^{\mathfrak{m}} & 0 \\ 0 & z^{-\mathfrak{m}} \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

我们再次通过 $J_a=\kappa K_{ab}A_z^b$将 J_a 与规范场 A_z^a 的边界值对应起来，其中 K_{ab} =Tr(t_at_b)是 Killing 型。因此，流的变换为

$$\begin{aligned} J_H(z) &\to \sigma_{\mathfrak{m}}(J_H(z)) = J_H(z)-\frac{2\kappa\mathfrak{m}}{z} \\ J_E(z) &\to \sigma_{\mathfrak{m}}(J_E(z)) = z^{-2\mathfrak{m}}J_E(z) \\ J_F(z) &\to \sigma_{\mathfrak{m}}(J_F(z)) = z^{2\mathfrak{m}}J_F(z). \end{aligned} \tag{2.19}$$

我们注意到，谱流自同构 σ_1 存在一个平方根 $\sigma_{1/2}$。这个平方根应被理解为在相关的 $SO(3)\cong PSU(2)$ 规范理论中，通过对角矩阵 $z^{(1,0)}\sim z^{(0,-1)}$ 进行一次大规范变换。

虽然这里不讨论完整的问题，但我们注意到，有迹象表明有可能将这两种观点联系起来：应当可以用由余特征 $\mathfrak{m}$ 标记的模扩展微扰子代数 $\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}$，并配上一个编码仿射格拉斯曼量 Gr 几何的微分$_G$。这些模 $\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}$ 应被视为来自 Gr 上环面不动点的贡献$_G$（环面作用源于对 $G_{\mathcal{K}}$ 的左乘），而微分则编码这些不动点如何组成真正的同调类。我们尚不了解 $\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}$ 的描述，但提到真空的谱流很可能是其子模：第 7 节 [25, 中的指标计算1] 表明，经解析延拓后，完整非微扰代数的特征可以与这些谱流的直和相匹配。

它们只有在解析延拓后才相符，这表明谱流模是由一些在解析延拓后特征消失的模扩张而成的。为简单示例说明这一点，考虑玻色变量 X 上的多项式代数 $\mathbb{C}[X]$ 以及模 $M_{\mathfrak{m}} = X^{\mathfrak{m}}\mathbb{C}[X]$。若用逸度 q来计数 X 的幂，则 $M_{\mathfrak{m}}$ 的特征为

$$\chi(M_{\mathfrak{m}}) = \sum_{i=0}^{\infty} q^{\mathfrak{m}+i}. \tag{2.20}$$

只要 $|q| < 1$，这个特征就收敛到有理函数 $q^{\mathfrak{m}}/(1-q)$；对 $|q| > 1$作解析延拓后，再将其展开为 q 的幂级数，可得 -1乘以商模 $\mathbb{C}(X)/M_{\mathfrak{m}}$的特征：

$$\chi(M_{\mathfrak{m}}) \overset{|q|<1}{=} \frac{q^{\mathfrak{m}}}{1-q} \overset{\text{analytic cont.}}{\longrightarrow} \frac{-q^{\mathfrak{m}-1}}{1-q^{-1}} \overset{|q|>1}{=} -\sum_{i=0}^{\infty} q^{\mathfrak{m}-1-i} = -\chi(\mathbb{C}(X)/M_{\mathfrak{m}}) \tag{2.21}$$

当然，模 $M_{\mathfrak{m}}$ 和 $\mathbb{C}(X)/M_{\mathfrak{m}}$ 截然不同，但它们构成以下 $\mathbb{C}[X]$-模的正合列：

$$0 \to M_{\mathfrak{m}} \to \mathbb{C}(X) \to \mathbb{C}(X)/M_{\mathfrak{m}} \to 0 \tag{2.22}$$

特别地，我们看到，模 $M_{\mathfrak{m}}$ 是模 $\mathbb{C}(X)/M_{\mathfrak{m}}$ 的消解 $0 \to M_{\mathfrak{m}} \to \mathbb{C}(X)$的一个子模；该模是通过对其特征作解析延拓得到的。$\mathbb{C}(X)$的特征是形式狄拉克$\delta$函数 $\delta(q) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} q^i$，在解析延拓至$|q| > 1$后会消失。

将这节课的内容应用于我们关注的情形，我们可以预期，真空 $\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathcal{V})$ 的谱流本身就是用于解析非微扰代数的 $\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}$ 的子模。尽管在阿贝尔规范理论之外，$\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathcal{V})$ 并不构成非微扰代数的全部，但它们仍然是需要理解的重要组成部分。

3 扭量单极子算符

现在，我们将上述分析应用于通过在扭量空间上紧化全纯 BF 理论而得到的三维理论 $\mathbb{PT}$，如 [6]所述。参见附录A，了解我们关于扭量的约定。

我们主要关注非微扰单极算符插入对三维边界手征代数的影响。需要提醒读者的是，从四维 BF 理论的角度来看，恰恰是这个手征代数构成了支撑于渐近零无穷远处天球上的（共形）软模的渐近对称代数 [1], 。 [6]。

3.1 自对偶规范理论来自 $\mathbb{PT}$

我们首先简要回顾一下：如何将自对偶四维规范理论实现为定义在 $\mathbb{PT}$上的全纯场论；我们主要遵循 [6]。本小节的目标是将这些自对偶规范理论与三维理论联系起来，这些三维理论让人联想到第 2.1 节所描述的扭曲理论；在这种联系下，渐近对称性的天球手征代数被实现为三维理论的边界手征代数，参见该文第 6 节。

考虑规范李代数为 $\mathfrak{g}$ 的自对偶规范理论。这是一个四维理论，其中包含规范场 $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4, \mathfrak{g})$ 和自对偶 2-形式 $B \in \Omega^2(\mathbb{R}^4, \mathfrak{g}^*)_-$，其作用量为 BF 作用量：

$$S_{4\mathrm{d}} = \int_{\mathbb{R}^4} BF(A)_- \tag{3.1}$$

其中， $F(A)_-$ 是曲率 $F(A)$ 的反自对偶部分。彭罗斯–沃德对应将这一自对偶规范理论与定义在扭量空间 $\mathbb{PT}$ 上的六维场论联系起来；该六维理论的场包括一个 (0, 1) 规范场 $\mathcal{A} \in \Omega^{(0,1)}(\mathbb{PT}, \mathfrak{g})$，以及一个 (3, 1)-形式场$\mathcal{B} \in \Omega^{(3,1)}(\mathbb{PT}, \mathfrak{g}^*)$，其全纯 BF 作用量为

$$S_{6\mathrm{d}} = \int_{\mathbb{PT}} \mathcal{B}F^{(0,2)}(\mathcal{A}) \tag{3.2}$$

其中 $F^{(0,2)}(\mathcal{A}) = \overline{\partial}\mathcal{A} + \mathcal{A}^2$ 是 $\mathcal{A}$ 的曲率的 (0, 2) 部分。在 BV 形式体系中，我们可以通过将 $\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$ 分别扩展为 $\Omega^{(0,\bullet)}(\mathbb{PT}, \mathfrak{g})[1]$ 和 $\Omega^{(3,\bullet)}(\mathbb{PT}, \mathfrak{g}^*)[1]$, ，来计入反场、鬼场和反鬼场。扩展后的场仍记作原来的特征，并约定积分仅在顶次形式上取非零值；采用这一选择后，BV 作用量与上文具有相同的泛函形式。

3.1.1 $\mathbb{PT}$上的反常

需要注意的是，上述六维全纯理论存在微扰反常 [10, 11]。这些反常并不意味着四维自对偶规范理论定义不良，而是表明彭罗斯-沃德对应在量子层面不再成立。因此，我们不应期待由六维约化得到的三维理论能够描述相应的四维自对偶规范理论，超出树级计算的范围。

如[10], 所示，对于某些特殊的规范李代数 $\mathfrak{g}$选择，可以通过类似格林－施瓦茨的机制来消除此反常。特别是，当规范李代数为 $\mathfrak{sl}(2)$、 $\mathfrak{sl}(3)$、 $\mathfrak{so}(8)$或某种例外代数时，可以引入一个类 Kodera-Spencer场（及其BV伙伴） $\eta \in \Omega^{(2,\bullet)}(\mathbb{PT})$，使其满足 $\partial\eta = 0$ ，并具有完整的六维作用量

$$S_{6\mathrm{d}} = \int_{\mathbb{PT}} \mathcal{B}F^{(0,2)}(\mathcal{A}) + \tfrac{1}{2}\overline{\partial}\eta\partial^{-1}\eta + \frac{\lambda_{\mathfrak{g}}}{4(2\pi i)^{3/2}\sqrt{3}}\eta\mathrm{Tr}(\mathcal{A}\partial\mathcal{A}) \tag{3.3}$$

其中 $\lambda_{\mathfrak{g}}$ 是一个 $\mathfrak{g}$相关常数。[10] 从四维视角来看，新场 η 引入了一个具有四次动能项的轴子场。由于我们的大部分计算都在树级进行，因此通常会忽略该轴子场的贡献——含有Kodera-Spencer场的经典理论并不一致，因为全纯 BF 理论的一圈反常被一个涉及树级反常的 η所抵消。

3.1.2 约化至三维

为了将上述四维和六维理论与第 2 节的讨论联系起来，我们考虑在 $\mathbb{R}^4\backslash\{0\}$ 上作径向切片，并沿径向 $\mathbb{PT}\backslash\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{R}^4\backslash\{0\} \times \mathbb{P}^1$ 切片将六维理论紧化。由此得到的、定义在 S^3 上的三维理论，在 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{P}^1$ 上仍是全纯的，并沿 $\mathbb{P}^1$ 变为拓扑的；沿 $\mathbb{R}_{>0}$的卡鲁扎–克莱因模 S^3 组成了 SU的 (2) 等距变换的表示 S^3。这种全纯–拓扑混合三维理论的场内容可以通过多种方式确定，参见 [6] 的第 6 节，其中介绍的方法与下文略有不同。我们将采用的方法是仿照 [40] 中概述的代数约化，该方法用于高维卡茨–穆迪代数；Zeng 的近期论文 [41] 介绍了如何在光滑情形而非代数情形下进行这种约化；与往常一样，代数类在光滑类中稠密，参见同上文献的附录 B。我们采用第 2.1 节的记号。

我们首先将理论局部地放置在开集 $\mathbb{C} \times(\mathbb{C}^2\backslash\{0\}) \subset \mathbb{C}^3$ 上。该开集上的函数环，即结构层上同调，在非零上同调次数上有支撑，这反映了 $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ 不是仿射的。事实上，标准计算表明

$$\mathbb{C}[\mathbb{C}^2\backslash\{0\}] \simeq \overbrace{\mathbb{C}[v^{\dot\alpha}]}^{\text{degree } 0} \oplus \overbrace{(v^{\dot 1}v^{\dot 2})^{-1}\mathbb{C}[(v^{\dot\alpha})^{-1}]}^{\text{degree } 1} \tag{3.4}$$

该函数环的 0 次部分与整个 $\mathbb{C}^2$ 上的函数环一致，这体现了 Hartogs 引理：$\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ 上的任意全纯函数都可以延拓为 $\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数，只要 $n > 1$。注意，1 次子空间可通过留数配对与 0 次部分的对偶空间等同。通过在 $\mathbb{C}^2\backslash\{0\} \simeq \mathbb{R}_{>0} \times S^3$ 内沿 S^3 紧化降到三维时，这些上同调类中的每一个都会产生一个三维场。例如，规范场 $\mathcal{A}$ 会降为两个场塔：

$$\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathbf{A}[m_1, m_2] \text{ and } \mathbf{\Phi}[m_1, m_2] \tag{3.5}$$

其中 $m_1, m_2 \geq 0$；三维费米场 $\mathbf{A}[m_1, m_2]$ 对应于零次上同调类 $(v^{\dot 1})^{m_1}(v^{\dot 2})^{m_2}$ 的系数，而三维玻色场 $\mathbf{\Phi}[m_1, m_2]$ 对应于一次上同调类 $(v^{\dot 1})^{-(1+m_1)}(v^{\dot 2})^{-(1+m_2)}$。重要的是，这些场继承了一

[10] 具体地说，常数 $\lambda_{\mathfrak{g}}$ 满足

$$\mathrm{Tr}(X^4) = \lambda_{\mathfrak{g}}^2 \mathrm{tr}(X^2)^2$$

其中 Tr 表示伴随表示中的迹，tr 表示基本表示中的迹。非零解的存在意味着上述对规范李代数 $\mathfrak{g}$ 的限制。

由于坐标 $v^{\dot\alpha}$ 变换为 $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^1$的截面，因此具有非平凡的三维自旋；也就是说，坐标 $v^{\dot\alpha}$ 的三维自旋为 1_2。相应地，$\mathbf{A}[\vec m] \in \Omega^{(\frac{m_1+m_2}{2})} \otimes \mathfrak{g}$的自旋为 $\frac{m_1+m_2}{2}$，而 $\mathbf{\Phi}[\vec m] \in \Omega^{(-1-\frac{m_1+m_2}{2})} \otimes \mathfrak{g}$的自旋为 $-1-\frac{m_1+m_2}{2}$。类似地，$\mathcal{B}$会产生一系列 $\mathbf{B}[\vec m]$、$\mathbf{\Lambda}[\vec m]$（自旋为 $1-\frac{m_1+m_2}{2}$和 $2+\frac{m_1+m_2}{2}$）。具有固定 m_1+m_2的卡鲁扎-克莱因模在旋转 S^3 切片的 $SU(2)$ 的自旋 $\frac{m_1+m_2}{2}$表示中变换。

将作用量 $S_{6\mathrm{d}}$ 经过此次紧化后，我们得到一个具有第2.1节所述形式的理论，不过其中包含无穷多个来自卡鲁扎-克莱因模的场。为了简洁地写出该理论，将卡鲁扎-克莱因模汇集为生成函数会很方便。

$$\mathbf{A}(v^{\dot\alpha}) = \sum_{m_1,m_2} (v^{\dot 1})^{m_1} (v^{\dot 2})^{m_2} \mathbf{A}[\vec m] \qquad \mathbf{\Phi}(v^{\dot\alpha}) = \sum_{m_1,m_2} (v^{\dot 1})^{-1-m_1} (v^{\dot 2})^{-1-m_2} \mathbf{\Phi}[\vec m] \tag{3.6}$$

对于来自 $\mathcal{B}$ 的塔也同理，参见 [6] 的公式（6.2.3）。采用这一记号，我们可以用一种异常简洁的形式写出三维理论的作用量：

$$S_{3\mathrm{d}} = \int \oint \frac{\mathrm{d}v^{\dot 1}}{2\pi i} \oint \frac{\mathrm{d}v^{\dot 2}}{2\pi i} \left(\mathbf{B}(v^{\dot\alpha}) F'(\mathbf{A}(v^{\dot\alpha})) + \mathbf{\Lambda}(v^{\dot\alpha})\, \mathrm{d}'_{\mathbf{A}(v^{\dot\alpha})} \mathbf{\Phi}(v^{\dot\alpha}) \right) \tag{3.7}$$

其中我们将 $\mathbf{A}(v^{\dot\alpha})$ 视为无限维李代数 $\mathfrak{g}[\![v^{\dot\alpha}]\!]$ 上的部分联络，其协变外微分为 $\mathrm{d}'_{\mathbf{A}(v^{\dot\alpha})}$，曲率为 $F'(\mathbf{A}(v^{\dot\alpha}))$。就分量场而言，该作用量具有以下形式：

$$\begin{aligned} S_{3\mathrm{d}} = & \sum_{m_1,m_2} \int \mathbf{B}_a[m_2,m_1]\, \mathrm{d}'\mathbf{A}^a[m_1,m_2] + \mathbf{\Lambda}_a[m_2,m_1]\, \mathrm{d}'\mathbf{\Phi}^a[m_1,m_2] \\ & + \sum_{m_1,m_2,n_1,n_2} \tfrac{1}{2} \int f^c{}_{ab} \mathbf{B}_c[m_2+n_2,m_1+n_1] \mathbf{A}^a[m_1,m_2] \mathbf{A}^b[n_1,n_2] \\ & + \sum_{m_1,m_2,n_1,n_2} \int f^c{}_{ab} \mathbf{\Phi}^b[m_2+n_2,m_1+n_1] \mathbf{A}^a[m_1,m_2] \mathbf{\Lambda}_c[n_1,n_2] \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.1.3 天球手征代数作为边界手征代数

通过这一从六维到三维的约化，利用第 2 节所述的工具，将渐近对称性的天球手征代数实现为上述三维理论的边界手征代数，是一项直接明了的工作。这一现象相当普遍：文献 [6] 指出，任何扭量理论的渐近对称性天球手征代数，都可以实现为某个合适的三维混合全纯-拓扑理论的边界手征代数。通过对胶子“矢量多重态”（$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$）施加狄利克雷边界条件，并对胶子“手征多重态”（$\mathbf{\Phi}$，$\mathbf{\Lambda}$）施加诺伊曼边界条件，即可实现控制（树级）散射振幅的天球手征代数。类比 [26, 第 7 节1]，局域算符的微扰代数由玻色子的边界值生成~$B[\vec m]$，$\Phi[\vec m]$。我们将 B，ϕ记作 J，J以与 [6]的记号保持一致。将.....重新组织起来会更方便

微扰局部算符如下：对于 $f \in \mathbb{C}[\![v^{\dot\alpha}]\!]$，我们将流 $\{J[\vec m]\}$（取值于 $\mathbb{C}[\![v^{\dot\alpha}]\!]^*$）与 f 的配对记作 $J[f]$：

$$f = \sum_{m_1,m_2\geq 0} f_{m_1,m_2}(v^{\dot 1})^{m_1}(v^{\dot 2})^{m_2} \rightsquigarrow J[f] = \sum_{m_1,m_2\geq 0} f_{m_1,m_2} J[m_1,m_2] \tag{3.9}$$

以及类似地，对于 $\widetilde J$。生成函数 $J[\tilde\lambda]$ 在 [6, 7] 中使用，对应于 $f = e^{\omega\tilde\lambda_{\dot\alpha}v^{\dot\alpha}}$。采用这一记号，这些生成元的非平凡算符乘积展开如下：

$$J_a[f_1](z)J_b[f_2](w) \sim \frac{f^c{}_{ab}}{z-w}J_c[f_1f_2](w) \qquad J_a[f_1](z)\widetilde J^b[f_2](w) \sim \frac{f^b{}_{ca}}{z-w}\widetilde J^c[f_1f_2](w) \tag{3.10}$$

与 $J_a[f]$ 的算符乘积展开尤为重要：它们编码了无穷小全纯（玻色）规范变换的作用量。[11] 回顾一下，常值（从三维视角来看）无穷小规范变换的李代数是从$\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ 到 $\mathfrak{g}$的全纯映射环，其玻色子代数就是 $\mathfrak{g}[\![v^{\dot\alpha}]\!]$。常值有限规范变换群就是由级数值群元素 $G = G[\![v^{\dot\alpha}]\!]$ 构成的群。因此，直接验证即可发现，以上算符乘积展开中的简单极点捕捉了规范变换的无穷小作用。

这可以直接推广到全纯（从三维视角来看）的玻色规范变换：无穷小全纯规范变换的李代数可识别为 $\mathfrak{g}_{\mathcal O} = \mathfrak{g}[\![z; v^{\dot\alpha}]\!]$，有限全纯规范变换群则是可逆级数 $G_{\mathcal O} = G[\![z; v^{\dot\alpha}]\!]$构成的群。与常数规范变换一样，上述算符乘积展开在全纯规范变换的作用下保持不变。

3.1.4 来自 Koszul 对偶的威尔逊线模

我们可以按照 [6] 第 5.3 节的建议，通过引入与手征代数平面横向的额外缺陷，为（天球）手征代数构造模。该文指出，形如 $\int_{v_1-\lambda v_2=-\epsilon}\mathcal A$、支撑在形如 $v_1-\lambda v_2+\epsilon=0$ 的非紧曲面上的全纯威尔逊缺陷，会在扭量空间上激发一个共形维数为 1[12]、形如 $dz\delta_{z=z_0}\frac{1}{v_1+\lambda v_2+\epsilon}$ 的态。（更一般地，预期正整数共形维数的算符与和共形软塔共轭的戈德斯通模相关；例如，已有研究从四维视角对此进行了讨论 [42, 43]）。在本小节中，我们将研究一类与全纯威尔逊线密切相关的模。这些模不同于 [6] 中的威尔逊“缺陷”，因为它们包含一个非平凡的积分核；该积分核对于在扭量空间这类复流形上构造部分联络至关重要（关于在扭量空间中构造全纯威尔逊线和威尔逊环的更多细节，参见例如 [44–46] ）。

[11]值得注意的是，流 $\widetilde J$ 是 *not* 一个规范变换的流。其余（费米）规范变换没有与之对应的 J——相应的规范场 $\mathbf\Lambda$ 采用了 Neumann 边界条件。[12]这可以通过让 Virasoro代数以向量场的形式作用于扭量空间轻松验证，例如 $L_0 = -z\partial_z - \frac12 v_i\partial_{v_i}$。

我们将运用 Koszul 对偶这一技术，推导手征代数元素在对应于六维全纯威尔逊线的模上的作用；关于运用 Koszul 对偶分析模的相关研究[13]，例如参见 [47–49]。这里，我们将分别从三维和六维实现的角度，描述由威尔逊线实现的模；简言之，六维（全纯）威尔逊线将约化为三维威尔逊线，而 $\mathfrak{g}[v^{\dot\alpha}]$ 在三维中的表示则编码了六维表示以及威尔逊线的支撑。[14]

我们先从三维威尔逊线计算入手，然后将其推广到由六维全纯威尔逊线产生的模的情形。考虑一条威尔逊线与第 2节所述的某个三维混合全纯-拓扑规范理论中的普适全纯~缺陷相交或终止于其上。聚焦于规范场，普适全纯 $J_a(z)$ 缺陷具有局域算符，并且 $J^a(z)$ 与体场 A耦合， B 如下

$$\int J_a \mathbf{A}^a + \widetilde{J}^a \mathbf{B}_a. \tag{3.11}$$

接下来，我们考虑全纯缺陷上的局域算符 M^R ，它还连接到一条沿拓扑方向延伸的威尔逊线 $\mathcal{W}_R$ 。[15] 要求此构型具有规范不变性，进而对 J_a $\widetilde{J}^a$ 与局域算符 M^R 的算符乘积展开施加约束：

$$\begin{aligned} 0 = Q\Bigg[\Bigg(1 + \int_{z\neq w} \big(J_a(z)\mathbf{A}^a(z,\overline{z},0) + \widetilde{J}^a(z)\mathbf{B}_a(z,\overline{z},0)\big) + \dots\Bigg) \\ \times \Bigg(1 + \int_0^\infty \mathbf{A}^a(w,\overline{w},t)\rho_a + \dots\Bigg) M^R(w)\Bigg] \\ = \Bigg(\int_{z\neq w} \big(J_a(z)(\overline{\partial}\mathbf{A}^a + \dots) + \widetilde{J}^a(z)(\overline{\partial}\mathbf{B}_a + \dots)\big) + \dots\Bigg) M^R(w) \\ + \Bigg(\int_0^\infty (\mathrm{d}_t\mathbf{A}^a + \dots)\rho_a + \dots\Bigg) M^R(w) \\ = \sum_{n\geq 0}\Bigg[\Bigg(\oint \tfrac{(z-w)^n}{n!} J_a(z) M^R(w) - \delta_{n,0} M^R(w)\Bigg)\partial_w^n \mathbf{A}^a(w) \\ + \Bigg(\oint \tfrac{(z-w)^n}{n!} \widetilde{J}^a(z) M^R(w)\Bigg)\partial_w^n \mathbf{B}_a(w)\Bigg] + \dots \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 ρ_a 是 R表示上 $\mathfrak{g}$ 作用量的表示矩阵；在最后一个等式中，我们使用了~分部积分和斯托克斯定理。由此可见， J_a、 J^a和 M^R 的算符乘积展开具有以下形式：

$$J_a(z)M(w) \sim \frac{\rho_a}{z-w} M^R(w) \qquad \widetilde{J}^a(z) M^R(w) \sim 0. \tag{3.13}$$

[13]对于 [6]，的威尔逊缺陷，我们需要改用曲 Koszul 对偶 [14]。[14]感谢 A. Sharma 告知我们，这些模也已由 A. Sharma、E. Casali 和 W. Bu 独立研究，相关工作即将发表。[15]我们也可以考虑缺陷平面上的一个局域算符，它连接位于缺陷平面两侧的两条威尔逊线；不过，我们只考虑其中一条威尔逊线是平凡的情形。

也就是说， M^R 必定是由 J_a 生成的 $\mathfrak{g}$ 流代数的初级算符，并且该流代数与 J^a的算符乘积展开均无奇异项。

现在我们转向这一计算的六维类比。这里有两个重要的区别。首先，与上面的例子不同，六维 Wilson 线的支撑位置有非平凡的选择：除了在手征代数平面上的位置 w，我们还必须在横向的 $\mathbb{C}^2$ 中选择一条全纯曲线。此外，我们还必须纳入一系列结点局域算符，它们与 Wilson 线在同时垂直于手征代数平面和缺陷的方向上的涨落相耦合。为简单起见，考虑将 Wilson 线置于 $v^{\dot{2}}=0$ 处的 $v^{\dot{1}}$ 平面上。结点局域算符与 Wilson 线之间的耦合于是由下式给出

$$\sum_{n\geq 0}\mathcal{D}_{(0,n)}\mathcal{W}_R M^R[n]=M^R[0]+\sum_n\int\frac{\mathrm{d}v^{\dot{1}}}{2\pi i v^{\dot{1}}}\mathcal{D}_{(0,n)}\mathcal{A}^a\rho_a M^R[n]+\dots \tag{3.14}$$

其中 $\mathcal{D}_{(m_1,m_2)}:=\frac{1}{m_1!\,m_2!}\partial_{\dot{1}}^{m_1}\partial_{\dot{2}}^{m_2}$。注意，要定义一条全纯 Wilson 线，我们必须将规范场与适当的亚纯微分作楔积，这会产生一个取决于 Wilson 线支撑位置的非平凡积分核。

我们可以通过要求该耦合满足规范不变性，并结合普适的缺陷耦合，推导出模结构

$$\sum_{m_1,m_2}\int J_a[\vec{m}]\mathcal{D}_{\vec{m}}\mathcal{A}^a+\widetilde{J}^a[\vec{m}]\mathcal{D}_{\vec{m}}\mathcal{B}_a. \tag{3.15}$$

由于这与上面的计算类似，我们直接给出结果：非平凡的算符乘积展开为

$$J_a[\vec{m}](z)M^R[n](w)\sim\frac{\delta_{m_1,0}\rho_a}{z-w}M^R[n+m_2](w)\qquad \widetilde{J}^a[\vec{m}](z)M^R[n](w)\sim 0, \tag{3.16}$$

我们看到，算符塔 $M^R[n]$ 可以与表示 $R[v^{\dot{\alpha}}]/(v^{\dot{1}})$所诱导的 $\mathfrak{g}[v^{\dot{\alpha}}]$流 $J_a[m_1,m_2]$的初级算符对应起来。更一般地，如果我们将威尔逊线沿曲线 $v^{\dot{1}}-\lambda v^{\dot{2}}=0$放置，就会得到由 $R[v^{\dot{\alpha}}]/(\lambda v^{\dot{1}}-v^{\dot{2}})$诱导的模。我们将更一般的模元素记为 $M^{R,\lambda}[n]$；参数λ 自然取值于黎曼球面 $\mathbb{P}^1$，上述情形对应于 $\lambda=\infty$。用上文引入的记号，我们可以将该作用量写成如下形式：

$$J_a[f](z)M^{R,\lambda}[p](w)\sim\frac{\rho_a}{z-w}M^{R,\lambda}[fp](w)\qquad \widetilde{J}^a[f](z)M^{R,\lambda}[p](w)\sim 0, \tag{3.17}$$

其中 $p\in\mathbb{C}[\![v^{\dot{\alpha}}]\!]/(\lambda v^{\dot{1}}-v^{\dot{2}})$ 和 fp $p\in$表示 $f\in\mathbb{C}[\![v^{\dot{\alpha}}]\!]$在 $\mathbb{C}[\![v^{\dot{\alpha}}]\!]/\,\lambda v^{\dot{1}}-v^{\dot{2}}$ 上的自然作用量。正如上文所述，我们得出结论：这 6d 条全纯威尔逊线约化为沿 S^3 约化得到的三维理论中的威尔逊线。

继续之前，我们先说明算符 $M^{R,\lambda}[n]$ 的量子数。首先，局域算符 $M^{\lambda}[n](w)$ 的自旋为 $-\frac{n}{2}$，标度维数为 $-n$；这是由自旋

以及 $J_a[\vec{m}]$ 的标度维数，再结合威尔逊线在旋转下不变这一事实得出的。将 $v^{\dot{\alpha}}$ 作为二重态旋转的 $SU(2)$ 作用并不保持这些模；从几何上说，这是因为轨迹 $v^{\dot{1}} - \lambda v^{\dot{2}} = 0$ 不具不变性。相反，这个 $SU(2)$ 通过对 $\mathbb{P}^1$ 的自然作用，将这些模彼此旋转。位于 $\lambda = \infty$（分别为 $\lambda = 0$）处的模 $\widetilde{\ }$ 与对角环面相容，该对角环面以权 $_{12}$（$m_1 - m_2$）旋转 $J_a[\vec{m}]$、$J^a[\vec{m}]$，其中 $M^{R,\infty}[n]$（分别为 $M^{R,0}[n]$）的权为 $-n$（分别为 n）。与 $\mathbb{P}^1$ 的其他点相关的模也具有由稳定 λ 的 $U(1) \subset SU(2)$ 所赋予的分次，但算符 $J_a[\vec{m}]$、$J^a[\vec{m}]$ 将不再是权向量。

3.2 天球单极子算符

在本小节中，我们将描述天球手征代数的非微扰修正。从上述三维理论的角度来看，这类修正源自边界单极算符。为简化讨论，并避免第2节所述非阿贝尔单极子的困难，我们将把注意力限制在自对偶阿贝尔规范理论上；为使讨论更有趣一些，我们引入电子场和正电子场，以构造自对偶版本的量子电动力学。

作为扭量空间上的全纯理论，自对偶量子电动力学的场内容包括规范场 $\mathcal{A} \in \Omega^{(0,1)}(\mathbb{PT})$ 和 $\mathcal{B} \in \Omega^{(0,1)}(\mathbb{PT}, \mathcal{O}(-4)) \simeq \Omega^{(3,1)}(\mathbb{PT})$（每个场的分量都是玻色的），以及“电子” $\mathcal{X} \in \Omega^{(0,1)}(\mathbb{PT}, \mathcal{O}(-1))$ $\mathcal{Y} \in \Omega^{(0,1)}(\mathbb{PT}, \mathcal{O}(-3))$ 和“正电子” $\overline{\mathcal{X}} \in \Omega^{(0,1)}(\mathbb{PT}, \mathcal{O}(-1))$ $\overline{\mathcal{Y}} \in \Omega^{(0,1)}(\mathbb{PT}, \mathcal{O}(-3))$。该理论的作用量形式尤其简单：

$$S_{6\mathrm{d}} = \int \mathcal{B}\overline{\partial}\mathcal{A} + \mathcal{Y}\overline{\partial}_{\mathcal{A}}\mathcal{X} + \overline{\mathcal{Y}}\ \overline{\partial}_{\mathcal{A}}\overline{\mathcal{X}}. \tag{3.18}$$

需要注意的是，该理论存在上述反常；此外，与 [6, 7] 中研究的非阿贝尔规范理论的情形不同，这种反常无法通过格林-施瓦茨机制消除。特别是，我们只能期待非微扰边界手征代数重现树级结果。

3.2.1 约化至三维与天球手征代数

六维规范场 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 约化到三维的方式与纯自对偶规范理论中的相同。电子场产生四个塔：由 $\mathcal{Y}$ 产生的场记为 $\mathbf{\Psi}[m_1, m_2]$,$\mathrm{Y}[m_1, m_2]$（自旋为 $\frac{1-m_1-m_2}{2}$ 和 $\frac{3+m_1+m_2}{2}$），由 $\mathcal{X}$ 产生的场记为 $\mathbf{\Pi}[m_1, m_2]$, $\mathrm{X}[m_1, m_2]$（自旋为 $-\frac{1+m_1+m_2}{2}$ 和 $\frac{1+m_1+m_2}{2}$）。正电子的分解与此相同。场 $\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Pi}, \overline{\mathbf{\Psi}}, \overline{\mathbf{\Pi}}$ 是费米场，而场 X、Y、X、Y 是玻色场。式 (3.18) 中的六维作用量约化为以下作用量（我们省略对 $v^{\dot{\alpha}}$ 的依赖）：

$$\begin{aligned} S_{3\mathrm{d}} = &\int \oint \frac{\mathrm{d}v^{\dot{1}}}{2\pi i} \oint \frac{\mathrm{d}v^{\dot{2}}}{2\pi i} \Big(\mathbf{B}\, \mathrm{d}'\mathbf{A} + \mathbf{\Lambda}\, \mathrm{d}'\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Psi}\, \mathrm{d}'_{\mathbf{A}}\mathbf{X} + \mathbf{\Pi}\, \mathrm{d}'_{\mathbf{A}}\mathbf{Y} + \overline{\mathbf{\Psi}}\, \mathrm{d}'_{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{X}} + \overline{\mathbf{\Pi}}\, \mathrm{d}'_{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{Y}} \Big) \\ &+ \int \oint \frac{\mathrm{d}v^{\dot{1}}}{2\pi i} \oint \frac{\mathrm{d}v^{\dot{2}}}{2\pi i} \Big(\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{YX} - \overline{\mathbf{YX}}\big) \Big) \end{aligned} \tag{3.19}$$

上述边界条件的推广对应于对光子“矢量多重态”（A, B）和电子/正电子“手征多重态”（X $\mathbf{\Psi}$）、（Y $\mathbf{\Pi}$）、（X $\overline{\mathbf{\Psi}}$）、（Y $\overline{\mathbf{\Pi}}$）施加狄利克雷边界条件，同时对光子“手征多重态”（$\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Lambda}$）施加诺伊曼边界条件。类比于 [26, 第 7.1 节，局域算符的微扰代数由玻色场 $B[\vec{m}], \phi[\vec{m}]$（分别对应正/负螺旋度胶子）的边界值，以及费米场 $\Psi[\vec{m}]$, $\Pi[\vec{m}]$,$\overline{\Psi}[\vec{m}]$, $\overline{\Pi}[\vec{m}]$（分别对应正/负螺旋度电子和正电子）生成。与之前相同，我们将 $\lrcorner B, \phi$ 记为 J, J，以符合 [6] 的记号。使用上一节介绍的记号，这些生成元的非平凡算符乘积展开具有以下形式：

$$\begin{aligned}
J[f_1](z)\Psi[f_2](w) &\sim \frac{-1}{z-w}\Psi[f_1 f_2](w) & J[f_1](z)\overline{\Psi}[f_2](w) &\sim \frac{1}{z-w}\overline{\Psi}[f_1 f_2](w) \\
J[f_1](z)\Pi[f_2](w) &\sim \frac{1}{z-w}\Pi[f_1 f_2](w) & J[f_1](z)\overline{\Pi}[f_2](w) &\sim \frac{-1}{z-w}\overline{\Pi}[f_1 f_2](w) \\
\Pi[f_1](z)\Psi[f_2](w) &\sim \frac{1}{z-w}\tilde{J}[f_1 f_2](w) & \overline{\Psi}[f_1](z)\overline{\Pi}[f_2](w) &\sim \frac{1}{z-w}\tilde{J}[f_1 f_2](w)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

常值（从三维视角看）的无穷小（玻色）规范变换的李代数就是 $\mathfrak{g} = \mathbb{C}[\![v^{\dot\alpha}]\!]$。常值有限规范变换构成的群就是可逆级数 $G = \mathbb{C}[\![v^{\dot\alpha}]\!]^\times$ 所成的群，其群结构由级数的乘法给出；级数 $g(v^{\dot\alpha}) \in \mathbb{C}[\![v^{\dot\alpha}]\!]$ 可逆，当且仅当 $g(0) \neq 0$。据此，不难验证常值规范变换 $g(v^{\dot\alpha}) \in G$的作用量为

$$\begin{aligned}
g \cdot J[f] &= J[f] & g \cdot \tilde{J}[f] &= \tilde{J}[f] \\
g \cdot \Psi[f] &= \Psi[g^{-1} f] & g \cdot \overline{\Psi}[f] &= \overline{\Psi}[gf] \\
g \cdot \Pi[f] &= \Pi[gf] & g \cdot \overline{\Pi}[f] &= \overline{\Pi}[g^{-1} f]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

全纯无穷小规范变换的李代数同样可识别为 $\mathfrak{g}_{\mathcal{O}} = \mathbb{C}[\![z;\ v^{\dot\alpha}]\!]$ 而全纯有限规范变换构成的群是可逆级数 $G_{\mathcal{O}} = \mathbb{C}[\![z;\ v^{\dot\alpha}]\!]^\times$ 所成的群。与之前一样，级数 $g(z;\, v^{\dot\alpha})$ 可逆，当且仅当它在 $z = v^{\dot\alpha} = 0$ 处非零。该全纯规范变换的作用量可由上述结果推出。例如，它对 $\Pi[f]$ 的作用形式如下：

$$g(z; v^{\dot\alpha}) = \sum_{n\geq 0} g_n(v^{\dot\alpha}) z^n \rightsquigarrow g \cdot \Pi[f] = \sum_{n\geq 0} z^n \Pi[g_n f] \tag{3.22}$$

与常数规范变换一样，上述算符乘积展开在全纯规范变换的作用下保持不变。

我们注意到，这个树级手征代数除了自旋和电荷 q外，还有两种分次：轴荷 q_A 以及辅助的 $\mathbb{Z}$ 分次 a，它出现在 BF类理论中，并且~以权 1 对余切方向进行缩放（这就是 [6,引理 9.0.1]中使用的“ Js 的数量”分次）。注意，后一种分次在偏离自对偶规范理论的形变中不会保留下来。

	J	$\tilde{J}$	Ψ	Π	$\overline{\Psi}$	$\overline{\Pi}$
q	0	0	-1	1	1	-1
q_A	0	0	-1	1	-1	1
a	0	1	1	0	1	0

表 2：树级自对偶量子电动力学的微扰天球手征代数生成元的电荷（q）、轴荷（q_A）和辅助分级（a）。

3.2.2 自对偶量子电动力学中的天球谱流

现在我们转向天球手征代数中的非微扰算符。从将这一手征代数视为存在于三维理论边界上的观点来看，这些非微扰修正将对应于边界单极算符。

如上所述，在自对偶麦克斯韦理论的三维实现中，全纯规范变换群是由三个坐标 $z, v^{\dot{\alpha}}$ 构成的可逆级数群。从天球手征代数的角度来看，这些全纯规范变换保持真空模不变。尽管如此，模代数在更大的对称群下保持不变：亚纯规范变换群（从三维视角来看）$G_{\mathcal{K}} = \mathbb{C}((z))[\![v^{\dot{\alpha}}]\!]^{\times}$；只要洛朗级数 $g(z; v^{\dot{\alpha}})$ 中 z 的最低次幂项的系数是 $v^{\dot{\alpha}}$ 中的可逆级数，该洛朗级数就是可逆的。

亚纯规范变换群除以全纯规范变换群，所得商为仿射格拉斯曼量 $\mathrm{Gr}_G = G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}$。不难看出，$G = \mathbb{C}[\![v^{\dot{\alpha}}]\!]^{\times}$ 的仿射格拉斯曼量（的闭点）可以与 $\mathbb{Z}$ 等同：令 $g(z; v^{\dot{\alpha}}) \in G_{\mathcal{K}}$ 为任意亚纯规范变换，并令 $\mathfrak{m}_0$为 z的最小幂次，使其系数非零（因而必定可逆）。由此可知，$g(z; v^{\dot{\alpha}})$ 与 $z^{\mathfrak{m}_0}$ 相差一个全纯规范变换 $g' = z^{-\mathfrak{m}_0} g$；此外，在 $G_{\mathcal{O}}$ 中不存在保持 $z^{\mathfrak{m}_0}$不变的非平凡元素，因此该商为$\mathbb{Z}$。

类比第2.2节的讨论，点 $z^{\mathfrak{m}}$ 属于仿射格拉斯曼量 Gr_G，它给出一个谱流操作 $\sigma_{\mathfrak{m}}$。该谱流的作用通过施加亚纯规范变换 $z^{\mathfrak{m}}$来实现：

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathfrak{m}}(J[f]) &= J[f] & \sigma_{\mathfrak{m}}(\tilde{J}[f]) &= \tilde{J}[f] \\ \sigma_{\mathfrak{m}}(\Psi[f]) &= z^{-\mathfrak{m}}\Psi[f] & \sigma_{\mathfrak{m}}(\overline{\Psi}[f]) &= z^{\mathfrak{m}}\overline{\Psi}[f] \\ \sigma_{\mathfrak{m}}(\Pi[f]) &= z^{\mathfrak{m}}\Pi[f] & \sigma_{\mathfrak{m}}(\overline{\Pi}[f]) &= z^{-\mathfrak{m}}\overline{\Pi}[f] \end{aligned} \tag{3.23}$$

我们将真空矢量经谱流产生的局域算符记为 $V_{\mathfrak{m}}$；整数 $\mathfrak{m}$ 编码了该单极子的三维磁荷/单极子数。我们的设想是，完整的非微扰手征代数通过将这些模扩充到微扰天球手征代数中来实现。将这些生成元加入天球手征代数后，我们便得到一个按三维磁荷 $\mathfrak{m}$分次的另一种 $\mathbb{Z}$ 分次；微扰手征代数对应于荷为 0 的子代数。

我们预期这些边界磁单极子将发挥两种作用，方式与第 2.2.1 节所述相同。首先，它们应确保电荷量子化：完整的非微扰天球手征代数的模必须具有整数电荷，而第 3.1.4 节所述的微扰分析则允许威尔逊线带有任意复数荷。在算符乘积展开层面，我们发现

$$V_{\mathfrak{m}}(z)M^{q,\lambda}[p](w) \sim (z-w)^{q\mathfrak{m}}\sigma_{\mathfrak{m}}(M^{q,\lambda}[p](w)) + \dots \tag{3.24}$$

因此 $q\mathfrak{m}$ 必须是整数。其次，这些天球单极子将会对应到微扰代数中彼此相差谱流的模。我们注意到，由于天球手征代数中的阿贝尔流层数为零，边界单极子的电荷为零，因此它们不会像在三维陈-西蒙斯理论中那样，对应到具有不同电荷的模。

3.2.3 四维诠释

我们试图借助 [6]中建立的六维桥接，理解与这些谱流模对应的四维态的诠释。首先注意，真空的第 $\mathfrak{m}$ 次谱流中的态与真空模中的态一一对应，但它们的自旋发生了偏移：例如，我们看到 $\sigma_{\mathfrak{m}}(\Psi[f]) = z^{-\mathfrak{m}}\Psi[f]$ ，因此该场的自旋及其模 $\Psi[m_1,m_2]_n$ 和这些模所生成的态都偏移了 $\mathfrak{m}$ ——场 $\Psi[m_1,m_2]$ 的自旋为 $\frac{1-m_1-m_2}{2}$，而它的第 $\mathfrak{m}$ 次谱流的自旋为 $\mathfrak{m}+\frac{1-m_1-m_2}{2}$。量子数 m_1、m_2 保持不变——我们的谱流态射只改变四维自旋群 $\mathrm{Spin}(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ 中旋转扭量球面的那一半所对应的量子数。

重要的是，我们看到，所得的态恰好是由一个取值于 $\mathcal{O}(-2\mathfrak{m}-3)$ 的六维场 $\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathcal{Y})$ 约化而来，对应于一个螺旋度为 $-\frac{1}{2}-\mathfrak{m}$ 的无质量四维场。更一般地，谱流会将一个取值于 $\mathcal{O}(2h-2)$、带电荷q 的六维场 $\mathcal{Z}$，变为一个取值于 $\mathcal{O}(2h-2+2q\mathfrak{m})$ 的六维场 $\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathcal{Z})$。因此，第 $\mathfrak{m}$ 次谱流模中的态可以被识别为由围绕六维中的全纯规范丛 $\mathcal{O}(2\mathfrak{m}) \to \mathbb{PT}$ 进行微扰而得到的态。[16] 与此丛耦合会导致螺旋度表观地发生 $h \to h+q\mathfrak{m}$ 的偏移。

非平凡规范丛导致螺旋度发生偏移，这是一个熟悉的现象：这恰好就是带电粒子处于磁单极子 [50–52] 的场中时所经历的角动量偏移！更准确地说，应该说，带电粒子与磁荷粒子组成的双粒子态具有非平凡的“成对螺旋度”。我们可以这样理解，关于这些概念的详细讨论，参见例如 [53, 第 2] 节。[17] 如果我们变换到质心系，或任何使粒子的动量指向天球上对跖点的参考系，

[16]相反，我们围绕主 $\mathbb{C}^\times$ 丛 $P_{2\mathfrak{m}}$ 进行微扰，其中 $\mathcal{O}(2\mathfrak{m})$ 是与电荷 1 表示 $\mathcal{O}(2\mathfrak{m}) = P_{2\mathfrak{m}} \times_{\mathbb{C}^\times} \mathbb{C}$相关联的线丛。[17]本文献采用的约定是，电荷与磁荷的配对为半整数；也就是说，我们的荷 $\mathfrak{m}$是其荷 g的两倍。

很容易看出，任意此类构型在一个$SO(2)$小群作用下保持不变，该小群使横向平面旋转；因此，双粒子态由一对单粒子数据以及一个额外的量子数标记，该量子数描述它在这个“成对小群”下可能发生的变换。具体而言，在转过角度 ϕ 时，一般的双粒子态会获得一个相位 $e^{i(s_1+s_2+h_{12})\phi}$，其中 s_i 是两个粒子的自旋/螺旋度，而 h_{12} 是前述成对螺旋度。 $h_{12}=0$ 的情形描述两个单粒子态的直积。更一般地，如果粒子 1 的电荷为 $q\in\Lambda_{\rm weight}$，粒子 2 的磁荷为 $\mathfrak{m}\in\Lambda^\vee_{\rm weight}$，那么可以准确地得到 $h_{12}=\frac{1}{2}\langle\mathfrak{m}、q\rangle$。

在当前设定中，我们将算符的插入点 $V_{\mathfrak{m}}$ 诠释为天球上的一点；在 z处放置另一个电荷为 q 的算符，我们看到，自旋偏移 $q\mathfrak{m}$ 恰好解释了旋转天球时预期会产生的额外相位。耐人寻味的是，自然的谱流 $\sigma_{\mathfrak{m}}$ 似乎实现了偶数磁荷，这对应于它们实现了与 $\mathcal{O}(2\mathfrak{m}$的耦合。对于其余磁荷，也存在谱流态射，它们对应于与丛 $\mathcal{O}(2\mathfrak{m}+1$的耦合；但这会导出扭曲模（参见二维超共形理论中交换 Ramond 扇区和 Neveu-Schwarz 扇区的谱流映射），因此无法用于扩展天球手征代数。值得探究的是，这些扭曲模能否与 [54] 提出的扭曲扇区联系起来，以描述带电粒子散射于重磁单极子时的出态。

若没有这一螺旋度偏移，我们的天球手征代数生成元 $V_{\mathfrak{m}}$ 的四维诠释就不会一目了然。由谱流实现的三维磁荷算符 $J^\vee$ 引出了一个有趣且直接的问题：是否存在流 J 的磁性对应物，用以实现 Strominger 磁软定理 [16]（或 [17] 中提出的非阿贝尔扩展）？对于纯阿贝尔自对偶规范理论，显然，若不向手征代数添加额外生成元，就不可能有这样的算符：对应于态 $\sigma_{\mathfrak{m}}(|0\rangle)$ 的算符 $V_{\mathfrak{m}}(z)$ 与所有算符的算符乘积展开都正则。一种令人期待的可能性是，加入与 J 共轭的戈德斯通场后，便会出现这样的算符；参见 [55] 的第3节。如 [56]，所示，这些戈德斯通场的适当相干态构成了引力天球手征代数中有趣的模，实现自对偶 Kerr-Taub-NUT 背景。在纯自对偶阿贝尔规范理论中，存在类似的戈德斯通场 S，它们与 J 共轭；由这些场的相干态实现的模会导出 Faddeev-Kulish 着装因子 [57, 58]，，参见 [59] 的第 3.3 节；另见 [60]。我们的磁单极子 $V_{\mathfrak{m}}$ 起着互补作用：磁单极子模是由 J 构成的相干态；参见，三维磁单极子是流 $J=\partial\varphi$ 的顶点算符 $e^{\mathfrak{m}\varphi}$，而非由 S 构成。由于戈德斯通模 S 与 J 共轭，因此存在一个算符乘积展开

$$S[0,0](z)J[0,0](w)\sim\frac{1}{(z-w)^2} \tag{3.25}$$

因此

$$S[0,0](z)V_{\mathfrak{m}}(w)\sim\frac{mV_{\mathfrak{m}}(w)}{z-w} \tag{3.26}$$

我们看到 $V_{\mathfrak{m}}(w)$ 在戈德斯通玻色子 $S[0,0]$所生成的对称性下带荷。这些戈德斯通模 [18] 在规范理论中会在零无穷远产生大规范变换，从而导致四维真空发生偏移。谱流顶点算符上的非平凡作用是自然的，因为 $V_{\mathfrak{m}}$ 应与戈德斯通玻色子所产生的非平凡四维量子电动力学背景相互作用。

尽管这些算符携带三维磁荷，但它们并不是在四维中构造对偶“磁性”软流的合适候选。正如[59], 的脚注 16 所指出的，要进一步纳入磁软定理，似乎需要对由 J、S生成的代数作进一步扩张或加倍；这在扭量框架中如何实现，仍是一个开放问题。

从另一个角度看，我们的磁单极子 $V_{\mathfrak{m}}$ 可以通过将六维规范丛降至四维来理解。如果从丛 $\mathcal{O}(\mathfrak{m}) \to \mathbb{PT}$出发，我们可以尝试通过 $\mathbb{PT}$ 与（复化）时空之间的对应将其降至四维。我们考虑对应空间 $\mathbb{F} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}^4$ （或 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^4$）；这个空间自然地适合放入如下图表：

$$\mathbb{PT} \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{F} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^4 \tag{3.27}$$

其中 $\pi_1([z_\alpha], x^{\dot\alpha\alpha}) = [x^{\dot\alpha\alpha} z_\alpha, z_\alpha]$ 和 $\pi_2([z_\alpha], x^{\dot\alpha\alpha}) = (x^{\dot\alpha})$。不难验证，将 $\mathcal{O}(\mathfrak{m}) \to \mathbb{PT}$拉回到对应空间 $\mathbb{F}$ ，所得结果就是 $\mathbb{R}^4$ 上的平凡丛与丛 $\mathcal{O}(\mathfrak{m}) \to \mathbb{P}^1$的乘积。沿着$\pi_2$ 推前这个丛则稍微复杂一些：我们需要计算丛 $\mathcal{O}(m)$沿 $\pi : \mathbb{P}^1 \to$ 点的推前，这在朴素情况下计算的是整体截面空间。当然，由于 $\mathbb{P}^1$ 不是仿射的，我们实际上应该考虑导出推前，它计算的是层上同调。由此得出，沿 π_1 推前 $\pi_2^* \mathcal{O}(\mathfrak{m})$，会得到 $\mathbb{R}^4$上的平凡丛的 $H^\bullet(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))$ 个副本。直接计算可得，这个上同调为

$$H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\mathfrak{m})) = \begin{cases} \mathbb{C}^{\mathfrak{m}+1} & i = 0, \mathfrak{m} \geq 0 \\ \mathbb{C}^{|\mathfrak{m}+1|} & i = 1, \mathfrak{m} < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{3.28}$$

将这一计算转换到扭量对应中， $\mathbb{PT}$上的六维丛 $\mathcal{O}(\mathfrak{m})$变为正手征自旋丛 S_+ 或其对偶S_+^*的（适当的对称幂）： [19]

$$\pi_{1*}(\pi_2^* \mathcal{O}(\mathfrak{m})) = \begin{cases} \mathrm{Sym}^{\mathfrak{m}} S_+ & \mathfrak{m} \geq 0 \\ \mathrm{Sym}^{-\mathfrak{m}-1} S_+^* & \mathfrak{m} \leq -2 \\ \underline{0} & \mathfrak{m} = -1 \end{cases} \tag{3.29}$$

[18]近期，文献 [43] 探讨了这样一族具有正整数共形权重的无穷多个模，它们与构成微扰手征代数的共形软模成辛配对。文中证明，经过适当构造的戈德斯通修饰态可以平凡化整族共形软定理。若这些性质能够帮助我们更好地理解二维真空谱流的四维诠释，将会很有意义。[19]我们感谢 L. Mason 向我们解释了这种与旋量丛的对应关系。

最简单的理解方式是注意到，对于非负的 $\mathfrak{m}$ ， $\mathcal{O}(\mathfrak{m})$的层上同调可与 z_α中的 $\mathfrak{m}$ 次多项式对应；塞尔对偶说明，对于 $\mathfrak{m} \leq -2$ ， $\mathcal{O}(\mathfrak{m})$是$\mathcal{O}(-\mathfrak{m}-1)$的对偶；而丛 $\mathcal{O}(-1)$没有上同调，因此化为秩为 0 的向量丛，即纤维为 0 维向量空间 0 的常值层 0。

到目前为止，我们的结果还停留在与主 $U(1)$ 丛相关的伴随丛层面；我们希望直接从主丛的角度来理解这些问题。将该丛与熟悉的四维规范场构型按照通常的扭量对应联系起来时，一个主要困难在于：在时空的每一点上，这个规范丛在扭量球面上的陈类非零。Sparling[61] 研究了非阿贝尔情形下扭量对应的推广；当陈类仅在时空中的孤立点处非零时，他将这些点称为跳跃点。在那里，他发现规范场出现奇点，进而导致杨–米尔斯对称性破缺。[20] 在这类情形下，Sparling 证明，可以为原规范群的对称子群求得杨–米尔斯方程的解，并得到某些壳上无质量物质场。例如，简单的跳跃轨迹对于 $SU(2)$ 会导出两组自对偶麦克斯韦方程的解，以及在这两个规范群下的额外带电场。我们尚不清楚如何将他的推理推广到我们的情形，但我们或许可以期待，我们的主 $U(1)$ 丛是通过类似的“对称性破缺”现象出现的，并且可能可以通过将旋量丛的结构群约化为对角 $U(1) \subset SU(2)$+来得到。

3.2.4 自对偶单极子

继续讨论之前，值得一提的是，已有研究探讨了带有四维磁荷的自对偶场构型。自对偶阿贝尔规范理论中的磁单极子不能只有磁荷：自对偶方程意味着必须伴有电荷，使得 $E+iB=0$。因此，合理的问题是：在扭量空间（的某个开集） $\mathbb{PT}$ 上，是否存在一个全纯线丛，能够实现这种四维“自对偶”单极子？所幸，彭罗斯和 Sparling 的工作已给出了这样的线丛 [62]；另见 [63] 的第8.4章及其中的参考文献。[21]

我们从一条世界线沿 x^4 轴的自对偶单极子出发。相应的场强可以通过取扭量函数 $\ln(v^{\dot{2}} - \frac{v^{\dot{1}}}{z})$ 来实现；将此扭量函数经过彭罗斯变换后，得到的场强具有如下自对偶部分

$$F_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{x^1+ix^2}{r^3} & \frac{x^3}{r^3} \\ \frac{x^3}{r^3} & \frac{x^1-ix^2}{r^3} \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

其中 $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2,$ ，可按需取值。将扭量函数替换为以下形式，即可自然地推广到任意动量 $p_{\alpha\dot{\alpha}}$ ：

$$f_p(z, v^{\dot{\alpha}}) = \ln\left(\left(p_{2\dot{\alpha}} - \frac{p_{1\dot{\alpha}}}{z}\right)v^{\dot{\alpha}}\right) \tag{3.31}$$

[20]因此，在我们的情形中，构型可能在时空中的每一点都奇异，而我们不清楚这样的解是否存在或稳定。[21] 感谢 A. Sharma 向我们讲解所谓的“扭量四重奏”的相关内容。

相应的自对偶场强形式如下

$$F_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \frac{ip^2}{4}\begin{pmatrix} \frac{(p_1+ip_2)(x^3+ix^4)+(p_3+ip_4)(x^1+ix^2)}{\left(p^2x^2-(p\cdot x)^2\right)^{3/2}} & \frac{i\left(p_1x^2-p_2x^1+p_3x^4-p_4x^3\right)}{\left(p^2x^2-(p\cdot x)^2\right)^{3/2}} \\ \frac{i\left(p_1x^2-p_2x^1+p_3x^4-p_4x^3\right)}{\left(p^2x^2-(p\cdot x)^2\right)^{3/2}} & \frac{(p_1-ip_2)(x^3-ix^4)+(p_3-ip_4)(x^1-ix^2)}{\left(p^2x^2-(p\cdot x)^2\right)^{3/2}} \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

这个场强在 $p \to \lambda p$ for $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ 下具有缩放不变性，因此它仅取决于世界线，而与动量无关；如果我们选择零动量 $p^2 = 0$，则该场强将消失。

我们想探究插入一个这样的自对偶单极子会如何改变天球手征代数。扭量函数 f_p 应被解释为描述底层线丛的单个过渡函数的对数 $\mathcal{L}_p$ 在 $\mathbb{PT}$；尽管我们不会具体描述这些线丛，$\mathcal{L}_p$ 它们在 [62]中得到了明确构造。 [62] 该文中的丛构造是逐个扭量球面进行的：对于远离世界线的每个扭量球面，他们引入一个由四个开集组成的开覆盖，并用某些全纯转移函数将它们粘合起来。

遗憾的是，我们不认为线丛 $\mathcal{L}_p$ 可以有代数几何描述。事实上，它是 $\mathbb{PT}$中一个非复子流形上的（复）线丛：它定义在 $\mathbb{PT}$中 $\mathbb{R} \times \mathbb{P}^1$ 的补集上。尽管这个流形不是复流形，但它从扭量空间上的全纯结构继承了一种结构。四格的过渡函数与这种诱导结构相容。由于 $\mathcal{L}_p$ 的过渡函数与诱导复结构相容，因此可以定义以 $\mathcal{L}_p$为系数的 Dolbeault 上同调。

将这一六维场构型约化到三维，需要计算取值于 $\mathcal{L}_p$ 的 $S^3\backslash\{N,S\} \subset \mathbb{PT}\backslash(\mathbb{R}\times\mathbb{P}^1)$ 的切向柯西–黎曼上同调，参见 [41]。我们预期，这会引入某种天球手征代数的模，其结构取决于该模在手征代数平面上的具体插入点，从而编码自对偶单极子的四维支撑。我们预期，这个由时空中插入带电源而产生的模，将具有与 [64] 中研究的自对偶引力构型相似的特征；无论是在规范理论还是引力中，若能对该模加以描述，使我们能够写出微扰手征代数所有模的作用，将会是很有价值的。

这个模的一个结构性特点是，它不应在旋转扭量球面的 $SU(2)$ 或旋转卡鲁扎-克莱因模的 $SU(2)$ 作用下保持不变。事实上，自对偶单极子的世界线并非在整个 $Spin(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ 下保持不变：它只在其中固定该世界线的 $Spin(3) \simeq SU(2)$ 子群（即旋转链接球面的子群）下保持不变。相应地，任何与四维线算符相关的模都应具有这一特点。以世界线沿着 x^4 轴的例子为例，我们只能预期对角 $SU(2)$ 子群保持不变。因此，这种模中的元素需要在纤维方向上作出补偿平移 $v^{\dot{\alpha}}$，才能在手征代数平面中的平移 z 下保持不变：世界线仅在 $\partial_z + v^{\dot{2}}\partial_{\dot{1}}$ 下保持不变，对应于平移 $(z, v^{\dot{1}}, v^{\dot{2}}) \to (z-w, v^{\dot{1}} - wv^{\dot{2}}, v^{\dot{2}})$。类似地，旋转的作用也会发生改变

使得 $v^{\dot{1}}$ 的自旋为 1， $v^{\dot{2}}$ 的自旋为 0；如果我们将这个模的一个元素展开为模 $M[\vec{m}]$，那么 $M[\vec{m}]$ 与 $M[\vec{0}]$ 的自旋差为 $-m_1$，而不是通常的 $-\frac{m_1+m_2}{2}$。

4迈向非阿贝尔单极子的第一步

我们在上一节中看到，天球手征代数存在有趣的非微扰修正，这些修正对应于不寻常的四维螺旋度转换场构型或三维边界单极子。当然，上一节的讨论仅限于树级自对偶阿贝尔规范理论。这一限制完全出于技术原因：我们目前还没有工具，对三维非阿贝尔规范理论中狄利克雷边界条件下的边界手征代数进行完整的非微扰分析，更不用说当规范群是像 $G[\![v^{\dot{\alpha}}]\!]$ 这样的无限维庞然大物时了。话虽如此，如果我们希望超越树级计算，就必须考虑这些非阿贝尔规范理论。

本节将初步探讨非阿贝尔理论的天球手征代数中存在的非微扰修正，重点关注 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ 的情形，希望在必要的三维工具开发完成后，能够开展更为全面的分析。我们引入一族谱流自同构；这些自同构提升到 $\mathbb{PT}$ 后，再经过彭罗斯-沃德对应，便可实现具有非平凡四维磁荷的四维场构型。这些自同构由四维向量 p 标记，并将其与一个四维单极子的动量相对应；我们还给出了若干项检验这一对应关系的一致性检查。

4.1 扭量空间上全纯丛给出的单极子 $\mathbb{PT}$

现在，我们以最简单的例子简要回顾如何从扭量空间上的全纯丛构造四维单极子。我们将重点讨论 $G = SU(2)$ 的情形。

考虑一个磁荷为 1、世界线沿着 x^4 轴的四维单极子；其在 $\mathbb{PT}$ 上的对应全纯丛见 [63] 中的例 8.4.1，我们将紧随该文第 8 章的讨论。全纯转移函数为

$$g_4(z, v_{\dot{\alpha}}) = \begin{pmatrix} ze^{\gamma_4} & {\gamma_4}^{-1}(e^{\gamma_4} - e^{-\gamma_4}) \\ 0 & z^{-1}e^{-\gamma_4} \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

其中 $\gamma_4 = \frac{i}{2}(v^{\dot{2}} - v^{\dot{1}}/z)$。现在我们回顾如何从这个转移函数提取规范场。

首先，通过施加关联关系，将上述规范变换限制到扭量空间中位于点 x^μ 上方的 $\mathbb{P}^1$ 。若要由此在x^μ处定义一个非奇异规范场，则对应的丛在 $\mathbb{P}^1$ 上必须是平凡的；也就是说，必须存在规范变换$\widehat{g}$（在 $z = \infty$ 之外全纯）和 $\widetilde{g}$（在 $z = 0$ 之外全纯），使得 $g_4 = \widetilde{g}\widehat{g}^{-1}$（在 x^μ 处）。

一大类例子（包括本文的例子）的分裂矩阵已在 [63] 第 8.2 节中推导，但我们不需要其具体形式。相反，我们描述

存在这种分裂所需的条件。注意，限制到 $\mathbb{P}^1$ 上述 x^μ时，指数 γ_4 变为

$$\gamma_4 = x^3 - \tfrac{i}{2}(z+z^{-1})x^2 - \tfrac{1}{2}(z-z^{-1})x^1\,, \tag{4.2}$$

它与 x^4 无关。我们首先选择一个分裂 $\gamma_4 = \widetilde{h}_4 - \widehat{h}_4$，将其分为两部分：$\widehat{h}_4{}^{\sim}$ 在 $z=\infty$ 之外全纯，另一部分 h_4 在 $z=0$ 之外全纯，例如

$$\widetilde{h}_4 = \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{2}(x^1 - ix^2)z^{-1}\,, \qquad \widehat{h}_4 = -\tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{2}(x^1+ix^2)z\,. \tag{4.3}$$

所需分裂矩阵的存在性取决于.....的 Laurent 级数展开中 z^0 的系数

$$e^{-\widetilde{h}_4-\widehat{h}_4}\frac{e^{\widetilde{h}_4-\widehat{h}_4}-e^{\widehat{h}_4-\widetilde{h}_4}}{\widetilde{h}_4-\widehat{h}_4} = \frac{e^{-2\widehat{h}_4}-e^{-2\widetilde{h}_4}}{\widetilde{h}_4-\widehat{h}_4} = -\sum_{n\geq 1}\frac{(-2)^n}{n!}\sum_{m=0}^{n-1}\widehat{h}_4{}^m\widetilde{h}_4{}^{n-m-1}\,. \tag{4.4}$$

特别地，该级数系数为零的点 x^μ，恰好是分裂矩阵不存在的点；等价地说，这些点也是四维规范场奇异的地方。

很容易求出这个级数系数：它由下式给出

$$F_4 = -\sum_{\ell\geq 0}\frac{(-2)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}\big(\tfrac{r}{2}\big)^{2\ell} = \frac{2\sinh(r)}{r}\,, \tag{4.5}$$

其中 $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$。注意，对于实数 x^1、x^2、x^3，该式永不为零，因此这个 $\mathbb{PT}$ 上的全纯丛在四维中诱导出非奇异规范场。利用这个级数系数，四维规范场可在 R 规范下表示如下：

$$A_{\mathrm{i}\alpha} = \frac{1}{2F_4}\begin{pmatrix}\mathcal{D}_{\mathrm{i}\alpha}F_4 & 0\\ 2\mathcal{D}_{\dot{2}\alpha}F_4 & -\mathcal{D}_{\mathrm{i}\alpha}F_4\end{pmatrix} \qquad A_{\dot{2}\alpha} = \frac{1}{2F_4}\begin{pmatrix}-\mathcal{D}_{\dot{2}\alpha}F_4 & 2\mathcal{D}_{\mathrm{i}\alpha}F_4\\ 0 & \mathcal{D}_{\dot{2}\alpha}F_4\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

在这些表达式中，$\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}$ 表示过渡函数为 e^{γ_4} 的全纯线丛的协变导数，即 $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - i\delta_{\mu 4}$。

注意，由于 γ_4 和 F_4 与 x^4无关，因此相应的四维规范场 $A_{\dot{\alpha}\alpha}$ 也与 x^4无关。将其代入自对偶方程可得

$$B_a = \tfrac{1}{2}\epsilon_{abc}F^{bc} = D_a A_4, \tag{4.7}$$

其中 $D_a = \partial_a - A_a$ 是 A_a, $a=1$，2，3 的协变导数。这些就是 BPS磁单极子的方程（其中 A_4 被认定为希格斯场）！具体来说，我们得到

$$A_a = \tfrac{i}{2r^2}(r\coth r - 1)\epsilon_{abc}x^a\sigma^b + \tfrac{i}{2}\sigma_a\,, \qquad A_4 = \tfrac{i}{2r^2}(r\coth r - 1)x^a\sigma_a\,. \tag{4.8}$$

4.2 天体谱流

在上一节中，我们了解了如何将世界线由 x^4 轴给出的单极子，通过过渡函数 g_4编码到扭量空间上的某个全纯丛中。处于

上述全纯规范丛中的态，只需简单应用上述规范变换 g_4即可得到。

例如，考虑与以下场构型对应的态

$$\mathbf{A}(v^{\dot\alpha}) = \delta(z-z_0) f(v^{\dot\alpha}) t_a \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{A}[m_1,m_2] = \delta(z-z_0) f_{m_1,m_2} t_a \tag{4.9}$$

对于 t_a、 $a=1$、2、3，构成 $\mathfrak{sl}(2)$ 的一组基；规范变换通过对该场构型作共轭作用于此态。采用切瓦利基 $t_a = \{E,F,H\}$ 会很方便。具有 $t_a = E$ 的态具有最简单的变换：

$$\delta(z-z_0) f E \to \delta(z-z_0) \left((z_0)^2 e^{2\gamma_4} f \right) E \,. \tag{4.10}$$

接下来最简单的是 $t_a = H$的变换：

$$\delta(z-z_0) f H \to \delta(z-z_0) \left[f H + \left(2 z_0 f \frac{(1-e^{2\gamma_4})}{\gamma_4} \right) E \right] \tag{4.11}$$

最后，最复杂的是 $t_a = F$的变换：

$$\begin{aligned} \delta(z-z_0) f F \to \delta(z-z_0) \Bigg[& \left((z_0)^{-2} e^{-2\gamma_4} f \right) F + \left((z_0)^{-1} f \frac{(1-e^{-2\gamma_4})}{\gamma_4} \right) H \\ & + \left(f \frac{(2-e^{2\gamma_4}-e^{-2\gamma_4})}{{\gamma_4}^2} \right) E \Bigg] \end{aligned} \tag{4.12}$$

现在，我们将态的这一变换转化为关于与下述理论相关的天球手征代数（微扰）生成元变换性质的陈述： $SU(2)$ 扭量空间上的全纯 BF 理论（等价地，四维中的自对偶杨–米尔斯理论）。[22] 由于传播子连接 $\mathbf{A}^a[m_1,m_2]$ 和 $\mathbf{B}_a[m_2,m_1]$，上述场构型由以下边界插入源产生：

$$\mathbf{B}_a[f] = \sum f_{m_1,m_2} \mathbf{B}_a[m_1,m_2] \tag{4.13}$$

如上所述，我们用 $J_a[f]$表示此局域算符的 0-形式分量。（更高形式的分量从不满足 Q-闭合，并且会在上同调中平凡化此算符对 t 和 $\bar z$ 的依赖。）其余相关的单粒子态对应于以下边界插入

$$\mathbf{\Phi}^a[f] := \sum f_{m_1,m_2} \mathbf{\Phi}^a[m_1,m_2] \tag{4.14}$$

˜其为场 $\mathbf{\Lambda}_a[m_1,m_2]$提供源。为与上述内容一致，0-形式分量记作 $J_a[f]$。将上述大规范变换对态的作用转化为对生成元 J、 J 的作用，可得到微扰手征代数的谱流自同构 σ_4 。为简洁起见，我们只写出对 J的作用；对 J 的作用可通过替换 $J \to J$得到。

[22]本节中我们在树级进行研究；关于这一手征代数在圈级时结合律失效的详情，以及如何通过消除扭量空间规范场的一圈规范反常来消除这种失效，请参见 [6, 7] [10]

˜首先，生成元 $J_E[\lambda]$ 映射为

$$J_E[f] \to \sigma_4(J_E)[f] = {z_0}^2 J_E[e^{2\gamma_4} f]\,, \tag{4.15}$$

这里省略了流 J 和 γ_4 对插入点 z_0 的依赖。类似地， $J_H[f]$ 的谱流为

$$\sigma_4(J_H)[f] = J_H[f] + 2z_0 J_E[{\gamma_4}^{-1}(1-e^{2\gamma_4})f]\,. \tag{4.16}$$

对于 $J_F[f]$，我们得到

$$\sigma_4(J_F)[f] = {z_0}^{-2} J_F[e^{-2\gamma_4} f] + z_0^{-1} J_H[\gamma_4^{-1}(1-e^{-2\gamma_4})f] + J_E[{\gamma_4}^{-2}(2-e^{2\gamma_4}-e^{-2\gamma_4})f]. \tag{4.17}$$

虽然我们已给出上述谱流态射的一个相对紧凑的表达式，但值得注意的是，用分量场 $J_a[m_1, m_2]$ 表示时，其表达式相当复杂。即使是对 $J_E[f]$ 的简单作用，用分量场（共形软模）表示时也涉及无限多个场：

$$\sigma_4(J_E[m_1,m_2]) = (z_0)^2 \sum_{n_1,n_2\geq 0} \frac{(-i/z_0)^{n_1}(i)^{n_2}}{n_1!\,n_2!} J_E[m_1+n_1, m_2+n_2] \tag{4.18}$$

注意，若将 $J_a[m_1, m_2]$ 与 m_1、$m_2 \neq 0$ 设为零（这等价于限制到 $v^{\dot\alpha} = 0$），则谱流态射具有如下形式：

$$v^{\dot\alpha} = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} \sigma_4(J_E) = {z_0}^2 J_E \\ \sigma_4(J_H) = J_H - 4z_0 J_E \\ \sigma_4(J_F) = {z_0}^{-2} J_F + 2{z_0}^{-1} J_H - 4J_E \end{cases} \tag{4.19}$$

这是第 2.2 节中的通常谱流自同构，再结合一个全纯规范变换：

$$g_4(z;0) = \begin{pmatrix} z & -2 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

4.3 扭量球面的缩放与旋转

注意，谱流 σ_4 既没有确定的标度维数，也没有确定的自旋，但这并不奇怪——参数化所选全纯丛的四动量 $p = (0, 0, 0, 1)$ 在缩放 $\mathbb{R}^4$ 或旋转扭量 $\mathbb{P}^1$时并不保持不变。更一般地，我们发现由一般动量参数化的丛

$$p_{\alpha\dot\alpha} = p_\mu (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha} = \begin{pmatrix} -p_3 - ip_4 & -p_1 + ip_2 \\ -p_1 - ip_2 & p_3 - ip_4 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

其中我们将 γ_4 替换为

$$\gamma_p = \tfrac{i}{2} v^{\dot\alpha}(p_{1\dot\alpha}/z - p_{2\dot\alpha})\,. \tag{4.22}$$

相应的谱流操作 σ_p 只需将 γ_4 替换为 γ_p即可。

不难验证，σ_p 相对于缩放和旋转具有所需的变换规则。例如，执行缩放变换 $x^\mu \to \Lambda x^\mu$ 会将 $v^{\dot\alpha} \to \Lambda v^{\dot\alpha}$发送为 $J_a[f] \to J_a[\Lambda \cdot f]$，其中

$$(\Lambda \cdot f)(v^{\dot\alpha}) = f(\Lambda^{-1} v^{\dot\alpha}) = \sum (\Lambda^{-(m_1+m_2)} f_{m_1,m_2})(v^{\dot 1})^{m_1}(v^{\dot 2})^{m_2} \tag{4.23}$$

因此，用这样的缩放变换 g_Λ 共轭谱流 σ_p 会得到$\sigma_{\Lambda^{-1}p}$

$$\sigma_{\Lambda^{-1}p} = g_\Lambda \sigma_p {g_\Lambda}^{-1}\,, \tag{4.24}$$

这与动量的预期缩放相符。

扭量球面 $z \to e^{i\theta} z$ 的旋转与纤维坐标 $v^{\dot\alpha} \to e^{i\theta/2} v_{\dot\alpha}$的旋转相耦合。由于这些流对应于正螺旋度胶子，它们具有自旋+1，因此生成函数变换为 $J_a[\tilde\lambda](z_0) \to e^{-i\theta} J_a[e^{i\theta}\cdot f](z_0 e^{-i\theta})$，其中

$$(e^{i\theta}\cdot f)(v^{\dot\alpha}) = f(e^{-i\theta/2} v^{\dot\alpha}) = \sum (e^{-i(m_1+m_2)\theta/2} f_{m_1,m_2})(v^{\dot 1})^{m_1}(v^{\dot 2})^{m_2} \tag{4.25}$$

因此，用这样的旋转共轭 σ_p 等同于将动量旋转为 $p_{1\dot\alpha} \to e^{i\theta/2} p_{1\dot\alpha}$和 $p_{2\dot\alpha} \to e^{-i\theta/2} p_{2\dot\alpha}$

$$\sigma_{e^{i\theta}p} = g_\theta \sigma_p {g_\theta}^{-1}\,. \tag{4.26}$$

4.4 成对螺旋度

在上述单极子存在的情况下，必须对胶子的螺旋度/自旋概念进行细化；这反映在 $\sigma_p($ $J_a[m_1,m_2])$ 不具有确定的三维自旋这一事实中。

从四维视角来看，插入流 $J_a[m_1,m_2](z_0)$ 对应于一个正螺旋度胶子，其零动量通过能量 ω 和扭量球面 $\mathbb{P}^1$ 上的点 z_0 参数化，具体为

$$p(\omega, z_0) = \omega\big(-(z_0+\bar z_0), i(z_0-\bar z_0), 1-|z_0|^2, i(1+|z_0|^2)\big)\,. \tag{4.27}$$

如果我们考虑对应于该动量的谱流算符（或其任意标量倍数），会发现 γ_p 在对跖点 $z = -1/z_0$ 处消失（且仅在 $z = -1/z_0$处消失）

$$\gamma_{p(\omega,z_0)}(z) = i(z_0 + z^{-1})\omega(\bar z_0 v^{\dot 2} - v^{\dot 1})\,. \tag{4.28}$$

特别地，谱流 $\sigma_{p(\omega,-1/z_0)}$ 以一种非常简单的方式作用于流 $J_a[f](z_0)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{p(\omega,-1/z_0)}(J_E[f])(z_0) &= {z_0}^2 J_E[f](z_0)\\
\sigma_{p(\omega,-1/z_0)}(J_H[f])(z_0) &= J_H[f](z_0)\\
\sigma_{p(\omega,-1/z_0)}(J_F[f])(z_0) &= {z_0}^{-2} J_F[f](z_0)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

我们看到，在存在此类算符时，生成函数 $J_a[f](z_0)$ 的自旋/螺旋度会出现一个明显的偏移，其大小正比于该算符相对于嘉当生成元$J_H[0,0]$的权。

对于上述情况，我们看到，取$q = \alpha \in \Lambda_{\text{root}} \cong 2\mathbb{Z} \subset \Lambda_{\text{weight}} \cong \mathbb{Z}$ 和 $\mathfrak{m} = 1 \in \Lambda^{\vee}_{\text{weight}} \cong \mathbb{Z}$即可精确再现螺旋度的明显偏移。具体而言，我们预期，与该天球单极算符相关的关联函数（通过谱流σ_p得到）应对应于存在磁荷为 $\mathfrak{m} = 1$ 的四维共形主算符（即四维单极子）时的散射振幅。此外，涉及非平凡电磁荷态的散射振幅（存在某个四维局域算符 $\mathcal{O}$ 时），应由完整的非微扰天体手征代数的关联函数（与 $\mathcal{O}$相关的共形块中）所描述。

4.5 胶子与单极子的天球算符乘积展开

既然我们已经在天球手征代数中识别出了单极子算符，例如微扰代数真空模的谱流中的态，它们对应于带磁荷的~散射态，我们便预期流 J, J 与算符M_p （对应于态 $\sigma_p(|0\rangle)$）的算符乘积展开，应当编码涉及胶子与动量为 p的磁单极子散射的形状因子的奇点。我们尤其关注动量 $p = p(\omega, w)$ 为零的情形。按照第 4.1 节的分析，可以直接确定与这种零动量相关联的四维规范场：

$$\begin{aligned} A_a &= \frac{1 + i(p\cdot x)(1 + i\cot(p\cdot x))}{2ip\cdot x}\big(\epsilon_{abc}\sigma^b p^c - p_4\sigma_a\big) \\ A_4 &= \frac{1 + i(p\cdot x)(1 + i\cot(p\cdot x))}{2ip\cdot x}\big(-p_a\sigma^a\big) \end{aligned} \tag{4.30}$$

其中，如上所述， $a = 1$、2、3。注意，该规范场在点 $x \in \mathbb{R}^4$ 处是奇异的，其中 $p\cdot x$ 是 π 的非零整数倍。

我们将 将动量 $p(\omega, w)$ 所对应的谱流操作记为

σ_w。该谱流自同构对流 $J_a[m_1,m_2]$ 的作用为

$$\begin{aligned}
\sigma_w(J_E[m_1,m_2](z_0)) &= \sum_{l\geq 0} {z_0}^{2-l} \sum_{m\geq 0}\sum_{n=0}^{l+m} \frac{(-2)^{l+m}\bar{w}^n w^m}{(l+m-n)!n!}\binom{l+m}{n} J_E[m_1+l+m-n,m_2+n](z_0)\\
\sigma_w(J_H[m_1,m_2](z_0)) &= J_H[m_1,m_2](z_0)\\
&\quad -2\sum_{l\geq 0} {z_0}^{1-l} \sum_{m\geq 0}\sum_{n=0}^{l+m} \frac{(-2)^{l+m}\bar{w}^n w^m}{(l+m+1)!}\binom{l+m}{n}\binom{l+m}{l} J_E[m_1+l+m-n,m_2+n](z_0)\\
\sigma_w(J_F[m_1,m_2](z_0)) &= \sum_{l\geq 0} {z_0}^{-2-l} \sum_{m\geq 0}\sum_{n=0}^{l+m} \frac{2^{l+m}\bar{w}^n w^m}{(l+m-n)!n!}\binom{l+m}{n} J_F[m_1+l+m-n,m_2+n](z_0)\\
&\quad -2\sum_{l\geq 0} {z_0}^{-1-l} \sum_{m\geq 0}\sum_{n=0}^{l+m} \frac{2^{l+m}\bar{w}^n w^m}{(l+m+1)!}\binom{l+m}{n}\binom{l+m}{l} J_H[m_1+l+m-n,m_2+n](z_0)\\
&\quad -8\sum_{l\geq 0} {z_0}^{-l} \sum_{m\geq \lceil l/2\rceil}\sum_{n=0}^{2m} \frac{2^{2m}\bar{w}^n w^{2m-l}}{(l+m+1)!}\binom{2m}{n}\binom{2m}{l} J_E[m_1+2m-n,m_2+n](z_0)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

我们还需要谱流自同构的逆σ_w^{-1}:

$$\begin{aligned}
\sigma_w^{-1}(J_E[m_1,m_2](z_0)) &= \sum_{l\geq 0} {z_0}^{-2-l} \sum_{m\geq 0}\sum_{n=0}^{l+m} \frac{2^{l+m}\bar{w}^n w^m}{(l+m-n)!n!}\binom{l+m}{n} J_E[m_1+l+m-n,m_2+n](z_0)\\
\sigma_w^{-1}(J_H[m_1,m_2](z_0)) &= J_H[m_1,m_2](z_0)\\
&\quad -2\sum_{l\geq 0} {z_0}^{-1-l} \sum_{m\geq 0}\sum_{n=0}^{l+m} \frac{2^{l+m}\bar{w}^n w^m}{(l+m+1)!}\binom{l+m}{n}\binom{l+m}{l} J_E[m_1+l+m-n,m_2+n](z_0)\\
\sigma_w^{-1}(J_F[m_1,m_2](z_0)) &= \sum_{l\geq 0} {z_0}^{2-l} \sum_{m\geq 0}\sum_{n=0}^{l+m} \frac{(-2)^{l+m}\bar{w}^n w^m}{(l+m-n)!n!}\binom{l+m}{n} J_F[m_1+l+m-n,m_2+n](z_0)\\
&\quad -2\sum_{l\geq 0} {z_0}^{1-l} \sum_{m\geq 0}\sum_{n=0}^{l+m} \frac{(-2)^{l+m}\bar{w}^n w^m}{(l+m+1)!}\binom{l+m}{n}\binom{l+m}{l} J_H[m_1+l+m-n,m_2+n](z_0)\\
&\quad -8\sum_{l\geq 0} {z_0}^{-l} \sum_{m\geq \lceil l/2\rceil}\sum_{n=0}^{2m} \frac{2^{2m}\bar{w}^n w^{2m-l}}{(l+m+1)!}\binom{2m}{n}\binom{2m}{l} J_E[m_1+2m-n,m_2+n](z_0)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

现在我们可以像之前一样，描述天球手征代数（微扰部分）的生成元 $J_a[\vec{m}]$ 与天球单极算符 V_w 的算符乘积展开。自然的真空模由真空矢量 $|0\rangle$ 生成，它被流 $J_a[\vec{m}]$的所有非负模湮灭；那么谱流模 $\sigma_w(\mathcal{V})$应当编码天球单极算符 V_w（以及在微扰流作用下与之相关的那些算符）。

继续　如第 2.2 节中所示，我们得到单极子算符 $M_w(0)$ 的以下算符乘积展开

与流 $J_a[\vec{m}]$。首先，与 $J_E[\vec{m}]$ 的算符乘积展开为

$$
\begin{aligned}
&J_E[m_1,m_2](z)V_w(0)\\
&\sim \sum_{l,m\geq 0}\sum_{n=0}^{l+m}\frac{2^{l+m}\bar{w}^n w^m}{(l+m-n)!n!}\binom{l+m}{n}\sum_{k=0}^{l+1} z_0{}^{k-2-l}\Big(\sigma_w\big(J_E[m_1+l+m-n,m_2+n]_{-k-1}\,|0\rangle\,\big)\Big)(0).
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

类似地，与流 $J_H[m_1,m_2]$ 的算符乘积展开形式为

$$
\begin{aligned}
&J_H[m_1,m_2](z)V_w(0)\\
&\sim -2\sum_{l,m\geq 0}\sum_{n=0}^{l+m}\frac{2^{l+m}\bar{w}^n w^m}{(l+m+1)!}\binom{l+m}{n}\binom{l+m}{l}\sum_{k=0}^{l} z^{k-1-l}\Big(\sigma_w\big(J_E[m_1+l+m-n,m_2+n]_{-k-1}\,|0\rangle\,\big)\Big)(0)
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

而与流 $J_F[m_1,m_2]$ 的算符乘积展开为

$$
\begin{aligned}
&J_F[m_1,m_2](z)V_w(0)\\
&\sim \sum_{l\geq 3}\sum_{m\geq 0}\sum_{n=0}^{l+m}\frac{(-2)^{l+m}\bar{w}^n w^m}{(l+m-n)!n!}\binom{l+m}{n}\sum_{k=0}^{l-3} z_0{}^{k-l+2}\Big(\sigma_w\big(J_F[m_1+l+m-n,m_2+n]_{-k-1}\,|0\rangle\,\big)\Big)(0)\\
&-2\sum_{l\geq 2}\sum_{m\geq 0}\sum_{n=0}^{l+m}\frac{(-2)^{l+m}\bar{w}^n w^m}{(l+m+1)!}\binom{l+m}{n}\binom{l+m}{l}\sum_{k=0}^{l-2} z_0{}^{k-l+1}\Big(\sigma_w\big(J_H[m_1+l+m-n,m_2+n]_{-k-1}\,|0\rangle\,\big)\Big)(0)\\
&-8\sum_{l\geq 1}\sum_{m\geq\lceil l/2\rceil}\sum_{n=0}^{2m}\frac{2^{2m}\bar{w}^n w^{2m-l}}{(l+m+1)!}\binom{2m}{n}\binom{2m}{l}\sum_{k=0}^{l-1} z_0{}^{k-l}\Big(\sigma_w\big(J_E[m_1+2m-n,m_2+n]_{-k-1}\,|0\rangle\,\big)\Big)(0)
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

上述讨论可以相当直接地推广到其他规范李代数。具体而言，在 $\mathbb{PT}$ 上存在一个类似的 $\mathfrak{g}$ 丛，对于任意嵌入 $\mathfrak{sl}(2)\hookrightarrow\mathfrak{g}$，都会产生一个磁荷激发，从而导致相应天体流代数的谱流。由共轭嵌入产生的规范丛彼此等价，相应的谱流模也彼此等价。

在数学和物理学中，如何理解这些由磁单极动量标记的谱流自同构族如何帮助组织微扰天体手征代数的模范畴，以及这些谱流如何与对偶性可能产生的作用相互影响，仍是一个悬而未决的问题。

5 结论与猜想

最后，我们将着重指出本研究提出的一些重大开放问题和未来方向。我们认为，将能够进行扭量提升的天球手征代数视为某些三维全纯-拓扑理论的边界手征代数，是很有成效的。我们希望，在2节回顾的三维视角，能为天体全息计划中尚未解决的谜题带来一些启示（至少对于扭量理论而言）。

在本文中，我们着重研究了天球手征代数的某些（谱流）模及其算符乘积展开，这些内容与三维中磁荷态的加入有关，在不同情形下也与四维中的磁荷态加入有关。自对偶规范理论的四维和三维视角互为补充，并通过 [6], 中的扭量对应彼此同构；不过，正如我们在本文中所见，要明确建立某些（三维和四维）磁荷态之间的同构可能并不容易。特别是，以自对偶量子电动力学为例，一个重要的开放问题是：真空模的谱流在四维中如何诠释$\bigoplus_m \sigma_m|0\rangle$? 如3.2.3节所述，这些模带有由戈德斯通场 $S[0,0]$ 生成的对称性之荷；该场与共形软光子定理的生成元 $J[0,0]$ 正则共轭，而后者不同于 Strominger 的软磁光子定理。从某种意义上说，这些模与 Faddeev-Kulish 着装因子正则共轭，参见[59, 60], ；这些因子是规范理论类比物，对应于最近在 [56], 中描述的那些模。要将我们的三维代数推理应用于潜在的天球全息诠释，或更广泛地探讨其对平直时空中渐近对称性的影响，关键在于更深入地理解这些算符。

自对偶阿贝尔规范理论中存在自然的线缺陷，参见第 3.2.4 节。我们期望借此实现更多天球手征代数的模，但目前仍未能做到。主要的技术障碍在于，缺乏对扭量空间上相应六维丛的描述，无法据此进行所需的层上同调（或 Dolbeault）计算。或许可以按照 Bailey [65] 的做法，或采用某种切向柯西-黎曼上同调，如 [41]中所示，显式研究这些丛；此类计算留待未来完成。

这一对应的另一个重要组成部分，是四维局域算符与天球手征代数共形块之间的映射。要将电荷态和磁荷态的简单树级散射振幅改写为我们手征代数中的关联函数，就必须选定一个共形块；这些关联函数取决于共形块的选择。边界局域算符顶点代数在曲面 Σ 上的共形块空间，预期可实现为体三维理论在 Σ 上的希尔伯特空间。在简单的拓扑扭曲三维 $\mathcal{N}=2$ 理论实例中，这些态空间已有较深入的认识，参见 [66], ；但本文关注的实例尚未得到描述。未来的工作中，我们计划研究在非平凡磁单极丛背景下，与阿贝尔实例相关的共形块空间；这些丛可实现为扭量空间上的全纯丛。我们还将研究相应的态空间，尤其是在自对偶量子电动力学的背景下；在这一情形中，我们可以运用 [27] 中的分析，并且天球手征代数存在自由场实现。

三维视角的另一个引人入胜的应用，是利用磁荷态，对（经典）共形软模渐近对称代数的非微扰增强或修正提出猜想。在阿贝尔情形中，我们证明，扩展天球手征代数可以实现为简单流扩张，即谱流模的直和。在非阿贝尔情形中，鉴于正能级普通陈-西蒙斯理论的结果，从三维推理自然会预期，非微扰天球手征代数可以实现为一种简单

流扩张，其对象是一个商模，并在其中去除奇异向量。不过，天球背景中出现的零能级陈-西蒙斯理论尚未确定类似结果；此外，在零能级阿贝尔陈-西蒙斯理论中，采用标准的顶点代数内积时，所有微扰手征代数中的态都是零态，尽管真空模特征并不为零。从时空视角来看，微扰代数中存在奇异向量，而去除这些向量对于实现软定理的沃德恒等式至关重要[67, 68]，但需要指出的是，天球流上相关的共轭运算并非顶点代数中自然采用的共轭运算，而是反映了入射与出射散射态之间的配对，参见 [69]第3节。对于本文讨论的扭量天球手征代数而言，共形维数为整数时这种配对的定义尤为微妙，目前仍在发展中[43]。

我们预计，通过对三维非阿贝尔单极子作出更具体的描述，可以解决其中许多问题，从而补充 [26] 的抽象提案。导出代数几何和顶点代数表示论是当前活跃的研究领域。我们希望，这些数学猜想最终能够通过扭量对应转化为四维物理中的具体选择定则——随着我们对非阿贝尔规范理论的边界手征代数及其共形块有了更深入的理解， [6] 的视角将为研究具有一般电荷与磁荷的四维态的散射提供直接窗口。

对于扭量理论，也可以在量子层次刻画天球手征代数 [7–9]。探索完整的非微扰手征代数（即包括三维边界单极子算符）的量子变形将会很有意思；这种刻画必然会纳入生成元 $E[r,s]$、 $F[r,s]$，它们与 [6, 10] 的消除反常的轴子相关，该轴子恢复了结合律。在经典层次，这些生成元是规范不变的，理应不会因谱流态射而改变。

上述讨论的扭量研究，实际上是长期探索在扭量（及双扭量）空间上全纯 BF 理论和 Chern-Simons 理论量子化的近期成果；这段研究历史最近已在 [70] 中得到总结；关于渐近对称性的早期关联，另见 [71] 。进一步厘清扭曲全息、天球全息与（双）扭量弦理论之间的联系，以及本文所倡导的三维全纯-拓扑视角，将会十分有趣。

最后，从这一三维视角出发，探索自对偶引力的天球手征代数可能存在的非微扰增强将非常有趣；其扭量提升最近已在 [9, 72]中得到研究；若要进一步了解从扭量角度出发的引力天球对称性，请参见 [73, 74]。例如， 3.2.4 中所回顾的自对偶双荷子的扭量“四格”构造，早已被知晓在彭罗斯的非线性引力子理论中具有史瓦西或克尔型类似物 [75]（或许更准确地说，它们可以被视为自对偶陶布-纽特解，其中史瓦西质量与纽特荷之间存在固定关系）。沿着

这项工作的内容，并或许与近期的工作 [56, 64]联系起来；在 $w_{1+\infty}$ 代数下编码的高自旋多极矩，对于前引文献中研究的自对偶黑洞解，或许可以通过非豪斯多夫扭量空间中的相对上同调获得几何实现。

致谢

我们衷心感谢 K. Costello、T. Creutzig、S. Pasterski，尤其感谢 L. Mason 和 A. Sharma，与我们进行了非常有益的讨论并提供了宝贵意见。本文完成期间，NP 还感谢周界理论物理研究所提供的接待。NG 和 NP 的研究经费由华盛顿大学物理系和文理学院提供。NP 还获得了美国能源部早期职业研究计划的资助，项目编号为 DE-SC0022924，并获周界理论物理研究所访问学者计划支持。周界理论物理研究所的研究工作由加拿大政府通过加拿大工业部以及安大略省通过研究与创新部提供支持。

扭量空间约定

扭量空间 $\mathbb{PT}$ 是向量丛 $\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^1$ 的全空间，其中 $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^1$是 $\mathbb{P}^1$ 上的线丛，其截面在权为 1 的齐次变换下保持齐次；也就是说，如果 z_α 是 $\mathbb{P}^1$ 上的齐次坐标，而 $\sigma(z_\alpha)$ 是 $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^1$ 的一个截面，那么 $\sigma(\lambda z_\alpha) = \lambda\sigma(z_\alpha)$。它可以如下看作 $\mathbb{P}^3$ 的一个开子集。令 Z^A 为 $\mathbb{P}^3$ 上的齐次坐标，并将其拆分为 $Z^A = (\mu^{\dot\alpha}, z_\alpha)$，其中 $\alpha = 1$、2 和 $\dot\alpha = \dot1, \dot2$。这样，扭量空间 $\mathbb{PT}$ 可识别为开集 $z_\alpha \neq 0$；z_α 对应于 $\mathbb{P}^1$ 上的齐次坐标，而 $\mu^{\dot\alpha}$ 为纤维坐标。

我们将经常使用 $z = z_1/z_2$ 上的仿射坐标 $\mathbb{P}^1$ 以及相应的纤维坐标 $v^{\dot\alpha} = \mu^{\dot\alpha}/z_2$。在通过过渡函数转到另一个仿射图 $z_2/z_1 = 1/z$ 时，$v^{\dot\alpha} \to u^{\dot\alpha} = \mu_{\dot\alpha}/z_1 = v^{\dot\alpha}/z$ 我们发现纤维坐标变换为 。总结如下：

$$\begin{aligned} w &= 1/z \qquad & u^{\dot\alpha} &= v^{\dot\alpha}/z\,, \\ z &= 1/w \qquad & v^{\dot\alpha} &= u^{\dot\alpha}/w\,. \end{aligned} \tag{A.1}$$

对每个点 $x^\mu \in \mathbb{C}^4$，都有一个（线性）嵌入的 $\mathbb{P}^1$，由以下关联关系给出：

$$\mu^{\dot\alpha} = x^\mu (\sigma_\mu)^{\dot\alpha\alpha} z_\alpha\,, \tag{A.2}$$

其中 σ_a 本质上是泡利矩阵

$$(\sigma_a)^{\dot\alpha\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\}. \tag{A.3}$$

采用这一选择，我们发现矩阵的行列式

$$x^{\dot{\alpha}\alpha} = x^{\mu}(\sigma_{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} = \begin{pmatrix} x^3 - ix^4 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 - ix^4 \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

是欧几里得范数的负值，$\det x = -\sum_{\mu}(x^{\mu})^2$。用仿射坐标表示，上述关联关系具有以下形式：

$$\begin{aligned} v^{\dot{1}} &= x^2 + ix^1 + z(x^4 + ix^3)\,, & v^{\dot{2}} &= x^4 - ix^3 + z(-x^2 + ix^1) \\ u^{\dot{1}} &= w(x^4 + ix^3) + x^2 + ix^1\,, & u^{\dot{2}} &= w(-x^2 + ix^1) + x^4 - ix^3 \end{aligned}\,. \tag{A.5}$$

我们遵循这样的约定：$SU(2)$指标按 $X^{\beta} = X_{\alpha}\epsilon^{\alpha\beta}$ 和$X_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}X^{\beta}$ 的方式升降，其中 $\epsilon_{12} = 1 = \epsilon^{12}$。标准论证表明，限制到实 x^{μ}时，这给出了一个识别

$$\mathbb{PT} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}^4 \tag{A.6}$$

作为实流形。

A.1 旋转扭量空间

欧几里得旋转群 $SO(4) \cong (SU(2)_+ \times SU(2)_-)/\mathbb{Z}_2$ 的作用按通常方式表示：指标 α （分别为 $\dot{\alpha}$）是 $SU(2)_-$（分别为 $SU(2)_+$）的基本表示的指标。

$SU(2)_-$ 中的对角环面将 $\mathbb{P}^1$ 上的齐次坐标 $z_{\alpha} = [z:\ 1]$ 映为$[e^{-i\theta/2}z, e^{i\theta/2}]$，因此其作用相当于对 z 平面 $z \to ze^{-i\theta}$ 的旋转，同时也旋转纤维坐标 $v^{\dot{\alpha}} \to e^{-i\theta/2}v^{\dot{\alpha}}$。从实叶状结构的角度来看，它按预期作用于坐标 $x^{\dot{\alpha}\alpha}$ 的 α 指标—— $x^{\dot{\alpha}1}$ 按 $x^{\dot{\alpha}1} \to e^{i\theta/2}x^{\dot{\alpha}1}$ 旋转，而$x^{\dot{\alpha}2}$ 按 $x^{\dot{\alpha}2} \to e^{-i\theta/2}x^{\dot{\alpha}2}$旋转。

参考文献

[1] A. Guevara、E. Himwich、M. Pate 和 A. Strominger，规范理论与引力的全息对称代数，JHEP 11 (2021) 152 [2103.03961].[2] A. Strominger，w(1+无穷远)与天球，2105.14346.[3] A. Ball、S. A. Narayanan、J. Salzer 和 A. Strominger，量子自对偶引力微扰精确的 $w_{1+\infty}$ 渐近对称性，JHEP 01 (2022) 114 [2111.10392].[4] R. Bhardwaj、L. Lippstreu、L. Ren、M. Spradlin、A. Yelleshpur Srikant 和 A. Volovich，天球全息中的圈级胶子算符乘积展开，2208.14416.[5] R. Monteiro，天球手征代数、颜色-运动学对偶与可积性，2208.11179.[6] K. Costello 和 N. M. Paquette，天球全息与扭曲全息相遇：来自手征关联函数的四维振幅，2201.02595.[7] K. Costello 和 N. M. Paquette，论天球算符乘积展开的单圈修正的结合律，2204.05301。

[8] V. E. Fern´andez，基于 Koszul 对偶的天球手征代数的单圈修正，2302.14292.[9] R. Bittleston，论引力中天球算符乘积的单圈修正的结合律，JHEP 01 (2023) 018 [2211.06417].[10] K. J. Costello，在扭量空间上量子化局部全纯场论，2111.08879.[11] K. Costello 和 S. Li，拓扑弦中的反常抵消，Adv. Theor. Math. Phys. 24 (2020) 1723 [1905.09269].[12] K. Costello、N. M. Paquette 和 A. Sharma，渐近平坦时空中的自上而下全息术，2208.14233.[13] K. Costello 和 D. Gaiotto，扭曲全息，1812.09257.[14] K. Costello 和 N. M. Paquette，扭曲超引力与 Koszul 对偶：AdS 中的一个案例研究$_3$, Commun. Math. Phys. 384 (2021) 279 [2001.02177].[15] B. Bakalov 和 V. Kac，场代数，International Mathematics Research Notices 2003 (2003) 123.[16] A. Strominger，软光子定理的磁修正，《物理评论快报》116 (2016) 031602 [1509.00543].[17] D. Kapec 和 P. Mitra，天球共形场论中的影子与软交换，《物理评论 D》105 (2022) 026009 [2109.00073].[18] M. Bershadsky、S. Cecotti、H. Ooguri 和 C. Vafa，引力的 Kodaira-Spencer 理论与量子弦振幅的精确结果，Commun. Math. Phys. 165 (1994) 311[hep-th/9309140].[19] M. Aganagic、K. Costello、J. McNamara 和 C. Vafa，拓扑 Chern-Simons/物质理论，1706.09977.[20] O. Aharony、A. Hanany、K. A. Intriligator、N. Seiberg 和 M. J. Strassler，三维 N$=2$超对称规范理论的若干方面，Nucl. Phys. B 499 (1997) 67[hep-th/9703110].[21] K. Intriligator 和 N. Seiberg，三维 N$=2$ Chern-Simons-物质理论的若干方面，JHEP 07 (2013) 079 [1305.1633].[22] A. Gadde、S. Gukov 和 P. Putrov，三维规范理论中的墙、线与谱对偶性，JHEP 05 (2014) 047 [1302.0015].[23] A. Gadde、S. Gukov 和 P. Putrov，五膜与四维流形，Prog. Math. 319 (2016) 155[1306.4320].[24] T. Okazaki 和 S. Yamaguchi，三维 N$=2$理论中的超对称边界条件，《物理评论 D》87 (2013) 125005 [1302.6593].[25] T. Dimofte、D. Gaiotto 和 N. M. Paquette，三维 SCFT 中的对偶边界条件，JHEP 05 (2018) 060 [1712.07654].[26] K. Costello、T. Dimofte 和 D. Gaiotto，边界手征代数与全纯扭曲，2005.00083。

[27] K. Zeng，全纯拓扑理论中的磁单极算符与体-边界关系，2111.00955。[28] M. Bullimore、T. Dimofte、D. Gaiotto、J. Hilburn 和 H.-C. Kim，涡旋与 Verma 模，*Adv. Theor. Math. Phys.* **22** （2018年） 803 [1609。04406]。[29] H. Nakajima，迈向库仑分支数学定义： 三维 $\mathcal{N} = 4$规范理论，I，*Adv. Theor. Math. Phys.* **20** （2016年） 595 [1503。03676]。[30] A. Braverman、M. Finkelberg 和 H. Nakajima，迈向库仑

b

分支的三维 $\mathcal{N} = 4$ 规范理论，II，Adv. Theor. Math. Phys. 22（2018年）1071[1601。03586]。[31] M. Bullimore、T. Dimofte 和 D. Gaiotto，三维 $\mathcal{N} = 4$ 理论的库仑分支，Commun. Math. Phys. 354（2017年） 671 [1503。04817]。[32] S. Alekseev、M. Dedushenko 和 M. Litvinov，板上的手性生命，2301.00038。[33] X. Zhu，仿射格拉斯曼量与几何 Satake 等价简介，1603.05593。[34] A. Ballin、T. Creutzig、T. Dimofte 和 W. Niu，编织张量范畴的三维镜像对称，2304.11001。[35] A. Ballin 和 W. Niu，三维镜像对称与 $\beta\gamma$ 顶点算子代数，2202.01223。[36] N. Garner 和 W. Niu， U（1|1）陈-西蒙斯理论中的线算符，2304.05414。[37] T. Creutzig 和 D. Ridout，扩展仿射 $\mathfrak{gl}$（1|1）的 W-代数，Springer Proc. Math. Stat. 36（2013年） 349 [1111。5049]。[38] T. Creutzig、S. Kanade 和 R. McRae，顶点算子超代数扩张的张量范畴，1705.05017。[39] T. Creutzig、R. McRae 和 J. Yang，顶点张量范畴的直接极限完备化，Commun. Contemp. Math. 24（2022年） 2150033 [2006。09711]。[40] O. Gwilliam 和 B. R. Williams，高阶 Kac–Moody 代数与全纯场论的对称性，Adv. Theor. Math. Phys. 25（2021年） 129 [1810。06534]。[41] K. Zeng，从边界手征代数出发的扭曲全息与天球全息，2302.06693。[42] L. Donnay、S. Pasterski 和 A. Puhm，Goldilocks 模式与三种散射基，J HEP 06（2022年） 124 [2202。11127]。[43] L. Freidel、D. Pranzetti 和 A.-M. Raclariu，天球全息的离散基，2212.12469。[44] L. J. Mason 和 D. Skinner，N=4 SYM 的完整平面 S 矩阵作为 Wilson 环 i

n

扭量空间，*JHEP* **12** (2010) 018 [1009。2225]。[45] T. Adamo、M. Bullimore、L. Mason 和 D. Skinner，散射振幅与 Wilson 环

in

扭量空间，《物理学杂志 A》 **44** (2011) 454008 [1104。2890]。[46] W. Bu 和 E. Casali，扭量空间中的四维/二维对应与全纯 Wilson 线

$s,$

JHEP **11** (2022年) 076 [2208。06334]。

[47] J. Oh 和 Y. Zhou，《缺陷融合的扭曲全息》，SciPost Phys. 10（2021年）105[2103.00963].
[48] D. Gaiotto 和 J. Oh，《Ω变形M理论的若干方面》，1907.06495.[49] D. Gaiotto 和 M. Rapcak，《Miura算子、退化场与M2-M5交叉》，JHEP 01（2022年） 086 [2012.04118].[50] D. Zwanziger，《电荷-磁极反应中的角分布与选择定则》，《物理评论 D》6（1972年）458.[51] C. Csaki、S. Hong、Y. Shirman、O. Telem、J. Terning 和 M. Waterbury，《散射振幅

s

关于磁单极子：成对小群与成对螺旋度，*JHEP* **08** (2021年) 029 [2009。14213]。[52] C. Cs´aki、Z.-Y. Dong、O. Telem、J. Terning 和 S. Yankielowicz，缀饰态与成对态，以及磁单极子与电荷的几何相位，*JHEP* **02** (2023) 211 [2209。03369]。[53] C. Csaki、S. Hong、Y. Shirman、O. Telem、J. Terning 和 M. Waterbury，散射振幅

s

关于磁单极子：成对小群与成对螺旋度，JHEP 08 (2021) 029 [2009.14213].[54] M. van Beest、P. Boyle Smith、D. Delmastro、Z. Komargodski 和 D. Tong，《磁单极子、散射与广义对称性》，2306.07318.[55] L. Donnay、A. Puhm 和 A. Strominger，《共形软光子与引力子》，JHEP 01 (2019) 184 [1810.05219].[56] E. Crawley、A. Guevara、E. Himwich 和 A. Strominger，《天球全息中的自对偶黑洞》，2302.06661.[57] P. P. Kulish 和 L. D. Faddeev，《量子电动力学中的渐近条件与红外发散》，Theor. Math. Phys. 4 (1970) 745.[58] V. Chung，《量子电动力学中的红外发散》，《物理评论》140 (1965) B1110.[59] N. Arkani-Hamed、M. Pate、A.-M. Raclariu 和 A. Strominger，《从紫外到红外的天体振幅》，JHEP 08 (2021) 062 [2012.04208].[60] S. Choi 和 R. Akhoury，《从威尔逊线视角看史瓦西视界上的软光子毛》，JHEP 12 (2018) 074 [1809.03467].
[61] G. Sparling，《闵可夫斯基空间中动力学破缺对称性与全局杨-米尔斯理论》，《扭量理论的进一步进展》1 (1977) 171.[62] R. Penrose 和 G. Sparling，《扭量四方舞：基于库仑场的线丛》，载于《扭量理论进展》，L. J. Mason、L. P. Hughston、P. Z. Kobak 和 K. Pulverer 编，CRC 出版社（1979）。[63] R. S. Ward 和 R. O. Wells，《扭量几何与场论》，剑桥数学物理专著。剑桥大学出版社，8，1991，10.1017/CBO9780511524493。[64] A. Guevara，《在扭量空间中从 S矩阵重构经典时空》，2112.05111。[65] T. Bailey，《世界线上带源场的扭量》，伦敦皇家学会会刊。A辑：数学与物理科学 397 (1985) 143。[66] M. Bullimore 和 A. Ferrari，《三维超对称规范理论的扭曲希尔伯特空间》，JHEP 08 (2018) 018 [1802.10120]。

[67] S. Banerjee、P. Pandey 和 P. Paul，《软算符的共形性质：零态的运用》，《物理评论 D》101 (2020) 106014 [1902.02309].[68] S. Banerjee 和 P. Pandey，《软算符的共形性质：第二部分：零态的运用》，JHEP 02 (2020) 067 [1906.01650].[69] S. Pasterski、A. Puhm 和 E. Trevisani，《天球菱形：天球共形场论中的共形多重态》，JHEP 11 (2021) 072 [2105.03516].[70] Y. Geyer 和 L. Mason，《SAGEX 散射振幅综述第6章：双旋量弦与来自世界面的振幅》，《物理学杂志 A》55 (2022) 443007 [2203.13017].[71] Y. Geyer、A. E. Lipstein 和 L. Mason，《零无穷远处的双旋量弦与（次领头）软极限》，《经典与量子引力》32 (2015) 055003 [1406.1462].[72] R. Bittleston、A. Sharma 和 D. Skinner，《量子化非线性引力子》，2208.12701.[73] T. Adamo、L. Mason 和 A. Sharma，《来自扭量空间的天球 $w_{1+\infty}$ 对称性》，SIGMA 18 (2022) 016 [2110.06066].[74] L. Mason，《源自全纯圆盘的引力与天球 $Lw_{1+\infty}$ 对称性》，2212.10895.[75] G. Sparling，《代表史瓦西或克尔黑洞类比物的非线性引力子》，Twistor Newslett 1 (1976) 14。