arXiv:2305.00062v1 [physics.ed-ph] 28 Apr 2023

我们是否应以更高阶数学换取抽象性，从而提升学生对量子力学的理解?

James K. Freericks[a] 和 Leanne Doughty[a]

[a]Dep物理系，乔治城大学，美国华盛顿哥伦比亚特区 20057 A

摘要

本科量子力学教学着重于采用位置空间表象中的波函数方法。这使得教学倾向于从微分方程的角度讲授相关内容。然而，通过比较学生学习谐振子级数解与抽象算符方法时的反应，我们发现，抽象的表象无关方法往往更适合学生。由于可以用类似的抽象方法讲授所有可解量子问题，这便引出了一个问题：哪种方法更有可能帮助学生更好地理解？在乔治城大学以及 edX 的教学工作中，我们开设了一门课程，重点采用算符优先观点，并将其称为算符力学。这种方法以与表象无关的方式讲授量子力学，并使大部分数学运算采用代数形式，而非基于微分方程。它依托四个基本的算符恒等式——(i) 对易子的莱布尼茨法则；(ii) 哈达玛引理；(iii) 贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式；以及 (iv) 指数解纠缠恒等式。这些恒等式可用于求解所有可解析求解问题的本征值、本征态和波函数（包括一些本科课程中不常涉及的问题，例如莫尔斯势或 P¨oschl-Teller 势）。它们也使得压缩态等与量子传感相关的进阶概念，能够以比传统方式更简单的形式引入。本文展示矩阵力学、波动力学和算符力学这三种方法，说明如何以这种新形式组织课程，总结我们以这种方式教授量子力学的经验，并阐述这种方法如何让我们将量子课程聚焦于更符合第二次量子革命需求的现代21世纪主题。

关键词： 量子力学教学、与表示无关的形式主义、第二次量子革命

1. 引言

我们正处于第二次量子革命之中——在这场革命中，我们能够探测、控制和操纵单个量子——例如电子、原子和光子。这一科学进步很可能开启先进技术的新时代——在这个时代，技术将运用这些能力，以一种能够创造新颖、甚至改变生活的技术的方式，探测、控制和操纵单个量子（就像基于原子钟的全球定位系统所做到的那样）。这门科学本身也是新兴的。它被称为量子信息科学，由量子计算、量子通信和量子传感三大支柱组成。为了享受第二次量子革命带来的益处，我们需要一支量子素养显著高于当前水平的劳动力队伍。[1] 我们需要具备量子认知、量子熟练度和量子专家能力的工作人员。教授量子信息科学的原理，尤其是面向具备量子认知和量子熟练度的劳动力队伍，并采用数学先修要求较低的方式，能够使教材更易于理解，也能让这一领域更具包容性。量子计算和量子通信已经在以非传统方式进行教学。许多教师采用这样一种观点：量子力学只是一种新颖的方法，用于根据满足叠加规则的复值概率振幅来计算概率。此外，量子门和量子信道可以使用有限大小的矩阵表示以及线性代数原理来描述。然而，在量子传感领域，人们需要理解原子结构、光子-物质耦合、压缩态、退相干等高级概念，以及对实际实验中

作者补充信息：（请将信件寄给 J.K.F.）J.K.F.：电子邮箱：james.freericks@georgetown.edu

测量的现实描述。人们通常认为，这需要采用传统的微分方程方法。这一说法是错误的。在本文中，我们将讨论如何在更高等数学与抽象之间进行权衡，从而使量子信息科学这一支柱——量子传感——也能够以更易于理解的方式、在较低数学先修要求下进行教学。

早期的量子力学玻尔-索末菲理论建立在这样一个假设之上：量子力学源于对经典力学施加的限制。玻尔-索末菲量子化规则将沿经典轨迹的相位积分联系起来，作为以 $\hbar$为单位进行量子化的约束。该理论在氢原子问题上表现出色——它正确地确定了能级、相对论修正以及所有精细结构效应。但它缺乏恰当的理论基础。1925年，海森堡发现了 矩阵力学，[2] 它用离散（但无限维）的矩阵取代连续的经典函数，而这些矩阵满足与经典力学中哈密顿运动方程相同的运动方程。不过，由于矩阵从基态开始，我们可以构造升降算符，以计算允许的能量本征值，而无需确定能量本征态。事实上，在最初的矩阵力学方法中，甚至没有量子态这一概念——所有效应都是从矩阵本身推导出来的。谐振子和角动量问题都可以用矩阵力学方法求解，而大多数教科书中的传统方法都紧密遵循海森堡、玻恩和约尔丹的方法。[2–4] 在当今的量子力学教学中，我们会使用升降算符，但我们不再将它们视为无限维的离散矩阵，而是将其视为抽象算符。通常采用有限维矩阵表示并以现代矩阵力学方法处理的，是自旋（有时也包括轨道角动量）问题；这种方法强调运用线性代数方法求解问题。因此，大多数学生在学习量子力学时，已经接触过一些矩阵力学思想。

1926年，薛¨定谔发现了波动力学，[5] 引入了位置空间表象中的波函数，并使用薛¨定谔方程分析量子现象。这引入了量子力学的标准微分方程方法，也是大多数量子力学教学的主流。在薛¨定谔最初的工作中，他使用拉普拉斯方法求解微分方程，将解表示为复平面上的围道积分。这种方法很快被弗¨罗贝尼乌斯方法取代，后者使用广义幂级数试探解来求解微分方程。大多数教师都知道，学生在学习这种方法时会遇到困难，而且大多数学生并不能熟练掌握它，以解决不同于几乎所有量子力学教材中标准问题的新问题。

人们可能会以为事情到此为止了。这就是求解量子力学问题的两种方法。的确，还有许多其他方法，包括维格纳函数方法、路径积分，等等。最近的一篇论文概述了九种不同的“做”量子力学的方法。[6] 但是，还有一种其他地方没有提到的方法。这就是我们所称的算符力学 ，它与矩阵力学和波动力学诞生于同一时期。第一种算符力学解法是泡利对氢原子问题的解。[7] 虽然这通常被描述为一种矩阵力学解法，但快速浏览该论文就会发现，他通过操作算符及其对易关系来计算所有结果。他确定了两个彼此独立的 SU(2)对称性，它们结合起来构成库仑问题的 SO(4) 对称性。这个李代数的升降算符随后确定了氢原子的能谱。但是，同样地，它并不能确定能量本征态。狄拉克在描述 q 数和 c数时也采用了类似的思想，[8] 表明人们可以通过运用 q 数（算符）的代数来求解量子问题。现代算符力学使用算符计算量子力学课堂中通常教授的所有相同性质。1940年，薛¨定谔发明了因式分解法，[9] 将谐振子的抽象方法推广到所有精确可解的量子力学问题。这些算符方法甚至可以通过使用平移算符和其他算符恒等式来求出波函数[10–13] 。这种方法要求具备运用抽象概念的能力，但不需要像传统方法那样掌握大量高等数学。

下面我们将以三种不同的方法求解谐振子，展示这三种不同方法之间的关联。

在传统教学中，必须向学生讲授大量高等数学内容，包括微分方程的级数解、傅里叶变换、狄拉克δ函数，以及如何使用微分算子。花在这些内容上的时间，就挤占了讲授物理

思想的时间，而这些思想与实验以及如何测量量子对象的性质有关。我们中的许多人都曾遇到过这样的情况：学生常常抱怨量子课程与其说是物理课，不如说更像数学课。采用算符力学授课时，学习新数学所需的时间会少得多，因此能够讲授更多物理内容。这使我们能够更新课程设置，讲授第二次量子革命以来的现代实验，例如贝尔实验、延迟选择实验、无相互作用测量、单量子探测、Hong-Ou-Mandel效应等。在我们教授的课程中，我们还会讨论如何测量单个量子的动量；大多数教科书都没有涉及这一主题，许多教师反而会讲授诸如“位置和动量不可能同时测量”之类的错误说法。下面我们将说明实际测量动量的方法，以及上述说法错在哪里——同时并不违背海森堡不确定性原理。[14]

在考虑如何拓展量子力学教学以适应21世纪应用的可选方案时，我们必须面对三个选择：(i) 让对这一领域感兴趣的学生学习标准物理课程，以及全部标准数学和物理学先修要求；(ii) 设法通过使用线性代数方法解决所有问题来简化数学负担，并且只要求线性代数作为数学先修要求；或(iii) 重新构思量子力学的教学方式，使所需数学知识成为高中通常学习的数学。尽管许多教育者倾向于方案(i)或(ii)，但我们聚焦于方案(iii)。要做到这一点，就必须将算符置于首位，并引入抽象量子态以及围绕它们开展学习。因此，需要教会学生进行更抽象的思考，以降低数学先修要求。这样一来，人们便会面临一个矛盾：没有大量数学先修知识的学生是否能够应对抽象，还是需要提高所要求的先修知识。换言之，学生是否具备足够的认知负荷能力，以支持更抽象地开展学习？本文论证认为，学生能够应对这种抽象性，方案(iii)是可行的选择。此外，它很可能也是最具包容性的教学方式，因为它大幅降低了先修要求。

那么，选项 (ii) 呢？能否不依赖微积分课程序列来教授线性代数？对于线性代数的大部分内容来说，这当然是可行的（例如，需要避免讲授多项式如何构成向量空间）。不过，我们认为，采用线性代数方法面临两项严峻挑战。如果把所有计算都归结为矩阵运算（很可能是数值运算），那么我们预计学生将难以发展对材料的概念理解。他们所做的一切都将涉及构造矩阵、对其进行运算，然后提取所需结果。这与基于算符的方法不同。算符可以用矩阵表征，也可以运用线性代数处理这些表征；但我们也可以只从抽象层面研究算符，这正是我们以这种方式教授量子力学时所采用的方法。我们确实发现，学生似乎能够形成一些与这些算符运算相关的概念性认识。

2020年，美国国家科学基金会举办了一场研讨会，旨在为量子信息科学学习者确定所需的关键概念。[15] 与会者制定了一套包含九个关键概念的序列，涵盖量子比特、叠加、纠缠、测量等内容。它为制定面向21世纪的量子课程提供了主题框架。我们的量子课程采用这些关键概念作为确定高层次学习目标的初始框架，相关讨论将在下文详述。

2. 算符力学与波动力学和矩阵力学

由于许多教科书都以相同的方式讲解量子力学，我们想花一点时间说明三种方法——矩阵力学、波动力学和算符力学——各自如何处理一维简谐振子；这是最重要的量子问题之一。

如今，很少有人熟悉海森堡、玻恩和约尔丹最初的矩阵力学。我们借此机会展示最初的推理过程，以便读者理解这种方法。在现代量子力学教学中，矩阵力学通常指的是具有有限数量自由度、并且可以使用算符的矩阵表示来处理的问题。最简单的例子是利用泡利自旋矩阵来描述自旋（或更一般的两能级系统）。虽然最初的方法与此有许多相似之处，但二者并不相同。这里的描述紧密遵循 Born 和 Jordan 的论文[3]（发表于1925年）。

海森堡最初的思想是，动力学自由度 q 和 p 由无限维矩阵描述。哈密顿量按照与经典力学相同的函数形式构造，但将经典变量替换为矩阵变量。对于给定的动力学系统，位置和动量的矩阵元随能量差呈谐波变化（这是海森堡公设之一），因此我们有

$$\mathbf{q}_{mn} = q_{mn}e^{i\omega_{mn}t} \quad \text{and} \quad \mathbf{p}_{mn} = p_{mn}e^{i\omega_{mn}t}, \tag{1}$$

其中，粗体符号表示一个（无限维离散）矩阵，且 $\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$。我们还使用经典运动方程。因此，对于简谐振子，$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{m}\mathbf{p}$ 且 $\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = -m\omega^2\mathbf{q}$，因为 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\mathbf{q}^2}{2}$，其中 ω 为谐振子的频率。在经典力学中，位置算符和动量算符的取值为实数，因此我们假设它们的矩阵必须是厄米矩阵，所以 $q_{nm} = q_{mn}^*$ 且 $\omega_{nm} = -\omega_{mn}$；请注意，最后这个结果与里德伯-里兹组合原理一致。

这些矩阵还满足正则对易关系，Born 和 Jordan 将其称为量子条件：

$$[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = \mathbf{qp} - \mathbf{pq} = i\hbar\mathbf{I}, \tag{2}$$

其中$\mathbf{I}$ 是（无限维离散）单位矩阵。利用运动方程中的关系 $p_{mn} = i\omega_{mn}q_{mn}$以及厄米性，我们可得正则对易关系变为

$$im\sum_l (\omega_{ln} - \omega_{ml})q_{ml}q_{ln} = i\hbar\delta_{mn}. \tag{3}$$

令 $m = n$，并利用厄米性，我们得到

$$\sum_l \omega_{ml}|q_{ml}|^2 = -\frac{\hbar}{2m}. \tag{4}$$

经典运动方程（通过在量子处理中用矩阵代替变量重新表述）为 $(\omega_{mn}^2 - \omega^2)q_{mn} = 0$。这表明，每当 $q_{mn} \neq 0$ 时，就有 $|\omega_{mn}| = \omega$。现在，我们使用另一个公设：能量本征值不存在简并，因此 q_{mn} 至多有两个非零值：一个满足 $\omega_{mm'} = \omega$，另一个满足 $\omega_{mm''} = -\omega$ （注意，这两个解不一定都存在）。至少始终有一个解，否则正则对易关系将不成立。

下一步是计算$\mathbf{H}$的对角元；根据公设，它们就是系统允许的能级（可以将此理解为：在能量本征基中表示$\mathbf{H}$后，通过查看其对角元来读出哈密顿量的本征值，因为海森堡矩阵按其构造方式必须是在能量本征基中的表征）。我们得到

$$H_{mm} = \frac{m}{2}\left[(-\omega_{mm'}\omega_{m'm} + \omega^2)|q_{mm'}|^2 + (-\omega_{mm''}\omega_{m''m} + \omega^2)|q_{mm''}|^2\right] = m\omega^2(|q_{mm'}|^2 + |q_{mm''}|^2). \tag{5}$$

现在，我们对指标排序，使得 $m = 0$ 是最低能量；它必须为正，因为谐振子的哈密顿量是两个正项之和。对于 $m = 0$，只有 q_{01} 和 q_{10} 不为零。正则对易关系告诉我们，$|q_{01}|^2 = -\frac{\hbar}{2m\omega_{01}}$ 或 $E_0 = H_{00} = \frac{1}{2}\hbar\omega$，因为 $\omega_{01} = -\omega$。这就是基态能量。条件 $\omega_{mm'} = \pm\omega$则表明，一般的能级满足$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$，因为激发态的能量更高，这是标准结果。除此之外，没有什么需要确定的了，除了针对具体问题求出矩阵元，因为这种方法并未显式使用量子态或波函数。

请注意，我们并未使用先对哈密顿量进行因式分解、再借助升降算符沿着谱向上和向下推进的方法来解决这个问题。这种方法很容易从这种矩阵力学形式体系中产生，并且出现在 Born 和 Jordan 的第一本量子力学教材中，[16] 该书写于 1930年，并在数月后出版，早于 狄拉克的第一版 《量子力学原理》[17]（该书也出版于 1930年）。不过，有趣的是，大多数

教科书中的内容实际上是海森堡、玻恩和约尔丹的旧矩阵力学方法，而不是狄拉克的发明，尽管如今许多同时代人会这么说。

接下来，我们转向微分方程方法，这种方法的讲解方式与现代教科书中的做法相同；在 Schr¨odinger 阐述其解法的论文中也采用了这种方式。[9] 我们从 Schr¨odinger 定态系统在位置空间中的能量本征值方程开始，该方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_n(q)}{dq^2}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2\psi_n(q)=E_n\psi_n(q), \tag{6}$$

其中，$\psi_n(q)$ 是第 n 个能量本征态波函数。这里，E_n 是简谐振子第 n 个能量本征态的能量本征值。在 Schr¨odinger 的原始论述中，[18] 他通过列出微分方程并直接给出解来解决这个问题。不过，我们将展示标准方法如何运用弗罗贝尼乌斯方法求广义级数解。我们首先考察渐近行为，此时 $|q|\to\infty$，能量本征值在微分方程中可以忽略。波函数的函数形式很容易推导为 $\psi_n(q)=f_n(q)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2}$，其中必须保证 $f_n(q)$ 不会发散得过快，以免波函数不可归一化。f_n 的微分方程变为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2f_n(q)}{dq^2}+\hbar\omega q\frac{df_n(q)}{dq}+(\tfrac{1}{2}\hbar\omega-E_n)f_n(q)=0. \tag{7}$$

该方程可通过如下级数解试探形式求解：

$$f_n(q)=\sum_{m=0}^{\infty}c_mq^m. \tag{8}$$

于是我们发现，系数满足：

$$c_{m+2}=\frac{2m\omega}{\hbar}\frac{\hbar\omega(m+\frac{1}{2})-E_n}{(m+2)(m+1)}c_m. \tag{9}$$

对幂级数进行渐近分析可知，除非系数在有限项后终止，否则 $f_n(q)$ 的增长速度会过快。要做到这一点，需令 $E_n=\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$。在这种情况下，可以发现多项式 $f_n(q)$ 就是厄米多项式。最后进行归一化，便可得到完全归一化的波函数。我们不再进一步讨论这些细节，因为几乎所有教科书中都有介绍，而且大家应该都很熟悉。

算符力学起源于狄拉克早期关于 c 数和 q-数的论文[8]；如今我们会将 q 数称为抽象算符。不过，第一篇真正的算符力学论文是泡利最初求解氢原子本征值的论文。[7] 这篇论文通常被描述为一次矩阵力学计算，但仔细研读会发现，所有对易子的计算都是从 $[\hat{}q,\ \hat{}p]=i\hbar$ 出发，以抽象方式完成的；在本文中，我们用帽号表示算符。实际上，建立 SO(4) 对称性的对易关系正是通过这些内容计算得出的。随后利用升降算符，就可以求出能量本征值。泡利并未意识到自己发现了 SO(4) 对称性。这要等到福克后来对其作出阐述。[19]

算符力学的现代表述源自薛定谔在第二次世界大战期间的工作。[9,20,21]在这项工作中，他发展出一种称为因式分解法的方法。该方法通过将原始哈密顿量因式分解为 $\hat{}H_0=\hat{}A_0^\dagger\,\hat{}A_0+E_0$ 的形式来实现。由于这是一个半正定算符，最低能量态满足 $A_0|\psi_0\rangle=0$（称为辅助条件），由此得到基态能量 E_0。接下来，我们通过 $\hat{}H_1^{aux}=\hat{}A_0\,\hat{}A_0^\dagger+E_0$ 构造第一个辅助哈密顿量，它与原始哈密顿量不同；请注意，对于第一个辅助哈密顿量，我们交换了升降算符的顺序。然后，我们用新的升算符与降算符 $\hat{}H_1^{aux}=\hat{}A_1^\dagger\,\hat{}A_1+E_1$ 对辅助哈密顿量进行因式分解。$\hat{}$ 这给出一个新的辅助条件，用来求出其基态 $A_1|\phi_1^{aux}\rangle=0$，其能量为 E_1；我们用 ϕ 表示辅助哈密顿量本征态。通过重复构造因式分解链，

ˆ这一过程，下一步从 H_1^{aux} 开始，并求出下一个辅助哈密顿量、能量和基态。该过程为每个辅助哈密顿量产生两种形式。它们可以写作

$$\hat{H}_j^{aux} = \hat{A}_{j-1}\hat{A}_{j-1}^{\dagger} + E_{j-1} = \hat{A}_j^{\dagger}\hat{A}_j + E_j. \tag{10}$$

令人惊叹的是，能量 E_1 也是ˆ的第一激发态的能量 H_0 （而 E_j 是ˆ的第 j个激发态的能量 H_0）。这是因为构造辅助哈密顿量时，我们得到了交织关系，它源自式（10）中可用升降算符表示每个辅助哈密顿量的两种形式。交织关系表明

$$\hat{H}_j^{aux}\hat{A}_j^{\dagger} = \hat{A}_j^{\dagger}\hat{H}_{j+1}^{aux} \tag{11}$$

这也可以用来证明 $|\psi_1\rangle \propto \hat{A}_0^{\dagger}|\phi_1^{aux}\rangle$，因为

$$\hat{H}_0|\psi_1\rangle = \hat{H}_0\hat{A}_0^{\dagger}|\phi_1^{aux}\rangle = \hat{A}_0^{\dagger}\hat{H}_1^{aux}|\phi_1^{aux}\rangle = E_1\hat{A}_0^{\dagger}|\phi_1^{aux}\rangle = E_1|\psi_1\rangle. \tag{12}$$

同样，第 n 个激发态的能量为 E_n ，并且

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{(E_n - E_{n-1})(E_n - E_{n-2})\cdots(E_n - E_0)}}\hat{A}_0^{\dagger}\hat{A}_1^{\dagger}\cdots\hat{A}_{n-1}^{\dagger}|\phi_n^{aux}\rangle, \tag{13}$$

其中，归一化因子也可以根据交织关系和辅助基态能量轻松求得，因为 ˆ A_n ˆ$A_n^{\dagger} =$ ˆ$H_{n+1} - E_n$。

可以看出，这是一种抽象的方法，但它让我们无需波函数（或微分方程）就能确定能量本征值。由于可解问题具有形状不变势，这一过程只需进行相对简单的因式分解。对于形状不变势，因式分解总是具有相同的函数形式，只是各项的系数不同，因此，只需简单推导即可确定求出辅助哈密顿量所需的所有因式分解。

那么波函数呢？我们也可以通过罗德里格公式的算符推广形式，以代数方法求得波函数。[12,13] 这一策略首先将升降算符改写为动量算符的相似变换。随后，利用辅助条件找到一个由第 n 个辅助基态构造而成、且被动量算符湮灭的态。借助这样的态，第 n 个能量本征态可以转化为作用在辅助哈密顿量基态上的 n 重迭代对易子表达式（这相当于罗德里格公式）。最后，利用递推关系求出适当的多项式，再将其与另一个函数相乘，从而得到波函数。

接下来，我们将说明如何对简谐振子使用这一方法。几乎所有教科书都会讲解这种方法，但通常将其描述为只适用于谐振子的特例，而且往往只是直接给出算符，并未展示如何通过因式分解法确定这些算符。在这里，我们将沿着 Schr¨odinger 最初采用的思路展开论述；该方法对升降算符采用了不同的归一化方式（因此有些方面对你来说可能比较陌生）。我们还将展示一种鲜少讨论的额外奇异因式分解（没错，因式分解不一定是唯一的）。这种分解源于势能是偶函数。此外，它还有其他令人意外之处。

因式分解法于20世纪40年代发展起来，并在20世纪80年代重新焕发生机，当时 Witten 将其用作超对称性的一个例子。[22] 超对称量子力学与因式分解法密切相关。这里我们不再进一步讨论超对称性，但会沿用超对称量子力学中的命名惯例。

我们从升降算符开始，它们互为厄米共轭。降算符表示为

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\big(\hat{p} - i\hbar k W(k'\hat{q})\big), \tag{14}$$

其中， W 是超势， k 和 k' 是波数，量纲为长度的倒数。计算升降算符的乘积可得

$$\hat{A}^\dagger \hat{A} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{i\hbar k}{2m}[\hat{p}, W(k'\hat{q})] + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} W^2(k'\hat{q}). \tag{15}$$

因式分　　解哈密顿量的过程要求我们找到一个超势，使得

$$V(\hat{q}) - E = -\frac{i\hbar k}{2m}[\hat{p}, W(k'\hat{q})] + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} W^2(k'\hat{q}). \tag{16}$$

对于可解问题，超势总是呈现为一个简单表达式，由一至三个简单项相加构成。后续的因式分解采用完全相同的形式，因此这类可解问题被称为具有形状不变势。这使得这些因式分解的求解成为可能。

请注意，如果我们已经知道基态波函数 $\psi_0(q)$，那么就可以直接验证 $\hbar k W(k'\hat{q}) =_{-} \psi_0'(\hat{q})\,\psi_0(\hat{q})$。这是由薛定谔方程到黎卡提方程的经典变换推导而来。当然，如果我们正在求解这个问题，就不可能预先知道波函数 *a priori*，因此求解过程要直接构造超势。由于可能存在多个因式分解得到同一个哈密顿量（也就是说，因式分解法并非唯一），我们只列出有效超势的一些要求（课程中会对此进行全面讲解）。首先，非奇异因式分解（存在满足辅助条件的态）总是唯一的。所谓非奇异，是指超势不会在波函数的定义域内发散（但可以在边界点发散）。如果超势是奇异的，则它描述的波函数会在每个奇异点都有节点。其次，对于哈密顿量中不含动量线性项的任何问题，超势都是实数。第三，为使波函数可归一化，对于 $q \to \infty$，超势的符号必须为正；对于 $q \to -\infty$，则必须为负。考察超势与波函数对数导数之间的关系即可看出，这是一个必要条件。

现在我们可以求出简谐振子的因式分解了。显然，可以选择一个线性函数，因此我们可以尝试 $W(k'\hat{q}) = k'\hat{q}$。将其代入式（16），得到

$$\frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 - E = -\frac{\hbar^2 k k'}{2m} + \frac{\hbar^2 k^2 k'^2}{2m}\hat{q}^2, \tag{17}$$

这要求我们有 $\hbar k k' = \pm m\omega$。根据超势的符号要求（该要求保证存在满足辅助条件的可归一化态），可得

$$\hat{A}_0 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\hat{p} - im\omega\hat{q}\right), \tag{18}$$

以及 $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$，这是标准结果（升降算符的归一化与当代常用的归一化不同）。请注意，在波函数 $-\infty < q < \infty$的整个定义域内，这个超势并不奇异，但在边界点处会发散。

我们或许会以为这就结束了，但还可以找到另一种因式分解。可以尝试取形式为 $\frac{a}{\hat{q}} + b\hat{q}$ 的超势。它与动量的对易子会产生一个在 $\hat{q}$ 中呈逆平方幂的项和一个常数，而超势的平方则会产生一个逆平方项、一个常数项和一个平方项。如果我们能调整常数，使逆平方项的系数为零，就能得到简谐振子的另一种因式分解。事实上，这种方法确实可行。下面来梳理具体细节。首先，我们需要说明如何在不使用求导的情况下计算动量与 $1/\hat{q}$ 的对易子。我们改用莱布尼茨法则来推导。注意到 $[\hat{p}, 1] = 0$，也就是说，动量与一个数对易，因此可得

$$0 = [\hat{p}, 1] = \left[\hat{p}, \frac{\hat{q}}{\hat{q}}\right] = \hat{q}\left[\hat{p}, \frac{1}{\hat{q}}\right] + [\hat{p}, \hat{q}]\frac{1}{\hat{q}} = \hat{q}\left[\hat{p}, \frac{1}{\hat{q}}\right] - \frac{i\hbar}{\hat{q}}, \tag{19}$$

将其重新排列可得 $\left[\hat{p}, \frac{1}{\hat{q}}\right] = \frac{i\hbar}{\hat{q}^2}$。同样的策略也用于计算所有更复杂的对易子。事实证明，仅通过运用对易子，就能推导出所有求导法则，因为对易子满足莱布尼茨法则，而这正是推导求导法则所需的全部条件，[23] 但此处不再进一步讨论。

利用这一结果，我们将超势设为

$$kW(k'\hat{q}) = \frac{a}{\hat{q}} + b\hat{q}, \tag{20}$$

其中 $a \neq 0$ 和 $b > 0$。然后我们发现

$$\frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 - E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{a}{\hat{q}^2} - b\right) + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{a^2}{\hat{q}^2} + 2ab + b^2\hat{q}^2\right). \tag{21}$$

为了得到新的因式分解（$a \neq 0$），并满足 $|q|$ 较大时超势的符号要求，我们必须选择 $a = -1$ 和 $b = \frac{m\omega}{\hbar}$。因此，我们有

$$\hat{A}_0^{'} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\hat{p} + \frac{i\hbar}{\hat{q}} - im\omega\hat{q}\right), \tag{22}$$

以及 $E' = -\frac{3}{2}\hbar\omega$。我们用撇号标记奇异因式分解对应的升降算符和能量，以便将它们与非奇异因式分解对应的升降算符和能量区分开来。这是第一激发态能量，而不是基态。但这正如预期，因为这种因式分解是奇异的，也就是说，我们能找到的最低能态在 $q = 0$ 处有一个节点（因为超势在该处发散），因此它不可能是基态，因为基态没有节点。这是关于哈密顿量的额外（奇异）因式分解的一项重要结果。它们能给出部分、但并非全部能量本征态的结果。我们将在下文看到，这种因式分解只能找到所有具有奇宇称的本征态。

下一步是构造辅助哈密顿量。为此，我们按相反顺序计算升降算符的乘积。这意味着我们将原始哈密顿量加上 $[\hat{A}_0, \hat{A}_0^\dagger] = \frac{i\hbar k}{m}[\hat{p}, W(k'\hat{q})]$，从而得到第一个辅助哈密顿量。对于非奇异因式分解，它等于 $\hat{H}_1^{aux} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 + \hbar\omega$，这会使原始哈密顿量向上平移常数 $\hbar\omega$。现在，为了对这个哈密顿量进行因式分解，我们发现所用的升降算符与原始哈密顿量所用的完全相同，只是现在常数项增加了 $\hbar\omega$，变为 $\frac{3}{2}\hbar\omega$。由于升降算符相同，这一过程会继续用于下一个辅助哈密顿量，依此类推。因此，我们有 $\hat{H}_n^{aux} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 + n\hbar\omega$ 和 $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$。这是唯一具有如此简单辅助哈密顿量的问题。

奇异情形的处理过程类似，但在这种情况下，辅助哈密顿量的变化不只是能量上移。计算 $[\hat{A}_0^{'}, \hat{A}_0^{'\dagger}] = \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{1}{\hat{q}^2} + \frac{m\omega}{\hbar}\right)$，即可得到

$$\hat{H}_1^{aux\,'} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{m\hat{q}^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 + \hbar\omega, \tag{23}$$

这是一个在原点处有奇点的势能。专家会认出，这个哈密顿量是三维各向同性谐振子的 $l = 1$ 径向哈密顿量（其中 $\hat{q} \to \hat{r}$ 和 $\hat{p} \to \hat{p}_r$）。现在，我们需要使用与之前相同的试探形式再次对哈密顿量进行因式分解，但这次要采用新的 a 和 b。我们发现，在这种情况下必须选择 $a = -2$ 和 $b = \frac{m\omega}{\hbar}$，由此得到 $E_1' = \frac{5}{2}\hbar\omega$。注意，人们可能会认为这里存在歧义：究竟应该选 $a = -2$ 还是 $a = 1$，因为二者会得到相同的系数。但我们必须选择负值，因为能量必须为正，因此不存在歧义。现在，我们可以重复这一方法，并得到一般结果：

$$\hat{A}_n = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\hat{p} + \frac{i\hbar(n+1)}{\hat{q}} - im\omega\hat{q}\right), \quad E_n' = \hbar\omega\left(2n + \tfrac{3}{2}\right) \quad \text{and} \quad \hat{H}_n^{aux\,'} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\hbar^2 n(n+1)}{2m\hat{q}^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 + n\hbar\omega. \tag{24}$$

因式分解链中的每一步，能量都会增加 $2\hbar\omega$ ，因为这一结果只确定了原哈密顿量的奇解。

现在，我们按照因式分解法的步骤计算能量本征态。我们将使用归一化因子，以确保构造出归一化态。对于非奇异因式分解，我们发现所得到的

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{(\hbar\omega)^n}}\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{A}^\dagger\right)^n|\psi_0\rangle, \tag{25}$$

对于具有 $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 的态，其形式应该相当熟悉。归一化中存在一个额外因子，因为升降算符并未采用标准归一化。$(\hbar\omega)^n n!$ 项来源于归一化因子的分母中的乘积 $(E_n - E_0)(E_n - E_1)\cdots(E_n - E_{n-1})$。最后，我们只使用一个升算符，因为我们发现，对于这条因式分解链，所有升算符都是相同的。现在，对于奇异因式分解，情况则略有不同。在这里，我们发现：

$$|\psi'_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{(\hbar\omega)^n}}\frac{1}{\sqrt{(2n)!!}}\hat{A}'^\dagger_0\hat{A}'^\dagger_1\cdots\hat{A}'^\dagger_{n-1}|\psi'_0\rangle, \tag{26}$$

它们是具有 $E'_n = \hbar\left(2n+\frac{3}{2}\right)$ 的能量本征态。乍看之下，这似乎并不正确，但这些态实际上对应于奇数指标下由非奇异势能形成的态，其中 $(n)_{nonsing} = 2(n)_{singular}+1$，至多相差一个可能的全局相位。可以通过直接构造这些态来验证这一点，但此处不再赘述。

你可能会惊讶，自己以前从未见过这种奇异因式分解。它一直都在那里，等待着被发现——要找到它，只需要清楚地理解因式分解法的运作方式！

现在，我们继续计算波函数。首先提醒一下，采用与表象无关的方式时，如何求出波函数。波函数是量子态（这里我们取为能量本征态）与位置本征态的左矢之间的重叠。因此，我们有 $\psi_n(q) = \langle q|\psi_n\rangle$。位置本征态满足 $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$，其中 q 是一个数，表示位置本征态所在的位置。它可以通过将位置平移算符作用于原点处的位置本征态来构造，即

$$|q\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{p}}|0_q\rangle, \tag{27}$$

其中 $|0_q\rangle$ 是原点处的位置本征态（它被位置算符湮灭，即 $\hat{q}|0_q\rangle = 0$）。为此，我们只需计算

$$\hat{q}|q\rangle = \hat{q}e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{p}}|0_q\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{p}}e^{\frac{i}{\hbar}q\hat{p}}\hat{q}e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{p}}|0_q\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{p}}(\hat{q}+q)|0_q\rangle = qe^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{p}}|0_q\rangle = q|q\rangle, \tag{28}$$

因为 $\hat{q}|0_q\rangle = 0$。请注意，在推导过程中，我们使用了哈达玛引理，计算经平移算符相似变换后位置算符的位移量 q。

对于波函数，我们将着重讨论非奇异因式分解，因为计算过程稍长。我们先求出产生升算符的动量算符相似变换。利用哈达玛引理（或者将高斯函数展开为幂级数，并逐项计算对易子），可得

$$\hat{A}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\hat{p}+im\omega\hat{q}) = \frac{1}{\sqrt{2m}}e^{\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2}\hat{p}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2}. \tag{29}$$

能量本征态于是可以写成

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\hbar m\omega)^n}}\frac{1}{\sqrt{n!}}e^{\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2}\hat{p}^n e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2}|\psi_0\rangle, \tag{30}$$

因为内部的高斯因子相乘后得到 1。接下来，我们要找到被动量算符湮灭的态。我们通过将相似变换应用于辅助条件来找到这个态，由此得到

$$\hat{p}\underbrace{e^{\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2}|\psi_0\rangle}_{\text{state}} = 0. \tag{31}$$

由于动量算符会湮灭这个态，并且我们可以写成 $e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2}=e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\hat{q}^2}e^{\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2}$，因此可以将最左侧作用的第一个动量算符改写为对易子，从而得到

$$|\psi_n\rangle=\frac{1}{\sqrt{(2\hbar m\omega)^n}}\frac{1}{\sqrt{n!}}e^{\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2}\hat{p}^{n-1}\left[\hat{p},e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\hat{q}^2}\right]e^{\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2}|\psi_0\rangle. \tag{32}$$

我们可以重复这一引入对易子的操作 $n-1$ 次，然后将所有指数算符合并到左侧；这是因为位置算符的函数与嵌套动量算符对易，因此得到

$$|\psi_n\rangle=\frac{1}{\sqrt{(2\hbar m\omega)^n}}\frac{1}{\sqrt{n!}}e^{\frac{m\omega}{\hbar}\hat{q}^2}\left[\hat{p},\left[\hat{p},\cdots\left[\hat{p},e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\hat{q}^2}\right]\cdots\right]\right]_n|\psi_0\rangle. \tag{33}$$

这是罗德里格公式的算符推广（下标 n 表示有 n 个嵌套对易子）。这组嵌套对易子将给出厄米多项式，下面我们来证明这一点。

我们将算符值厄米特多项式定义为

$$\begin{aligned}H_n\left(\hat{q}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)|\psi_0\rangle&=(-i)^n\sqrt{\frac{2^n}{(\hbar\omega)^n}}(\hat{A}^\dagger)^n|\psi_0\rangle=(-i)^n\sqrt{2^n n!}|\psi_n\rangle\\&=\frac{(-i)^n}{\sqrt{(\hbar m\omega)^n}}e^{\frac{m\omega}{\hbar}\hat{q}^2}\left[\hat{p},\left[\hat{p},\cdots\left[\hat{p},e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\hat{q}^2}\right]\cdots\right]\right]_n|\psi_0\rangle.\end{aligned} \tag{34}$$

我们来计算 $n=0$ 和 $n=1$的情形。对于 $n=0$，我们得到 $H_0\left(\hat{q}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)=1$；对于 $n=1$，则有$H_1\left(\hat{q}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)=2\hat{q}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$。这就是前两个厄米多项式。要推导其余多项式，我们需要求出厄米多项式的递推关系。

首先，我们将厄米多项式算符的定义改写为

$$\begin{aligned}H_n\left(\hat{q}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)&=-i\sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}}\hat{A}^\dagger(-i)^{n-1}\sqrt{\frac{2^{n-1}}{(\hbar\omega)^{n-1}}}(\hat{A}^\dagger)^{n-1}|\psi_0\rangle\\&=-i\sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}}\left(\hat{A}+i\sqrt{2m}\omega\hat{q}\right)(-i)^{n-1}\sqrt{\frac{2^{n-1}}{(\hbar\omega)^{n-1}}}(\hat{A}^\dagger)^{n-1}|\psi_0\rangle\\&=2\hat{q}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}H_{n-1}\left(\hat{q}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)|\psi_0\rangle+(-i)^n\sqrt{\frac{2^n}{(\hbar\omega)^n}}\left[\hat{A},(\hat{A}^\dagger)^{n-1}\right]|\psi_0\rangle,\end{aligned} \tag{35}$$

其中我们用到了恒等式 $\hat{A}^\dagger=\hat{A}+i\sqrt{2m\omega}\hat{q}$。最后一行的对易子是由辅助条件产生的，因为 $\hat{A}|\psi_0\rangle=0$。利用 $[\hat{A},\hat{A}^\dagger]=\hbar\omega$ 这一事实，可以立即通过数学归纳法证明

$$\left[\hat{A},(\hat{A}^\dagger)^n\right]=n\hbar\omega(\hat{A}^\dagger)^{n-1}. \tag{36}$$

于是，厄米多项式的递推关系变为

$$H_n\left(\hat{q}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)|\psi_0\rangle=2\hat{q}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}H_{n-1}\left(\hat{q}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)|\psi_0\rangle-2(n-1)H_{n-2}\left(\hat{q}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)|\psi_0\rangle. \tag{37}$$

这是采用物理学家归一化的厄米多项式的标准递推关系。

综合这些结果，我们得到

$$\psi_n(q)=\langle q|\psi_n\rangle=\frac{i^n}{\sqrt{2^n n!}}\langle q|H_n\left(\hat{q}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)|\psi_0\rangle. \tag{38}$$

现在，我们可以作用 将厄米多项式算符作用于左侧的位置本征态，以得到

$$\psi_n(q)=\frac{i^n}{\sqrt{2^n n!}}H_n\left(q\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)\psi_0(q). \tag{39}$$

剩下的就是计算基态波函数。不过，在此之前，我们会去掉 i^n因子，因为它是一个全局相位，而且我们更愿意使用实值波函数。

利用动量算符作用于基态时会湮灭高斯算符这一事实，可以求得基态波函数。因此，

$$\psi_0(q) = \langle q|\psi_0\rangle = \langle q|e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2} e^{\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2}|\psi_0\rangle = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2}\langle q|e^{\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2}|0\rangle = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2}\langle 0_q|e^{\frac{i}{\hbar}q\hat{p}} \underbrace{e^{\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2}|\psi_0\rangle}_{\hat{p}\text{ annihilates this state}}$$

$$= e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2}\langle 0_q|e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2}|\psi_0\rangle = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2}\langle 0_q|0\rangle. \tag{40}$$

在最后一行中，我们将 $\hat{}q$ 作用到左侧，并将其替换为 0。剩下的就是计算1归一化常数，这可以通过简单的高斯积分求得，结果为 $\langle 0_q|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^4$。综合以上结果，便得到归一化波函数

$$\psi_n(q) = \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(q\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2}, \tag{41}$$

这就是标准结果。请注意，推导过程中没有用到微分方程，唯一需要微积分的地方是基态的归一化。归一化常数可以直接告诉尚未学过微积分的学生，因此，这一点不应妨碍他们参与学习。

在算符力学范式下开展教学，需要我们着重思考如何帮助学生逐渐适应抽象思维。如下文所述，做法是先通过简单、具体的形式体系聚焦于概念性知识，再逐步运用新的形式语言重新求解相同的概念问题，以此逐渐引入抽象的形式层面。再加上大量练习，学生便能掌握更抽象地思考和处理问题的能力。这一过程建立在他们已经通过高中代数和几何课程培养起来的技能之上。下文将进一步讨论这种教学方法的具体实施。

正如我们所见，“算符力学”方法让人联想到用于确定简谐振子（以及角动量）的能量本征函数和本征值的代数方法，这种方法出现在许多量子力学教材中。两本现代本科教材完整地发展了算符力学方法，一本由 Green [24] 编写，另一本由 Ohanian 编写。[25] 最近，这一策略又被扩展用于以代数方式求得球谐函数、[26] 简谐振子波函数、[10] 压缩态波函数[11] 和氢原子波函数。[12,27] 传统量子力学课程中讲授的每一个可解析求解的问题，也都可以从纯粹的代数角度进行处理。甚至时间演化也可以利用其幺正性和半群要求，并借助 Trotter乘积公式[28] 以代数方式加以发展；该公式还澄清了什么是时间序乘积。我们通过经验发现，使用算符进行计算，能让学生在所使用的代数方法中获得更强的“算符运动的物理感”，而我们观察到，这有助于他们掌握技术技能，并将这些知识更广泛地应用于其他问题。算符力学确实需要一些工具来开展计算。所有标准的量子计算都可以通过使用四种不同的算符恒等式（及其推广形式）来完成。这些恒等式是：(i) 算符乘积的对易子的莱布尼茨规则 $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$；(ii) 哈达玛引理$e^{\hat{}A}\hat{}Be^{-\hat{}A} = \hat{}B + [\hat{}A,\ \hat{}B] + \frac{1}{2}[\hat{}A,\ [\hat{}A,\ \hat{}B]] + \frac{1}{3}![\hat{}A,\ [\hat{}A,\ [\hat{}A,\ \hat{}B]]] + \cdots$；(iii) 贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式，它将 $e^{\hat{}A}e^{\hat{}B} = e^{\hat{}A+\hat{}B+\frac{1}{2}[\hat{}A,\ \hat{}B]+\cdots}$ 联系起来；以及 (iv) 指数解纠缠恒等式，它允许将李代数元素的指数重新表示为李代数元素指数的乘积，并且可以视为所谓 KHK定理和李群 Cartan分解的一个特例。这些算符恒等式无需使用高等数学即可教授；学生通过观察示例和解决问题来学习如何使用它们。特别是，处理这些内容不需要群论。

3. 用于量子力学教学的物理教育知识库

考察学生对量子力学的理解和学习困难，是物理教育研究（PER）中持续受到关注的一个领域。[29] 这类研究已经确定了量子力学中许多困难领域（例如，隧穿、[30] 时间依赖性、[31] 测量和期望值[32,33]），并推动了各种教学创新。[34,35] 华盛顿大学的 PER 研究小组已将其在入门阶段取得成功的辅导教程方法扩展到高年级量子力学课程。[36] 事实上，另一研究小组近期的工作以灵活的模块化形式提供了一套完整的课程，包括讲座、课前准备题、辅导教程、家庭作业和考试。[37] 许多人选择开发可视化工具，以应对学生学习困难并改善学生的概念理解（例如，QuILTs、[38–40] PhET、[41] 以及 QuVis[42]）。另一个重点领域是测试和比较自旋优先范式与波函数优先范式；研究表明，自旋优先方法能带来更高的学生表现，其依据是研究型概念评估。[43] 用于检验这些创新和方法的两项评估分别是量子力学概念评估[44]，以及一项聚焦于学生理解一维空间中量子力学的调查。[45] 在我们的工作中，我们采用了可视化策略，但无法使用此前开发的、与测量相关的这些工具。主要问题在于，这些工具基于一种采用哥本哈根诠释并假设测量具有非破坏性的技术方法。实际上，能够真正测量单个量子的实验方法中，极少有以这种方式运行的。相反，我们教授学生，几乎所有单量子的测量都是破坏性的，因为将从事量子传感的学生需要理解现实世界中的实验究竟是如何进行的。这就是为什么我们的材料不以传统方式讨论测量；我们只解释，采取波函数的本体论观点是危险的，因为一旦这样做，就必须调和这样一个问题：例如，对于来自数百万光年之外某颗恒星的光子，其物理波函数发生坍缩后，关于该光子已在某一点被探测到的知识，如何能在瞬间传递给波函数的所有其他位置，包括数百万光年之外的那些位置。此外，没有任何实验能够精确测量粒子的位置（从而导致波函数坍缩为 δ函数），因此，使用以下内容的评估工具——(i) 态制备（通常是盒中粒子的某个能量本征态或能量本征态的叠加），(ii) 对位置进行精确测量，以及 (iii) 随后询问波函数如何进一步演化——与真实实验相去甚远。在我们的课堂上，我们转而关注真实的测量技术，例如飞行时间法；这种方法在每次实验中实际测量位置（通过破坏性粒子探测器或其他手段）和动量（通过计时飞行时间并了解其到源的距离）。这样便可以仔细解释测量中的不确定性原理如何发挥作用：它适用于多次实验，而不是每一次单独的实验（正如许多量子力学教材中错误表述的那样）。我们还会介绍单粒子探测器的工作原理，以及它们为何通常具有破坏性（以放大信号）。最后，我们讨论无相互作用测量；这类测量在成功时是非破坏性的，但失败时可能会摧毁粒子。这是学习者进入量子传感领域所需了解的现代信息，也正因为如此，我们无法在课程中采用标准评估工具来衡量学生的学习情况。

本科生在高年级物理课程中应用数学工具（尤其是微积分工具）来理解和解决问题时遇到的困难已有大量文献记载。[46] Tu等人[47] 近期的一项研究指出，学生在二维空间的能量本征函数问题和一维的时间演化问题中，难以处理偏微分方程。研究还发现，即使是涉及复数的简单算术运算，对本科生来说也有难度。[48,49] 另一方面，Wawro等人[50] 发表了令人鼓舞的研究成果，展示了学生批判性地审视并理解线性代数和狄拉克符号在量子力学中的用途的能力，也表明学生在运用线性代数和量子概念进行推理时具有灵活性；这说明学生在认知上应当有能力处理抽象算符代数。

量子课程中许多已发现的概念困难都源于材料的抽象性质，[51] 包括对反直觉现象的解读，以及理解语言表达量子概念的局限性。在我们的课堂上，必须让学生培养运用抽象思维的能力。为此，我们采用多管齐下的方法。一种关于抽象教学的数学教育理论[52] 建议，首先使用模型和表征来引出某个观点的底层结构，

然后通过不同的模型和表征，展示其如何扩展到新的组成部分和应用。在我们引入的许多主题中（例如马赫-曾德尔干涉仪），我们会先用一个具体模型介绍材料，采用基于规则的方法计算量子概率，并直接将量子规则告知学生。即使采用这种方法，学生也能逐渐形成对量子现象，尤其是干涉现象的直觉。接下来，我们会构建一种运用狄拉克记号和算符的形式化方法，并用新的形式体系重新探讨完全相同的材料。在此，我们能够在一个连贯而抽象的数学框架中，推导出先前使用的具体规则。最后，我们会再次探讨这些材料，采用二次量子化的方法，将光子建模为电场在一个大盒子中的场激发的实部和虚部，并对这些激发进行量子化。等学生学到最后这个主题时，他们运用抽象思维的能力已比上课前显著提升。

我们用于逐步培养抽象思维的另一种方法，是给学生布置写作任务。这些短文（1 至 2 个段落）鼓励学生通过类比或更具体的模型来表达抽象观点；这些模型将复杂系统拆解成更小、更具体的部分。学生往往会投入大量心思，思考如何在写作中组织并表达这些观点。

本课程的一项创新特色是使用嵌入式 JavaScript 模拟、动画和教程。?, [54] 这些内容提供了独特的可视化和交互功能。图 1展示了动画中的一些静态图像。这类数字材料通过多种方式帮助学生形成抽象思维：[51] 将不可观测的量子现象可视化，对比经典与量子行为，并凸显出人意料的结果。

最后，通过让所有作业（考试除外）立即评分，并允许学生多次尝试直至获得满分，我们促使学生从过程一思维转向过程二思维（双加工模型用于解释学生如何推理任务[55,56]）。这种“激发”学生质疑其默认模型的做法，也有助于学生完善对抽象概念的心理模型。

4. 实施建议

我们通过 edX 平台[53,54]（作为大规模开放式在线课程）远程授课，或采用翻转课堂的形式进行线下教学。在这两种教学模式下，学生都需要在上课前观看教学视频。课堂期间，学习者通过完成习题、阅读简短材料或观看动画，学习与讲座内容相关的知识。学生还需要完成习题集和考试，这些内容也以在线形式提供。完全在线课程与翻转课堂之间的唯一区别在于，在翻转课堂中，教师会亲自到场为学生提供帮助。此外，我们还提供了与课程材料相关的自愿阅读资料，这些资料是由其中一位作者正在撰写的一本关于算符力学的书籍的草稿。

edX 框架支持学生以复杂的方式输入答案。他们可以回答传统题型，例如多项选择题和多项选择题（选出所有适用项）。他们也可以输入数值答案（在允许的误差范围内评分）和符号答案。正是后一项功能，让我们得以复现传统量子课程的复杂特性。不过，由于答案由计算机评分，学生也能立即获得反馈、改正错误答案并再次尝试（每道题都允许多次作答）。平台还允许学生提交论述题，回答需要综合推理的问题。学生会根据教师提供的评分标准自行评阅这些答案。学生成功答题（或用尽所有可用的作答次数）后，也可以立即查看解答。这样一来，学生便能马上纠正逻辑上的错误；我们相信，这会帮助他们更有效地学习材料。事实上，我们认为，这种方法有助于学生在学习这些材料时形成成长型思维模式，从而进一步提升他们的学习能力。[57]

我们采用逆向设计开展课程开发，从高层次学习目标入手。量子课程的学习目标基于NSF研讨会确定的九项量子信息科学（QIS）核心原则[15]。这些核心原则构成了量子课程设计的出发点。此外，我们还需要着重考虑构建形式体系所需的数学知识，以确保课程具有可及性。对于学生而言，传统教学往往是量子力学学习中的一项挑战，因为传统量子课程所要求的数学水平可能会让普通学生难以承受。通过以一种非传统的方式处理量子材料，我们

得以将核心数学要求降至最低，并更加专注于科学与工程理念。

用于描述我们希望学生获得的知识与技能的一种标准语言，是修订后的2001年布卢姆分类学，[58] 它描述了运用知识时的六种不同认知过程（复杂程度逐步提高）：（i）记忆；（ii）理解；（iii）应用；（iv）分析；（v）评价；以及（vi）创造。该分类学还将知识类型分为：（i）事实性知识；（ii）概念性知识；（iii）程序性知识；以及（iv）元认知知识。鉴于课程具有层级性和螺旋式特点，我们还参考了Shavelson和Huang认知成果框架[59]，该框架涉及以下知识类型：（i）陈述性知识；（ii）程序性知识；（iii）图式性知识；以及（iv）策略性知识。该框架指出，程序性任务的认知要求并不总是高于陈述性任务。我们对学习目标的描述同时采用了基于内容的描述和体现学生行动／认知要求的描述。

量子力学课程的首要目标是帮助学生做好准备，认真思考并回答以下四个问题：(i) 我们如何探究超微观尺度的世界，并了解肉眼无法看见的微小对象的性质；(ii) 量子性质如何从正则对易关系和自旋对易关系中涌现；(iii) 叠加和纠缠在决定量子对象的行为方式中发挥什么作用，以及如何将这些性质应用于实际场景；(iv) 我们如何建立一种数学形式体系，将这些思想纳入其中，并赋予我们预测能力。这些广泛的问题主要涵盖运用知识时涉及的前五种认知过程。学生还应掌握相应的技术技能，以便在量子力学的数学形式体系中开展工作，并能在新的情境中运用这些技能。

支撑这一课程设计过程的理念，是为背景各异的学习者提供尽可能广泛的可及性。教育研究（例如，参见华盛顿大学关于《物理学导论教程》的研究[60]）表明，当学生先对相关思想形成扎实的概念理解再用数学框架来表述这些思想时，他们在科学、技术、工程和数学（STEM）领域的表现会好得多。这种方法与 Griffiths 的畅销教材[61] 背道而驰；该教材主张让学生立即接触完整的量子形式体系。这种方法则更接近“自旋优先”范式[62,63]，但比该教学方案目前所包含的内容更强调概念性知识。本课程还采用分层方法，随着主题逐步深入，对其进行反复探讨。

量子力学课程主要分为四个部分：（i）概念性思想；（ii）运用算符的技术发展；（iii）在实验中的应用；以及（iv）在传感中的应用。课程从与自旋和光相关的概念性思想讲起，这些思想使我们能够讨论贝尔实验、非破坏性实验和光子聚束等复杂现象。随后，我们将发展运用算符所需的形式方法，包括四个基本的算符恒等式。接着，我们将这些形式方法应用于量子问题，采用薛定谔因式分解法，并联系许多量子实验（氘核的发现、质子电荷半径、射电天文学、核磁共振、分子转动光谱学等等）。最后，我们将介绍如何探测单光子、什么是压缩真空，以及激光干涉引力波天文台（LIGO）如何测量微小到足以探测引力波的距离。本课程培养布卢姆分类学中的前五种认知过程。

量子力学课程的高层次学习目标如下：

1. 能够描述叠加原理如何构成波粒二象性的基础，并运用量子态叠加分析自旋（斯特恩-盖拉赫实验）和光（单狭缝、双狭缝、多狭缝以及马赫-曾德尔干涉仪）的性质。2. 区分事件、事件发生的不同方式、可逆标记和不可逆测量；能够运用量子力学的数学形式体系描述这些不同现象，以及它们如何实现延迟选择实验。3. 描述纠缠为何要求量子力学违背局域实在论，以及实验如何验证这一点。

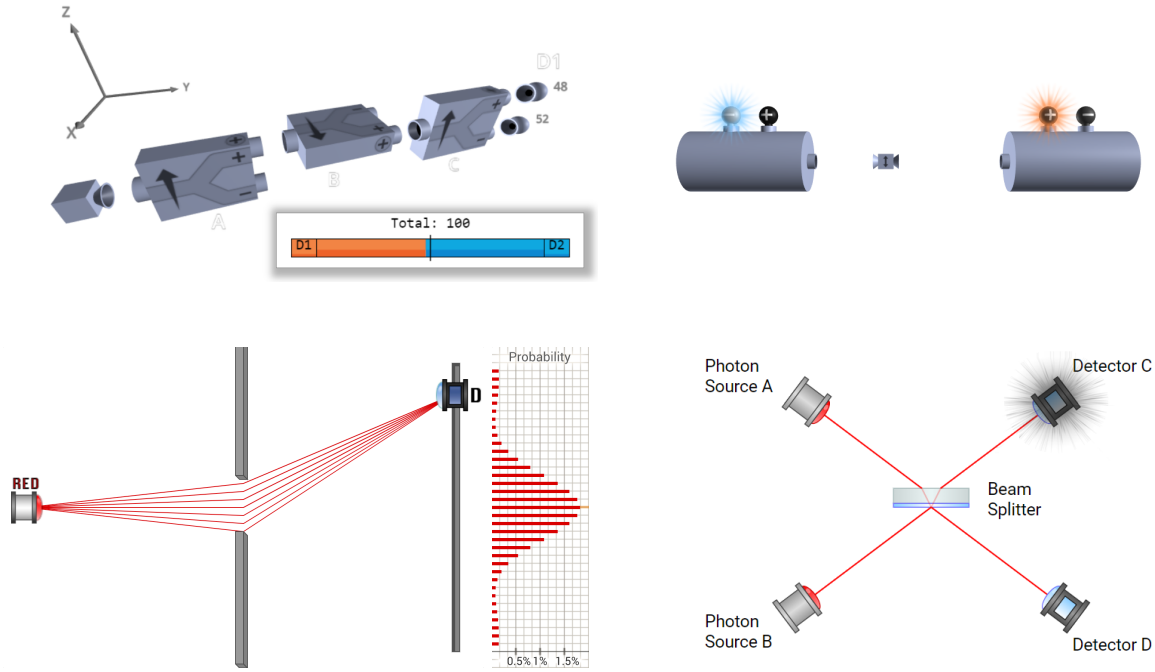


图1. 量子力学课程中不同计算机动画的图像。左上：嵌套的三重斯特恩-盖拉赫分析器实验。右上：贝尔实验。左下：单缝衍射实验（展示单缝衍射的 $wave$ 性质）。右下：Hong-Ou-Mandel实验。

4. 解释无相互作用实验如何实现量子暗中视觉，并说明此类实验的具体实施方式。5. 掌握量子力学的四个基本算符恒等式（莱布尼茨法则、哈达玛引理、贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式和指数解纠缠恒等式）的所有变体，并能够在使用算符进行量子计算时高效运用它们。6. 运用薛定谔因式分解法求解束缚态能量本征值问题（以代数方法确定能量，而无需波函数），并将其与平移算符（或辅助条件）结合以求得波函数；解释能级为何是离散的，并描述如何利用节点定理验证完备性。7. 运用课堂中采用的量子原理解释氢原子的性质，包括如何利用光谱学测量其质量和原子核半径、如何将其用于射电天文学，以及如何在动量空间中直接测量电子的概率分布。8. 运用微扰理论和变分法的近似方法，了解无法精确求解的量子系统。9. 计算如何运用时间演化描述简谐振子的振荡运动（包括相干态和压缩态）以及核自旋的旋转运动；能够构造并使用时间序乘积的特罗特形式。10. 将光量子化，描述什么是多模光子、如何测量单光子、如何验证拥有单光子光源、如何压缩光，以及如何利用光的量子性质进行引力波探测。

概括我们对量子力学的理解与更传统方法之间差异的一种方式，是强调物理学而非数学，尤其是强调实验。例如，

传统课程会讲授不确定性原理，并强调这样一种观点：无法构造位置和动量都同时具有确定值的量子态。通常，这一观点随后会被概括为一句不正确的话：无法同时测量位置和动量，因为投影测量只会投影到其中一个本征态上。然而，传统的教学框架从未真正告诉我们如何测量量子粒子的动量。在我们强调实验的方法中，我们会用整整一节课讨论飞行时间实验，这是测量动量最常见的方法。具体做法是：当某个特定事件释放出待测动量的量子粒子时，启动时钟。这一事件可以是囚禁原子从囚禁势阱中释放出来，也可以是高频光脉冲照射金属表面并使其光电发射电子的时刻。接着，我们记录粒子到达某个探测器所需的时间；该探测器位于离源特定距离处。通过已知粒子经过的距离、经过的时间和粒子的质量，我们可以通过测量位置来推断其动量！事实上，大多数动量测量技术都是通过测量位置并以类似方式推断动量来实现的。[14] 量子力学专业的学生若不知道如何测量量子粒子的动量，岂不可惜？然而，绝大多数学习量子力学的学生从未学过实际的测量方法。

我们还涵盖了更多实验。本课程从一个概念性知识单元开始，介绍许多不同的实验。我们先讲斯特恩-盖拉赫实验，随后迅速转向延迟选择变体，以及更复杂的变体，使我们能够进行贝尔实验。我们还会讨论无相互作用测量实验和这一平台上的可逆标记。

接下来，我们通过部分反射以及单缝和多缝衍射来讨论光的性质。然后转向马赫-曾德尔干涉仪，并借助一种延迟选择变体强调互补性；该变体在两个狭缝处使用相互垂直的偏振片。我们还会讨论一种复杂的量子暗中观测实验和 Hong-Ou-Mandel实验。在真正开始系统地讲解形式理论之前，我们会先完成上述所有内容。

学生还将学习隐形传态、量子密钥分发、核磁共振，以及一些精密实验。这些实验使我们能够测量氢原子核的质量和体积（包括氘的发现过程）。我们还会讨论天文学中著名的 Pickering-Fowler谱线，以及玻尔对这些谱线的解释如何说服爱因斯坦相信玻尔理论必定正确。

进一步的实验包括利用 e-2e能谱学测量动量空间中的氢原子波函数、超精细结构在射电天文学中的应用、如何通过飞行时间法测量原子在谐波阱中的波函数，以及分子的转动光谱。

课程结束时，在量子化光之后，我们会介绍光电倍增管如何测量单个量子、如何验证单光子源（它绝不是一台弱激光器），以及如何通过零差探测和外差探测测量光学光子。最后，我们会介绍激光干涉引力波天文台的工作原理。

在一学期的课程中讨论所有这些实验，有助于我们将物理学带回量子力学课堂。毕竟，我们应该教的是物理学，而不是数学！

5. 结论

量子力学教科书（及其配套课程）自20世纪50年代以来几乎没有变化。人们曾讨论过如何安排教材内容的讲授顺序（著名的自旋优先方法和波函数优先方法），但所用教材与狄拉克著作第三版中的内容[64] 或Schiff第一版著作中的内容[65] 仍颇为相似。我们在此主张，现在正是重新评估量子力学教学方式的好时机；我们应当更新课程内容，引入21世纪的主题，帮助学生为第二次量子革命做好准备。我们也希望扩大能够选修此类课程的学生群体。我们已经阐述了，采用与表示无关的形式主义，可以用抽象取代更高阶的数学。然而，要使这种方法行之有效，我们必须能够引导不熟悉抽象思维的学生学会进行更抽象的思考。在我们的课程中，我们先通过一个概念性知识单元建立学生对量子思想的认识，再逐步引入抽象；该单元约占课程总课时的30%。通过使学生能够进行抽象思考，我们得以用少得多的先修知识，带领他们进入

复杂的量子世界。这样一来，课程便能涵盖更多实验内容，包括如何测量单个量子，从而让学生更贴近现代研究主题。

本课程的结构使学生能够掌握进一步学习量子传感所需的基础知识。修完课程后，学生不仅知道如何测量粒子的动量，也了解量子力学如何帮助我们测量引力波。后续课程可以学些什么？量子计算与通信就是一门可以接续本课程的课程。学生已做好充分准备，可以进一步涉足这两个领域（不过，若能在此之前学习一些线性代数，当然会更有帮助）。此外，他们也能够探究如何运用量子算法模拟量子系统，例如化学中的分子，或凝聚态物理中的强关联电子。他们也很适合继续学习实践课程，使用量子传感实验中所用的设备。通过聚焦现代量子思想，这门课成为通往整个量子信息科学领域的入门课程。

致谢

我们感谢 Beth Lindsay 和 Justyna Zwolak 提供的宝贵讨论。本材料基于美国空军科学研究办公室通过项目编号 FA9550-22-1-0469 资助的研究工作。J.K.F. 还获得了乔治城大学 McDevitt遗赠基金的支持。

参考文献

[1] 白宫科技政策办公室，《量子信息科学与技术人才队伍发展国家战略计划：国家科学技术委员会科学委员会量子信息科学小组委员会报告》，美国总统行政办公室（2022年）。.[2] 海森堡，W.，《运动学与力学关系的量子理论重新诠释》，《物理学杂志》33，879–893（1925年）。[3] 玻恩，M. 和 约尔丹，P.，《论量子力学》，《物理学杂志》34，858–888（1925年）。[4] 玻恩，M.、海森堡，W. 和 约尔丹，P.，《论量子力学（二）》，《物理学杂志》35，557–615（1926年）。[5] 薛定谔，E.，《作为本征值问题的量子化（第一篇）》，《物理学年鉴》79，361–376（1926年）。[6] Styer，D. F.、Balkin，M. S.、Becker，K. M.、Burns，M. R.、Dudley，C. E.、Forth，S. T.、Gaumer，J. S.、Kramer，M. A.、Oertel，D. C.、Park，L. H.、Rinkoski，M. T.、Smith，C. T. 和 Wotherspoon，T. D.，《量子力学的九种表述》，《美国物理学杂志》70，288–297（2002年）。.[7] 泡利，W.，《从新量子力学观点看氢光谱》，《物理学杂志》36，336–363（1926年）。[8] 狄拉克，P. A. M.，《量子力学及对氢原子的初步研究》，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》110，561–579（1926年）。[9] 薛定谔，E.，《确定量子力学本征值和本征函数的一种方法》，《爱尔兰皇家科学院院刊》A 46，9–16（1940–41年）。[10] Rushka，M. 和 Freericks，J. K.，《简谐振子的完全代数解》，《美国物理学杂志》88，976–985（2020年）。[11] Munguia-Gonzalez，E.、Rego，S. 和 Freericks，J. K.，《通过确定波函数使压缩相干态具体化》，《美国物理学杂志》89，885–896（2021年）。[12] Lyu，X.、Daniel，C. 和 Freericks，J. K.，《氢原子的笛卡尔算符因式分解法》，《原子》10，14（2022年）。[13] Noonan，J. R.、ur Rehman Shah，M.、Xu，L. 和 Freericks，J. K.，《运用罗德里格公式的算符形式，在不使用微分方程的情况下计算波函数》，编写中。[14] Freericks，J.，《如何测量量子的动量》，《欧洲物理学杂志：专题》即将发表（2023年）。[15]《未来量子信息科学学习者的关键概念》（NSF研讨会报告）https://qis-learners.research.illinois.edu/（访问日期：2023年4月19日。）[16] 约尔丹，P. 和 玻恩，M.，[《初等量子力学》] Julius Springer出版社，柏林，德国（1930年）。[17] 狄拉克，P. A. M.，[《量子力学原理》] 牛津大学出版社，牛津，英格兰（1930年）。[18] 薛定谔，E.，《作为本征值问题的量子化（第二篇）》，《物理学年鉴》79，489–527（1926年）。[19] 福克，V.，《论氢原子理论》，《物理学杂志》98，145–154（1935年）。

[20] 薛定谔，E.，“通过因式分解求解特征值问题的进一步研究”，爱尔兰皇家科学院院刊 A 46，183–206（1940-41）。[21] 薛定谔，E.，“超几何方程的因式分解”，爱尔兰皇家科学院院刊 A 47，53–54（1941-42）。[22] Witten，E. “超对称性的动力学破缺”，Nucl. Phys. B 188，513–554（1981）。[23] Robinson，T. R.，[事物的量子本质：计数如何引向量子世界] CRC出版社，奥克森，英国（2023年）。[24] Green，H. S.，[矩阵力学],P. Noordhoff有限公司，格罗宁根，荷兰（1965）。[25] Ohanian，H. C.，[《量子力学原理》], 普伦蒂斯-霍尔公司，新泽西州恩格尔伍德克利夫斯（1990）。[26] Weitzman，M. 和 Freericks，J. K.，“无需导数计算球谐函数”，凝聚态物理 21，33002（2018）。[27] Rushka，M.、Esrick，M.、Mathews Jr.，W. N. 和 Freericks，J.K.，“将平移算符转换为平面极坐标和球坐标，并以与表象无关的方式将其用于确定量子力学波函数”，《数学物理学杂志》62，072102（2021）。[28] Trotter，H. F. ”关于算符半群的乘积”，《美国数学会会刊》10，545–551（1959）。[29] Marshman E. 和 Singh，C.，“高年级量子力学中的学生学习困难综述”，Phys. Rev. Spec. Top.—Phys. Educ. Res. 11，020117（2015）。[30] Wittmann，M. C.、Morgan，J. T. 和 Bao，L. “探讨学生对量子隧穿中能量损失的模型”，Eur. J. Phys. 26，939–950（2005）。[31] Emigh，P. J.、Passante，G. 和 Shaffer，P. S.，“学生对量子力学中时间依赖性的理解”，Phys. Rev. Spec. Top.—Phys. Educ. Res. 11，020112（2015）。[32] Singh，C.，“学生对量子力学的理解”，Am. J. Phys. 69，885–896（2001）。[33] Passante，G.、Emigh，P. J. 和 Shaffer，P. S. “考察本科和研究生阶段学生对量子态能量测量的看法”，Phys. Rev. Spec. Top.—Phys. Educ. Res. 11，020111（2015）。[34] Zhu，G. 和 Singh，C.，“提升学生对量子测量的理解。I. 学习困难的调查”，Phys. Rev. Spec. Top.—Phys. Educ. Res. 8，010117（2012）。[35] Zhu G. 和 Singh，C.，“提升学生对量子测量的理解。II. 基于研究的学习工具的开发”，Phys. Rev. Spec. Top.—Phys. Educ. Res. 8，010118（2012）。[36] Emigh，P. J.、Passante，G. 和 Shaffer，P. S.，“开发并评估量子力学辅导教程：时间依赖性与测量”，Phys. Rev. Spec. Top.—Phys. Educ. Res. 14，020128（2018）。[37] Pollock，S.、Passante，G.、Sadaghiani，H.，“用于量子力学教学的可调整型基于研究的材料”，Am. J. Phys. 91，40–47（2023年）。[38] Singh，C. “量子力学互动学习教程”，Am. J. Phys. 76，400（2008）。[39] Marshman，E. 和 Singh，C.，“旨在提升学生对涉及马赫-曾德尔干涉仪的单光子实验理解的互动辅导教程”，Eur. J. Phys. 37，024001（2016）。[40] Devore，S. 和 Singh，C.，“量子密钥分发互动学习教程”，Phys. Rev.: Phys. Educ. Res. 16，010126（2020年）。[41] McKagan，S. B.、Perkins，K. K.、Dubson，M.、Malley，C.、Reid，S.、LeMaster，R. 和 Wieman，C. E.，“用于量子力学教学的PhET仿真的开发与研究”，Am. J. Phys. 76，406–417（2008）。[42] Kohnle，A.、Cassettari，D.、Edwards，T. J.、Ferguson，C.、Gillies，A. D.、Hooley，C. A.、Korolkova，N.、Llama，J. 和 Sinclair，B. D.，“用于讲授量子力学概念的新型多媒体资源”，Am. J. Phys. 80，148–153（2012）。[43] Sadaghiani，H. R.，“自旋优先与位置优先：量子力学导论教学方法”，载于 [*2016* 物理教育研究会议论文集，第292-*295*], 页，编者：Jones，D. L.、Ding，L. 和 Traxler，A.，美国物理教师协会，马里兰州大学公园市（2016）。[44] Sadaghiani，H. R. 和 Pollock，S. J.，“量子力学概念评估：开发与验证研究”，Phys. Rev.: Phys. Educ. Res. 11，010110（2015）。[45] Zhu，G. 和 Singh，C.，“调查学生对一维空间中量子力学的理解”，Am. J. Phys. 80，252–259（2012）。

[46] Caballero, M. D.、Wilcox, B. R.、Doughty, L. 和 Pollock, S. J.，《高年级物理中学生对数学的使用：我们下一步该怎么做？》，《欧洲物理学杂志》36，065004（2015年）。[47] Tu, T.、Li, C.-F.、Zhou, Z.-Q. 和 Guo, G.-C.，《学生在量子力学中学习偏微分方程时遇到的困难》，《物理评论：物理教育研究》16，020163（2020年）。[48] Smith, E. M.、Zwolak, J. P. 和 Manogue, C. A.，《学生在复数方面的学习困难》，载于 [*2015*《物理教育研究会议论文集》，第375—*378*], 页，Churukian, A. D.、Jones, D. Y. 和 Ding, L. 编，美国物理教师协会，马里兰州大学公园市（2015年）。[49] Smith, E. M.、Zwolak, J. P. 和 Manogue, C. A.，《孤立式方法：中年级物理学生如何在复代数中协调形式与表征》，《物理评论：物理教育研究》15，010138（2019年）。[50] Wawro, M.、Watson, K. 和 Christensen, W.，《学生在量子力学中使用矩阵记号和狄拉克记号时的元表征能力》，《物理评论：物理教育研究》16，020112（2020年）。[51] Bouch´ee, T.、de Putter-Smits, L.、Thurlings, M. 和 Pepin, B.，《进一步理解普通物理学量子物理课程中的概念困难》，《科学教育研究》58（2），183—202（2022年）。[52] Warren, E. 和 Cooper, T. J.，《发展数学理解与抽象能力：小学阶段等价概念的案例》，《数学教育研究期刊》21（2），76—95（2009年）。[53] Freericks, J. K.、Vieira, L. B.、Cutler, D. 和 Kruse, A.，《向超过28,000名非科学专业人士教授量子力学》，《物理教师》57，326—329（2019年）。[54]Freericks, J. K.，《人人皆可学的量子力学》，由 edX 主办的大规模开放在线课程。https://www.edx.org/course/quantum-mechanics-for-（访问日期：2023年4月19日）；所有动画均可在 GitHub 获取：https://github.com/quantum-mechanics-for-everyone/simulations（访问日期：2023年4月19日）。[55] Evans, J.S.B.T. 和 Stanovich, K.E.，《高级认知的双加工理论》，《心理科学展望》8，5（2013年）。[56] Speirs, J. C、Stetzer, M. R.、Lindsey, B. A. 和 Kryjevskaia, M.，《利用推理与决策的双加工理论探索并支持物理学中的学生推理》，《物理评论：物理教育研究》17，020137（2021年）。[57] Dweck, C. S.，《成长型思维：成功的新心理学》，兰登书屋，纽约（2006年）。[58] Bloom, B. S.、Airasian, P. W.、Cruikshank, K. A¿、Mayer, R. E、Pintrich, P. R.、Raths, J. 和 Wittrock, M. C.，[《学习、教学与评估分类学：布鲁姆教育目标分类学修订版》], 由 Anderson, L. W.、Bloom, B. S. 和 Krathwohl, D. R. 编，艾迪生·韦斯利·朗文，纽约（2001年）。[59] Shavelson, R. J. 和 Huang, L.，《对高等教育中评估学习狂热的负责任回应》，《变革》35，10—19（2003年）。[60] McDermott, L.、Shaffer, P. 和华盛顿大学物理教育研究组，[《物理学导论教程》],培生教育公司，旧金山，加利福尼亚州（2002年）。[61] Griffiths, D. J. 和 Schroeter, D. F.，[《量子力学导论》], 3第3版，剑桥大学出版社，剑桥（2018年）。[62] Townsend, J. S.，[《量子力学的现代方法》], 2第2版，大学科学图书，米尔谷（2012年）。[63] McIntyre, D. H.、Monague, C. A. 和 Tate, J.，[《量子力学：范式方法》] 艾迪生-韦斯利，旧金山（2012年）。[64] Dirac, P. A. M.，[《量子力学原理》], 3第3版，牛津大学出版社，牛津，英格兰（1947年）。[65] Schiff, L. I.，[《量子力学》],麦格劳-希尔图书公司，纽约（1949年）。