arXiv:2305.00064v1 [cs.LO] 6 Apr 2023

Logipedia：形式化证明的多系统百科全书

Gilles Dowek 和 Fran¸cois Thir´e

´Inria 和巴黎萨克雷高等师范学院 LSV，威尔逊总统大道 61 号，
94235 卡尚 Cedex，法国 gilles.dowek@ens-paris-saclay.fr
francois.thire@lsv.fr

形式化证明库是我们数学遗产的重要组成部分，但其易用性和可持续性较差。事实上，每个证明库都专属于某个证明系统，有时甚至专属于该系统的某个版本。因此，在一个系统中开发的库通常无法在另一个系统中使用；而当该系统不再维护时，这个库也可能随之失传。长期以来，人们一直注意到，在一个系统中开发的证明无法在另一个系统中使用这一问题，并提出了一种补救方案：既然我们有经验证据表明，在某个系统中开发的大多数形式化证明也可以在另一个系统中开发，我们就可以开发一种标准语言，将这些证明翻译成这种语言，然后在所有支持该标准的系统中使用。

Logipedia (http://logipedia.science) 旨在构建这样一个在线多系统百科全书，收录以标准语言表述的形式化证明。它基于两个主要理念：使用逻辑框架和逆向数学。

逻辑框架 不同的证明系统，例如 Coq、 Matita、 HOL Light、 Is-abelle/HOL、 PVS... ...实现了不同逻辑形式体系的变体：构造演算、简单类型论、带谓词子类型的简单类型论.....经过数十年的研究，我们对这些形式体系之间的关系有了更深入的理解。但要构建一部形式化证明百科全书，我们还向前迈进了一步，将所有这些形式体系都表示为共同逻辑框架中的理论。

使用逻辑框架（例如谓词逻辑）来表达理论（例如几何和集合论）的想法可以追溯到希尔伯特和阿克曼，但也提出了其他几种逻辑框架，例如 λ-*Prolog*、*Isabelle*、 $\lambda\Pi$-演算、模理论演绎以及 $\lambda\Pi$-模理论演算 [3, 5], ，以解决谓词逻辑中的一些问题。我们采用了 $\lambda\Pi$-模理论演算，并在系统中实现 Dedukti [2]。与谓词逻辑相比，这个逻辑框架允许

- 绑定子（例如 λ-Prolog、Isabelle 和 $\lambda\Pi$-演算）
- 以 λ-项表示的证明（例如 $\lambda\Pi$-演算）
- 任意的定义等式／计算等式（例如模理论演绎）
- 任意的联结词和量词，尤其是建设性逻辑与经典逻辑的混合（例如合一逻辑 [6]）。

它可以用 8 条符号声明和 3 条重写规则表示简单类型论，也可以用 9 条符号声明和 4 条重写规则表示构造演算 [4]。

将 HOL Light 和 Matita 理论 D[HOLL] 与 D[Mat] 中实现的理论表述为 Dedukti 中的理论，可以在这些系统与这些理论之间双向转换其中构建的证明。

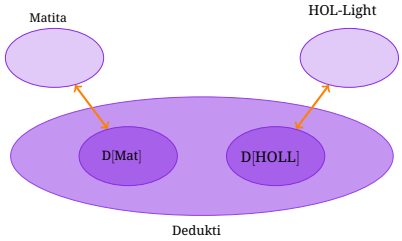

图 1：逻辑框架

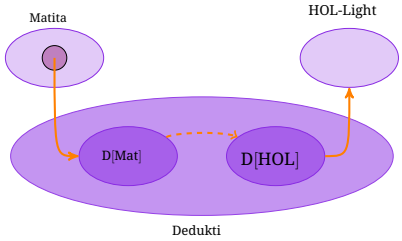

图 2：逆向数学

逆向数学 将不同形式体系表述为同一逻辑框架中的理论，有助于对它们进行比较。例如，比较 DEDUKTI [4] 中简单类型论与构造演算的表述，我们会发现二者只有三处差异：用于构造函数类型的符号 箭头 在构造演算中具有依赖性，蕴含 $\Rightarrow$ 也同样如此。构造演算还多了一个符号 π，用于构造将证明映射为项的函数类型，而简单类型论没有这个符号。因此，在 D[HOLL] 中表达的所有证明都可以转换为 D[Mat] 中的证明。

反过来，我们可以找出 D[Mat]，中一部分不依赖符号 arrow 和 $\Rightarrow$ 的依赖关系、也不使用符号 π 的证明，并将其转换为 D[HOLL]。组合这些转换后，我们得到一个将 MATITA 证明映射到 HOLLIGHT PROOFS 的部分函数。

与其将证明保存在 HOL LIGHT 或 MATITA 等不同的库中并使用转换器，不如构建一个像 LOGIPEDIA 这样的多系统百科全书，并在使用任一系统开发证明时直接使用其中的内容。

实证结果 作为概念验证，我们已将 MATITA [1] 的算术库（截至费马小定理，约 300 个引理）转换为 D[Mat] 。随后，我们又将其转换为 D[HOLL] ，并导出到 HOL LIGHT、ISABELLE/HOL、 COQ、 LEAN、 PVS，当然还有 MATITA。

这些证明可在 http://logipedia.science 获取。

参考文献

[1] Ali Assaf。《*logiques calculatoires d'ordre supérieur)* *A framework for defining computational higher-order logics. (Un cadre de définition de* 2015 》。

博士论文，法国帕莱索综合理工学院，。[2] Ali Assaf、Guillaume Burel、Rapha¨el Cauderlier、David Delahaye、Gilles Dowek、Catherine Dubois、Fr´ed´eric Gilbert、Pierre Halmagrand、Olivier Hermant 和 Ronan Saillard。Dedukti：基于模理论的 λ-Pi 演算的逻辑框架。已投稿发表。[3] Denis Cousineau 和 Gilles Dowek。在模理论的 λ-Pi 演算中嵌入纯类型系统。载于

Typed Lambda Calculi and Applications 8th International Conference TLCA 2007 Pro- ，、、、。[4] Gilles *ceedings* 2007
Dowek。将单个证明作为证明系统之间互操作性的基础进行分析。载于

Proceedings of the Fifth Workshop on Proof eXchange for Theorem Proving, PxTP 2017.，2017 年。[5] Bengt Nordstr ¨ ¨ *Handbook of* om、Kent

Logic in Computer Science 2000
Petersson 和 Jan M. Smith。Martin-Lof 的类型理论。载于。。[6] Luiz Carlos Pereira 和 Ricardo Rodriguez。Prawitz 的普世系统的命题片段的规范化、可靠性与完备性。 *Revista Portuguesa de Filosofia*，2017 年。