arXiv:2305.00065v1 [cs.LO] 8 Mar 2023

基于逻辑的相似性

CHRISTIAN ANTI´C

ABSTRACT. 本文从基础出发，仅使用一阶逻辑的初等概念，围绕基础性的模型论类型概念，构建一种 *qualitative* 且基于逻辑的相似性概念。

1. 引言

发现并利用看似相距甚远的对象之间的相似性，是类比推理的核心；而类比推理本身又是人工智能的核心，其应用任务丰富多样，包括证明数学定理、构建数学理论、常识推理、学习、语言习得和讲故事（例如，Boden，1998；Gust、Krumnack、K¨uhnberger 和 Schwering，2008；Hofstadter，2001；Hofstadter 和 Sander，2013；Krieger，2003；P´olya，1954；Winston，1980；Wos，1993）。

本文从基础出发，仅使用一阶逻辑的初等工具，围绕基础性的模型论类型概念，构建一种定性且基于逻辑的相似性概念。其核心思想是：如果两个元素（可能来自不同的论域）共享一组极大的抽象性质，那么它们就是相似的。

我们将表明，由此得到的相似性概念具有令人称道的数学性质（第3节）。具体而言，我们将在第一同构定理5和第二同构定理7中证明，相似性与同构相容；这与 Gentner（1983）著名的类比推理结构映射理论一致。

从更广泛的意义上说，本文是迈向类比推理数学理论的又一步（参见 Anti´c，2022、2023a、2023b、2023f、2023c、2023e）。

2. SIMILARITY

这是本文的主要部分。在这里，我们将从基本原理出发，引入一种基于著名的模型论类型概念的相似性概念。我们希望读者熟悉一阶逻辑，例如 Hinman（2005年）所述的一阶逻辑。

在本文余下部分，我们固定一个一阶语言 L，以及两个 L-结构 $\mathbb{A}$ 和$\mathbb{B}$。

请回忆，结构中一个元素的类型包含该元素的所有性质。因此，可以通过比较两个元素各自的类型，来比较来自不同结构的这两个元素。形式上， $\mathbb{A}$中的 a 的类型通常定义为

$$Type_{\mathbb{A}}(a) := \{\varphi(y) \mid \mathbb{A} \models \varphi(a)\}.$$

直观地说， a 的类型包含 a 在 $\mathbb{A}$中的所有抽象性质——从 a的角度来看，它在某种意义上就是 $\mathbb{A}$ 的理论。因此，我们可以将集合 $T(a,b) := Type_{\mathbb{A}}(a) \cap Type_{\mathbb{A}}(b)$解释为 a 和 b所共有的抽象性质集合。因此，我们预期 a 和 b的相似性会

随着 $T(a,b)$中公式数量的增加而提高，并且说当且仅当 $T(a,b)$达到最大值时， a和b相似，似乎是合理的。然而，这里存在三个问题。

首先，如果我们要求 $T(a,b)$ 相对于 a和 b 同时满足极大性条件，那么显然有 $T(a,b) \subseteq T(a,a)$，并且 $T(a,b) \subseteq T(b,b)$；在大多数情况下，这个包含关系是严格的，这意味着 a 和 b 相似，当且仅当 $a = b$ ，而这过于严格，因而没有实用性——因此，我们将极大性条件分开，分别称 $T(a,b)$ 在 $T(a,b')$、 $b' \in \mathbb{A}$ 中是极大的，以及在 $T(a',b)$、 $a' \in \mathbb{A}$ 中是极大的。

其次，由于我们始终有 $T(a,b) \subseteq T(a,a)$，因此会遇到与之前相同的问题——所以我们要求 $T(a,b)$ 相对于 b（除 a 外）满足极大性条件，并且相对于 a （除 b 外）达到极大。

第三，如果允许 a 和 b 的类型中出现任意公式，那么 $(y = a) \vee (y = b) \in T(a,b')$ 当且仅当 $b' = b$或 $b' = a$，并且 $(y = a) \vee (y = b) \in T(a',b)$ 当且仅当$a' = a$ 或 $a' = b$。这意味着，采用之前调整后的极大性条件时，a 和 b 再次相似当且仅当 $a = b$，这是我们不希望看到的。因此，我们限制类型中只能包含不含析取的公式（这也迫使我们限制否定的用法）。

这引出了以下定义。若一个 L-公式不含析取，且否定只出现在原子公式前以构成文字，我们就称它为合取的。我们用 $c\text{-}Fm_L$ 表示所有合取的 L-公式构成的集合。

下述定义是对上述模型论类型概念的调整，使其适用于合取公式。定义元素 $a \in \mathbb{A}$ 的合取 L-类型（或 c-类型）为

$$c\text{-}Type_{\mathbb{A}}(a) := \{\varphi(y) \in c\text{-}Fm_L \mid \mathbb{A} \models \varphi(a)\}.$$

现在，我们可以正式介绍本文的主要概念。给定 $a \in \mathbb{A}$ 和$b \in \mathbb{B}$，我们将相似关系定义为[1]

$$(\mathbb{A},\mathbb{B}) \models a \lesssim b \quad \text{iff} \quad c\text{-}Type_{\mathbb{A}}(a) \cap c\text{-}Type_{\mathbb{B}}(b) \text{ is } \subseteq\text{-}\textit{maximal} \text{ with respect to } b$$

除非 a ，此时 $a \in \mathbb{B}$.

我们定义

$$(\mathbb{A},\mathbb{B}) \models a \approx b \quad \text{iff} \quad (\mathbb{A},\mathbb{B}) \models a \lesssim b \quad \text{and} \quad (\mathbb{B},\mathbb{A}) \models b \lesssim a,$$

在这种情况下，我们称 a 和 b 在 $(\mathbb{A},\mathbb{B})$ 中相似。

我们将相似性从元素推广到代数，定义如下：

$\mathbb{A} \lesssim \mathbb{B}$ 当且仅当对于每个 $a \in \mathbb{A}$ ，都存在某个 $b \in \mathbb{B}$ ，使得 $(\mathbb{A},\mathbb{B}) \models a \approx b$,

并且

$$\mathbb{A} \approx \mathbb{B} \quad \text{iff} \quad \mathbb{A} \lesssim \mathbb{B} \quad \text{and} \quad \mathbb{B} \lesssim \mathbb{A}.$$

为方便起见，我们定义

$$c\text{-}Type_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(a \lesssim b) := c\text{-}Type_{\mathbb{A}}(a) \cap c\text{-}Type_{\mathbb{B}}(b),$$

并将该集合中的公式称为 $a \lesssim b$ 在 $(\mathbb{A},\mathbb{B})$ 中的理由。注意其对称性

$$c\text{-}Type_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(a \lesssim b) = c\text{-}Type_{(\mathbb{B},\mathbb{A})}(b \lesssim a).$$

当然，

$$c\text{-}Type_{\mathbb{A}}(a) \subseteq c\text{-}Type_{\mathbb{B}}(b) \quad \text{implies} \quad (\mathbb{A},\mathbb{B}) \models a \lesssim b. \tag{1}$$

[1]在本文其余部分中，我们将把“相对于 b，除 a 外，在情况 $a \in \mathbb{B}$ 下为 $\subseteq$-极大”简写为“ b-极大”。

and

$$c\text{-}Type_{\mathbb{A}}(a) = c\text{-}Type_{\mathbb{B}}(b) \quad \text{implies} \quad (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \models a \approx b.$$

特征性论证。一般而言，计算相似性的所有理由十分困难，幸运的是，在许多情况下可以省略这一步。

当且仅当 J是一个充分论证集时，我们称一组 J 理由为 $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 中 $a \lesssim b$ 的特征性论证集，也就是说，当且仅当

(1) $J \subseteq c\text{-}Type_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(a \lesssim b)$，且 (2) 对每个 $b' \neq a \in \mathbb{B}$，$J \subseteq c\text{-}Type_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(a \lesssim b')$ 蕴含 $b' = b$。

如果 $J = \{\varphi\}$ 是一个同时满足这两个条件的单元素集合，我们就称 φ 为 $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 中 $a \lesssim b$ 的特征性论证。

例 1。以从 0 开始的自然数 $\mathbb{N}$ 以及某个集合 B 的所有子集构成的集合 2^B 为例，并采用通常的运算。那么，认为 0 与空集 $\emptyset$ 相似是合理的。给定包含一个分别表示加法和并集的函数符号 $*$ 的联合语言 L，我们看到，合取公式

$$\varphi(y) :\equiv (\forall z)(z * y = z)$$

是相似性的一种特征性论证

$$(\mathbb{N}, 2^B) \models 0 \approx \emptyset \tag{2}$$

因为

$$\varphi \in c\text{-}Type_{(\mathbb{N},2^B)}(0, B') \quad \text{iff} \quad B' = \emptyset,$$

and

$$\varphi \in c\text{-}Type_{(\mathbb{N},2^B)}(a, \emptyset) \quad \text{iff} \quad a' = 0.$$

类似地，合取公式（这里 $\circledast$ 表示乘法和交集）

$$\psi(y) :\equiv (\forall z)(z \circledast y = y)$$

是（2）中相似性的另一种特征性论证。

3. Properties

本节将证明相似性的一些初等性质。

定理 2. 在单个结构中，相似关系是自反的、对称的，但通常不具有传递性。在一对结构中，自反性也可能不成立。

证明。对称性显然成立。

在单个结构中，自反性也显然成立。要否定一对结构 $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 中的自反性，只需找到元素 $a \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ 和 $b \in \mathbb{B}$，使得

$$c\text{-}Type_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(a \lesssim a) \subsetneq c\text{-}Type_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(a \lesssim b),$$

而且构造这样的反例并不困难。例如，在分别由 $\mathbb{A}$和 $\mathbb{B}$给出的两个结构中，

$$0 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} \cdots$$

and

$$1 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} \cdots$$

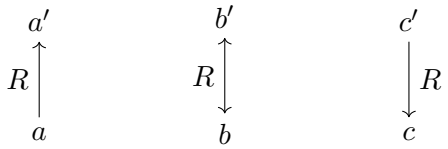
我们有

$$c\text{-}Type_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(1 \lesssim 1) \subsetneq c\text{-}Type_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(1 \lesssim 0)$$

这表明

$$(\mathbb{A},\mathbb{B}) \models 1 \lesssim 1.$$

为证明传递性不成立，考虑分别由下式给出的结构 $\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}$



不难验证

$$(\mathbb{A},\mathbb{B}) \models a \lesssim b \quad \text{and} \quad (\mathbb{B},\mathbb{C}) \models b \lesssim c \quad \text{whereas} \quad (\mathbb{A},\mathbb{C}) \models a \lesssim c$$

因为

$$c\text{-}Type_{(\mathbb{A},\mathbb{C})}(a \lesssim c) \subsetneq c\text{-}Type_{(\mathbb{A},\mathbb{C})}(a \lesssim c').$$

□

问题 3. 刻画相似关系具有自反性和传递性的那些结构。

4. Isomorphism Theorems

可以合理地预期，同构——即结构之间双射的保结构映射——与相似性相容。考虑以下简单示例。令 $\Sigma := \{a\}$ 为仅含一个字母 a 的字母表，并令 Σ^* 表示由 Σ 上所有字符串（包括空字符串 ε）组成的集合。对于每个 $n \geq 0$，我们可以将每个序列 $a^n = a \dots a$（n 个连续的 a）与非负整数 n 对应起来。因此，定义同构 $F\colon (\mathbb{N},+) \to (\Sigma^*,\cdot)$ 如下

$$F(0) := \varepsilon \quad \text{and} \quad F(n) := a^n, \quad n \geq 1.$$

我们预期以下相似性成立：

$$((\mathbb{N},+),(\Sigma^*,\cdot)) \models n \approx F(n), \quad \text{for all } n \geq 0.$$

以下第一同构定理 5 的内容表明，事实确实如此。

引理 4（同构引理）。对于任意同构 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$,

$$c\text{-}Type_{\mathbb{A}}(a) = c\text{-}Type_{\mathbb{B}}(F(a)), \quad \textit{for all } a \in \mathbb{A}.$$

证明。一个直接的结构归纳证明（参见 Hinman，2005年，引理 2.3.6） . □

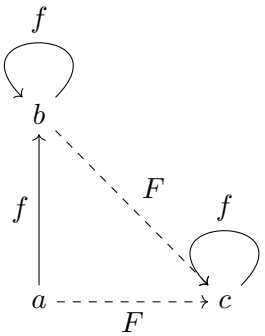
定理 5（第一同构定理）。对于任意同构 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$,

$$(\mathbb{A},\mathbb{B}) \models a \approx F(a), \quad \textit{for all } a \in \mathbb{A}.$$

证明。由同构引理 4 可直接得出。 □

下面的反例表明，相似性通常与同态不兼容。

例6. 设 $\mathbb{A}:=(\{a,b\},f)$ 和 $\mathbb{B}:=(\{c\},f)$ 定义如下



映射 $F\colon \mathbb{A}\to\mathbb{B}$ 显然是一个同态。然而，我们显然有

$$c\text{-}Type_{\mathbb{A}}(a)\cap c\text{-}Type_{\mathbb{B}}(c)\subsetneq c\text{-}Type_{\mathbb{A}}(b)\cap c\text{-}Type_{\mathbb{B}}(c)=c\text{-}Type_{\mathbb{B}}(c),$$

这表明

$$(\mathbb{B},\mathbb{A})\models F(a)\not\lesssim a$$

因此

$$(\mathbb{A},\mathbb{B})\models a\not\approx F(a).$$

定理7（第二同构定理）。对于任意同构 $F\colon \mathbb{A}\to\mathbb{C}$ 和 $G\colon\mathbb{B}\to\mathbb{D}$,

$$(\mathbb{A},\mathbb{B})\models a\approx b \quad\Leftrightarrow\quad (\mathbb{C},\mathbb{D})\models F(a)\approx G(b).$$

证明。直接推论是

$$c\text{-}Type_{\mathbb{A}}(a)=c\text{-}Type_{\mathbb{C}}(F(a)) \quad\text{and}\quad c\text{-}Type_{\mathbb{B}}(b)=c\text{-}Type_{\mathbb{D}}(F(b)).$$

□

5. Future work

未来研究的一个主要方向，是将本文的概念和结果从一阶逻辑推广到二阶逻辑和高阶逻辑（参见 Leivant，1994年）。

未来工作的另一个主要方向，是研究与实践相关的具体结构中的基于逻辑的相似性，例如计算语言学和自然语言处理中所研究的字符串。由于通常难以计算所有（特征性）理由和合取类型的集合，因此，首先通过在句法上限制理由的形式来研究我们框架的片段是合理的（参见第6.1节）。

6. Related work

关于相似性，已有大量文献，其中大多数探讨定量方法，即以某种方式对相似性进行数值测量；探讨字符串相似性的研究包括 Hirschberg (1975年) 以及 Egho、Raïssi、Calders、Jay 和 Napoli (2015年)。一个值得注意的例外是 Yao (2000年)，他通过“a 比 c 更像 b 像 d”这类陈述来解释对相似性的定性判断。Badra、Sedki 和 Ugon (2018年) 分析了定性相似性在类比迁移中的作用。

6.1. 基于泛化的相似性。上述相似性概念的一个重要片段见于 Anti´c (2023d)。为此，我们为每个 L-项 $s(\mathbf{z})$ 关联一个形如以下形式的 g-公式

$$\varphi_{s(\mathbf{z})}(y) :\equiv (\exists \mathbf{z})(y = s(\mathbf{z})).$$

我们用 $g\text{-}Fm_L$ 表示 L 上所有 g-公式的集合。注意，每个 g-公式都是合取公式，这意味着我们可以得到一种 g-相似性概念[2]

$$(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \models a \approx_g b$$

只需在相似性的定义中，将基于 g-公式的 $c\text{-}Type$ 替换为 $g\text{-}Type$ 即可。这与 Anti´c (2023d) 中基于泛化的相似性定义一致。

7. 结论

本文从基础出发，仅运用一阶逻辑的基本概念，并围绕类型这一基础概念，构建了一种基于定性逻辑的相似性概念。从更广泛的意义上说，本文是朝着建立类比推理的数学理论迈出的又一步。

References

Anti´c, C. (2022). 类比比例。《数学与人工智能年鉴》，90 (6), 595–644. Anti´c, C. (2023a). 类比比例 II：抽象论证。https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03879901/document。Anti´c, C. (2023b). 类比比例 III：一阶逻辑。https://hal.science/hal-04005139v1/document。Anti´c, C. (2023c). 布尔比例。https://arxiv.org/pdf/2109.00388.pdf。Anti´c, C. (2023d). 基于泛化的相似性。https://arxiv.org/pdf/2302.10096.pdf。Anti´c, C. (2023e). 单线性算术比例与词语比例。https://www.researchgate.net/publication/365851603_Monolinear_arithmetical_and_word_prop

Anti´c, C.（2023f）。《比例代数》。https://arxiv.org/pdf/2210.01751.pdf。Badra, F., Sedki, K., & Ugon, A.（2018）。论相似性在类比迁移中的作用。载于 Cox, M. T., Funk, P., & Begum, S.（编），ICCBR 2018，LNAI 11156，第499–514页。施普林格出版社。Boden, M. A.（1998）。创造力与人工智能。《人工智能》，103（1-2），347–356。Egho, E., Ra¨ıssi, C., Calders, T., Jay, N., & Napoli, A.（2015）。项集序列相似性的度量。《数据挖掘与知识发现》，29，732–764。Gentner, D.（1983）。结构映射：类比理论框架。《认知科学》，7（2），155–170。Gust, H., Krumnack, U., K¨uhnberger, K.-U., & Schwering, A.（2008）。类比推理：认知的核心。《人工智能》，22（1），8–12。Hinman, P. G.（2005）。《数学逻辑基础》。A K Peters，马萨诸塞州韦尔斯利。Hirschberg, D. S.（1975）。计算最长公共子序列的线性空间算法。《美国计算机协会通讯》，18（6），341–343。

[2]这个名称源于这样一种观察：我们可以将满足 $a = s(\mathbf{o})$ 的每个项 $s(\mathbf{z})$（其中某个 $\mathbf{o} \in \mathbb{A}^{|\mathbf{z}|}$）解释为 $\mathbb{A}$ 中 a 的 $generalization$。

Hofstadter, D.（2001）。类比是认知的核心。载于 Gentner, D., Holyoak, K. J., & Kokinov, B. K.（编），《类比思维：认知科学视角》，第499–538页。麻省理工学院出版社/Bradford Book，马萨诸塞州剑桥。Hofstadter, D., & Sander, E.（2013）。《表面与本质：类比——思维的燃料与火焰》。Basic Books，纽约。Krieger, M. H.（2003）。《做数学：惯例、主体、计算与类比》。世界科技出版公司，新泽西州。Leivant, D.（1994）。高阶逻辑。载于《人工智能与逻辑编程逻辑手册》，第2卷，第229–322页。P´olya, G.（1954）。《数学中的归纳与类比》，《数学与似真推理》第1卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州。Winston, P. H.（1980）。通过类比学习与推理。《美国计算机协会通讯》，23（12），689–703。Wos, L.（1993）。类比推理问题。《自动推理杂志》，10（3），421–422。Yao, Y.（2000）。定性相似性。载于 Suzuki, Y., Ovaska, S., Furuhashi, T., Roy, R., & Dote, Y.（编），《工业应用中的软计算》，第339–347页。施普林格出版社，伦敦。