arXiv:2305.00096v1 [math.GN] 28 Apr 2023

完全正则框架的无点部分

RICHARD N. BALL

谨以此文纪念 *Bernhard Banaschewski*，他是我们的启迪者与挚友。

摘要。（完全正则）局部格是（蒂赫诺夫）空间的推广；事实上，从局部格到其空间子局部格的过程，是一种广为人知的余反射。但局部格还具有同样重要的无点子局部格；适当地限制态射后，从局部格到其无点子局部格的过程也是一种余反射。我们的主要定理是，每个局部格都可以唯一表示为其无点部分和空间部分的次直积，其中投影也受到适当限制。随后，我们利用这一表示证明，任意局部格都由其点在无点部分中的位置（可如此描述）所决定。

1. 引言

无点拓扑的主要动机来自经典点集拓扑。用底层框架的术语来表述，这两个领域之间的联系是众所周知的函子 $\sigma\colon \mathbf{F} \to \mathbf{sF}$，它将每个（完全正则）框架 L 映射到其空间部分 σL。（这里，$\mathbf{F}$ 是由完全正则框架及其框架同态构成的范畴，而$\mathbf{sF}$ 是其空间框架的全子范畴，即每个元素都是其上方极大元之交的框架。）函子 σ 是一个满反射，而给定框架 L 的反射子是满射

$$\sigma_L\colon L \to \sigma L \equiv \left\{ b \in L : b = \bigwedge \uparrow b \uparrow_{\max L} \right\} = \left(b \mapsto \bigwedge \uparrow b \uparrow_{\max L} \right), \qquad b \in L.$$

无点一般拓扑方法的主要优势之一，在于其适用范围超越了空间情形，本文则展示了这种一般性的益处。我们称一个框架

日期：2023年4月28日。2020年 数学主题分类。主要分类 06D22；次要分类 54C45、54G12、54G10。关键词和短语。 完全正则框架、紧余反射、圆滤子。1

无点的框架是指没有极大元的框架。我们证明，每个框架 L都有一个无点部分 πL ，其作用大致上与其空间部分互为补元。我们需要将同态稍作限制，只考虑我们称为瘦的同态，并研究由具有瘦态射的框架构成的受限范畴**Fs**及其无点框架全子范畴**plFs**。（当定义域和陪域都是空间的时，瘦框架同态是指其带基点连续函数的纤维均为散乱集的同态。）在此背景下，函子 π: **Fs** $\to$ **plFs** 是一个满反射，而该框架的反射子 L是满射

$$\pi_L : L \to \pi L \equiv \{\, a \in L : \forall b > a \; \exists c \; (b > c > a) \,\} = \left(b \mapsto \bigwedge \uparrow b \uparrow_{\pi L} \right), \; b \in L.$$

尽管彼此不相交，两个子局部 σL 和 πL 并非互为补元。然而，合起来看，它们的反射子 σ_L 和 π_L 具有诊断作用：每个框架 L 都能唯一表示为其无点部分和空间部分的次直积，并配有适当受限的投影映射。这就是我们的主要定理 5.2.2。此表示的目标在此称为胖，它们构成了**Fs**的一个单反射子范畴；尽管我们希望进一步了解这些对象（参见问题 5.4.1），定理 6.3.3 对反射箭头给出了相当具体的描述。

因此，框架 L 由其空间部分与无点部分的相互作用决定，而这种相互作用受两个主要联系支配。第一个联系是箭头 $\lambda_L : \pi L \to \pi\sigma L$ ，它是将 π 函子作用于σ_L 箭头后诱导出来的。

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\sigma_L} & \sigma L \\ {\scriptstyle \pi_L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\sigma L}} \\ \pi L & \xrightarrow[\lambda_L]{} & \pi\sigma L \end{array}$$

我们将 λ_L 称为的连结（第 5.1 小节）。

框架的空间部分与无点部分之间的第二个主要联系，源于一个关键观察：框架 L 的每个极大元a 都与 πL 上的滤子 $y_a \equiv \left\{ b \in \pi L : b \not\leq a \right\}$ 相关联。这类滤子有两个关键特征：它们是圆整的，也就是说，对于每个 $b \in y_a$，都存在一个元素 $c \in y_a$ ，使得 $c \prec\!\!\prec b$，并且 $\bigvee_{y_a} b^* = \top$。我们称这类滤子为正则的，并证明，无点框架 E 上的每个正则滤子都可表示为某个框架 L 的 y_a ，其中该框架的无点部分为 E ，极大元为 a。此外，由不同极大元产生的滤子彼此独立，也就是说，它们都包含 πL 中的不交元素。我们将这一族称为

$\mathcal{W} \equiv \{\mathfrak{y}_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \in \max \mathrm{L}\}$这类滤子的集合，称为 L的空间支撑 L。结合 L 的无点部分， $\mathcal{W}$ 决定了无原子框架的胖反射（定理 6.3.3）。 $\mathcal{W}$ 还决定了 L 是否为空间的，即 σ_{L} 是否为同构（命题 7.1.2 ），以及 L 是否紧致（命题 7.1.4）。

在第 8 节中，我们讨论这样一种情形：空间支撑 $\mathcal{W}$ 的所有滤子都是极大真圆滤子。这一假设的显著优点是，它保证了从无点部分 E 和空间支撑 $\mathcal{W}$ 综合构造框架时，该框架具有完全正则性。然而，它也有一个缺点：无点部分可能比 E 更大，至少当 $\mathcal{W}$ 取为 E 上所有极大真圆滤子的整体时是如此。事实上，在后一种情形下，我们将在命题 8.1.5 中证明，综合构造得到的框架是 $\beta\mathrm{E}$，即 E 的紧余反射。这一事实促使我们在文末作一番补充讨论：我们将证明，在没有孤立点的紧致蒂赫诺夫空间中，存在一种就空间而言格外奇特的紧化（推论 8.3.6 和命题 8.3.1）。

2. 预备知识

为便于查阅并确定记号，我们在此记录支撑下文的少量背景结果。这些内容几乎全是众所周知的，初读时应跳过，之后仅在必要时查阅。

2.1. 裸框架、完全正则框架和见证族。 这些说明所处的背景是由完全正则框架及框架同态组成的范畴 **F** 。除非另有明确说明，所有框架均假定为完全正则框架，所有空间均假定为 Tychonoff 空间。有几个构造需要我们暂时进入范畴 **nF**，即不具备完全正则性假设的裸框架，随后再通过完全正则余反射返回**F** 。也就是说，我们首先构造一个裸框架，例如标记为 L'，然后提取其最大的完全正则子框架，例如标记为 L。

因此，某个特定的裸框架是否完全正则这一问题，在下文中起着重要作用。我们对这一重要概念的工作定义如下。谈到框架L的两个元素 $\mathfrak{a}_{\mathfrak{i}}$ 时，说 $\mathfrak{a}_1$ 完全位于下方 $\mathfrak{a}_2$ ，是指存在一个见证族 $\{\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}\}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathrm{L}$ ，使得对 Q 中所有 $\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$ 都有 $\mathfrak{a}_1 \leqslant \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} \prec \mathfrak{b}_{\mathfrak{q}} \leqslant \mathfrak{a}_2$ 。我们记作 $\mathfrak{a}_1 \prec\!\!\prec \mathfrak{a}_2$，并称 $\{\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}\}_{\mathbb{Q}}$ 为 $\mathfrak{a}_1 \prec\!\!\prec \mathfrak{a}_2$的见证族。

2.2. 核与前核算子。

记号（核算子记法）。我们使用以下关于核的记号约定。

- 我们用小写希腊字母表示框架上的核，通常以下标标出框架的名称，如 δ_L。
- 我们用带撇号的小写希腊字母表示框架上的前核算子，通常以下标标出框架的名称，如 δ'_L。相应的核则用去掉撇号的同一个希腊字母表示。参见引理 2.2.1。
- 我们将框架 δ 上的核 L 的核定义并记作 参见引理 2.2.3。

$$\ker \delta \equiv \{ a \in L : \delta(a) = \top \}.$$

- 对于框架 L上的核 δ，我们将其不动点集（亦即其子局部）记作

$$\operatorname{fix} \delta \equiv \{ a \in L : \delta(a) = a \}.$$

引理 2.2.1。对于框架 L 上的前核 δ'，对所有 $a \in L$ 以及所有序数 β 定义：

$$\begin{aligned}
\delta^\beta(a) &\equiv a, && \text{if } \beta = 0,\\
\delta^\beta(a) &\equiv \delta' \circ \delta^\alpha(a) && \text{if } \beta = \alpha + 1,\\
\delta^\beta(a) &\equiv \bigvee_{\alpha<\beta} \delta^\alpha(a) && \text{if } \beta \text{ is a limit ordinal,}\\
\delta(a) &\equiv \delta^\beta(a) && \text{for some (any) } \beta \text{ such that } \delta^\beta(a) = \delta^{\beta+1}(a).
\end{aligned}$$

那么，δ 是 L 上满足 不动点$\delta' =$ 不动点δ 的唯一核。

证明。参见 [16, III 11.5]。 □

引理 2.2.2。对于框架 L 上的滤子 F，映射

$$\delta'_F \colon L \to L \equiv \left(a \mapsto \bigvee_F (b \to a) \right), \qquad a \in L,$$

在 L 上充当前核。

证明。 显然，对于 $a \leqslant b$ 中的 L，$a \leqslant \delta'_F(a) \leqslant \delta'_F(b)$ 。而对于元素$a_i \in L$，我们有

$$\delta'_F(a_1 \wedge a_2) = \bigvee_F (b \to (a_1 \wedge a_2)) = \bigvee_F ((b \to a_1) \wedge (b \to a_2))$$
$$\geqslant \bigvee_F (a_1 \wedge (b \to a_2)) = a_1 \wedge \bigvee_F (b \to a_2) = a_1 \wedge \delta'_F(a_2). \qquad \square$$

定义 （正规滤子）。 框架 L 上的滤子 F 称为正规的，若$\delta_F(a) \in F$ 蕴含 $a \in F$ 对所有 $a \in L$ 都成立。这里， δ_F 是根据引理 2.2.1 与引理 2.2.2 的前核 δ'_F 相对应的核。

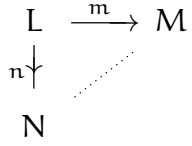
引理 2.2.3。 框架上的滤子是某个核的核，当且仅当它是正规的。具体而言，若 δ 是框架 L 上的一个核，则$\ker \delta$ 是正规滤子；若 F 是 L 上的正规滤子，则 δ_F 是 L 上满足$F = \ker \delta_F$的唯一核。

证明。 若 $F =$固定 δ，其中核为 δ，且 $\delta(a) \in F$，则 $\delta \circ \delta(a) = \top$；又由于$\delta$ 是幂等的，我们得到 $\delta(a) = \top$ 和 $a \in F$。另一方面，假设 F 是一个正规滤子， δ'_F 是如引理 2.2.2 中所述由它定义的前核，而 δ^α 是如引理 2.2.1 中所述由 δ'_F 定义的。于是，对于任意 $a \in F$，因为我们有

$$\delta_F(a) \geqslant \delta^1_F(a) = \delta'_F(a) = \bigvee_F (b \to a) = \top,$$

我们看到 $F \subseteq \ker \delta_F$。对于任意的 $a \in \ker \delta_F$，都有 $a \in F$，因为 $\delta_F(a) = \top \in F$ 且 F 是正规的。$\square$

引理 2.2.4。 设 m 和 n是定义域同为L的框架同态，并假设 m 是满射。那么 n 可经由 m 分解，当且仅当$m(a) = \top$ 蕴含 $n(a) = \top$ 对所有 $a \in L$成立。



证明。 考虑满足 $m(a_1) = m(a_2)$的元素 $a_i \in L$ 。找出一个子集 $B \subseteq L$ ，使得 $\bigvee B = a_1$，并且对于每个 $b \in B$ ，都有 $b \prec a_1$ ，这由另一个元素 c_b 见证，即 $c_b \vee a_1 = \top$ 和 $c_b \wedge b = \bot$。那么， $m(c_b \vee a_2) = m(c_b \vee a_1) = \top$ 这一事实意味着 $n(c_b) \vee n(a_2) = n(c_b \vee a_2) = \top$；结合 $n(c_b) \wedge n(b) = n(c_b \wedge b) = \bot$ 这一事实，可得 $n(b) \prec n(a_2)$。总而言之，我们有 $n(a_1) = n(\bigvee B) = \bigvee_B n(b) \leqslant n(a_2)$，而对称的论证给出 $n(a_2) \leqslant n(a_1)$。$\square$

引理 2.2.5。 设 $m\colon L \to M$ 是一个框架同态，并设 δ_L 和 δ_M 分别是 L 和 M 上的核。那么， m 可通过 δ_L 和 δ_M 下降，即存在唯一的映射 $\bar{m}$ 使得 $\delta_M \circ m = \bar{m} \circ \delta_L$，当且仅当 $m(\ker L) \subseteq \ker M$。

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{m} & M \\ {\scriptstyle \delta_L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta_M} \\ \operatorname{fix}\delta_L & \xrightarrow[\bar{m}]{} & \operatorname{fix}\delta_M \end{array}$$

证明。 这立即由引理 2.2.4 得出 □

2.3. **同余**。

记号 （同余记号）。 我们采用以下关于帧同余的记号约定。

- 我们用大写希腊字母表示框架 L上的同余，并将同余框架本身（即 L的组装）记为 $\operatorname{con} L$。
- **(Φ_a, o_a, O_a)** 我们将框架 L 中元素 a 所对应的开商同余记为

  $$\Phi_a \equiv \{(a_1, a_2) : a \wedge a_1 = a \wedge a_2\},$$

  以及由 $o_a\colon L \to L/\Phi_a$ 给出的商映射。我们将商帧 L/Φ_a 记作 O_a，并常将其与子局部 $\{a \to b : b \in L\}$ 等同；此时，我们也将映射 o_a 与其核 $(b \mapsto a \to b), b \in L$ （在值域上的限制）等同。
- 我们将框架 L 的元素 a 所对应的闭商同余记作

  $$\Psi_a \equiv \{(a_1, a_2) : a \vee a_1 = a \vee a_2\},$$

  以及由 $c_a\colon L \to L/\Psi_a$ 给出的商映射。我们将商帧 L/Ψ_a 记作 C_a，并常将其与子局部 $\uparrow a \uparrow \equiv \{b : b \geqslant a\}$ 等同；此时，我们也将映射 c_a 与其核 $(b \mapsto a \vee b), b \in L$（在值域上的限制）等同。
- 我们将框架 L 上的最粗稠密同余记作

  $$\Delta_L \equiv \{(a_1, a_2) : a_1^* = a_2^*\},$$

  以及由 $\delta_L\colon L \to L/\Delta_L \equiv \Delta L$ 给出的商映射。我们常将商与其子局部 $L^{**} \equiv \{a^{**}\}_L$ 等同，在这种情况下，我们也

将映射 δ_L 与其核 $(a \mapsto a^{**})$（或其值域限制）等同， $a \in L$。我们将该映射或其陪域称为 L 的骨架。

- 我们将框架满射 $m\colon L \to M$ 所对应的同余记作

$$\Theta_m \equiv \{(a_1, a_2) : m(a_1) = m(a_2)\}.$$

引理 2.3.1. 对于框架 L上的元素 $a \leqslant b$和同余 Ξ，

$$(a, b) \in \Xi \iff \Phi_a \wedge \Psi_b \leqslant \Xi.$$

特别是，

$$(a, \top) \in \Xi \iff \Phi_a \leqslant \Xi \quad \textit{and} \quad (\bot, b) \in \Xi \iff \Psi_a \leqslant \Xi.$$

引理 2.3.2. 对于任意框架满射 $m\colon L \to M$,

$$\Theta_m \geqslant \bigvee_{m^{-1}(\top)} \Phi_a \vee \bigvee_{m^{-1}(\bot)} \Psi_a.$$

证明。 如果 $a \in m^{-1}(\top)$ 且 $(a_1, a_2) \in \Phi_a$，那么

$$\begin{aligned} m(a_1) &= m(a_1) \wedge \top = m(a_1) \wedge m(a) = m(a_1 \wedge a) = m(a_2 \wedge a) \\ &= m(a_2) \wedge m(a) = m(a_2) \wedge \top = m(a_2). \end{aligned}$$ □

引理 2.3.3. 令 $m\colon L \to M$ 为框架满射。

(1) 映射

$$\begin{aligned} &m^{-1}\colon \operatorname{con} M \to \uparrow \Theta_m \uparrow_{\operatorname{con} L} \\ &= \left(\Delta \mapsto m^{-1}(\Delta) \equiv \{(a_1, a_2) : (m(a_1), m(a_2)) \in \Delta\}\right) \end{aligned}$$

是一个框架同构。

(2) 对于任意元素 $b \in M$, $m^{-1}(\Phi_b) = \Theta_m \vee \Phi_{m_*(b)}$。

证明。 (2) 为了证明 $\Theta_m \vee \Phi_{m_*(b)} \leqslant m^{-1}(\Phi_b)$, 首先注意，对于满足 $(a_1, a_2) \in \Theta_m$ 的元素$a_i \in L$， 我们有

$$\begin{aligned} m(a_1) = m(a_2) &\implies m(a_1) \wedge b = m(a_2) \wedge b \iff (m(a_1), m(a_2)) \in \Phi_b \\ &\iff (a_1, a_2) \in m^{-1}(\Phi_b). \end{aligned}$$

然后注意，对于任意元素 $a_i \in L$， 使得 $(a_1, a_2) \in \Phi_{m_*(b)}$， 我们也有

$$\begin{gathered} a_1 \wedge m_*(b) = a_2 \wedge m_*(b) \implies \\ m(a_1) \wedge b = m(a_1) \wedge m \circ m_*(b) = m(a_2) \wedge m \circ m_*(b) = m(a_2) \wedge b \\ \iff (m(a_1), m(a_2)) \in \Phi_b \iff (a_1, a_2) \in m^{-1}(\Phi_b). \end{gathered}$$

为证明 $\Theta_m \vee \Phi_{m_*(b)} \geqslant m^{-1}(\Phi_b)$，注意到对于任意一对满足 $(a_1, a_2) \in m^{-1}(\Phi_b)$ 的元素$a_i \in L$，都有

$$(m(a_1), m(a_2)) \in \Phi_b \iff m(a_1) \wedge b = m(a_2) \wedge b \implies$$
$$m_* \circ m(a_1) \wedge m_*(b) = m_* \circ m(a_2) \wedge m_*(b) \iff$$
$$(m_* \circ m(a_1), m_* \circ m(a_2)) \in \Phi_{m_*(b)}.$$

由于 $(a_i, m_* \circ m(a_i)) \in \Theta_m$，我们可以根据传递性得出 $(a_1, a_2) \in \Theta_m \vee \Phi_{m_*(b)}$。 □

2.4. 后继与前驱元、原子与极大元。

定义 （后继元、前驱元、 a^+、原子、极大元、$\max L$、无点框架、插值格）。在分配格 L 中讨论两个元素 a 和 c 时，若 $c > a$，且对于任意满足 $a \leqslant b \leqslant c$ 的元素 b， $b = a$ 或 $b = c$，我们称 c 是 a 的后继元，或称 a 是 c 的前驱元。我们将由 a 及其后继组成的集合记为

$$a^+ \equiv \{a\} \cup \{c : c \text{ is a successor of } a\}.$$

$\perp$ 的后继元称为 L的原子，而以 $\top$ 为后继元的元素称为极大元。我们将框架 L 的极大元集合记为

$$\max L \equiv \{a : a \text{ is maximal in } L\}.$$

框架 L 称为无点的，当且仅当 $\max L = \emptyset$。因此，“空框架” $\{\perp = \top\}$，即空空间的拓扑，是无点的；而二元素框架 $2 = \{\perp \neq \top\}$，即单点空间的拓扑，则不是。格L 称为插值的，当且仅当它没有后继或前驱元；也就是说，对所有元素 $a < c$，都存在一个元素 b 使得 $a < b < c$。

引理 2.4.1。 分配格L中的元素 a 和 b 满足以下性质。

(1) 映射

$$[a \wedge b, a] \ni c \longrightarrow c \vee b \quad \textit{and}$$
$$c \wedge a \longleftarrow c \in [b, a \vee b]$$

是互逆的格同构。

(2) $a \wedge b^+ \subseteq (a \wedge b)^+$。

证明。 (2) 考虑 b的一个后继元 c。由于

$$b \leqslant (a \wedge c) \vee b = (a \vee b) \wedge c \leqslant c,$$

$(a \wedge c) \vee b = b$ 或 $(a \vee b) \wedge c = c$。第一种可能性意味着$a \wedge c \leqslant b$，因此 $a \wedge c = a \wedge b$；第二种可能性意味着 $a \vee b \geqslant c$，因此根据第 (1) 部分， $a \wedge c$ 是 $a \wedge b$ 的一个后继元。无论哪种情况，我们都得到 $a \wedge c \in (a \wedge b)^{+}$。□

引理 2.4.2。 设 $m\colon L \to M$ 是一个框架同态。

（1）如果 b 是 M 中的素元（即交不可约元），那么 $m_*(b)$ 是 L 中的素元。（2）如果 m 是满射，那么 m_*(极大 M) $\subseteq$ 极大 L。（3）如果 m 是满射且 a 是 L 中的素元，那么 $m(a)$ 是 M 中的素元。

证明。 （3）设 a 是 L 的一个素元，满足 $m(a) < \top$，并考虑满足 $c_1 \wedge c_2 = m(a)$ 的元素 $c_i \in M$。令 $a_i \equiv m_*(c_i)$、 $i = 1$、2，并注意到

$$a_1 \wedge a_2 = m_*(c_1) \wedge m_*(c_2) = m_*(c_1 \wedge c_2) = m_* \circ m(a) \geqslant a$$

现在 a 在 L 中是极大的，因为 L 是正则的，所以 $m_* \circ m(a)$ 要么是 a，要么是 $\top$。后一种可能性因 $m \circ m_* \circ m(a) = m(a)$ 而被排除，因此有 $a_1 \wedge a_2 = a$。于是根据 a 的素性，要么 $a_1 \leqslant a$，要么 $a_2 \leqslant a$，从而 $m(a_1) \leqslant m(a)$ 或 $m(a_2) \leqslant m(a)$。但由于 m 是满射，$m(a_i) = m \circ m_*(c_i) = c_i$，所以要么 $c_1 \leqslant m(a)$，要么 $c_2 \leqslant m(a)$，即 $m(a)$ 是 M 中的素元。□

引理 2.4.3 说明了诸多内容，其中包括有补后继元如何从框架因子中的极大元素产生。

引理 2.4.3。 以下结论在框架 L 中成立。

(1) </style}元素是 的前驱元，当且仅当它是极大元；当且仅当它是素元且不等于 。(2) 框架的一个元素是原子，当且仅当它是某个极大元的补元。(3) 元素 a 是元素 b 的后继元，当且仅当 $a > b$ 且 $a \to b$ 是 L 的极大元。(4) 元素 b 是元素 a 的前驱元，当且仅当对于某个极大元 $c \not\geqslant a$，有 $b = a \wedge c$。(5) 若 $L = M \times N$ 且 a 是 M 的极大元，则 $(\top, \bot)$ 是 $(a, \bot)$ 的后继元，且 $(\top, \bot)$ 有补元 $(\bot, \top)$。在这种情况下，对于所有 $b \in N$, $(\top, b)$ 都是 (a, b) 的后继元。(6) L 中每个有补后继元都如 *(3)* 所示产生。也就是说，若 c 是 L 中 a 的后继元，且 c 有补，则映射

$$m\colon L \to {\downarrow}c{\downarrow} \times {\downarrow}c^{*}{\downarrow} = (b \mapsto (b \wedge c, b \wedge c^{*}))$$

is an isomorphism, and $\mathfrak{m}(c) = (c, \bot)$ *is a successor of* $\mathfrak{m}(a) = (a, \bot)$.

证明。 </style}假设 L 是正则的，这意味着 (1) 中极大性与素性等价。同样，对于 (2)，由于原子 $a \in L$ 是一组元素 A 的并，而这些元素都严格小于它，因此至少存在一个元素 $b \in A$，使得 $b > \bot$。这意味着 $b = a$；但更重要的是， a 严格小于自身，因此 a 有补。

(3) 如果 a 是 b 的后继元，那么 b 在 $\downarrow a \downarrow$ 中是极大元。由于映射 $\downarrow a \downarrow \to O_a = (c \mapsto a \to c)$ 是框架同构， $a \to b$ 在 O_a 中是极大元。因此，根据 (1)， $a \to b$ 是 O_a 中的素元；根据引理 2.4.2(1)， $o_{a*}(a \to b) = a \to b$ 是 L 中的素元。

另一方面，如果 $a > b$ 和 $a \to b \in$ 都是 L 的极大元，那么 $a \vee (a \to b) = \top$，因为 $a \not\leqslant a \to b$。因此，引理 2.4.1(1) 给出了区间 $[b, a]$ 与 $[a \to b, \top]$ 之间的同构，由此可知 a 是 b 的后继元。□

引理 2.4.4。 对于任意框架 L，$\max(\operatorname{con} L) = \{\Psi_b : b \in \max L\}$。因此，$\operatorname{con} L$ 的原子集合为 $\{\Phi_b\}_{\max L}$。

证明。 对于一个元素 $b \in \max L$，考虑一对 $(a_1, a_2) \notin \Psi_b$，使得$a_i \not\leqslant b \geqslant a_j$ 对于 $i \neq j$，设为 $a_1 \not\leqslant b \geqslant a_2$。那么，任何同时包含 Ψ_b 和 (a_1, a_2) 的同余都必须包含每一对 (a_3, a_4)。因为若 $(a_3, a_4) \notin \Psi_b$，设为 $a_3 \not\leqslant b \geqslant a_4$, ，那么 Ψ_b 同时包含 (a_1, a_3) 和 (a_2, a_4)，因此由对称性也包含(a_3, a_1)，最后由传递性包含 (a_3, a_4)。我们已经证明 $\Psi_b \in \max(\operatorname{con} L)$。

另一方面，假设 $\Xi \in \max(\operatorname{con} L)$。那么 L/Ξ 与$2 \equiv \{\bot, \top\}$同构；若 $q\colon L \to 2$是商映射，则 $b \equiv \bigvee q^{-1}(\bot) \in \max L$满足 $\Xi = \Psi_b$。引理的第二句话由第一句话结合引理 2.4.3(2)得出。□

引理 2.4.5。 框架 L 是无点的，当且仅当它是插值的。

证明。插值框架显然是无点的。而且，在任意框架 L 中，如果元素 $a < c$ 不存在满足 $a < b < c$ 的元素 b，那么 a 在 $\downarrow c \downarrow$ 中是极大的。又由于 $\downarrow c \downarrow \approx O_c = \{c \to b\}_L$，可知 $c \to a$ 在 O_c 中是极大的。因此，根据引理 2.4.2(1)， $o_{c*}(c \to a) = c \to a$ 在 L 中是极大的。□

2.5. 圆整滤子和正则滤子。

定义 （滤子、滤子的独立族、圆滤子、正则滤子、$\mathbf{rflt}\, L$、圆理想）。 框架 L 上的滤子是非空上集 $F \subseteq L$，它

在二元交运算下封闭。如果滤子不包含 $\bot$，则称其为真 滤子。如果滤子族中任意两个不同的滤子都包含不交元素，则称该滤子族独立 。如果对于每个元素 $a \in F$，都存在一个元素 $b \in F$ 使得 $b \prec\!\!\!\prec a$，则称滤子 F 为圆整滤子。圆理想的定义与此对偶。如果滤子 F 是圆滤子且 $\bigvee_F b^* = \top$，则称其为正则 滤子。我们用 $\mathbf{rflt}\, L$ 表示框架 L上的真正则滤子族。

记号 (x_a)。 我们用拉丁字母表末尾附近的小写字母（如 x、y、z）表示框架上的滤子。对于极大元 a，我们用下标表示滤子 $\{ b : b \not\leq a \}$，例如 x_a、y_a、 z_a。我们用字母表末尾附近的大写字母（如 W、X、Y、Z）表示框架上滤子的族。

引理 2.5.1 记录了关于圆滤子和正则滤子的基本信息。

引理 2.5.1. 以下结论对任意框架 L 都成立。

(1) 每个真圆滤子都包含于某个极大真圆滤子中。(2) 对于每个真滤子 $x \subseteq L$,

$$\mathring{x} \equiv \{ a \in x : \exists b \in x \, (b \prec\!\!\!\prec a) \}$$

是包含于 x 中的最大圆滤子。(3)真圆滤子 x 是极大的，当且仅当对于每个元素 $a \notin x$ 和每个元素 $b \prec\!\!\!\prec a$，都存在一个元素 $c \in x$ 使得 $b \wedge c = \bot$。(4) 不同的极大真圆滤子包含不交元素。因此，任意一族极大真圆滤子都是独立的。(5) 若 x 是极大真圆滤子，则 $\bigvee_x b^*$ 是 L 的素元。也就是说， x 要么是正则的，即 $\bigvee_x b^* = \top$，要么 $\bigvee_x b^* = a \in \max L$。在后一种情况下， $x = x_a$。(6) 若 $a \in \max L$，则 x_a 是一个极大真圆滤子，且满足 $\bigvee_{x_a} b^* = a$。(7) 对于任意 $a \in \max L$， x_a 是完全素的，即 $\bigvee A \in x_a$ 蕴含对于任意子集 $A \subseteq L$ 均有 $A \cap x_a \neq \emptyset$。(8) 真圆滤子是极大的，当且仅当它具有形式 $\mathring{y}$，其中 y 是 L 上的一个超滤子。(9) L 上的极大真圆滤子 x 具有如下形式的素性：

$$(a_i \prec\!\!\!\prec b_i \textit{ and } a_1 \vee a_2 \in x) \implies (b_1 \in x \textit{ or } b_2 \in x).$$

反过来，任何具有这种素性的真圆滤子都是极大的（在真圆滤子中）。

(10) 这些映射

$$x \longrightarrow \langle a^* : a \in x\rangle_{idl} \quad \textit{and}$$
$$\langle b^* : b \in I\rangle_{fltr} \longleftarrow I$$

构成了 L 上圆滤子集与圆理想集之间的反序双射。

证明。(3) 任何满足此条件的真圆滤子 x 显然都是极大圆滤子；如果真圆滤子 x 和元素 $a \notin x$ 违反此条件，即存在一个元素 $b \prec\!\!\prec a$，使得对于所有 $c \in x$，都有 $b \wedge c > \bot$，那么由 $x \cup \{b\}$ 生成的滤子 y 具有如下性质：$\mathring{y}$ 是一个真圆滤子，并且严格包含 x。

(4) 如果极大圆滤子 x_i 彼此不同，那么存在元素 $a_i \in x_i \setminus x_j$ 和元素 $b_i \in x_i$，使得 $b_i \prec\!\!\prec a_i$。根据 (3)，存在元素 $c_i \in x_i$，使得 $c_i \wedge b_j = \bot$。但是于是 $c_i \wedge b_i \in x_i$ 且 $(c_1 \wedge b_1) \wedge (c_2 \wedge b_2) = \bot$。

(5) 假设 x 是一个极大真圆滤子，并为论证起见，假设 $\bigvee_x b^* = a < c < \top$。我们断言 $c \notin x$；否则，存在一个元素 $b \in x$，使得 $b \prec\!\!\prec c$。但是，如果 d 是 $b \prec c$ 的见证，即如果 $b \wedge d = \bot$ 且 $c \vee d = \top$，那么我们就得到 $d \leqslant b^* \leqslant a \leqslant c$，从而导致矛盾 $c = c \vee d = \top$。

由于 $a < c$，存在一个元素 $d \prec\!\!\prec c$，使得 $d \nleq a,$；由此，上文第 (3) 部分得到一个元素 $b \in x$，使得 $b \wedge d = \bot$。这就导致矛盾 $d \leqslant b^* \leqslant a$。因此我们得出结论，$\bigvee_x b^*$ 是素元。

若 $b \in x$，则由于 x 是圆整的，存在一个元素 $c \in x$，使得 $c \prec b$。令 d 见证 $c \prec b$，即 $c \wedge d = \bot$ 且 $d \vee b = \top$，于是 $d \leqslant c^* \leqslant a$。那么 $b \nleq a,$，否则 $\top = d \vee b \leqslant a$，这与假设矛盾。另一方面，若 $b \notin x$，则每个元素 $c \prec\!\!\prec b$ 都与某个元素 $d \in x$ 不相交，因此 $c \leqslant d^* \leqslant a$。由此可得 $b = \bigvee\{c : c \prec\!\!\prec b\} \leqslant a$。

(6) 若 $a \in \max L$ 且 $b \in x_a$，那么由于对于 $C \equiv \{c : c \prec\!\!\prec b\}$ 有 $b = \bigvee C$，必然有 $C \cap x_a \neq \emptyset$；否则，$C \subseteq {\downarrow}a{\downarrow}$ 这一事实将导致矛盾 $b = \bigvee C \in {\downarrow}a{\downarrow}$。因此，$x_a$ 是圆整的。为证明 x_a 是包含于真圆滤子中的极大者，考虑元素 $d \prec\!\!\prec c \notin x_a$。于是 $c \leqslant a$，因此存在一个元素 b，它见证了 $d \prec a$，即 $b \wedge d = \bot$ 且 $b \vee a = \top$。那么 $b \nleq a,$；否则我们就会有 $a = b \vee a = \top$，

这与假设矛盾。也就是说， $b \in x_a$。现在由（5）可得 $\bigvee_{x_a} b^* = a$ 这一事实。

（7）如果对于某个子集 $A \subseteq L$ 和元素 $a \in \max L$，我们有 $\bigvee A = b \in x_a$，那么 $A \not\subseteq {\downarrow}a{\downarrow}$；否则 $b = \bigvee A \leqslant a$，这与假设矛盾。

（8）如果真圆滤子 x 是极大的，那么它就是包含它的任何滤子中所包含的最大的圆滤子。而且，如果对于某个超滤子 y（定义在 L 上）有 $x = \mathring{y}$，并且 $b \prec\!\!\prec a \notin x$，那么必然存在一个元素 b_1，使得 $b \prec\!\!\prec b_1 \prec\!\!\prec a$；根据（3），我们知道 b、$b_1 \notin y$。因此，根据 y 的极大性，b^*、$b_1^* \in y$；又由于 $b_1^* \prec\!\!\prec b^*$，根据（2）可得 $b^* \in x$。由（3）可知，x 在真圆滤子中是极大的。

(9) 设 x 是极大真圆滤子，y 是满足 $x = \mathring{y}$ 的超滤子，并假设 $a_i \prec\!\!\prec b_i$。若 $a_1 \vee a_2 \in x$，则 $a_1 \vee a_2 \in y$，因此 $a_1 \in y$ 或 $a_2 \in y$，从而 $b_1 \in \mathring{y} = x$ 或 $b_2 \in \mathring{y} = x$。

反过来，设真圆滤子 x 具有这种素性，并考虑带有见证族 $\{c_p\}_{\mathbb{Q}}$ 的元素 $b \prec\!\!\prec a \notin x$，其中 $b \prec\!\!\prec a$。取定 $\mathbb{Q}$ 中的 $p < q < r$。于是 $c_q^* \vee c_r = \top \in x$；又由于 $c_q^* \prec\!\!\prec c_p^*$ 带有见证族 $\{c_s^*\}_{p<s<q}$，且 $c_r \prec\!\!\prec a$ 带有见证族 $\{c_s\}_{r<s}$，由 x 的素性可得 $c_p^* \in x$ 或 $a \in x$，而后一条件根据假设不成立。因此，根据 (3)，我们得出 x 是极大真圆滤子。

(10) 这是由以下事实得出的：对于任意框架中的元素 a 和 b，$a \prec\!\!\prec b$ 当且仅当 $b^* \prec\!\!\prec a^*$。□

引理 2.5.1(5) 的一个直接推论将在下文中发挥重要作用。

推论 2.5.2. 无点框架上的极大真圆滤子是正则的。

引理 2.5.3. 设 $m\colon L \to M$ 是一个框架满射。

(1) 若 x 是 L 上的圆滤子，则 $m(x)$ 在 M上生成一个圆滤子。(2) 由 $m(x)$ 生成的滤子是真滤子，当且仅当 $m_*(\bot) \notin x$。(3) 若 x 是 L 上的极大真圆滤子，且 y 是包含 $m(x)$ 的 M 上的极大真圆滤子，则 $m^{-1}(y)^\circ = x$。(4) 若 x 是 L 上的正则滤子，且 m 是稠密的，则 $m(x)$ 是 M上的正则滤子。(5) 若对某个 $a \in$ 最大L 有 $x = x_a$，使得 $m(a) = \top$，且若 m 是稠密的，则 $m(x)$ 是 M上的正则滤子。

(6) （*(5)* 的逆命题）若 y 是框架 M 上的正则滤子，则存在一个框架 L，它允许一个稠密满射 $m\colon L \to M$，并且有一个极大元 $a \in \text{最大}\, L$，使得 $m(x_a) = y$ 且 $m(a) = \top$。

证明。 (4) 若 $\top > a \in M$，则 $\top > m_*(a) \in L$；由于 x 是正则的，因此存在一个元素 $b \in x$，使得 $b^* \not\leqslant m_*(a)$。由此可得 $m(b^*) \not\leqslant a$,；又由于 m 是稠密的，故 $m(b^*) = m(b)^*$。

(5) 考虑一个元素 $\top > c \in M$。则 $\top > m_*(c) \in L$，并且我们断言，对于某个 $b \in x_a$，有 $m_*(c) \not\geqslant b^*$。否则，由引理 2.5.1 的第 (5) 和第 (6) 部分可得 $m_*(c) \geqslant \bigvee_{x_a} b^* = a$，此时便有 $c = m \circ m_*(c) \geqslant m(a) = \top$，这与假设矛盾。和之前一样，由该断言可得 $m(b^*) \not\leqslant c$, ; 同样，和之前一样，$m(b^*) = m(b)^*$，因为 m 是稠密的。

(6) 这实质上就是 [2, 4.2.1] 的内容。不幸的是，按现有表述，该结果并不正确，因为正则滤子的定义中遗漏了圆整性这一关键假设。[1] 所幸，这个错误并未使该文章后续的结果失效；借助遗漏的圆整性假设，读者不难补出正确的证明。□

推论 2.5.4. 对于任意框架满射 $m\colon L \to M$，集合 $\{m(x_a)\}_{\max L}$ 是 M上的正则滤子独立族。

证明。 根据引理 2.5.1(4)，族 $\{x_a\}_{\max L}$ 是独立的。由于 m 是稠密的，$\{m(x_a)\}_{\max L}$ 也独立。□

3. 两个核

本节介绍并研究我们感兴趣的核。

3.1. 核 σ 与框架的空间部分。

引理 3.1.1. 在框架 L 上，映射

$$\sigma_L\colon L \to L \equiv \left(a \mapsto \bigwedge \uparrow a \uparrow_{\max L}\right)$$

是一个核，其不动点集为

$$\operatorname{fix} \sigma_L = \left\{ a : a = \bigwedge \uparrow a \uparrow_{\max L} \right\} \equiv \sigma L$$

和核

$$\ker \sigma_L = \{ a : \uparrow a \uparrow_{\max L} = \emptyset \}.$$

[1]证明中的错误出现在第二段，始于以“另一方面，显然..... ”开头的句子

证明。映射 σ_L 显然是递增且保序的；要验证它保持二元交，只需计算

$$\sigma_L(a_1) \wedge \sigma_L(a_2) = \bigwedge \uparrow a_1 \uparrow_{\max L} \wedge \bigwedge \uparrow a_2 \uparrow_{\max L} =$$
$$\bigwedge \left(\uparrow a_1 \uparrow_{\max L} \wedge \uparrow a_2 \uparrow_{\max L} \right) = \bigwedge \uparrow a_1 \wedge a_2 \uparrow_{\max L} = \sigma_L(a_1 \wedge a_2).$$

倒数第二个等式归因于极大元的素性。□

回忆一下，如果框架中的每个元素都是其上方极大元素的交，则称该框架为空间的。参见 [16, II 5.3]。

命题 3.1.2。 以下结论对任意框架 L 均成立。

(1) σL 是空间的。(2) L 是空间的，当且仅当 σ_L 是同构，当且仅当 $\ker \sigma_L = \{\top\}$ 当且仅当

$$\forall a < \top \exists b \in \max L \, (a \leqslant b).$$

(3) L 是无点的，当且仅当 σL 为空，即 $\sigma L = \{\top\}$。

证明。 核 σ_L 固定每个极大元，并且 L 中的每个极大元素仍是 σL 中的极大元。□

定义 （框架的空间部分，**sF**）。 对于框架 L，我们将映射 $\sigma_L \colon L \to \sigma L$ 或其陪域 σL 称为 L 的空间部分。 我们将由空间框架构成的 **F** 的全子范畴记作 **sF**。

引理 3.1.3。 任意框架同态 $m \colon L \to M$ 都可经由 σ_L 和 σ_M 分解，即存在唯一的框架同态 $\tilde{m}$，使得 $\sigma_m \circ m = \tilde{m} \circ \sigma_L$。

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{m} & M \\ {\scriptstyle \sigma_L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_M} \\ \sigma L & \xrightarrow[\tilde{m}]{} & \sigma M \end{array}.$$

证明。 根据引理 2.2.5，只需证明对于任意 $a \in$ ，若 $a \in \ker \sigma_L$，则 $m(a) \in \ker \sigma_M$。显然如此，因为若

$$m(a) \notin \ker \sigma_M = \{ b \in M : \uparrow b \uparrow_{\max M} = \emptyset \}$$

那就只能是因为 $m(a) \geqslant b$ 对某个 $b \in \max M$ 成立；此时 $m_*(b) \in \uparrow a \uparrow_{\max L}$，这与假设矛盾。□

命题 3.1.4。**sF** 是 **F** 中的满反射子范畴，而框架 L 的一个反射子是其空间部分 $\sigma_L \colon L \to \sigma L$。

证明。 这可由引理 3.1.3 直接得出。 □

3.2. 框架的核 π 与无点部分。

命题 3.2.1。在框架 L中，映射

$$\pi'_L(a) \equiv \bigvee a^+$$

是一个前核，其不动点集为

$$\pi L \equiv \{\, a : a \textit{ has no successor} \,\} = \{\, a : \forall c > a \; \exists b \; (a < b < c) \,\},$$

其核是由 $\max L$ 生成的正规滤子，即

$$\ker \pi_L = \{\, a : \forall b \geqslant a \; (b < \top \implies b \textit{ has a successor}) \,\}.$$

证明。 根据构造，映射 π'_L 是递增的。为证明 π'_L 保序，考虑 $a \leqslant b$ 属于 L。那么对每个 $c \in a^+$，由引理 2.4.1 可知， $c \leqslant b$ 或$b \vee c \in b^+$，因此

$$\pi'_L(a) = \bigvee a^+ \leqslant \bigvee b^+ = \pi'_L(b).$$

要验证 $\pi'_L(a \wedge b) \geqslant a \wedge \pi'_L(b)$，只需注意，由引理 2.4.1(2)，我们有

$$\pi'_L(a \wedge b) = \bigvee (a \wedge b)^+ \geqslant \bigvee (a \wedge b^+) = a \wedge \bigvee b^+ = a \wedge \pi'_L(b).$$

显然，$\max L \subseteq \ker \pi_L$，也就是说，对于每个 $a \in \max L$，都有 $\pi_L(a) = \top$；毕竟， $\top \in a^+$。这就证明了 $\delta_{\max L} \leqslant \pi_L$，其中 $\delta_{\max L}$表示与引理 2.2.1 和 2.2.2 中一样，对由 $\max L$生成的滤子所对应的核。我们断言，只要 c 是 a的后继元，就有 $\delta_{\max L}(a) \geqslant c$ 。因为在这种情况下，由引理 2.4.3(3)，$b \equiv c \to a \in \max L$ ，因此

$$\begin{aligned} \top = \delta_{\max L}(c \to a) &\leqslant \delta_{\max L}(c) \to \delta_{\max L}(a) \\ \implies c &\leqslant \delta_{\max L}(c) \leqslant \delta_{\max L}(a). \end{aligned}$$

该断言意味着 $\pi_L \leqslant \delta_{\max L}$。 □

$\ker \pi_L$ 由 L 的极大元生成这一事实（命题 3.2.1）意味着， π_L 的同余是 $\max L$中各元素的开同余之并。

推论 3.2.2。对于任意框架 L，

$$\Theta_{\pi_L} = \bigvee_{\max L} \Phi_a.$$

就子局部而言，

$$\pi L = \operatorname{fix} \pi_L = \bigcap_{\max L} O_a.$$

定义 （框架的无点部分）。 对于框架 L，我们将映射$\pi_L : L \to \pi L$ 或其陪域称为 L的无点部分。

框架的无点部分可以用其极大元来刻画。

命题 3.2.3。对于任意框架 L，

$$\pi L = \{ a : \forall c \, (a \leqslant c \in \max L \implies c \to a = a) \}.$$

证明。 假设 a 不属于右侧所示的集合，设 $a \leqslant c$对于某个 $c \in$ 满足 $\max L$ 且 $c \to a > a$。那么，由引理 2.4.3(3)， $c \to a$ 是 a的后继元，因为根据 c 的极大性， $(c \to a) \to a = c$ 。因此 $\pi_L(a) \geqslant c \to a > a$ ，所以 $a \notin \pi L$。另一方面，如果$a \notin \pi L$ ，那么 a 有一个后继元 c， $c \to a \in \max L$ （由引理 2.4.3(3)），且$(c \to a) \to a \geqslant c > a$。□

命题 3.2.3 可以改写为一个关于属于 πL 的一阶条件。

命题 3.2.4. 框架 L 中的元素 a 属于 πL ，当且仅当对于任意 $b > a$， $b \to a$ 都不是素元。也就是说， $a \in \pi L$ 当且仅当

$$\forall b > a \, \exists c_i \left(b \wedge c_1 \wedge c_2 \leqslant a \textit{ but } (b \wedge c_1 \not\leqslant a \textit{ and } b \wedge c_2 \not\leqslant a) \right).$$

记号 （有孔元，无孔元）。 我们约定，若框架 L 中的元素 a 在 L 中有一个后继元，则称其为有孔元 ；否则称其为无孔元。[2] 因此，元素 a 是有孔元，当且仅当它具有 $c \wedge b$ 的形式，其中 $b > a$ 且 $c \in \max L$。换句话说， a 是有孔元，当且仅当存在某个 $b > a$ ，使得 $b \to a \in \max L$。

3.3. **一个例子：无点实数** $\pi \mathcal{O}R$。 考虑实数的拓扑$\mathcal{O}R$，其骨架 $\delta \mathcal{O}R$ 是由 R 的正则开子集构成的完备无原子布尔代数。实数的一个开子集可唯一表示为互不相交的开区间之并；当且仅当其中任意两个区间都不相邻（即不共享端点）时，该集合才是无点的。一个熟悉的无点开集例子是康托尔集的补元。实数的无点子集构成一个子局部，它显然严格包含该骨架。

[2]Fred Dashiell（[11]）向作者提出了这个富有启发性的术语。

命题 3.3.1. $\pi\mathcal{OR}$ 是由生成元 $\{\overrightarrow{p},\overleftarrow{q}\}_{\mathbb{Q}}$ 及以下由有理数 $p,q\in\mathbb{Q}$索引的关系构成的框架。

(1) $\overrightarrow{p}\vee\overleftarrow{q}=\top$ 当 $p\leqslant q$ 时。(2) $\overrightarrow{p}\wedge\overleftarrow{q}=\bot$ 当 $p>q$ 时。(3) $\overrightarrow{p}=\bigvee_{p<q}\overrightarrow{q}$ 且 $\overleftarrow{q}=\bigvee_{p<q}\overleftarrow{p}$ 对所有 p 和 q成立。(4) $\bigwedge_{\mathbb{Q}}\overrightarrow{q}=\bot$ 且 $\bigvee_{\mathbb{Q}}\overleftarrow{p}=\top$。

实数局部（[16]）的经典表示与命题 3.3.1 中的表示仅有一个细微差别：在实数的表示中，第一条关系里的运算 6 被 $<$ 运算取代。然而，任何关于连接**F** 与**W** 的（无点）Yosida 伴随（[15]，[3]）存在无点对应物的猜想，都因以下观察而无法成立：框架上的无点实值局部函数族缺少（框架对应的）常值函数，尤其是缺少 0 函数。（这里**W** 是带有指定弱序单位的阿基米德格序群范畴。）耐人寻味的是，该函数族确实具有取反运算。

3.4. **将框架分解为散布部分与无原子部分**。 在经典拓扑学中，如果每个非空闭子集都包含一个孤立点，就称一个空间为散布的。我们将这一概念在框架中的对应概念作为定义，同时也承认，另一种定义是优秀参考文献 [17] 第九章对这一主题所作的详尽而严谨论述的出发点。另见 [7]。

定义 （散布框架、散布元、余散布元）。 如果框架L 中的每个元素 $a<\top$ 都有一个后继元，就称框架L 为散布的。框架 L 的元素 a称为散布的，如果 $\downarrow a\downarrow_L$（或 O_a）是散布框架；如果 $\uparrow a\uparrow_L$ （或 C_a）是散布框架，则称其为余散布的。

引理 3.4.1。 在任意满足 $e\equiv\pi_L(\bot)$ 的框架 L 中，以下结论成立：

(1) e 是 L的最大散布元，而 $o_e\colon L\to O_e$ 是 L的最大散布开商。(2) L 是散布的，当且仅当 $e=\top$；当且仅当 $\bot$ 是余散布的；当且仅当 L 的无点部分为空。(3) $e=\bot$ 当且仅当无点部分 πL是 L 的稠密商；当且仅当 L 是无原子的。

证明。 条件 $\pi L=\{\top\}$ 等价于条件 $\pi_L^*(\bot)=\top$，根据命题 3.2.1，也就是说，对于所有 $a<\top$，$\pi_L'(a)>a$。□

定义（框架的散布部分与无原子部分）。对于框架 L，令 $e \equiv \pi_L(\bot)$。我们将映射 $o_e\colon L \to O_e$ 或其陪域称为 L 的散布部分。我们将映射 $c_e\colon L \to C_e$ 或其陪域称为 L 的无原子部分。

定义 （框架的次直积）。 次直积是积的一个子对象，其投影态射均为满射。

命题 3.4.2. 每个框架都同构于其散布部分与无原子部分的次直积。其散布部分是一个开商，而其无原子部分是互补闭商。当且仅当无原子部分为空时，该框架是散布的；当且仅当散布部分为空时，该框架是无原子的。

证明。 我们有积映射 $o_e \times c_e\colon L \to O_e \times C_e$，它是单射，因为相应的同余 Φ_e 和 Ψ_e 是 $\operatorname{con} L$ 中的补元，因此它们的交是恒等同余。□

3.5. **将框架分解为其无点部分和空间部分**。

引理 3.5.1. 对于任意框架 L， $\sigma_L \wedge \pi_L = \bot_{\operatorname{con} L} = 1_L$。

证明。 我们通过归纳法证明：对于任意 $a \in L$ 和任意序数 α， $\sigma_L(a) \wedge \pi_L^\alpha(a) = a$。当 $\alpha = 0$ 时，显然 $\sigma_L(a) \wedge \pi_L^0(a) = \sigma_L(a) \wedge a = a$。假设该断言对所有序数 $\beta < \alpha$ 都成立。若 $\alpha = \beta + 1$，则

$$\sigma_L(a) \wedge \pi_L^\alpha(a) = \sigma_L(a) \wedge \pi_L' \circ \pi_L^\beta(a) = \sigma_L(a) \wedge \bigvee_{\pi_L^\beta(a)^+} c = \bigvee_{\pi_L^\beta(a)^+} (\sigma_L(a) \wedge c).$$

若 $c \in \pi_L^\beta(a)^+$，则要么 $c = \pi_L^\beta(a)$，要么 c 是 $\pi_L^\beta(a)$ 的后继元。第一种情况下，根据归纳假设， $\sigma_L(a) \wedge c = a$。第二种情况下，$b \equiv c \to \pi_L^\beta(a) \in \max L$，由引理 2.4.3(3)，又由于 $b \geqslant \pi_L^\beta(a) \geqslant a$，可得 $b \geqslant \bigwedge \uparrow a \uparrow_{\max L} = \sigma_L(a)$。因此 $\sigma_L(a) \wedge c \leqslant b \wedge c \leqslant \pi_L^\beta(a)$，所以根据归纳假设，我们得到 $\sigma_L(a) \wedge c \leqslant \sigma_L(a) \wedge \pi_L^\beta(a) = a$。该断言在极限序数处显然仍成立，故归纳完成。□

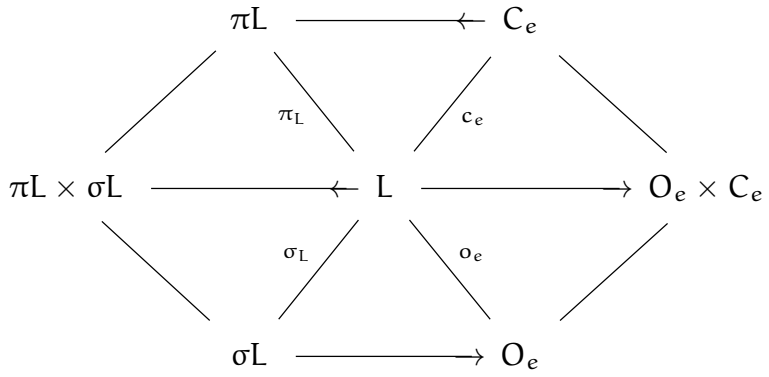
引理 3.5.1 证明了与框架的无点部分和空间部分相关联的同余彼此不相交，而引理 3.5.2 指出它们并非互为补元。

引理 3.5.2。 在任意框架中， L为空，而 $\pi\sigma L$ 不一定为空。换言之，对于所有 $a \in L$， $\sigma_L \circ \pi_L(a) = \top$，而对于所有 $a \in L$， $\pi_L \circ \sigma_L(a)$ 不一定是 $\top$。

命题 3.5.3。 每个框架都是其无点部分和空间部分的次直积（同构于次直积）。当且仅当其空间部分为空时，该框架是无点的；当且仅当其无点部分为空时，该框架是空间的。

证明。 这个次直积表示是由 σ_L 和 π_L 构成的积态射。根据引理 3.5.1，积映射是单射。□

命题 3.5.4。 对于任意满足 L 和 $e \equiv \pi_L(\bot)$ 的框架，我们在 **F** 中有如下交换图。



关于以 L 为一个顶点的两个方形，左边的方形展示了 L 分解为无点部分和空间部分（命题 *3.4.2*），右边的方形展示了 L 分解为散布部分与无原子部分（命题 *3.5.3*）。上方的箭头存在，是因为 C_e 是 πL 的闭包；下方的箭头存在，是因为 σ_L 是 L 的空间反射子，而 O_e 是空间的。

推论 3.5.5。 任意框架 L 的无点部分都同构于其无原子部分的无点部分。用符号表示，$\pi L \approx \pi C_e$。

证明。 πL 中的元素是 L 中在 L里没有后继元的元素，而 πC_e 则是 C_e 中在 C_e 里没有后继元的所有元素。由于$\pi L \subseteq \uparrow \pi_L(\bot) \uparrow = \uparrow e \uparrow = C_e$，这两个集合相同。□

我们回到第 5.2 小节中关于框架的次直积分解这一主题。

4. The 范畴 **Fs**

在第 3 节中，我们着重强调了框架的空间部分与无点部分之间的相似之处。但现在我们必须承认两者之间存在一个重要差异：框架的空间部分是反射子，

而无点部分不是。不过，通过限制框架同态，我们也可以使无点部分成为反射子。

4.1. **纤细帧同态**。

引理 4.1.1. 对于框架同态 $\mathfrak{m}\colon L \to M$，以下条件等价。

(1) $\mathfrak{m}$ 将 L的余散乱元素映射为 M的余散乱元素。(2) $\mathfrak{m}(\text{核}\,\pi_L) \subseteq \text{核}\,\pi_M$。(3) $\mathfrak{m}(\text{最大}\,L) \subseteq \text{核}\,\pi_M$，即对于所有 $a \in \text{最大}\ L$，$\pi_M \circ \mathfrak{m}(a) = \top$。(4) $\mathfrak{m}$ 经由 π_L 和 π_M分解，即存在唯一映射 $\bar{\mathfrak{m}}$ 使得 $\pi_M \circ \mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{m}} \circ \pi_L$。(5) $\mathfrak{m}$ 将 L 的无孔元映射为 M的无孔元。

证明。 (2)显然蕴含(3)，因为 $\max L \subseteq \ker\ \pi_L$；而(3)蕴含(2)，因为 $\mathfrak{m}^{-1}(\ker\ \pi_M)$是一个包含 $\max L$的正规滤子，且 $\ker\ \pi_L$是由 $\max L$生成的正规滤子。(2)与(4)等价，这是引理 2.2.5 的一个应用。□

定义 （瘦框架同态，瘦连续函数）。 我们将满足引理 4.1.1 条件的框架同态 $\mathfrak{m}\colon L \to M$ 称为瘦的。瘦框架同态在空间方面的对应概念，是逆映射保持闭散乱子集的连续函数；等价地说，是具有散乱纤维的连续函数。我们将这类函数称为瘦函数。

定义 （**Fs**，**plFs**）。 范畴**Fs** 的对象是框架，态射是瘦框架同态。全子范畴 **plFs** 由无点框架构成。

推论 4.1.2 证明，**Fs** 是一个合法的范畴，且**plFs** 是其满反射子范畴。

推论 4.1.2。 (1) 框架同构是瘦的。(2) 框架满射是瘦的。(3) 瘦框架同态的复合仍是瘦的。(4) 若 e 是框架满射，且 $\mathfrak{m}$ 是框架同态，并且$\mathfrak{m} \circ e$ 是瘦的，则 $\mathfrak{m}$ 是瘦的。(5) **plFs** 在**Fs**中是满反射的。

证明。 (2) 成立，因为引理 2.4.2(3) 告诉我们，框架满射满足引理 4.1.1(3)。(3) 成立，因为引理 4.1.1 的第三条性质

在复合下显然保持不变。为验证 (4)，考虑框架态射 $e\colon L \to K$ 和 $m\colon K \to M$，其中 $m \circ e$ 是瘦的，e 是满射。若 a 是 K 的极大元，则根据引理 2.2.5(2)，$e_*(a) \equiv b$ 是 L 的极大元，并且 $m(b) = a$。由于 $m \circ e$ 是瘦的，我们得到 $\pi_M \circ m(a) = \pi_M \circ e(b) = \top$。(5) 是引理 4.1.1(4) 的推论。□

命题 3.5.4 的图存在于 **Fs** 中。

命题 4.1.3。 命题 *3.5.4* 的图中的所有映射都是瘦的。

证明。对角箭头因其为满射而是瘦的。根据推论 4.1.2(4)，顶端和底端的箭头是瘦的。可以证明，箭头 $L \to \pi L \times \sigma L$ 和 $L \to O_e \times C_e$ 均在极大元上诱导双射，因此二者都是瘦的。□

4.2. Fs 的因子分解结构。

引理 4.2.1。 对于框架满射 $e\colon L \to M$，以下各项等价。上确界取自 $\operatorname{con} L$。

(1) $\Theta_e \leqslant \bigvee \{ \Phi_a : a \in e^{-1}(\top) \cap (\text{最大值 } L) \}$.
(2) $\Theta_e = \bigvee \{ \Phi_a : a \in e^{-1}(\top) \cap (\text{最大值 } L) \}$.
(3) Θ_e 是原子的并。

证明。 (1) 与 (2) 等价是 2.3.2 的推论，而 (2) 与 (3) 等价则由引理 2.4.4 得出。□

定义 ($\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$). 设 $\mathfrak{E}$ 为满足引理 4.2.1 条件的 **Fs**-满射类。设 $\mathfrak{M}$ 为所有 **Fs**-源 $(L \xrightarrow{m_i} M_i)_I$ 的类，使得对于每个 $a \in \max L$，都存在一个指标 $i \in I$，使得 $m_i(a) < \top$。

命题 4.2.2. Fs 具有源的 $(\mathfrak{E}, \mathfrak{M})$-分解。

证明。 考虑 **Fs** 中的一个源 $S \equiv (L \xrightarrow{m_i} M_i)_I$。令

$$P \equiv \left\{ a \in \max L : \forall i \in I \left(m_i(a) = \top \right) \right\},$$

令 $\Xi \equiv \bigvee_P \Phi_a$，并将商映射记为 $e\colon L \to L/\Xi \equiv L$。根据推论 4.1.2(2)，映射 e 是瘦的。注意，对每个 $a \in P$，都有 $e(a) = \top$，因为 $(a, \top) \in \Phi_a$，这是因为 $a \wedge a = a \wedge \top$ 且 $\Phi_a \subseteq \Xi$。由此可得 $e \in \mathfrak{E}$。注意，对任意 $a \in P$ 和 $i \in I$，都有 $\Phi_a \subseteq \Theta_{m_i}$；因为若 $(a_1, a_2) \in \Phi_a$，则 $a_1 \wedge a = a_2 \wedge a$，而由于 $m_i(a) = \top$，我们得到

$$m_i(a_1) = m_i(a_1) \wedge m_i(a) = m_i(a_i \wedge a) = m_i(a_2 \wedge a) = m_i(a_2).$$

由此可得 $\Xi \subseteq \Theta_{m_i}$，因此 m_i 可经由 e分解，即 $m_i = \hat{}m_i \circ e$。根据推论 4.1.2(4)，映射 $\hat{}m_i$ 是瘦的。

最后，我们断言分解源 $\widehat{\mathcal{S}} \equiv (\widehat{L} \xrightarrow{\hat{}m_i} M_i)_I$ 属于 $\mathfrak{M}$。因为如果 c 是 L 的一个极大元，那么 $b \equiv e_*(c)$ 就是L 的一个极大元，且满足 $(b, \top) \notin \Xi = \bigvee_P \Phi_a$。特别地，$b \notin P$，否则$(b, \top) \in \Phi_b \subseteq \bigvee_P \Phi_a = \Xi$, 这与假设矛盾。因此，存在某个指标 $i \in I$ 使得 $m_i(b) < \top$，由此得到 $\top > m_i(b) = \hat{}m_i \circ e(b) = \hat{}m_i(c)$。这就证明了该断言和命题。□

命题 4.2.3。**Fs** 具有源的 $(\mathfrak{E}, \mathfrak{M})$-对角化性质 *s.*

证明。 考虑 **Fs** 中的一个交换方块，其中有 $e \in \mathfrak{E}$ 和 $(K \xrightarrow{m_i} M_i)_I \in \mathfrak{M}$。

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{e} & N \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \overset{d}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle n_i} \\ K & \xrightarrow[m_i]{} & M_i \end{array}$$

我们断言 $P \equiv e^{-1}(\top) \cap (\max L) \subseteq f^{-1}(\top)$。事实上，若对某个$a \in e^{-1}(\top) \cap (\max L)$有 $f(a) < \top$，那么根据引理 4.1.1(3)，由于 $f(a) \in \ker \pi_K$，必定存在一个元素 $b \in \max K$ 使得 $b \geqslant f(a)$。由于 $(K \xrightarrow{m_i} M_i)_I \in \mathfrak{M}$，必定存在一个指标 $i \in I$，使得 $m_i(b) < \top$ 属于 M_i，这就导致矛盾

$$\top > m_i(b) \geqslant m_i \circ f(a) = n_i \circ e(a) = n_i(\top) = \top.$$

该断言表明

$$\begin{aligned} \Theta_e &= \bigvee \{ \Phi_a : a \in e^{-1}(\top) \cap (\max L) \} \\ &\subseteq \bigvee \{ \Phi_a : a \in f^{-1}(\top) \cap (\max L) \} \subseteq \Theta_f, \end{aligned}$$

因此，对角函数 d 由引理 2.2.4 保证存在。根据推论 4.1.2(4)，该映射是瘦的。□

命题 4.2.4. Fs 是一个 $(\mathfrak{E}, \mathfrak{M})$-范畴。

证明。 命题4.2.2 和 4.2.3 表明，**Fs** 具备 [1] 中定义 15.1 所要求的性质。□

4.3. **再看 Fs 中的无点反射**。$(\mathfrak{E}, \mathfrak{M})$-因子分解结构使我们能够深化对 **plFs** 作为 **Fs** 的满反射子范畴的理解（推论 4.1.2(5)）。定理 4.3.3 表明，它实际上是一个 $\mathfrak{E}$-反射子范畴，而这一区别将在第 5.2 小节中变得重要。

无点性有几种令人满意的刻画方式，它们以 $\mathfrak{E}$-态射和 $\mathfrak{M}$-态射为基础。

引理 4.3.1。 对于框架 M，以下各项等价。

(1) 从 M 出发的每个框架同态的陪域都是无点的。(2) 进入 M 的每个 $\mathfrak{M}$-态射的定义域都是无点的。(3) 从 M 出发的每个 $\mathfrak{E}$-态射都是同构。(4) M 是无点的。

证明。 如果 M 不是无点的，那么恒等态射同时属于 $\mathfrak{E}$ 和 $\mathfrak{M}$，且其定义域和陪域都是 M。因此，(1) 和 (2) 中的每一项都蕴含 (4)。所以设 M 是无点的。于是 (2) 必然成立，因为如果 $\mathfrak{m}\colon L \to M$ 是一个 $\mathfrak{M}$-态射，那么任意元素 $a \in \max L$ 都会映射到 M 中的一个元素 $\mathfrak{m}(a) < \top$，而由于 $\mathfrak{m}$ 是瘦的，我们将有 $\pi_M \circ \mathfrak{m}(a) = \top$。这是不可能的，因为无点核 π_M 在 M 上充当恒等映射。而且 (1) 也必然成立，因为如果 $\mathfrak{m}\colon M \to L$ 是一个框架同态，那么任意元素 $a \in \max L$ 都会产生元素 $\mathfrak{m}_*(a) \in \max M$，这与假设矛盾。

若 (3) 成立，则 M 与 πM 同构，因此是无点的。若 M 是无点的，且 $\mathfrak{n}\colon M \to N$ 是一个 $\mathfrak{E}$-态射，那么 $\mathfrak{n}$ 按定义是满射，因此也必定是单射，因为 $\Theta_{\mathfrak{n}} \leqslant \bigvee_{\text{极大 } M} \Phi_b = \bot_{\mathrm{con}\, M} = 1_M$。□

引理 4.3.2. plFs 在构造 $\mathfrak{M}$-源时封闭。

证明。 考虑 **Fs** 中的一个源 $\mathcal{S} \equiv (L \xrightarrow{\mathfrak{m}_i} M_i)_I$，其中所有 M_i 都是无点的。若 a 是 L 的极大元，那么由于 $\mathcal{S} \in \mathfrak{M}$，必定存在一个指标 $i \in I$，使得 $\mathfrak{m}_i(a) < \top$。由于 $\mathfrak{m}_i$ 是瘦的，必定存在一个位于 $\mathfrak{m}(a)$ 之上的极大 $c \in L$，这与我们关于 M_i 是无点的假设矛盾。由此可知， L 中不存在极大元。□

定理 4.3.3. plFs 是 $\mathfrak{E}$-反射于 **Fs**。

证明。 这是 [1, 16的一个实例。1]。 □

命题 4.3.4. 一个**Fs**-同态 $\mathfrak{m}\colon L \to M$ 与 π_L 同构，当且仅当 $\mathfrak{m} \in \mathfrak{E}$ 且 M 无点。

证明. 如果 M 无点，那么 m 可经由无点反射子 π_L 分解，记作 $m = k \circ \pi_L$。

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{m} & M \\ {\scriptstyle \pi_L}\downarrow & \swarrow_{l} & \\ \pi L & \swarrow_{k} & \end{array}$$

另一方面，由引理 2.2.4，我们断言 π_L 可经由 m 分解。因为若对于某个 $a \in L$ 有 $m(a) = \top$，那么由于 $m \in \mathfrak{E}$，我们有

$$(a, \top) \in \bigvee \{ \Phi_c : c \in \max L \text{ and } m(c) = \top \} \subseteq \bigvee_{\max L} \Phi_c$$
$$= \{ (a_1, a_2) : \pi_L(a_1) = \pi_L(a_2) \}.$$

（最后一个等式由命题 3.1.4 得出。）由此可知 $\pi_L(a) = \pi_L(\top) = \top$，因此引理 2.2.4 给出一个同态$l\colon M \to \pi L$，使得 $l \circ m = \pi_L$。由于 m 和 π_L 都是满射，k 和 l 在各自的性质下都是唯一的，因此它们互为逆同构。□

推论 4.3.5. 命题 *3.5.4* 的图中的顶部箭头是 C_e的无点反射子。

证明。 关于箭头 $C_e \to \pi L$是一个 $\mathfrak{E}$-态射的例行验证，留给读者完成。□

4.4. **再看空间反射**。$(\mathfrak{E}, \mathfrak{M})$-分解结构也使我们能够进一步理解**sF**在**F**中的反射，因为它在**Fs**中表现为一个 $\mathfrak{M}$-反射。

定义（sFs）。我们用**sFs**表示**Fs** 中由空间框架构成的全子范畴。

命题 4.4.1。范畴**sFs** 在**Fs**中是 $\mathfrak{M}$反射的。事实上，框架 L 的**sF**-反射子 $\sigma_L\colon L \to \sigma L$ 是一个 $\mathfrak{M}$-满射，并充当其**sFs**-反射子。

证明。由于核 σ_L 固定极大元，它显然是纤细的，也是一个 $\mathfrak{M}$-态射。为检验反射性质，考虑一个陪域为空间的纤细框架同态 m M，并令 $m = l \circ \sigma_L$ 为其由命题 3.1.4 给出的分解。根据推论 4.1.2(4)， l 必定是纤细的。□

命题 4.4.2。框架同态 $n\colon L \to N$ 与 σ_L 同构，当且仅当 n 是一个 $\mathfrak{M}$-满射且 N 是空间的。

证明。 若 N 是空间的，则它经由空间反射子 σ_L分解，例如 $n = k \circ \sigma_L$。

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{n} & N \\ {\scriptstyle \sigma_L}\downarrow & \nearrow_{k} & \\ \sigma L & & \end{array}$$

映射 k 是满射，因为 n 是；要证明它也是单射，只需确立断言：唯一满足 $k(a) = \top$ 为 $a = \top$的元素 $a \in \sigma L$ 。为此，考虑满足$k(a) = \top$的元素 $a \in L$ ，并姑且假设 $k(a) < \top$。由于σL 是空间的，必定存在元素 $b \in \max \sigma L$ ，使得 $b \geqslant a$，因此$k(b) = \top$。但此时 $c \equiv \sigma_{L*}(b) \in \max L$ 具有如下性质： $n(c) < \top$，因为 $n \in \mathfrak{M}$。鉴于

$$\top > n(c) = k \circ \sigma_L(c) = k \circ \sigma_l \circ \sigma_{L*}(b) = k(b) = \top,$$

我们得到了矛盾，从而证明了该断言。 □

5. 无点反射与空间反射的结合

在本节中，我们讨论框架的无点部分和空间部分之间的相互作用。这两个部分由一个函数联系在一起，该函数将在下文中发挥重要作用。

5.1. 联系框架无点部分和空间部分的连结。

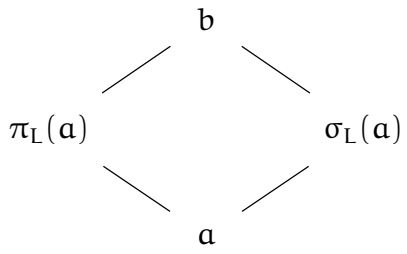
定义 （连结 $\lambda_L\colon \pi L \to \pi\sigma L$）。 由定理 4.3.3 可立即推出，对于任意框架 L ，都存在唯一的框架满射 λ_L ，使得 $\lambda_L \circ \pi_L = \pi_{\sigma L} \circ \sigma_L$。

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\sigma_L} & \sigma L \\ {\scriptstyle \pi_L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\sigma L}} \\ \pi L & \xrightarrow[\lambda_L]{} & \pi\sigma L \end{array}$$

我们将此映射称为 L的无点结合映射。

在给定的框架 L 中，存在三个子局部 πL、 σL和 $\pi\sigma L$。引理 5.1.1 展示了三个相应的核作用于任意框架元素时的情形。这一图示揭示了框架某些子区间之间的同构关系。

引理 5.1.1。 对于框架 L的一个元素 a，设 $b \equiv \lambda_L \circ \pi_L(a) = \pi_{\sigma L} \circ \sigma_L(a)$。



于是 $[a, \pi_L(a)]_L \approx [\sigma_L(a), b]_L$ 和 $[a, \sigma_L(a)]_L \approx [\pi_L(a), b]_L$。

证明。 鉴于引理 3.5.1 得出 $\pi_L(a) \wedge \sigma_L(a) = a$，这正是引理 2.4.1(1) 的一个应用。□

5.2. **框架的子直 $(\mathfrak{E}, \mathfrak{M})$-积分解**。

定义 （子直 $(\mathfrak{E}, \mathfrak{M})$-积）。 框架的一个子直 $(\mathfrak{E}, \mathfrak{M})$-积 E 和 M 的子框架 L 称为它们的积框架 $E \times M$ 的子框架，若投影映射 $L \to E$ 是一个 $\mathfrak{E}$-满射，且投影映射 $L \to M$ 是一个$\mathfrak{M}$-满射。若 E 恰好是无点的，则根据命题 4.3.4，投影 $L \to E$ （同构于） L 的无点反射。若 M 恰好是空间的，则根据命题 4.4.2，投影 $\mathfrak{m}\colon L \to M$ （同构于） L 的空间反射。

我们的首要任务是证明，无点框架 E 与任意框架 M 的一个次直积 $(\mathfrak{E}, \mathfrak{M})$ 具有标准形式。为得到这种标准形式，我们首先确定完全正则框架 $E \times M$ 的一个子集 L'，使其在框架运算下封闭；然后取其完全正则余反射，也就是包含在 L' 中的最大完全正则框架 L。只要投影是满射，这个余反射就是 E 与 M 的次直积 $(\mathfrak{E}, \mathfrak{M})$。后一条件通常并不成立，但在我们关注的情形中成立（定理 5.2.2）。

命题 5.2.1。 设 E 是一个无点框架， M 是一个空间的框架，且 $\mathfrak{l}\colon E \to \pi M$ 是一个框架满射。那么

$$L' \equiv \{(a, b) \in E \times M : \mathfrak{l}(a) = \pi_M(b)\}$$

是 $E \times M$ 的一个裸子框架；若完全正则余反射 $L \subseteq L'$ 的投影是满射，则

（1）最大$L = \{(\top, a) : a \in$最大 $M\}$， （2）投影 $\mathfrak{m}\colon L \to M$ 是一个 $\mathfrak{M}$-态射，

（3）投影 $e\colon L \to E$ 是一个 $\mathfrak{E}$-态射，并且（4）
$l \circ e = \pi_M \circ m$。

简言之，L 是 E 与 M 的一个子直 $(\mathfrak{E}, \mathfrak{M})$-积，其连结（同构于）$l$。

证明。我们来证明 L' 在 $E \times M$ 的框架运算下是闭合的。可以看出，L' 同时包含 $\bot_{E\times M}$ 和 $\top_{E\times M}$。要证明 L' 在二元交下闭合，只需注意，如果 $(a_i, b_i) \in L'$ 那么

$$l(a_1 \wedge a_2) = l(a_1) \wedge l(a_2) = \pi_M(b_1) \wedge \pi_M(b_2) = \pi_M(b_1 \wedge b_2).$$

要证明 L' 对任意上确界封闭，考虑子集 $\{(a_i, b_i)\}_I \subseteq L'$。那么 $l(\bigvee_I a_i) = \bigvee_I l(a_i) = \bigvee_I \pi_L(b_i) = \pi_L(\bigvee_i b_i)$。

现在假设完全正则核反射 $L \subseteq L'$ 的投影 e 和 m 是满射；由构造可得 $l \circ e = \pi_M \circ m$。

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{m} & M \\ {\scriptstyle e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_M} \\ E & \xrightarrow[l]{} & \pi M \end{array}$$

(1) 显然，L' 的极大元具有 $(\top, a), a \in \max M$ 的形式。现在考虑 L 的一个极大元 (a, b)。我们断言 $a = \top$，否则，由于 $\max E = \emptyset$，存在一个元素 $a' \in E$ 使得 $\top > a' > a$；又由于 e 是满射，存在一个元素 $c \in M$ 使得 $(a', c) \in L$。因为 $(a', c) \not\leqslant (a, b) \in \max L$，可得 $(\top, \top) = (a', c) \vee (a, b) = (a', b \vee c)$，因此 $a' = \top$，这与事实矛盾，从而证明了该断言。因此，L 的这个极大元具有 $(\top, b)$ 的形式。

我们的第二个断言是 $b \in \max M$。由于 M 是空间的，且 $b < \top$，因此存在一个元素 $c \in \max M$，使得 $b \leqslant c$。但由于 m 是满射，必定存在一个元素 $a \in E$，使得 $(a, c) \in L$，从而 $(a, c) \vee (\top, b) = (\top, c) \in L$，所以根据极大性，$b = c$。最后，对于每个 $c \in \max M$，m 的满射性保证了 $\max L$ 中存在 $m_*(c)$；如果 $m_*(c) = (a, b)$，那么前面的论证表明 $a = \top$ 和 $b = c$。

$\max L$ 与 $\max M$ 之间的双射对应使 (2) 显而易见。为验证 e 是一个 $\mathfrak{E}$- 态射，注意对于 $(a_i, b_i) \in L$，

$$e(a_1, b_1) = e(a_2, b_2) \iff a_1 = a_2 \implies \pi_M(b_1) = l(a_1) = l(a_2) = \pi_M(b_2),$$

因此，借助引理 2.3.3，我们得到

$$\begin{aligned}\Theta_e &\leqslant \{((a,b_1),(a,b_2)) : a \in E \text{ and } (b_1,b_2) \in \Theta_{\pi_M}\}\\ &= m^{-1}(\Theta_{\pi_M}) \leqslant m^{-1}\left(\bigvee_{\max M} \Phi_c\right) = \bigvee_{\max M} m^{-1}(\Phi_c)\\ &= \bigvee_{\max M} \left(\Theta_m \vee \Phi_{m_*(c)}\right) = \Theta_m \vee \bigvee_{\max M} \Phi_{m_*(c)}.\end{aligned}$$

鉴于以下事实

$$\Theta_e \wedge \Theta_m = \bot_{\operatorname{con} L} = 1_L \quad \text{and} \quad \max L = \{m_*(c)\}_{\max M},$$

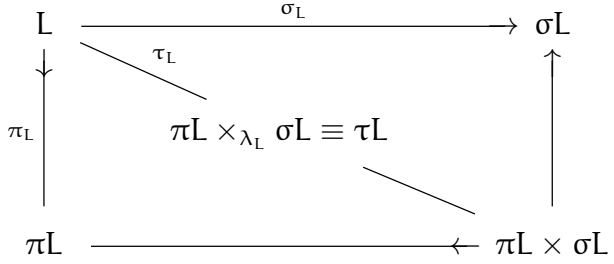
我们得出结论：$\Theta_e \leqslant \bigvee_{\text{最大值 } M} \Phi_{m_*(c)} = \bigvee_{\text{最大值 } L} \Phi_{a_\circ}$

□

记号 $(E \times_l S)$。对于无点框架 E、空间帧 M以及框架满射 $l\colon E \to \pi M$，我们将命题 5.2.1 中的框架 L 记作

$$E \times_l M.$$

定理 5.2.2。每个框架都是其无点部分和空间部分的一个子直 $(\mathfrak{E}, \mathfrak{M})$-积。具体而言，对于任意框架 L，积态射 $\pi_L \times \sigma_L\colon L \to \pi L \times \sigma L$ 可经由包含映射 $\pi L \times_{\lambda L} \sigma L \to \pi L \times \sigma L$分解，且初始因子是单射。



我们将此初始因子记作 $\tau_L\colon L \to \pi L \times_{\lambda_L} \sigma L \equiv \tau L$。

证明。该分解是以下事实的结果：$\lambda_L \circ \pi_L = \pi_{\sigma L} \circ \sigma_L$。乘积映射的单射性由引理 3.5.1 得出，由此其初始因子 τ_L 也是单射。像 $\tau_L(L)$包含于命题 5.2.1 的子集 L' 中，并且由于该像是完全正则的，因此它包含于L'的最大完全正则子集 $\pi L \times_{\lambda_L} \sigma L$中。□

5.3. **Fs 中的胖反射**。

定义 （肥框架）。 我们约定，若定理 5.2.2 中的映射 $\tau_L : L \to \tau L$ 是满射，则称一个框架为胖 框架。我们将**Fs**中由胖框架组成的全子范畴记为**fFs**。

定理 5.3.1. fFs 是 **Fs**中的双反射子，而框架 L 的一个反射子是定理 *5.2.2* 中的映射 $\tau_L : L \to \tau L$ 。

证明。 只要它是瘦的，测试态射 $m: L \to M$ 就会同时经由 L 和 M的无点反射子与空间反射子分解，因此会从定理 5.2.2 中 $\mathbf{L}$ 的图里的每个对象，唯一地导出到 M对应图中对象的映射。由于 M 是胖的，它与 τM同构，所以最终得到唯一的箭头 $\tau L \to M$ ，使两个图以及它们之间的箭头都交换。 □

我们在定理 6.3.3 中刻画无原子框架的肥反射子。

5.4. **肥框架问题**。 定理 5.2.2 提供了一种方法，通过分析框架的空间部分与无点部分之间的相互作用来探究框架的结构，而本文可视为迈向这种分析的初步尝试。尽管我们的结果只是初步的，而非定论，但我们相信，这些结果引出的问题十分重要。其中最主要的是问题 5.4.1。

问题 5.4.1。什么是胖框架？在什么情况下，表示 $\tau_L : L \to \tau L$ 是满射，也就是说，何时有 $\tau_L(L) = \pi L \times_{\lambda_L} \sigma L$？命题 6.2.4 表明，具有有限空间部分的无原子框架总是胖的，但一般情况下，这个问题仍悬而未决。

6. 向无点框架附加点

本节构造若干框架 L ，使给定的无点框架 E 成为它们的无点部分。如果 E 为空，这项工作已经完成，因为且仅因为散布框架以空框架作为其无点部分。因此，本节中我们始终假设 E 是一个给定的非空无点框架，因而也是无原子的。

6.1. **在无点框架中附加有限个点**。 本小节中，我们随意地将有限个点撒入无点框架 E。也就是说，只要使用一个由正则滤子组成的独立族，就可以将这些点放置在 E 中我们想要的任何位置。

记号 $(2^I, \overline{J})$。我们用 2 表示二元素框架；对于指标集 I，用 2^I 表示 I 个 2 的积，也就是函数 $I \to 2$ 所成的框架。当然，2^I 的每个元素都是某个唯一子集 $J \subseteq I$ 的特征函数；我们将此函数记为 $\overline{J}$，该函数本身按以下规则定义

$$\overline{J}(i) = \begin{cases} \top & \text{if } i \in J \\ \bot & \text{if } i \notin J \end{cases}, \qquad i \in I.$$

命题 6.1.1。设 W 是 E 上非空的有限正则滤子独立族。对每个 $a \in E$，令 $W_a \equiv \{w \in W : a \in w\}$。那么

$$L_W \equiv \left\{ \left(a, \overline{Y}\right) \in E \times 2^W : Y \subseteq W_a \right\}$$

是 $E \times 2^W$ 的完全正则子框架，具有以下性质。

(1) L_W 无原子。(2) $\max L_W = \left\{\left(\top,\ \overline{W \setminus \{w\}}\right)\right\}_W$。(3) L_W 的空间反射为

$$\begin{aligned} \sigma_{L_W} \colon L_W \to \sigma L_W &= \left\{ \left(\top, \overline{Y}\right) : Y \subseteq W \right\} \\ &= \left(\left(a, \overline{Y}\right) \mapsto \left(\top, \overline{Y}\right)\right), \quad a \in E,\ Y \subseteq W. \end{aligned}$$

反射框架 σL_W 与 2^W 同构，且反射子（同构于）到第二个因子的投影：。

(4) L_W 的无点反射子为

$$\begin{aligned} \pi_{L_W} \colon L_W \to \pi L_W &= \left\{\left(a, \overline{W_a}\right)\right\}_E \\ &= \left(\left(a, \overline{Y}\right) \mapsto \left(a, \overline{W_a}\right)\right), \quad a \in E,\ Y \subseteq W. \end{aligned}$$

反射框架 πL_W 与 E同构，反射子同构于投影到第一个因子的投影。

(5) 函数 $\pi_{\sigma L_W}$ 和 λ_{L_W} 的陪域为空。(6) 根据命题 *5.2.1*，L_W 同构于 $E \times_{\lambda_{L_W}} 2^W$。

证明。要证明 L_W 是 $E \times 2^W$ 的子框架，考虑 $\left(a_i、\ \overline{Y_i}\right) \in L_W$。于是 $\left(a_1、\ \overline{Y_1}\right) \wedge \left(a_2、\ \overline{Y_2}\right) = \left(a_1 \wedge a_2、\ \overline{Y_1 \cap Y_2}\right)$ 和 $a_1 \wedge a_2 \in \cap(Y_1 \cap Y_2)$，因此 $\left(a_1、\ \overline{Y_1}\right) \wedge \left(a_2、\ \overline{Y_2}\right) \in L_W$。同样，若 $\left\{\left(a_i, \overline{Y_i}\right)\right\}_I \subseteq L_W$ 且 $Y \equiv \bigcup_I Y_i$，则 $\bigvee_I \left(a_i、\ \overline{Y_i}\right) = \left(\bigvee_I a_i、\ \overline{Y}\right)$ 和 $\bigvee_I a_i \in \cap Y$，因此 $\bigvee_I \left(a_i、\ \overline{Y_i}\right) \in L_W$。根据引理 6.1.2、6.1.3 和 6.1.4，即可完成证明 L_W 是完全正则的；这些引理中的符号含义与定理陈述中的一致。

(1) 不妨假设 $(a, \overline{Y})$ 是 L_W 的一个原子。若 $Y = \emptyset$，则 a 必须是 E 的一个原子，这与假设相矛盾。若 Y 包含两个不同的元素 $y_i \in Y$，则我们会得到 $\bot < (a, \overline{Y \setminus \{y_1\}}) \neq (a, \overline{Y \setminus \{y_2\}}) < (a, \overline{Y})$，与假设矛盾。因此 Y 必须是单元素集，设为 $Y = \{y\}$，而 a 必须属于 y。但引理 6.2.3 保证存在一个元素 $b \in y$，使得 $b < a$，于是得到矛盾 $\bot < (b, \overline{Y}) < (a, \overline{Y})$。由此可知，$L_W$ 中不存在原子。

(2) 由于 E 是无点的，因此显然，$\top_{E \times 2^W} = (\top, \overline{W})$ 的唯一前驱元是对元素 $w \in W$而言形如 $(\top, \overline{W \setminus \{w\}})$ 的元素。(3) 因此，典型成员 $(a, \overline{Y}) \in L_W$ 上方的极大元是对 $w \in W \setminus Y$ 而言形如 $(\top, \overline{W \setminus \{w\}})$ 的元素，它们的交为 $(\top, \overline{Y})$。(4) 考虑到引理 2.4.3(3)，显然，典型元素$(a, \overline{Y})$ 的后继是对元素 $w \in W \setminus Y$ 而言形如 $(a, \overline{Y \cup \{w\}})$ 的元素，这些后继的并于是为 $(a, \overline{W_a})$。□

记号（划分 $W = Y \oplus Z$）。我们用 $W = Y \oplus Z$ 表示子集 Y、$Z \subseteq W$ 划分了 W，即 $Y \cup Z = W$ 且 $Y \cap Z = \emptyset$。

引理 6.1.2。对于任意非平凡划分 $W = Y \oplus Z$ 以及任意 $z \in Z$,

$$z' \equiv \{ b \in z : b^* \in \cap Y \} \neq \emptyset \quad \textit{and} \quad \bigvee_{z'} b^* = \top.$$

证明。由于 z 是正则的，只需证明 z' 非空。但由于 W 是独立的，对于每个 $y \in Y$，都存在一个元素 $b_y \in z$ 使得 $b_y^* \in y$，从而得到 $\bigwedge_Y b_y \in z'$。□

引理 6.1.3。设 $W = Y \oplus Z$ 是一个非平凡划分，设 $t\colon Z \to E$ 是一个函数，满足对所有 $z \in Z$ 都有 $t(z) \in z'$，并设 a，$c \in \cap Y$ 满足 $c \prec\!\!\prec a \leqslant \bigwedge_Z t(z)^*$。那么 $(c, \overline{Y})$ 和 $(a, \overline{Y})$ 都属于 L_W，并且 $(c, \overline{Y}) \prec\!\!\prec (a, \overline{Y})$。

证明。 只需证明，在较弱假设 $a \prec c$ 下，我们可以得出结论 $(c, \overline{Y}) \prec (a, \overline{Y})$。因为有了这个较弱的结果，较强假设 $c \prec\!\!\prec a$ 就断定存在一个见证族 $\{a_q\}_{\mathbb{Q}}$，使得 $c \leqslant a_q \leqslant a$ 对所有 $q \in Q$ 均成立；于是，较弱结论便给出一个见证族 $\{(a_q, \overline{Y})\}_{\mathbb{Q}}$，从而确立较强结论$(c, \overline{Y}) \prec\!\!\prec (a, \overline{Y})$。

因此，假设 $c \prec a$，并考虑元素 $(c^* \vee \bigvee_Z t(z), \overline{Z})$；根据构造，该元素属于 L_W。我们断言此元素见证了 $(c, \overline{Y}) \prec\!\!\prec (a, \overline{Y})$。这一断言基于以下事实：$\left(\bigvee_Z t(z)\right)^* =$

$\bigwedge_Z t(z)^*$，因此 $c \wedge \bigvee_Z t(z) = \bot$。所以

$$(c, \overline{Y}) \wedge \left(c^* \vee \bigvee\nolimits_Z t(z), \overline{Z}\right) = \left(\bot_E, \overline{\emptyset}\right) = \bot_{L_W} \quad \text{and}$$
$$(a, \overline{Y}) \vee \left(c^* \vee \bigvee\nolimits_Z t(z), \overline{Z}\right) = \left(\top_E, \overline{W}\right) = \top_{L_W}. \qquad \square$$

引理 6.1.4. L_W 是完全正则的。

证明. 给定元素 $(a, \overline{Y}) \in L_W$，令 $Z \equiv W \setminus Y$。设 T 为所有满足对任意 $z \in Z$ 均有 $t(z) \in z'$ 的函数 $t\colon Z \to E$ 所构成的族。对于每个 $t \in T$，令

$$C(a,t) \equiv \left\{ c \in \cap Y : c \prec\!\!\prec a \wedge \bigwedge\nolimits_Z t(z)^* \right\}.$$

注意，由于 $a \in \cap Y$ 且每个滤子 $y \in Y$ 都是圆整的，因此 $\bigvee C(a,t) = a \wedge \bigwedge_Z t(z)^*$。于是

$$\bigvee_T \bigvee_{C(a,t)} (c, \overline{Y}) = \left(\bigvee_T \bigvee C(a,t), \overline{Y}\right) = \left(\bigvee_T \left(a \wedge \bigwedge_Z t(z)^*\right), \overline{Y}\right) =$$
$$\left(a \wedge \bigvee_T \bigwedge_Z t(z)^*, \overline{Y}\right) = \left(a \wedge \bigwedge_Z \bigvee_T t(z)^*, \overline{Y}\right) = (a, \overline{Y}). \qquad \square$$

引理 6.1.4 完成了命题 6.1.1 的证明。随后，命题 6.2.4 通过证明 L_W 可由其性质刻画，完成了这一系列论述。这需要考察框架的空间支撑。

6.2. 框架的空间支撑。

记号 (x_a, y_a, 空间支撑)。在无点部分为 E 的框架 L 中，我们将 L 和 E 中由元素 $a \in \max L$ 生成的理想记为

$$x_a \equiv \left\{ b \in L : b \not\leq a \right\} \quad \text{and} \quad y_a \equiv \left\{ b \in E : b \not\leq a \right\}.$$

L 的空间支撑是 $\{y_a\}_{\max L}$。

引理 6.2.1. 在无点部分为 E 且极大元为 a 的框架 L 中，

$$y_a = \pi_L(x_a), \quad x_a = \pi_L^{-1}(y_a), \quad \textit{and} \quad y_a = x_a \cap E.$$

引理 6.2.2. 设 L 是一个无原子框架，其无点部分为 E。

(1) 如果 x 是 L 上的真正则滤子，那么 $\pi_L(x)$ 是 E 上的真正则滤子。

(2) 如果 x 是 L 上的极大真圆滤子，那么 $\pi_L(x)$ 是 E 上的真正则滤子。

(3) 若 A 是极大元 L 的子集，则 $\{\pi_L(x_a)\}_A$ 是 E 类上真正则滤子的独立族。

证明。(1) 我们可以将 E 与 πL 视为相同，并将 π_L 看作从 L 到 E 的稠密满射。由此可得 $\pi_{L*}(\bot) = \bot$，因此 $\pi_L(x)$ 是真滤子，因为 x 是真滤子。另一个推论是，骨架映射 δ_L 可经由 π_L 分解，因此骨架本身包含于 πL。这意味着对于一个元素 $a \in \pi L$，它在 L 和 πL 中的伪补元相同。因此，对于 L 上的正则滤子 x，

$$\top = \bigvee_x b^* \implies \top = \pi_L\left(\bigvee_x b\right) = \bigvee_x \pi_L(b^*) = \bigvee_x \pi_L(x)^*.$$

(2) 若 x 是 L 上的极大真圆滤子，但不是正则滤子，则根据引理 2.5.1(5)，它具有 x_a 的形式，其中某个 $a \in \max L$；在这种情况下，根据引理 2.5.3(4)，$\pi_L(x)$ 是正则的。

(3) 若 a_1 和 a_2 是 L 的不同极大元，则根据引理 2.5.1(6)，x_{a_1} 和 x_{a_2} 是不同的极大真圆滤子，因此根据引理 2.5.1(4)，它们包含不交元素 $b_i \not\leq a_i$。由于 π_L 是稠密满射，$\pi_L(b_1)$ 和 $\pi_L(b_2)$ 分别是 $\pi_L(x_{a_1})$ 和 $\pi_L(x_{a_2})$ 的不交元素。□

引理 6.2.3. 任何框架上的真正则滤子都不能包含最小元。

证明。若框架 L 上的真正则滤子 x 包含最小元 a，则 a 必定完全小于自身，因而是可补的。但在这种情况下，$\bigvee_x b^* = a^* < \top$，这与假设矛盾。□

命题 6.2.4. 具有无点部分 E 和有限空间支撑 W 的无原子框架 M同构于 L_W。具体而言，映射

$$k\colon M \to L_W \equiv \left(a \mapsto \left(\pi_M(a), \overline{W_a}\right)\right), \qquad a \in M,$$

是一个 $\mathfrak{C}$-同构；根据命题 *6.1.1(6)*，它就是（同构于）定理 *5.2.2* 中的映射 τ_M。特别地，具有有限空间部分的无原子框架是胖的。

证明。</style}读者不难验证，k 保持二元交，因此保持并反映序。证明 k 是框架同构，只需证明 k 是双射。由引理 3.5.1可知，k 是单射；因为若 $k(a_1) = k(a_2)$，则 $\pi_M(a_1) = \pi_M(a_2)$，并且

$\sigma_M(a_1) = \sigma_M(a_2)$ 因为根据命题 6.1.1(2)， a_1 和 a_2 位于相同的极大元之下。

要验证 k 是满射，考虑元素 $\big(b、\ \overline{Z}\big) \in L_W$。根据 L_W、 $b \in E$ 和 $b \in \bigcap_Z y_a$ 的定义。令

$$A \equiv \{a \in \max M : b \in y_a \not\in Z\},$$

并令 $b' \equiv b \wedge \bigwedge A$。我们要证明 $k(b') = \big(b、\ \overline{Z}\big)$。显然 $\pi_M(b') = \pi_M(b) \wedge \bigwedge_A \pi_M(a) = \pi_M(b) = b$；剩下要证明的是 $Z = \{y_a : b' \in y_a\}$。但这显然成立，因为根据构造，对于任意 $a \in \max L$， $b' \leqslant a$ 当且仅当 $b \leqslant a$ 或 $a \in A$。也就是说， $b' \in y_a$ 当且仅当 $b \in y_a$ 且 $a \not\in A$，即当且仅当 $y_a \in Z$。最后， k 是一个 $\mathfrak{E}$-态射，因为对于 $b_i \in M$， $k(b_1) = k(b_2)$ 当且仅当 $\pi_M(b_1) = \pi_M(b_2)$。□

命题 6.2.5 为第 6.3 小节作准备

命题 6.2.5。 设 M 是一个无原子框架，其无点部分为 E，设 X 是其空间支撑 W 的非空有限子集，并设 $\Xi \equiv \bigvee\{\Phi_a : y_a \not\in X\}$。则商映射 $k_X : M \to M/\Xi$ 是一个 $\mathfrak{E}$-态射，其陪域同构于 L_X。

证明。 映射 k_X 按构造是一个 $\mathfrak{E}$-态射，而其伴随映射 k_{X*} 给出了从 $\max(M/\Xi)$ 到 X 的双射。结论由命题 6.2.4 得出。□

6.3. **向无点框架附加无限多个点**。 下一项任务是分析具有无限空间支撑的无原子框架。

引理 6.3.1。 设 X 和 Y 是 E 类上的非空有限独立正则滤子族，设 $r : Y \to X$ 是一个函数，使得对所有 $y \in Y$ 都有 $y \supseteq r(y)$，并设

$$r^{-1} : 2^X \to 2^Y = \big(\overline{Z} \mapsto \overline{r^{-1}(Z)}\big), \qquad Z \subseteq X,$$

是由 r诱导的框架映射。那么映射

$$l^X_Y : L_X \to L_Y \equiv \big((a, \overline{Z}) \mapsto \big(a, \overline{r^{-1}(Z)}\big)\big), \qquad a \in E,\ Z \subseteq X,$$

是一个纤细框架嵌入。

证明。 L_X的一个极大元，其形式为 $\big(\top, \overline{X \setminus \{x\}}\big)$，其中某个$x \in X$，映射到 $\big(\top, \overline{Y \setminus r^{-1}(x)}\big) \equiv b$。将 $r^{-1}(x)$ 枚举为 $\{y_i\}_{i \leqslant n}$。若 $n = 0$，则 $b = \big(\top, \overline{Y}\big) = \top_{L_Y}$。若 $n > 0$，则对每个 $i \leqslant n$，

$$b_i \equiv \big(\top, \overline{Y \setminus \{y_j : j \neq i\}}\big)$$

是 b的后继元，并且 $\bigvee_{i\leqslant n} b_i = \top$。两种情况下都有 $\pi_{L_Y}(b) = \top$，这意味着根据引理 4.1.1(3)， l_Y^X 是瘦的。□

记号 ($Y \subseteq_\omega W$)。 设 W 是框架 L上的一族滤子。我们用$Y \subseteq_\omega W$ 表示 Y 是 W 的有限子集。

定义 (E上的正则滤子的充满族)。 若一族 W由 E 上的正则滤子组成，且非空并且独立，并且对所有$\bot < a \in E$ ，都存在一个元素 $w \in W$ 使得 $a \in w$，即 $W_a \neq \emptyset$，则称其为充满的 。

命题 6.3.2。 设 W 是 E上的正则滤子的充满族，对于子集 $Y \subseteq X \subseteq_\omega W$，令 $l_Y^X\colon L_X \to L_Y$ 为引理 *6.3.1* 中由包含映射 $Y \to X$所导出的满射。**nF**-拉回（极限）

$$\left\{ L'_W \xrightarrow{l_X^W} L_X : X \subseteq_\omega W \right\} \textit{ of the diagram } \left\{ L_X \xrightarrow{l_Y^X} L_Y : Y \subseteq X \subseteq_\omega W \right\}$$

同构于）$\left\{ \left(a, \overline{Z}\right) \in E \times 2^W \colon Z \subseteq W_a \right\}$，其投影为

$$l_X^W\colon L_W \to L_X = \left(\left(a, \overline{Z}\right) \mapsto \left(a, \overline{Z \cap X}\right)\right), \quad Z \subseteq W,\ a \in E.$$

那么， L'_W 的完全正则余反射 L_W 是该图的**Fs**-拉回。

如果这些投影是满射，那么 L_W 是无原子的，并且

$$\max L_W = \max L'_W = \left\{ \left(\top, \overline{W \setminus \{w\}}\right) : w \in W \right\}.$$

如果这些投影是 $\mathfrak{E}$-态射，那么 L_W 的无点反射子是

$$\begin{aligned} \pi_{L_W}\colon L_W \to \pi L_W &= \left\{ \left(a, \overline{W_a}\right) : a \in E \right\} \\ &= \left(\left(a, \overline{Z}\right) \mapsto \left(a, \overline{W_a}\right)\right), \quad \left(a, \overline{Z}\right) \in L_W. \end{aligned}$$

反射框架 πL_W 与 E同构，而该反射子（同构于）到第一因子的投影。

证明。 稍加思考即可确认第一段，因此我们先验证：当投影为满射时， L_W 是无原子的。若 L_W 中存在原子，它必具有 $\left(a, \overline{Z}\right)$ 的形式，其中 $\bot_{L_W} = \left(\bot_E, \overline{\emptyset}\right) < \left(a, \overline{Z}\right) \in L'_W$。由此可得 $a > \bot$ 属于 E；否则 $Z \subseteq W_a = W_\bot = \emptyset$，于是 $\left(a, \overline{Z}\right) = \left(\bot, \overline{\emptyset}\right)$，这与假设矛盾。由于 W是全体的，存在元素 $w \in W_a$，使得对于任何包含 w的子集 $X \subseteq_\omega W$，满射 l_X^W会将 $\left(a, \overline{Z}\right)$ 映到 $\left(a, \overline{Z \cap X}\right) \in L_X$。但是，由于根据命题 6.1.1(1)，$L_X$ 是无原子的，因此存在元素 $\left(b, \overline{Y}\right) \in L_X$，使得 $\bot_{L_X} < \left(b, \overline{Y}\right) < \left(a, \overline{Z \cap X}\right)$；又由于 l_X^W 是满射，存在

一个元素 $(b, \overline{V}) \in L_W$，使得 $l_X^W(b, \overline{V}) = (b, \overline{V \cap X}) = (b, \overline{Y})$。由此可得 $(b, \overline{V \cap Z}) = (b, \overline{V}) \wedge (a, \overline{Z})$ 属于 L_W 且满足 $\bot_{L_W} < (b, \overline{V \cap Z}) \prec (a, \overline{Z})$，这与假设矛盾。我们得出结论： L_W 是无原子的。

极大元 $(a, \overline{Z}) \in L_W$ 具有这样的性质：它的每个投影 $l_X^W(a, \overline{Z}) = (a, \overline{Z \cap X})$, $X \subseteq_\omega W$，要么是 L_X 的顶元，要么是 L_X 的极大元，而且第二种情况必定会出现。重申一下，对于所有的 $X \subseteq_\omega W$，要么有 $(a, \overline{Z \cap X}) = (\top, \overline{X})$，要么对于某个 $x \in X$ 有 $(a, \overline{Z \cap X}) = (\top, \overline{X \setminus \{x\}})$。无论如何， $a = \top$，且第二种情况下的元素 x 是唯一的。因为如果 x_1 和 x_2 是 X 的不同元素，且存在子集 $X_i \subseteq_\omega W$ 使得 $x_i \in X_i$ 且 $l_{X_i}^W(\top, \overline{Z}) = (\top, \overline{X_i \setminus \{x_i\}})$，那么 $X \equiv X_1 \cup X_2 \subseteq_\omega W$ 且 $l_X^W(\top, \overline{Z}) = (\top, \overline{X \setminus \{x_1, x_2\}})$，这显然矛盾，因为 $(\top, \overline{X \setminus \{x_1, x_2\}})$ 在 L_X 中不是极大元。简言之， L_W 的极大元必定是 L'_W 的极大元。此外，投影的满射性迫使 L'_W 的每个极大元都作为 L_W 的极大元出现。

如果这些投影是 $\mathfrak{E}$-态射，那么 **Fs**-拉回是一个由 $\mathfrak{E}$-态射组成的源。类似地，汇 $\left\{ L_X \xrightarrow{\pi_{L_X}} E : X \subseteq_\omega W \right\}$ 由 $\mathfrak{E}$-态射组成，并且由于 $\mathfrak{E}$-态射的复合是一个 $\mathfrak{E}$-态射（[1, 5.1.8(2)]），这个源与该汇的复合是单个 $\mathfrak{E}$-态射 $L_W \to E$。根据命题 4.3.4，这个态射必定是 L_W 的无点反射子。□

记号 (L_W 表示任意的 W)。对于无点框架 E 上的正则滤子充满族 W，我们将命题 6.3.2 中构造的框架记为 L_W。

我们总结如下。

定理 6.3.3。具有无点部分 E 和空间支撑 W 的无原子框架 M 同构于具有满射投影的 L_W 的一个子框架。具体而言，命题 *6.2.5* 给出的源 $\{k_X : M \to L_X : X \subseteq_\omega W\}$ 分解为命题 *6.3.2* 中拉回 L_W 的态射，并且该嵌入是 M 的肥反射子（定理 *5.3.1*）。

定理 6.3.3 将注意力集中于基本问题 6.3.4。

问题 6.3.4。给定一个无点框架 E，哪些极大族正则滤子可作为无原子框架的空间支撑，其无点部分为 E?

7. 框架的空间支撑

本节重点讨论框架与其空间支撑之间的相互作用。在第7.1小节中，我们根据框架的空间支撑刻画框架的空间性和紧致性；在第?? 小节中，我们探讨框架空间支撑中的所有滤子在其无点部分上都是极大真圆滤子时所出现的情形。

7.1. 空间支撑决定空间性和紧致性。 我们将在命题 7.1.2 中证明，无原子框架要成为空间的，一个必要条件是：其空间支撑中必须包含足够多的正则滤子，以区分其无点部分中的元素。这需要先证明引理 7.1.1；在此我们回顾第2节中给出的 π_L的归纳定义。

引理 7.1.1。 对于框架 L的一个元素 b，定义

$$A'(b) \equiv \{\, a \in \max L : a \geqslant b \text{ and } a \to b > b \,\},$$

对于序数 β，定义

$$\begin{aligned}
A^\beta(b) &\equiv \{b\} && \text{if } \beta = 0,\\
A^\beta(b) &\equiv A^\alpha(b) \cup A'(\pi_L^\alpha(b)) && \text{if } \beta = \alpha + 1,\\
A^\beta(b) &\equiv \bigcup_{\alpha<\beta} A^\alpha(b) && \text{if } \beta \text{ is a limit ordinal, and}\\
A(b) &\equiv A^\beta(b) && \text{for some (any) } \beta \text{ such that } A^\beta(b) = A^{\beta+1}(b).
\end{aligned}$$

Then $b = \pi_L(b) \wedge \bigwedge A(b)$.

证明。 我们首先断言，对于任意 $b \in L$，都有 $b = \pi'_L(b) \wedge \bigwedge A'(b)$。对于

$$\begin{aligned}
\left(\bigwedge A'(b)\right) \wedge \pi'_L(b) &= \left(\bigwedge A'(b)\right) \wedge \left(b \vee \bigvee_{A'(b)} (a \to b)\right)\\
&= \left(b \wedge \bigwedge A'(b)\right) \vee \bigvee_{A'(b)} \left(\left(\bigwedge A'(b)\right) \wedge (a \to b)\right)\\
&= b \vee \bigvee_{A'(b)} \left(\left(\bigwedge A'(b)\right) \wedge (a \to b)\right) = b.
\end{aligned}$$

接着，我们用归纳法证明，对于所有 β，$b = \pi_L^\beta(b) \wedge \bigwedge A^\beta(b)$。该断言显然对 $\beta = 0$ 成立，因此假设它对所有序数 $\alpha < \beta$ 都成立。

如果 $\beta = \alpha + 1$，那么

$$\pi_L^\beta(b) \wedge \bigwedge A^\beta(b) = \pi_L^{\alpha+1}(b) \wedge \bigwedge A^{\alpha+1}(b) =$$
$$\pi'_L \circ \pi_L^\alpha(b) \wedge \bigwedge (A^\alpha(b) \cup A'(\pi_L^\alpha(b))) =$$
$$\left(\pi'_L \circ \pi_L^\alpha(b) \wedge \bigwedge A'(\pi_L^\alpha(b))\right) \wedge \bigwedge A^\alpha(b) =$$
$$\pi_L^\alpha(b) \wedge \bigwedge A^\alpha(b) = b.$$

（倒数第二个等式由断言得出，最后一个等式则由归纳假设得出。）如果 β 是极限序数，那么我们得到

$$b \leqslant \pi_L^\beta(b) \wedge \bigwedge A^\beta(b) = \bigvee_{\alpha<\beta} \pi_L^\alpha(b) \wedge \bigwedge \bigcup_{\gamma<\beta} A^\gamma(b) =$$
$$\bigvee_{\alpha<\beta} \left(\pi_L^\alpha(b) \wedge \bigwedge \bigcup_{\gamma<\beta} A^\gamma(b)\right) \leqslant \bigvee_{\alpha<\beta} \left(\pi_L^\alpha(b) \wedge \bigwedge A^\alpha(b)\right) = b. \qquad \square$$

命题 7.1.2。对于无点部分为 E 的框架 L，以下条件等价。

(1) $$\forall b \in L \left(\uparrow b \uparrow_L = \bigcap_{b \not\leqslant a \in \max L} x_a = \bigcap_{b \in x_a} x_a \right),$$

(2) $$\forall b \in L \left(b = \bigwedge_{b \leqslant a \in \max L} a \right), \qquad \textit{i.e., } L \textit{ is spatial,}$$

(3) $$\forall b \in E \left(b = \bigwedge_{b \leqslant a \in \max L} a \right).$$

当这些条件成立时，

$$\forall b \in E \left(\uparrow b \uparrow_E = \bigcap_{b \not\leqslant a \in \max L} y_a \right).$$

证明。(2) 与 (3) 等价，因为若 (3) 成立，则由引理 7.1.1 可得 (2)，因为 $A(b) \cup \uparrow \pi_L(b) \uparrow_{\max L} \subseteq \uparrow b \uparrow_{\max L}$。假设 (1) 成立，并反设 (2) 在 $b \in L$ 处不成立，即 $b < b' \equiv \bigwedge \uparrow b \uparrow_{\max L}$。于是 $b \notin \uparrow b' \uparrow_L$，因此由 (1) 可知，必存在某个元素 $a \in \max L$，使得 $b \notin x_a \ni b'$，即 $b' \not\leqslant a \geqslant b,$，这与假设矛盾。反过来，假设 (2) 成立，以证明 (1)。显然，对于任意

$b \in L$。若 $b \not\leq b' \in L$，则由 (2) 存在一个极大元 a，使得 $b \not\leq a \geqslant b'$，即 $b' \notin x_a \ni b$。

如果 L 满足这些编号条件，那么对于任意 $b \in E$，我们有

$$\begin{aligned} \uparrow b\uparrow_E = E \cap \uparrow b\uparrow_L &= E \cap \bigcap \{x_a : b \in x_a,\, a \in \max L\} \\ &= \bigcap \{E \cap x_a : b \in x_a,\, a \in \max L\} \\ &= \bigcap \{y_a : b \in y_a,\, a \in \max L\} \end{aligned}$$ □

问题 7.1.3：命题 7.1.2 的编号条件是否等价于最后一句中给出的条件?

命题 7.1.4。设 L 是一个无原子空间框架，其无点部分为 E，空间支撑为 W。那么，当且仅当 W 是 E上正则滤子的独立族中极大的族时，L 是紧致的。

证明。如果 W 不是极大的，则存在 E 上的一个正则滤子 z，使得$W \cup \{z\}$ 是独立的，即对于每个 $w \in W$，存在一个元素 $b \in z$，使得 $b^* \in w$。于是 $\bigvee_z b^* = \top_L$；否则，L 的空间性将意味着存在某个 $a \in \max L$，使得对于所有 $b \in z$都有 $b^* \leqslant a$，即对于所有 $b \in z$都有 $b^* \notin y_a$，这与假设矛盾。但是，没有有限子集 $z' \subseteq_\omega z$ 具有如下性质：$\bigvee_{z'} b^* = \top$，因为这将意味着元素 $b_0 \equiv \bigwedge z' \in z$具有如下性质：$b_0^* = \top$，这是不可能的。这里的关键在于，$L$ 不是紧致的。

现在假设 W 是极大的，并且为反证，假设 C 是 L 的一个覆盖，但不存在有限子覆盖。通过将 C 替换为它所生成的理想，我们可以假设 C 是一个真理想。通过将 C 替换为 $\{b : \exists c \in C\ (b \prec\!\!\prec c)\}$，我们可以假设 C 是真且圆整的。因此，C 包含于某个极大真圆理想 C' 中。根据引理 2.5.1(10)，$x \equiv \{c^* : c \in C'\}$ 是 L 上的一个极大真圆滤子，因此，根据引理 6.2.2，$y \equiv \pi_L(x)$ 是 E 上的一个正则滤子。

由于其极大性，W必须至少包含一个滤子 w，使得y 具有有限交性质，也就是说，对于每个$a \in w$ 和 $b \in y$，都有 $a \wedge b > \bot$。由于 W 是 L的空间支撑，存在唯一的元素 $a \in \max L$，使得 $w = y_a = \{b \in E : b \not\leq a\}$。我们断言$x = x' \equiv \{b \in L : b \not\leq a\}$。因为如果 x 不同于 x'，那么根据引理 2.5.1(4)，x和 x'将包含不交元素；但由 $\pi_L(x') = w$ 和 $\pi_L(x) = y$以及 w 和 y 具有有限交性质这一观察可知，这种情况不可能发生。这里的关键在于，根据引理 2.5.1(5)，$a = \bigvee_x b^*$。

注意到对于每个 $c \in C$，都有 $c^* \in x$，因此 $c^{**} \leqslant \bigvee_x b^* = a$，由此可得 $\bigvee C \leqslant a$，论证即告完成。这与我们关于 C 覆盖 L的假设相矛盾。我们得出结论： L 是紧致的。□

推论 7.1.5. 一个无原子框架 L，其空间支撑在圆滤子的独立族中是极大的，具有这样的性质：对于所有 $b \in L$，$\uparrow b \uparrow_L = \bigwedge_{b \in x_a} x_a$。

证明。 紧框架是空间的。 □

8. 当空间支撑由极大真圆滤子组成时

本节将说明，完全正则性这一出现在我们的基本命题 6.3.2 中的条件，在空间支撑由极大真圆滤子组成时会自动满足。其结果是定理 8.1.4，而证明该定理需要一些准备工作。

8.1. **在极大真圆滤子处附加点**。

引理 8.1.1。 设 W 是 E 上极大真圆滤子的一个充满族。那么

$$L'_W \equiv \left\{ (a, \overline{Z}) \in E \times 2^W : Z \subseteq W_a \right\}$$

是 $E \times 2^W$ 的裸子框架，具有以下性质。

(1) L'_W 是无原子的。(2) $\max L'_W = \left\{ \left(\top, \overline{W \setminus \{w\}} \right) \right\}_W$。(3) L'_W 包含 $E' \equiv \left\{ \left(a, \overline{W_a} \right) \right\}_E$，且在继承序下与 E 同构；映射 $E \to E' = \left(a \mapsto \left(a, \overline{W_a} \right) \right)$ 保持 $\bot$、$\top$ 以及二元交。该映射还以下述意义保持完全远小于关系。(4) 若 $\{b_p\}_{\mathbb{Q}}$ 是 $a_1 \prec\prec a_2$ 在 E 中的见证族，则 $\left\{ \left(b_p, \overline{W_{b_p}} \right) \right\}_{\mathbb{Q}}$ 是 $\left(a_1, \overline{W_{a_1}} \right) \prec\prec \left(a_2, \overline{W_{a_2}} \right)$ 在 E' 中、也在 L'_W 中的见证族。特别地，$a_1 \prec\prec a_2$ 在 E 中蕴含 $\left(a_1, \overline{W_{a_1}} \right) \prec\prec \left(a_2, \overline{W_{a_2}} \right)$ 在 L'_W 中。

证明。 要证明 L'_W 在 $E \times 2^W$ 中关于框架运算封闭，首先注意到 L'_W 同时包含 $\bot_{E \times 2^W} = \left(\bot, \overline{\emptyset} \right)$ 和 $\top_{E \times 2^W} = \left(\top, \overline{W} \right)$。若 $\left(a_i, \overline{Z_i} \right) \in L'_W$，则

$$Z_1 \cap Z_2 \subseteq W_{a_1} \cap W_{a_2} = W_{a_1 \wedge a_2}, \text{ hence}$$
$$\left(a_1, \overline{Z_1} \right) \wedge \left(a_2, \overline{Z_2} \right) = \left(a_1 \wedge a_2, \overline{Z_1 \cap Z_2} \right) \in L'_W.$$

同样，若 $\{(a_i, \overline{Z_i})\}_I \subseteq L'_W$ 和 $Z \equiv \bigcup_I Z_i$，则 $\bigvee_I a_i \in \cap Z$，因此 $\bigvee_I (a_i, \overline{Z_i}) = (\bigvee_I a_i, \overline{Z}) \in L'_W$。

(1) 不妨假设 $(a,\overline{Z})$ 是 L'_W 的一个原子。若 $Z = \emptyset$，那么 a 必须是 E 的一个原子，这与假设相矛盾。若 Z 含有两个不同的元素 $z_i \in Z$，那么我们将得到

$$\bot < \left(a, \overline{Z \setminus \{z_1\}}\right) \neq \left(a, \overline{Z \setminus \{z_2\}}\right) \leqslant (a, \overline{Z}),$$

这与假设相矛盾。因此，Z 必须是一个单元素集，记作 $Z = \{z\}$，且 a 必须属于 z。但引理 6.2.3 保证存在一个元素 $b \in z$，使得 $b < a$，于是我们得到矛盾 $\bot < (b, \overline{Z}) < (a, \overline{Z})$。

(2) 由于 E 是无点的，显然 $\top_{E\times 2^W} = (\top, \overline{W})$ 的前驱元只能是形如 $\left(\top, \overline{W \setminus \{w\}}\right)$ 的元素 $w \in W$。

(4) 只需证明断言：$a_1 \prec\!\!\prec a_2$ 属于 E 蕴含 $(a_1, \overline{W_{a_1}}) \prec (a_2, \overline{W_{a_2}})$，且见证属于 L'_W。因此，假设 $a_1 \prec\!\!\prec a_2$ 属于 E，其见证族为 $\{b_p\}_{\mathbb{Q}}$，并固定有理数 $p < q$。由于 $b_p^* \vee b_q = \top$, $b_q \prec\!\!\prec a_2$ 的见证族为 $\{b_r\}_{q<r}$，且 $b_p^* \prec\!\!\prec a_1^*$ 的见证族为 $\{b_r^*\}_{r<p}$，由引理 2.5.1(9)可得 $W_{a_2} \cup W_{a_1^*} = W$。由于 $W_{a_1^*} \cap W_{a_1} = \emptyset$，我们已证明 $(a_1, \overline{W_{a_1}}) \prec (a_2, \overline{W_{a_2}})$，且见证为 $(a_1^*, \overline{W_{a_1^*}})$。□

引理 8.1.2. 设 W 和 L'_W 如引理 *8.1.1* 所述。那么对于任意 $w \in W$，

$$\bigvee_w (b^*, \overline{W_{b^*}}) = \left(\top, \overline{W \setminus \{w\}}\right),$$

上确界在 $E \times 2^W$ 中取。

证明。上确界 $\bigvee_w b^*$ 等于 $\top_E$，因为根据引理 2.5.1(5)，无点框架上的极大真圆滤子是正则的。只需证明 $\bigcup_w W_{b^*} = W \setminus \{w\}$ 即可完成论证。对于 $w \notin W_{b^*}$，任意 $b \in y$ 都满足这一点，因为 $b^* \notin w$。而对于任意 $x \in W$、$x \neq w$，存在一个元素 $b \in w$，使得 $b^* \in x$，因为 W 是一个独立族。关键在于，任何这样的 x 都属于 $\bigcup_w W_{b^*}$。□

引理 8.1.3. 设 W、L'_W 和 E' 如引理 *8.1.1* 所述，并设

$$L''_W \equiv \left\{ \overline{(a, \overline{Z})} : W_a \setminus Z \subseteq_\omega W \right\}.$$

那么，L''_W 是包含 $E' \cup \left\{\left(\top, \overline{W \setminus \{w\}}\right)\right\}_W$ 且对二元交封闭的 L'_W 的最小子集。此外，L''_W 的每个元素都是其在 E' 中的下界在 $E \times 2^W$ 中的并。

证明。 为验证第一个陈述，注意到一个典型的元素 $(a、\ \overline{Z}) \in L''_W$ 可以表示为

$$(a, \overline{W_a}) \wedge \bigwedge_{W_a \setminus Z} (\top, \overline{W \setminus \{w\}}).$$

要验证第二个结论，使用引理 8.1.2 展开此表达式。

$$(a, \overline{W_a}) \wedge \bigwedge_{W_a \setminus Z} (\top, \overline{W \setminus \{w\}}) = (a, \overline{W_a}) \wedge \bigwedge_{W_a \setminus Z} \bigvee_{w} (b^*, \overline{W_{b^*}})$$

$$= \bigvee \left\{ (a, \overline{W_a}) \wedge (b^*_w, \overline{W_{b^*_w}}) : b_w \in w \in W_a \setminus Z \right\}. \square$$

定理 8.1.4。 设 W、 L'_W、 L''_W 和 E' 如引理 *8.1.3* 中所述，并设 $L^\star_W$ 为 $E \times 2^W$ 中由 L''_W 的元素构成的所有上确界的族。那么 $L^\star_W$ 具有以下性质。

(1) $L^\star_W$ 是包含 $E' \cup \left\{ \left(\top, \overline{W \setminus \{w\}}\right) \right\}_W$ 的 $E \times 2^W$ 的最小（完全正则）子框架。(2) $\max L^\star_W = \left\{ \left(\top, \overline{W \setminus \{w\}}\right) \right\}_W$.(3) $L^\star_W$ 的无点部分以 E 为商，意即 E' 是 $\pi L^\star_W$ 的子局部；若将商映射记为 $q\colon \pi L^\star_W \to E'$，则

$$q \circ \pi_{L^\star_W} \colon L^\star_W \to E' = \left((a, \overline{Z}) \mapsto (a, \overline{W_a}) \right), \quad a \in E,\ Z \subseteq W.$$

证明。 (1) 根据引理 8.1.1(3)以及引理 8.1.3 的第二句话， $L^\star_W$ 是完全正则的。

(4) 为证明 E' 对任意下确界封闭，考虑一个族 $\left\{ (a_i, \overline{W_{a_i}}) \right\}_I \subseteq E'$，并令 $a_0 \equiv \bigwedge_I a_i$ 属于 E。我们断言，$\bigwedge_I (a_i, \overline{W_{a_i}}) = (a_0, \overline{W_{a_0}})$ 属于 $L^\star_W$。由于对所有 i 都有 $W_{a_0} \subseteq W_{a_i}$，显然对所有 i 都有 $(a_o, \overline{W_{a_0}}) \leqslant (a_i, \overline{W_{a_i}})$。但是，对于任意满足条件 $(b, \overline{Z}) \leqslant (a_i, \overline{W_{a_i}})$ 对所有 i 都成立的 $(b, \overline{Z}) \in L^\star_W$，必有 $b \leqslant a_0$，从而 $Z \subseteq W_b \subseteq W_{a_0}$。

为完成证明 E' 是 $L^\star_W$ 的子局部，我们将证明，对于任意 $(b、\ \overline{Z}) \in L^\star_W$ 和 $(a、\ \overline{W_a}) \in E'$，有 $(b、\ \overline{Z}) \to (a、\ \overline{W_a}) = (b \to a、\ \overline{W_{b \to a}})$。显然， $(b \to a、\ \overline{W_{b \to a}}) \wedge (b、\ \overline{Z}) = ((b \to a) \wedge b、\ \overline{W_{b \to a} \cap Z}) \leqslant (a、\ \overline{W_a})$，因为 $W_{b \to a} \cap Z$ 中的任意滤子都同时包含 $b \to a$ 和 b，因此包含 a_o。并且，如果 $(c、\ \overline{Z'}) \wedge (b、\ \overline{Z}) = (c \wedge b、\ \overline{Z' \cap Z}) \leqslant (a、\ \overline{W_a})$，那么 $c \leqslant b \to a$，因此 $Z' \cap Z \subseteq W_{c \wedge b} \subseteq W_c \subseteq W_{b \to a}$。 $\square$

命题 8.1.5. 设 W 是 E 上极大真圆滤子的族。那么，定理 *8.1.4* 中的框架 $L^\star_W$ 与 βE 同构，即 E 的紧余反射（又称切赫-斯通紧化）。

证明。注意，根据命题 7.1.4，$\mathrm{L}^{\star}_{W}$ 是紧致的。根据 Banaschewski 和 Mulvey 的经典构造（[9], [10]），我们可以将 $\beta\mathrm{E}$ 取为 E' 上圆理想所构成的框架。因此，只需证明这些映射

$$\mathrm{g}\colon \mathrm{L}^{\star}_{W} \to \beta\mathrm{E} = \left((\mathfrak{b}, \overline{\mathrm{Z}}) \mapsto \left\{ (\mathfrak{a}, \overline{W_{\mathfrak{a}}}) : (\mathfrak{a}, \overline{W_{\mathfrak{a}}}) \prec\!\!\prec (\mathfrak{b}, \overline{\mathrm{Z}}) \right\} \right)$$

$$\beta\mathrm{E} \to \mathrm{L}^{\star}_{W} = \left(\mathfrak{u} \mapsto \bigvee \mathfrak{u} \right)$$

是逆框架同构。显然，对于所有 $(\mathfrak{b}, \overline{\mathrm{Z}}) \in \mathrm{L}^{\star}_{W}$，$\bigvee \mathrm{g}(\mathfrak{b}, \overline{\mathrm{Z}}) = (\mathfrak{b}, \overline{\mathrm{Z}})$；对于 $(\mathfrak{b}, \overline{\mathrm{Z}})$，它是 L''_{W} 中其所有下界的并。根据构造，L''_{W} 的每个元素都是 E' 中其所有下界的并；根据引理 8.1.3，E' 的每个元素都是 E' 和 $\mathrm{L}^{\star}_{W}$ 中那些完全低于它的 E' 元素的并。

考虑一个满足 $\bigvee \mathfrak{u} \equiv (\mathfrak{b}, \overline{\mathrm{Z}})$ 的元素 $\mathfrak{u} \in \beta\mathrm{E}'$。由于 $\mathfrak{u}$ 是圆整的，$\mathfrak{u}$ 的每个元素在 E' 中都有一个完全高于它的 $\mathfrak{u}$ 元素，因此根据引理 8.1.1(4)，在 $\mathrm{L}^{\star}_{W}$ 中也如此，由此可得 $\mathfrak{u} \subseteq \mathrm{g}(\bigvee \mathfrak{u})$。反向包含同样显而易见，因为紧致豪斯多夫空间的开子集的圆理想，恰好是那些完全包含于其并集中的开集族。□

推论 8.1.6. 对于无原子框架 L，其无点部分为 E，极大 L 的基数不超过极大 $\beta\mathrm{E}$ 的基数。

例 8.1.7 说明，$\mathrm{L}^{\star}_{W}$（定理 8.1.4(4)）的无点部分可能严格大于 E。

例 8.1.7. 设 E 为实数拓扑 $\mathcal{O}\mathbb{R}$ 的正则开代数，W 为 E 上所有极大圆滤子的族。根据命题 8.1.5，$\mathrm{L}^{\star}_{W}$ 同构于 $\beta\mathrm{E}$；根据该命题的证明，我们可以将其取为 E 上圆理想构成的框架。由于在此情形下每个理想都是圆理想，$\mathrm{L}^{\star}_{W}$（同构于）与 E 对偶的斯通空间的拓扑相同，即实数的格里森覆盖的拓扑。

$\mathrm{L}^{\star}_{W}$ 的无点部分是由满足命题 3.2.4 条件的那些元素构成的子局部。满足这一条件的理想包括主理想，但也包括其他理想。例如，读者不难验证，有限测度正则开子集的理想是非主理想，并且满足这一条件。

问题 8.1.8。 每个无点框架都是某个紧框架的无点部分吗?

命题 8.1.5 与例 8.1.7 一起，促使我们在小节 8.3 中考察无点部分为 C^*-商的紧框架。这需要在小节 8.2 中作一番简短的插叙。

8.2. **sFs 在对偶意义下等价于 Tychs**。这里我们在命题 8.2.1 中指出，将范围限制为纤细框架同态，即从 **F** 转到 **Fs**，并不会破坏空间框架与蒂霍诺夫空间之间的经典对偶等价。

定义 (Tychs, $\max$: sFs $\to$ Tychs^{op})。 我们将带有纤细连续函数的蒂霍诺夫空间范畴记为 **Tychs**。函子

$$\max\colon \mathbf{sFs} \to \mathbf{Tychs}^{\mathrm{op}}$$

将每个空间框架 L 关联到载体集为 $\max L$ 的空间，并通过声明……来赋予其拓扑

$$\mathcal{O}\max L \equiv \{\uparrow a\uparrow_{\max L}\}_L\,,$$

并将每个**Fs**-态射 $m\colon L \to M$ 与连续函数

$$\max m\colon \max M \to \max L = \big(b \mapsto m_*(b)\big).$$

命题 8.2.1 表明，**sFs** 与**Tychs** 是对偶等价的范畴。

命题 8.2.1。 函子$\max$: **sFs** $\to$ **Tychs**^{op} 是范畴等价。

证明。 我们已经指出，蒂霍诺夫空间之间的连续函数有一个对应的框架态射，当且仅当其纤维是散布的，该对应显然是全且忠实的。当然，每个空间帧都是某个蒂霍诺夫空间的拓扑。参见 [1,3.33]. □

8.3. **紧无原子框架中的 qP-余反射**。 命题 8.3.1 指出了紧致豪斯多夫空间的一个奇特特征：其无点部分是 C^*-嵌入的。

命题 8.3.1。 设 X 是一个没有孤立点的紧致豪斯多夫空间，其无点部分是 C^*-嵌入的，我们的意思是其拓扑 $\mathcal{O}X \equiv L$ 同构于 $\beta\pi L$。那么移除任意单个点都不会改变 $\mathcal{C}X$，也就是说，对于任意 $x \in X$， $\mathcal{C}X = \mathcal{C}^*(X \setminus \{x\})$。

证明。 将对应于 $X \setminus \{x\}$ 的开商记为 $o_x : L \to O_x$。由于根据命题 3.1.4, π_L 通过 o_x 分解，后者是一个 C^*-商。

□

问题 8.3.2。 根据命题 8.3.1，如果每个商 $o_x : L \to O_x, x \in X$ 都是一个 C^*-商，那么能否推出 π_L 是一个 C^*-商?

命题 8.3.1 中描述的空间令人联想到 P-空间。蒂赫诺夫空间中的一个点，如果该空间上的每个实值函数在这个点的某个邻域内都为常数，就称为 P- 点 。 P- 空间是指其中每个点都是 P- 点的空间。（关于 P- 空间的详细讨论，请参见 [8] 及其中的参考文献。）显然， P-空间中的任何非孤立点 X 都可以移除，而不改变 $\mathcal{C}^*X$。然而，紧致的 P- 空间是有限的，而我们即将证明，命题 8.3.1 中的空间却大量存在。事实上，它们在没有孤立点的紧致豪斯多夫空间中具有反射性，这意味着每个这样的空间都能典范嵌入到一个具有命题 8.3.1 所述性质的空间中。

定义 （qP-框架， qP-空间）。 qP-框架 是一个紧致框架，其无点部分是一个 C^*-商。也就是说，框架 L 是 qP-框架，当且仅当 $\pi_L : L \to \pi L$与 $\beta_{\pi L} : \beta\pi L \to \pi L$同构。[3] qP 空间是一个蒂霍诺夫空间，其拓扑是一个 qP-框架。

引理 8.3.3. 具有无点 C^*-商的紧致框架是 qP-框架。换句话说， qP-框架是形如 βM 的框架，其中M是无点框架。

证明。 若 $m : L \to M$ 是一个 C^*-商映射，且 L 是紧致的、 M 是无点的，那么由于它必定经过 π_L分解，可得 π_L 是一个与 $\beta_{\pi L}$同构的 C^*-商。□

推论 8.3.4. qP-框架是无原子的。

证明。 因为一个 qP-框架 L 具有 βM这种形式，其中 M是无点框架，所以余反射子 $\beta_M : \beta M \to M$ 是满射的，因而会将原子映为原子；又因为根据引理 2.4.3(2)， M 是无原子的，所以 L 也是无原子的。□

定义 (kalFs, qPFs)。 我们用 **kalFs** 和**qPFs** 分别表示 **Fs** 的满子范畴，它们分别由紧无原子框架和 qF-框架构成。

[3]术语“拟-P 框架”在 [13] 中曾被用于表示另一种含义。

定理 8.3.5。**qPFs** 是**kalFs**中的余反射子；框架 L 的一个余反射子是映射 $q_L\colon \beta\pi L \to L$，满足 $\pi L \circ q_L = \beta_{\pi_L}$。

证明。 给定一个测试**kalFs**-态射 $\mathfrak{m}$，其中 M 是一个 qP-框架，应用无点反射得到 $\pi\mathfrak{m}$，再对其应用紧余反射得到$\beta\pi\mathfrak{m}$，然后插入映射 q_L 和 q_M，使得 $\pi_L \circ q_L = \beta_{\pi L}$ 和$\pi_M \circ q_M = \beta_{\pi M}$。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mathfrak{m}} & L \\ {\scriptstyle q_M}\big(\downarrow{\scriptstyle \pi_M} & & {\scriptstyle \pi_L}\downarrow\big){\scriptstyle q_L} \\ \pi M & \xrightarrow{\pi\mathfrak{m}} & \pi L \\ \uparrow{\scriptstyle \beta_{\pi M}} & & {\scriptstyle \beta_{\pi L}}\uparrow \\ \beta\pi M & \xrightarrow[\beta\pi\mathfrak{m}]{} & \beta\pi L \end{array}$$

那么 q_M 是一个同构，因为 π_M 是一个 C^*-商映射，因此同构于 $\beta_{\pi M}$（参见引理 8.3.3），所以 $\mathfrak{m} = q_L \circ (\beta\pi\mathfrak{m}) \circ q_M^{-1}$ 就是 $\mathfrak{m}$所需的分解。□

推论 8.3.6。 由 qP-空间构成的**Tychs** 全子范畴，是由无孤立点的紧空间构成的**Tychs** 全子范畴中的双反射子范畴。

作者谨向 CECAT 团队致谢，感谢他们围绕研究主题展开富有启发性且令人振奋的讨论。这些周三下午举行的 Zoom 会议由查普曼大学计算、代数与拓扑卓越中心组织。作者特别感谢 Andrew Moshier 提出引理 2.4.5 的证明。

参考文献

[1] J. Ad´amek、H. Herrlich 和 G. Strecker，《抽象范畴与具体范畴：猫之乐》，`http://katmat.math.uni-bremen.de/acc`，2004年8月。[2] R. N. BALL，截断阿贝尔格序群 *II*：无点（*Madden*）表示，《拓扑学及其应用》**178** (2014年)，56–86。[3] R. N. BALL 和 A. W. Hager，关于带有弱序单位的阿基米德格序群的局部 *Yosida* 表示，《纯粹与应用代数杂志》**70** (1990年)，17–43。[4] R. N. BALL，完全正则局部上的无点实值函数，进行中。[5] R. N. BALL、A. W. Hager 和 J. Walters Wayland，从 λ-骨架 κ-框架到 λ-补全，见**W**：*I* 完全正则框架的脚手架，准备中。[6] R. N. BALL、A. W. Hager 和 J. Walters Wayland，从 λ-骨架 κ-框架到 λ-补全，见**W**：*II* $\mathfrak{RL}$上的连续收敛，准备中。

[7] R. N. BALL 和 A. Pultr，无点设定中散布性的一个方面，《葡萄牙数学》**73** 第 2 期（2016年），139–152。[8] R. N. BALL、J. Walters-Wayland 和 E. Zenk，完全正则框架的 P-框架反射，《拓扑学及其应用》**158** 第 14 期（2011年），1778–1794。[9] B. Banaschewski 和 C. J. Mulvey，局部的斯通–切赫紧化，*I*，《休斯敦数学杂志》**6** （1980年），301–312。[10] B. Banaschewski 和 C. J. Mulvey，局部的斯通–切赫紧化，*II*，《纯粹与应用代数杂志》**33** （1984年），107–122。[11] F. Dashiell，剃除点，私人通信，2022年4月13日。[12] T. Dube，几乎 P-框架的一些环论性质，《代数宇宙》**60** （2009年）145–162。[13] T. Dube 和 J. Nsonde Nsayi，连续函数环中的某些素理想何时是极小或极大理想，《拓扑学及其应用》**192** （2015年），98–112。[14] P. T. Johnstone，*Stone*空间，《剑桥高等数学研究丛书》第 3 卷，剑桥大学出版社，1982年。[15] J. Madden 和 H. Vermeer，通过局部 *Wosida* 表示的完备阿基米德 ℓ-群，《纯粹与应用代数杂志》**68** （1990年），243–252。[16] J. Picado 和 A. Pultr，《框架与局部：无点拓扑》，数学前沿丛书，Birkh¨auser，Springer，巴塞尔，2012年。[17] J. Picado 和 A. Pultr，《无点拓扑中的分离性》，Birkh¨auser，Springer Nature Switzerland AG，2020年。

（Ball）丹佛大学数学系，美国科罗拉多州丹佛市 80208电子邮件地址：rball@du.edu