arXiv:2305.00130v1 [math.LO] 29 Apr 2023

Font-Rius 四值模态逻辑的正规证明与语义树

Marcelo E. Coniglio [a] Mart´ín Figallo [b]

[a]CLE 与哲学系。坎皮纳斯州立大学。巴西坎皮纳斯[b]数学系与数学研究所（INMABB）。南方国立大学。阿根廷巴伊亚布兰卡

摘要

四值模态逻辑（$\mathcal{TML}$）由 Font 和 Rius 于 2000年 提出；它是 Belnap-Dunn 四值逻辑 $\mathcal{FOUR}$ 的扩展。该逻辑系统因在多个领域中的诸多应用而广为人知。此外， $\mathcal{TML}$ 是保留相对于 Monteiro 四值模态代数的真值度的逻辑。Font 和 Rius 还证明， $\mathcal{TML}$ 具有一个强适切的相继式系统，但遗憾的是，该系统不具备切消去性质。然而， [16], 提出了一个具有切消去性质的 $\mathcal{TML}$ 相继式系统。此外，同一项研究还提出了该逻辑的一个可靠且完备的自然演绎系统。

在本文中，我们继续从证明论的视角研究 $\mathcal{TML}$ 。首先，我们证明 [16] 中给出的自然演绎系统满足规范化定理。其次，利用 [17], 中为四值模态代数引入的逆否蕴涵，我们定义了一个可判定的语义树系统，以检验逻辑 $\mathcal{TML}$中的有效性。最后，我们为 $\mathcal{TML}$ 提供了一个使用原语言的可靠且完备的语义树系统。这两个语义树系统构成了用于检验四值模态代数簇中有效性的新型（证明论）判定程序。

1 引言

四值模态代数簇 TMA 最初由 Antonio Monteiro（1978年）提出，之后主要由 I. Loureiro、A.V. Figallo、A. Ziliani 和 P. Landini 进行研究。在 Monteiro 看来，这些代数未来将产生一种四值模态逻辑，并在计算机科学领域得到重要应用（见 [20]）。后来，J.M. Font 和 M. Rius 确实开始关注由这些代数的代数和格论方面所产生的逻辑。

尽管这类应用尚未得到发展， [20]中讨论的两种逻辑都是贝尔纳普-邓恩四值逻辑的模态扩张；贝尔纳普-邓恩四值逻辑是一种逻辑系统，因其在多个领域中的诸多应用而广为人知。在这些逻辑中，会出现四种非经典认知值：1（真且非假）、0（假且非真）、n（既非真也非假）和 b（既真又假）。我们可以将它们理解为原子句 P 属于当前信息状态的四种可能方式：我们获悉了以下信息：（1） P 为真（但未获悉 P 为假）；（2） P 为假（但未获悉 P 为真）；（3） P 既真又假（可能来自不同来源，或处于不同时间点）；（4）我们没有获悉任何关于 P 真值的信息。在这种解释下，考虑一个具有认知特征的类模态一元算子 $\Box$ 是有意义的；对于任意句子 P，句子 $\Box P$表示“可用信息确认 P 为真”。显然，在这种情况下，句子 $\Box P$ 只有在我们获得某些信息表明 P 为真，且没有获得任何信息表明 P 为假的情形下才可能为真；在所有其他情形下（即缺乏信息，或至少有某些信息表明 P 为假，而不论同时是否有其他信息表明 P 为真），它都简单地为假；也就是说，在认知值集合 $\{\mathbf{0}, \mathsf{n}, \mathsf{b}\ \mathbf{1}\}$ 上，该算子必须定义为 $\Box\mathbf{1} = \mathbf{1}$ ，且 $\Box\mathsf{n} = \Box\mathsf{b} = \Box\mathbf{0} = \mathbf{0}$ 。这正是生成四值模态代数簇（TMAs）的代数。

在 [20], Font 和 Rius 研究了两个与 TMAs 相关的逻辑。其中一个逻辑遵循通常的“保真”方案得到，以 $\{\mathbf{1}\}$ 作为指定集；也就是说，在该逻辑中，当每个将所有 ψ_i 赋值为 1 的解释也将 ψ赋值为 1 时， ψ 由 ψ_1，……， ψ_n 推出。另一个逻辑记作 $\mathcal{TML}$ （即我们所关注的逻辑），其定义采用保真度方案；也就是说，当每个将 ψ 赋予一个大于或等于其赋予ψ_i的合取式之值的解释都满足这一条件时， ψ 由 ψ_1，……， ψ_n 推出。这些作者证明，按照 Blok and Pigozzi 的意义， $\mathcal{TML}$ 不是可代数化的，但它是有限等价的和原代数的。然而，他们确认其代数对应物同样是 TMAs 类；但该逻辑与这些代数之间的联系不如第一个逻辑中的联系紧密。作为补偿，这一逻辑具有更好的证明论行为，因为它拥有一个强完备的 Gentzen演算（见 [20]中的定理 3.6 和 3.19）。

在 [20], 中，证明了 $\mathcal{TML}$ 可以用两个逻辑矩阵来刻画为一种矩阵逻辑；但后来在 [20], 中，又证明了 $\mathcal{TML}$ 可以由单个逻辑矩阵确定（见下文命题 2.5）。此外，利用 A. V. Figallo 和 P. Landini 在 [17]中引入的逆否蕴涵，还为该逻辑提出了一种可靠且完备的希尔伯特式演算。最后，在 [13] 中，也从形式不一致逻辑的角度研究了 $\mathcal{TML}$ 的容矛盾特性。形式不一致逻辑由 W. Carnielli 和 J. Marcos 在 [12]中引入，随后在 [11]中得到发展。

在这项工作中，我们继续从句法观点研究 $\mathcal{TML}$。在第 3 节中，我们回顾了 [16] 中提出的自然演绎系统，该系统为每个联结词都设有引入规则和消去规则；并证明该系统中的每个推导 $\mathcal{D}$ 都可以化为范式。在第 4 节中，我们用不同的签名呈现 $\mathcal{TML}$ ，其中包含 [17] 中定义的逆否蕴涵。在第 5 节中，通过调整 [7], 中介绍的一般技术，我们在语言 $\{\neg, \succ\}$ 中定义了一个可判定的语义树系统，并证明了相应的可靠性。

以及完备性定理。最后，在第6节中，我们为原语言中的 $\mathcal{TML}$ 提供了一个新的语义树系统。

2 预备知识

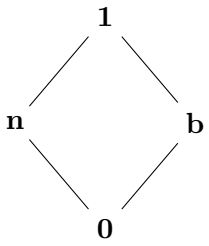
回顾一下，德摩根代数是一种结构 $\langle A, \wedge, \vee, \neg, \mathbf{0}\rangle$，满足 $\langle A, \wedge, \vee, \mathbf{0}\rangle$ 是有界分配格，且 $\neg$ 是德摩根否定，即一种对合，并且满足德摩根律：对任意 $a, b \in A$ $\neg\neg a = a$，以及 $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$。

四值模态代数（TMA）是一种类型为 (2, 2, 1, 1, 0) 的代数 $\mathbb{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, \Box, \mathbf{0}\rangle$，其非模态约化 $\langle A, \wedge, \vee, \neg, \mathbf{0}\rangle$ 是德摩根代数，并且一元运算 $\Box$ 满足恒等式（对所有 $a \in A$），以及以下两个公理：

$$\Box a \wedge \neg a \approx \mathbf{0},$$

$$\neg\Box a \wedge a \approx \neg a \wedge a.$$

每个 TMA $\mathbb{A}$ 都有一个最大元 1，其定义为 $\neg\mathbf{0}$。这些代数主要由 I. Loureiro ([24, 25]) 研究，也由 A. V. Figallo、P. Landini ([17]) 和 A. Ziliani ([18]) 研究，这些研究是应已故 A. Monteiro 的建议开展的（见 [20]）。所有四值模态代数组成一个簇，记作 TMA。令 $M_4 = \{\mathbf{0}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\ \mathbf{1}\}$，并考虑由以下哈斯图给出的格



这是一个众所周知的格，称为 L4（见 [1], 第 516 页）。于是，TMA 由上述四元素格扩充两个一元运算符 $\neg$ 和 $\Box$ 所生成，它们分别由 $\neg\mathbf{n} = \mathbf{n}$、$\neg\mathbf{b} = \mathbf{b}$、$\neg\mathbf{0} = \mathbf{1}$ 和 $\neg\mathbf{1} = \mathbf{0}$ 给出，而一元运算符 $\Box$ 定义如下：$\Box\mathbf{n} = \Box\mathbf{b} = \Box\mathbf{0} = \mathbf{0}$ 和 $\Box\mathbf{1} = \mathbf{1}$（见 [20]）。这个四值模态代数记作 $\mathfrak{M}_{4m}$，有两个素滤子，分别为 $F_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{n}\ \mathbf{1}\}$ 和 $F_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{b}\ \mathbf{1}\}$。如前所述，$\mathfrak{M}_{4m}$ 生成 TMA 簇，也就是说，一个等式在每个 TMA 中成立，当且仅当它在 $\mathfrak{M}_{4m}$ 中成立。

引理2.1（参见 *[20]*）在每个 TMA $\mathbb{A}$ 中，对于所有 a、$b \in A$，以下恒等式均成立。

(i) $\neg\Box a \vee a \approx \mathbf{1}$,

(ii) $\Box\Box a \approx \Box a$,

(iii) $\Box a \vee \neg a \approx a \vee \neg a$,

(iv) $\Box(a \wedge b) \approx \Box a \wedge \Box b$,

(v) $\Box a \vee \neg\Box a \approx \mathbf{1}$,

(vi) $\Box(a \vee \Box b) \approx \Box a \vee \Box b$,

(vii) $\Box a \wedge \neg\Box a \approx \mathbf{0}$,

(viii) $\Box\neg\Box a \approx \neg\Box a$

(ix) $\Box a \wedge a \approx a$,

(x) $a \wedge \Box\neg a \approx \mathbf{0}$,

(xi) $\Box\mathbf{1} \approx \mathbf{1}$,

(xii) $\Box(\Box a \wedge \Box b) \approx \Box a \wedge \Box b$,

(xiii) $\Box\mathbf{0} \approx \mathbf{0}$,

(xiv) $\Box(\Box a \vee \Box b) \approx \Box a \vee \Box b$.

设 $\mathscr{L} = \{\vee, \wedge, \neg, \Box\}$ 为一种命题语言。从现在起，我们将 $\mathfrak{Fm}$ 记作由某个可数变量集生成的类型为 (2,2,1,1,0) 的绝对自由代数，即 $\mathfrak{Fm} = \langle Fm、\ \wedge、\ \vee、\ \neg、\ \Box、\ \bot\rangle$。按照惯例，我们用小写希腊字母 α、β、γ 等表示公式；用大写希腊字母 Γ、Δ 等表示有限公式集。然后

定义2.2（*[20, 13]*）定义在 $\mathfrak{Fm}$ 之上的四值模态逻辑 $\mathcal{TML}$ 是命题逻辑 $\langle Fm,\ \models_{\mathcal{TML}}\rangle$ 如下给出：对于每个有限集 $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$，$\Gamma \models_{\mathcal{TML}} \alpha$ 当且仅当，对于每个 $\mathbb{A} \in$ TMA以及每个 $h \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{Fm}, \mathbb{A})$，$\bigwedge\{h(\gamma) : \gamma \in \Gamma\} \leq h(\alpha)$。特别地，$\emptyset \models_{\mathcal{TML}} \alpha$ 当且仅当 $h(\alpha) = \mathbf{1}$ 对于每个 $\mathbb{A} \in$ TMA 以及每个 $h \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{Fm}, \mathbb{A})$。

注 2.3 注意，如果对于任意的 $\mathbb{A} \in$ TMA 都有 $h \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{Fm}, \mathbb{A})$，那么 $h(\bot) = \mathbf{0}$。这是因为 $\bot$ 是 $\mathfrak{Fm}$ 中的 0 元运算，0 是 $\mathbb{A}$ 中的 0 元运算，以及同态的定义（泛代数意义下）。

值得一提的是，有不少关于模态逻辑的研究，要么与 $\mathcal{TML}$ 共享非模态片段，要么其非模态片段由同一个四元素矩阵刻画。显然，这些逻辑与 $\mathcal{TML}$存在某种关联。此类系统的例子包括 Priest 的 KFDE [29]、Odintsov 和 Wansing 的贝尔纳普式模态逻辑 [27, 28]，以及模态双格逻辑 [30]。

以下结果已在 [13] 中得到证明，并将在后文中用到。

引理 2.4 设 $h \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$，$\mathcal{V}' \subseteq Var$ 且 $h' \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$，使得对所有$p \in \mathcal{V}'$，

$$h'(p) = \begin{cases} h(p) & \text{if } h(p) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \\ \mathbf{n} & \text{if } h(p) = \mathbf{b}, \\ \mathbf{b} & \text{if } h(p) = \mathbf{n} \end{cases} . \text{ Then } h'(\alpha) = \begin{cases} h(\alpha) & \text{if } h(\alpha) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \\ \mathbf{n} & \text{if } h(\alpha) = \mathbf{b}, \\ \mathbf{b} & \text{if } h(\alpha) = \mathbf{n}, \end{cases} \text{ for all } \alpha \in \mathfrak{Fm}$$

其变量取值为 n。 i $\mathcal{V}'$

J. M. Font 和 M. Rius 在 [20] 中证明，四值模态逻辑 $\mathcal{TML}$ 是一种矩阵逻辑。事实上，$\mathcal{TML}$ 可由矩阵 $\mathcal{M}_{\mathbf{n}} = \langle \mathfrak{M}_{4m}, \{\mathbf{n}\ \mathbf{1}\}\rangle$ 刻画，同时也可由 $\mathcal{M}_{\mathbf{b}} = \langle \mathfrak{M}_{4m}, \{\mathbf{b}\ \mathbf{1}\}\rangle$ 刻画（这两个矩阵同构）。

命题 在 2.5（*[20]*）中，$\mathcal{TML}$ 是由矩阵 $\mathcal{M}_{\mathbf{b}} = \langle \mathfrak{M}_{4m}, \{\mathbf{b}\ \mathbf{1}\}\rangle$确定的逻辑。

为了从句法上刻画 $\mathcal{TML}$ ，也就是说，通过句法演绎系统来刻画， [20] 中引入了 Gentzen 风格的系统 $\mathfrak{G}$。序列演算 $\mathfrak{G}$ 是单结论的，也就是说，它处理形如 $\Delta \Rightarrow \alpha$ 的序列，其中 $\Delta \cup \{\alpha\}$ 是 Fm的有限子集。 $\mathfrak{G}$ 的公理和规则如下:

公理

$$\text{(Structural axiom)} \quad \alpha \Rightarrow \alpha \qquad\qquad \text{(Modal axiom)} \quad \Rightarrow \alpha \vee \neg\Box\alpha$$

结构规则

$$\text{(Weakening)} \quad \frac{\Delta \Rightarrow \alpha}{\Delta, \beta \Rightarrow \alpha} \qquad\qquad \text{(Cut)} \quad \frac{\Delta \Rightarrow \alpha \quad \Delta, \alpha \Rightarrow \beta}{\Delta \Rightarrow \beta}$$

逻辑规则

$$(\wedge \Rightarrow) \quad \frac{\Delta, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma}{\Delta, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma} \qquad\qquad (\Rightarrow \wedge) \quad \frac{\Delta \Rightarrow \alpha \quad \Delta \Rightarrow \beta}{\Delta \Rightarrow \alpha \wedge \beta}$$

$$(\vee \Rightarrow) \quad \frac{\Delta, \alpha \Rightarrow \gamma \quad \Delta, \beta \Rightarrow \gamma}{\Delta, \alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma}$$

$$(\Rightarrow \vee) \quad \frac{\Delta \Rightarrow \alpha}{\Delta \Rightarrow \alpha \vee \beta} \qquad\qquad \frac{\Delta \Rightarrow \beta}{\Delta \Rightarrow \alpha \vee \beta}$$

$$(\neg) \quad \frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha} \qquad\qquad (\bot) \quad \frac{\Delta \Rightarrow \bot}{\Delta \Rightarrow \alpha}$$

$$(\neg\neg \Rightarrow) \quad \frac{\Delta, \alpha \Rightarrow \beta}{\Delta, \neg\neg\alpha \Rightarrow \beta} \qquad\qquad (\Rightarrow \neg\neg) \, \frac{\Delta \Rightarrow \alpha}{\Delta \Rightarrow \neg\neg\alpha}$$

$$(\Box \Rightarrow) \quad \frac{\Delta, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \beta}{\Delta, \alpha, \neg\Box\alpha \Rightarrow \beta} \qquad\qquad (\Rightarrow \Box) \, \frac{\Delta \Rightarrow \alpha \wedge \neg\alpha}{\Delta \Rightarrow \alpha \wedge \neg\Box\alpha}$$

序列演算 $\mathfrak{G}$ 中的推导概念是通常意义下的。除此之外，对于每个有限集合$\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$，我们记作 $\Gamma \vdash_{\mathfrak{G}} \varphi$，当且仅当序列 $\Gamma \Rightarrow \varphi$ 在 $\mathfrak{G}$中存在推导。我们称序列 $\Gamma \Rightarrow \varphi$ 是可证的，当且仅当它在 $\mathfrak{G}$中存在推导。

在 [20], 中已证明， $\mathfrak{G}$ 相对于四值模态逻辑$\mathcal{TML}$是可靠且完备的，因此构成了该逻辑的证明论对应物。

定理 2.6（可靠性与完备性， [20]）对于每个有限集合 $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$,

$$\Gamma \models_{\mathcal{TML}} \alpha \quad \textit{if and only if} \quad \Gamma \vdash_{\mathfrak{G}} \alpha.$$

此外,

命题 2.7（[20]）任意方程 $\psi \approx \varphi$ 在每个 TMA 中成立，当且仅当 $\psi \dashv\vdash_{\mathfrak{G}} \varphi$ （也就是说，$\psi \vdash_{\mathfrak{G}} \varphi$ 且 $\varphi \vdash_{\mathfrak{G}} \psi$）。

由此可得:

推论 2.8 ([20])

(i) 方程 $\psi \approx \mathbf{1}$ 在每个 TMA 中成立，当且仅当$\vdash_{\mathfrak{G}} \psi$。

(ii) 对任意 $\psi, \varphi \in Fm$，$\psi \vdash_{\mathfrak{G}} \varphi$，当且仅当对每个 $h \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{A})$，以及每个$\mathfrak{A} \in \mathrm{TMA}$，$h(\psi) \leq h(\varphi)$。

推论 2.8 是判断给定的 $\mathfrak{G}$ 序列是否可证的有力工具。例如,

命题 2.9 ([16]) 在 $\mathfrak{G}$ 中，序列 $\neg\Box\alpha \Rightarrow \alpha$ 可证，当且仅当序列$\Rightarrow \alpha$ 可证。

回顾一下，如果一个形式系统的定理集合在某个推理规则下封闭，则称该规则在该形式系统中是可容许的；如果一个规则的结论可以使用该形式系统的其他规则从其前提推导出来，则称该规则在同一形式系统中是可导出的。
对于熟悉模态逻辑的读者而言，一个众所周知的规则是必然化规则，该规则指出，如果 φ 是一个定理，那么 $\Box\varphi$也是一个定理。形式化地,

$$(\mathrm{Nec})\ \frac{\Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \Box\varphi}$$

于是，我们有:

引理2.10（[16]）必然化规则在 $\mathfrak{G}$中是可容许的。

命题2.11（[16]）在 $\mathfrak{G}$ 中，$\Rightarrow \Box(\alpha \vee \neg\Box\alpha)$的每个证明都使用切规则。

此外，对于每个 $\varphi \in Fm$ ，如果 $\Rightarrow \varphi$ 在 $\mathfrak{G}$ 中是可证的，那么 $\Rightarrow \Box\varphi$ 在 $\mathfrak{G}$中也是可证的；并且 $\Rightarrow \Box\varphi$ 在 $\mathfrak{G}$ 中的每个证明都使用切规则（见 [16]）。因此,

定理 2.12 ([16]) $\mathfrak{G}$不允许切消去。

利用 A. V. Figallo 和 P. Landini 在 [17], 中引入的逆否蕴涵 $\succ$ ，我们为 $\mathcal{TML}$构建了一个可靠且完备的希尔伯特式演算。随后，借鉴 Avron、Ben-Naim 和 Konikowska 提出的一般方法（[3]），人们为 $\mathcal{TML}$ 构建了具有切消去性质的序列演算；受此启发，又提出了一个相对于 $\mathcal{TML}$ 可靠且完备的自然演绎系统（[16]）。

3 $\mathcal{TML}$的正规证明

本节将介绍一个用于 $\mathcal{TML}$的自然演绎系统。我们的构建思路源自先前的工作。具体而言，先前的工作阐明了联结词 $\Box$ 的行为。证明系统 $\mathbf{ND}_{\mathcal{TML}}$ 将按照 [32]中给出的记法约定来定义。

定义 3.1 $\mathbf{ND}_{\mathcal{TML}}$ 中的推导归纳定义如下：基础情形：仅包含一个带标记的假设 ϕ 的证明树，是一个结论为 ϕ、来自开放假设 ϕ 的推导。

归纳步骤：设 $\mathcal{D}$、 $\mathcal{D}_1$ 、$\mathcal{D}_2$、$\mathcal{D}_3$ 为推导。那么，它们可以通过以下规则之一扩展。下面的 $[\neg\phi]^u$、$[\neg\psi]^v$、 $[\phi]^u$ 、 $[\psi]^v$ 类包含最终推理的前提的推导中的开放假设，但这些假设在整个推导中已关闭。

$$\frac{}{\phi \vee \neg\Box\phi}\,\mathrm{MA}$$

$$\frac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ \phi & \psi\end{array}}{\phi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\phi}\,\wedge\mathrm{E}_1 \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\psi}\,\wedge\mathrm{E}_2$$

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \neg\phi\end{array}}{\neg(\phi \wedge \psi)}\,\neg\wedge\mathrm{I}_1 \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \neg\psi\end{array}}{\neg(\phi \wedge \psi)}\,\neg\wedge\mathrm{I}_2 \qquad \frac{\begin{array}{ccc} & [\neg\phi]^u & [\neg\psi]^v\\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3\\ \neg(\phi \wedge \psi) & \chi & \chi\end{array}}{\chi}\,\neg\wedge\mathrm{E},u,v$$

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \phi\end{array}}{\phi \vee \psi}\,\vee\mathrm{I}_1 \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \psi\end{array}}{\phi \vee \psi}\,\vee\mathrm{I}_2 \qquad \frac{\begin{array}{ccc} & [\phi]^u & [\psi]^v\\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3\\ \phi \vee \psi & \chi & \chi\end{array}}{\chi}\,\vee\mathrm{E},u,v$$

$$\frac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ \neg\phi & \neg\psi\end{array}}{\neg(\phi \vee \psi)}\,\neg\vee\mathrm{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \neg(\phi \vee \psi)\end{array}}{\neg\phi}\,\neg\vee\mathrm{E}_1 \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \neg(\phi \vee \psi)\end{array}}{\neg\psi}\,\neg\vee\mathrm{E}_2$$

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \phi\end{array}}{\neg\neg\phi}\,\neg\neg\mathrm{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \neg\neg\phi\end{array}}{\phi}\,\neg\neg\mathrm{E}$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & [\neg\phi]^u \\ \phi & \mathcal{D}_2 \\ & \bot\end{array}}{\Box\phi}\,\Box\mathrm{I},u \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \Box\phi\end{array}}{\phi}\,\Box\mathrm{E}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \neg\phi\end{array}}{\neg\Box\phi}\,\neg\Box\mathrm{I} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \neg\Box\phi & \phi\end{array}}{\neg\phi}\,\neg\Box\mathrm{E}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \neg\phi\wedge\Box\phi\end{array}}{\bot}\,\bot I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \bot\end{array}}{\alpha}\,\bot E$$

备注 3.2

(i) 实际上，在 *[16],* 中， $\Box$ 的引入规则是

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & [\neg\phi]^u \\ \psi\vee\phi & \mathcal{D}_2 \\ & \psi\end{array}}{\psi\vee\Box\phi}\,\Box\mathrm{I}^*,u$$

若在 $\Box$I 中取 ψ 为 $\bot$，则得到 $\Box$I，如定义 3.1 所述。

(ii) 规则 $\Box$E 背后的直观想法如下：“如果我们有一个关于 α 的推导，且 $\neg\alpha$ 不可证，那么我们就有一个关于 $\Box\alpha$ 的推导”。

与通常一样，通过应用规则 $\neg\wedge$E，从 $\mathcal{D}$、 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 构成一棵新的证明树：在底部添加结论 χ，同时关闭分别由 u 和 v 标记的开放假设集 $[\neg\phi]^u$ 和 $[\neg\psi]^u$。规则 $\wedge$E 和 $\Box$I 也同样如此。注意，我们引入了符号 $\bot$；在此它表现为一个任意的、不可证但其否定可证的命题常元。

令 $\Gamma\cup\{\alpha\}\subseteq Fm$，我们称结论 α 可由一组前提 Γ 推导得出，记作 $\Gamma\vdash\alpha$，当且仅当在 $\mathbf{ND}_{\mathcal{TML}}$ 中存在一个从 Γ 推导出 α 的推导。

引理 3.3 令 α、$\beta \in Fm_\circ$ 则,

(i)$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \dashv\vdash (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$, (ii)$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \dashv\vdash (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$, (iii)$\neg(\alpha \vee \beta) \dashv\vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$, (iv)$\neg(\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$, (v)$\neg\neg\alpha \dashv\vdash \alpha_\circ$

证明。由关于 $\wedge$、$\vee$ 和 $\neg$ 的引入规则与 E 规则可得。 ■

此外,

引理 3.4 设 α、$\beta \in Fm_\circ$ 那么,

(i)$\vdash \Box(\alpha \vee \neg\Box\alpha)$, (vii)$\Box\alpha \vee \neg\alpha \dashv\vdash \alpha \vee \neg\alpha$, (ii)$\neg\Box\alpha \wedge \alpha \dashv\vdash \neg\alpha \wedge \alpha$, (viii)$\Box\Box\alpha \dashv\vdash \Box\alpha$, (iii)$\vdash \Box\alpha \vee \neg\Box\alpha$, (ix)$\Box(a \wedge \beta) \dashv\vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta$, (iv)$\Box\alpha \wedge \neg\Box\alpha \dashv\vdash \bot$, (x)$\Box(a \vee \Box\beta) \dashv\vdash \Box\alpha \vee \Box\beta$, (v)$\Box(\Box\alpha \wedge \Box\beta) \dashv\vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta$, (xi)$\Box\neg\Box\alpha \dashv\vdash \neg\Box\alpha$(vi)$\Box(\Box\alpha \vee \Box\beta) \dashv\vdash \Box\alpha \vee \Box\beta$, (xii)$\alpha \wedge \Box\neg\alpha \dashv\vdash \bot$,

证明。我们只证明 (i)、(ii)、(ix) 和 (xi)。
(i)

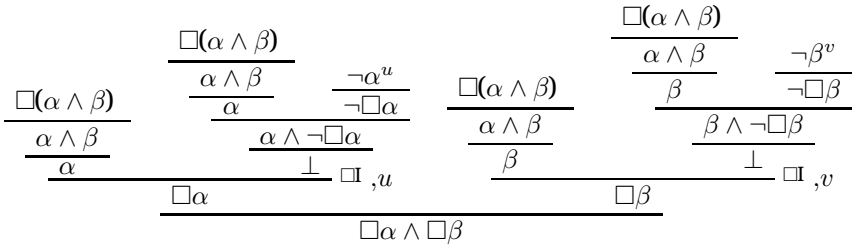
$$\dfrac{\dfrac{}{\alpha \vee \neg\Box\alpha}\,\mathrm{MA} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\alpha \vee \neg\Box\alpha)^u}{\neg\alpha \wedge \neg\neg\Box\alpha)}\wedge\mathrm{E}_1}{\neg\alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\alpha \vee \neg\Box\alpha)^u}{\neg\alpha \wedge \neg\neg\Box\alpha)}\wedge\mathrm{E}_2}{\neg\neg\Box\alpha}\,\neg\neg\mathrm{E}}{\Box\alpha}\wedge\mathrm{I}}{\neg\alpha \wedge \Box\alpha}\,(\bot)}{\bot}\,\Box\mathrm{I},u}{\Box(\alpha \vee \neg\Box\alpha)}$$

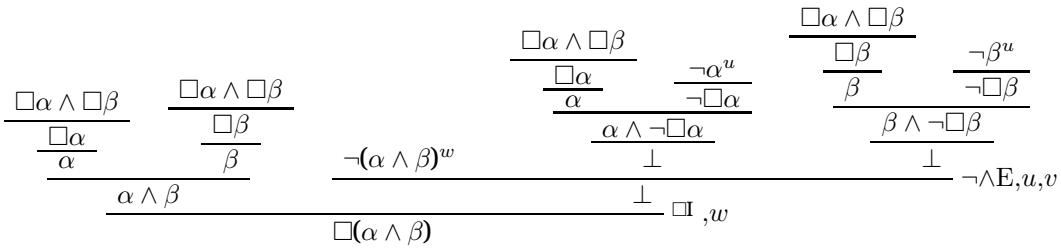
(ii):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\alpha \wedge \alpha}{\alpha}\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{\neg\alpha \wedge \alpha}{\neg\alpha}\wedge\mathrm{E}_1}{\neg\Box\alpha}\,\neg\Box\mathrm{I} \qquad \dfrac{\neg\alpha \wedge \alpha}{\alpha}\wedge\mathrm{E}_2}{\neg\Box\alpha \wedge \alpha}\wedge\mathrm{I}$$

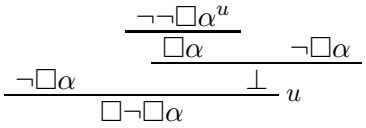
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\Box\alpha \wedge \alpha}{\neg\Box\alpha}\wedge\mathrm{E}_1 \qquad \dfrac{\neg\Box\alpha \wedge \alpha}{\alpha}\wedge\mathrm{E}_2}{\neg\alpha}\,\neg\Box\mathrm{I} \qquad \dfrac{\neg\Box\alpha \wedge \alpha}{\alpha}\wedge\mathrm{E}_2}{\neg\alpha \wedge \alpha}\wedge\mathrm{I}$$

(ix):





(xi)：由 □E 可知 $\Box\neg\Box\alpha \vdash \neg\Box\alpha$。反过来，考虑以下推导



■

请注意，引理 3.4 中展示的所有句法证明都是正规的。

定理 3.5（可靠性与完备性，[16]）设 Γ、$\Delta \subseteq Fm$、Γ 有限。以下条件等价：

(i) 序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 可在 $\mathsf{SC}_{\mathcal{TML}}$ 中导出，

(ii) 在 $\mathsf{ND}_{\mathcal{TML}}$ 中，存在一个从 Γ 推导出 Δ 中各句子的析取的推导。

在下文中，$\mathsf{ND}_{\mathcal{TML}}$ 的 del 规则（即“类似析取消去的”）是 ∨E 和 ¬∧E。与通常一样，$\mathsf{ND}_{\mathcal{TML}}$ 的推导 $\mathcal{D}$ 中的一个段（长度为 n）是 D 中公式 α 的一串连续出现，即 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$，满足 $1 \leq n, i < n$，

(a) α_i 是 D 中某个 del 规则应用的次要前提，其结论为 α_{i+1} ，

(b) α_n 不是 del 规则应用的次要前提，并且

(c) α_1 不是 del 规则应用的结论。

请注意，在本文中，公式 α 的复杂度（或度）定义如下：

定义 3.6 设 α 为一个公式。 α, $c(\alpha)$ 的复杂度（度）是通过以下方式得到的自然数：

(i) 若 p 是命题变元，则 $c(p) = 0$；(ii) $c(\beta \sharp \gamma) = c(\beta) + c(\gamma) + 1$ 对 $\sharp \in \{\vee, \wedge\}$成立；(iii) $c(\neg\alpha) = c(\alpha) + 1$；(iv) $c(\Box\alpha) = c(\alpha) + 2$。

既非 del 规则应用的次要前提、也非其结论的公式出现，总属于一个长度为 1 的段。

若 α_n 是 E 规则的主要前提，且$n > 1$，或 $n = 1$ 并且 α_n 是 I 规则的结论，则一个段称为极大段，或称为割（段）。具有公式 α 的极大段σ 的切割秩 $cr(\sigma)$ 就是 α的复杂度。此外，推导 $\mathcal{D}$ 的切割秩 $cr(\mathcal{D})$ 是 $\mathcal{D}$中各割的切割秩的最大值。若不存在割，则 $\mathcal{D}$ 的切割秩为零。 $\mathcal{D}$ 的临界割是 $\mathcal{D}$中切割秩最大的割。没有临界割的推导称为正规推导。

引理 3.7 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathrm{ND}_{\mathcal{TML}}$中的一个推导。那么， $\mathcal{D}$ 可约化为一个推导 $\mathcal{D}'$，其中每次应用 $\perp$ E 规则所得的结论都是命题变元 p （原子公式）或其否定 $\neg p$。

证明。考虑以下包含一次 $\perp$E 应用的推导

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \perp\end{array}}{\alpha}\ \perp\mathrm{E}$$

不难验证，若 α 具有 $\gamma_1 \wedge \gamma_2$、 $\gamma_1 \vee \gamma_2$、 $\neg(\gamma_1 \wedge \gamma_2)$ 、 $\neg(\gamma_1 \vee \gamma_2)$ 、$\neg\neg\gamma_1$、 $\Box\gamma_1$ 和 $\neg\Box\gamma_1$ 的形式，我们就可以使用结论公式复杂度严格低于 α 的 $\perp$E 应用，移除这次 $\perp$E 应用。因此，通过反复进行这一变换，最终可以得到一个具有所需特征的推导。■

在下文中，我们只考虑这样的推导：每次应用 $\perp$E 规则所得的结论都是命题变元 p （原子公式）或其否定 $\neg p$。请注意，在这类推导中，不可能出现既是 $\perp$E 的结论、又是 E 规则的主要前提的公式。

我们首先说明如何消除长度为 1 的切。此外， $\wedge$-转换和 $\vee$-转换与直觉主义（或经典）逻辑自然演绎系统中的转换相同。

$\neg\wedge$-转换

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \neg\alpha_i\end{array}}{\neg(\alpha_1\wedge\alpha_2)} \quad \begin{array}{c}[\neg\alpha_1]^u\\ \mathcal{D}_1\\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\neg\alpha_2]^v\\ \mathcal{D}_2\\ \chi\end{array}}{\chi}\, u,v \qquad \text{converts to} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}\\ [\neg\alpha_i]\\ \mathcal{D}_i\\ \chi\end{array} \quad \text{for } i=1,2.$$

$\neg\vee$-转换

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \neg\alpha_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \neg\alpha_2\end{array}}{\neg(\alpha_1\wedge\alpha_2)}}{\neg\alpha_i} \qquad \text{converts to} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_i\\ \neg\alpha_i\end{array} \quad \text{for } i=1,2.$$

$\neg\neg$-转换

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \alpha\end{array}}{\neg\neg\alpha}}{\alpha} \qquad \text{converts to} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \alpha\end{array}$$

$\Box$-转换

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}[\neg\alpha]^u\\ \mathcal{D}_2\\ \bot\end{array}}{\dfrac{\Box\alpha}{\alpha}} \qquad \text{converts to} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \alpha\end{array}$$

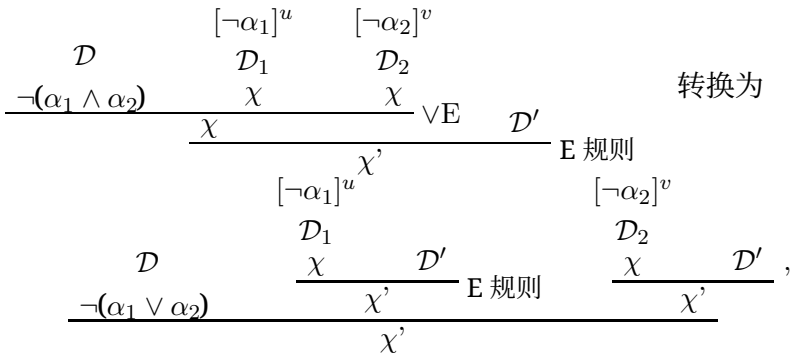
$\neg\Box$-转换

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \neg\alpha\end{array}}{\neg\Box\alpha} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \alpha\end{array}}{\neg\alpha} \qquad \text{converts to} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \neg\alpha\end{array}$$

为了消除长度为 >1 的割，我们将 E-rules 向上置换，使其越过 del-rules 的次要前提：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \alpha_1\vee\alpha_2\end{array} \quad \begin{array}{c}[\alpha_1]^u\\ \mathcal{D}_1\\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\alpha_2]^v\\ \mathcal{D}_2\\ \chi\end{array}}{\chi}\vee\text{E} \quad \mathcal{D}'}{\chi'}\text{E-rule} \qquad \text{converts to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \alpha_1\vee\alpha_2\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha_1]^u\\ \mathcal{D}_1\\ \chi\end{array} \quad \mathcal{D}'}{\chi'}\text{E-rule}}{\chi'} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha_2]^v\\ \mathcal{D}_2\\ \chi\end{array} \quad \mathcal{D}'}{\chi'}}{\chi'},$$



在第一个或第二个次要前提的推导中，若 $[\alpha_1]$、$[\alpha_2]$ ($[\neg\alpha_1]$, $[\neg\alpha_2]$) 至少有一个为空，则以 $\alpha_1 \vee \alpha_2$(¬($\alpha_1 \wedge \alpha_2$)) 为主要前提的 $\vee$E（$\neg\wedge$E）应用是冗余的，可以轻易删除。现在，我们具备了证明本节主要结果的条件。

定理 3.8（　　规范化）每个 $\mathcal{D}$ $\mathrm{ND}_{\mathcal{TML}}$ 中的推导都可以化简为正规推导。

证明。我们假设，在每次应用 E-rul 时，若有次要前提，则主要前提总是在次要前提的左侧。我们对 $\mathcal{D}$ 的切割秩 n 进行主归纳，并对 $\mathcal{D}$ 中所有临界切割（= 切割段）的长度之和 m 进行子归纳。通过恰当地选择要对其应用转换的临界切割，我们可以使 n 减小（从而可以诉诸主归纳假设），或者使 n 保持不变而 m 减小（从而可以诉诸子归纳假设）。如果 $\mathcal{D}$ 的某个分支在 σ 上方没有出现临界切割，就令 σ 为 $\mathcal{D}$ 中的一个顶端临界切割。现在，对 $\mathcal{D}$ 中最右侧的顶端临界切割应用转换；那么，所得的 $\mathcal{D}'$ 的切割秩会降低（如果所处理的段长度为 1，且它是 D 中唯一的极大段），或者切割秩保持不变，但 m 的值降低。■

4 TML 中的逆否蕴涵

TMA 逻辑的原语言——尤其是逻辑 $\mathcal{TML}$ 的语言——没有将蕴涵作为原始联结词。一个自然的问题是，如何用 TMA 中的其他运算来定义一个具有蕴涵行为的二元算子。这样的算子有助于刻画给定代数类的同余格。

文献中曾提出过一些适用于 TMA 的蕴涵算子。例如，I. Loureiro 在 [24] 中为 TMA 提出了如下蕴涵：

$$x \to y = \neg\Box x \vee y;$$

并通过考察该算子

$$x \mapsto y = (x \to y) \wedge (\neg\Box\neg y \vee \neg x),$$

A. V. Figallo 和 P. Landini 在 [17] 中为 TMA 引入了一种有趣的蕴涵算子，其定义如下：

$$x \succ y = (x \mapsto y) \wedge ((\neg x \vee y) \to (\Box \neg x \vee y)).$$

这个算子在 [33] 中被称为 TMAs 的逆否蕴涵。

这是一% timeout 很容易看出，逆否蕴涵可以写成更简单的形式 ：

$$x \succ y = (x \to y) \wedge (\neg y \to \neg x) \wedge ((\neg x \vee y) \to (\Box \neg x \vee y)).$$

逆否蕴涵的主要特征在于它将后承关系内化了（只考虑一个前提时），正如我们将在定理 4.8 中看到的那样。逆否蕴涵的另一个重要方面是，TMAs 的所有运算都可以用 $\succ$ 和 0 来定义。事实上：

命题 4.1（参见 [17]）在每个 TMA 中均成立：

(i) $\mathbf{1} \approx (\mathbf{0} \succ \mathbf{0})$,

(ii) $\neg x \approx (x \succ \mathbf{0})$,

(iii) $x \vee y \approx (x \succ y) \succ y$,

(iv) $x \wedge y \approx \neg(\neg x \vee \neg y)$,

(v) $\Box x \approx \neg(x \succ \neg x)$.

因此，$\succ$ 和 0 足以生成给定 TMA 的所有运算。

此外，根据命题 4.1，在 [17] 中，以 $\succ$ 和 0 为基础给出了 TMA 的公理化如下。

命题 4.2（参见 [17]）在每个 TMA 中，都可以定义一个二元运算 $\succ$ 和一个元素 0，使得以下结论成立：

（C1）$(\mathbf{1} \succ x) \approx x$,

（C2）$(x \succ \mathbf{1}) \approx \mathbf{1}$,

（C3）$(x \succ y) \succ y \approx (y \succ x) \succ x$,

（C4） $x \succ (y \succ z) \approx \mathbf{1}$蕴含 $y \succ (x \succ z) \approx \mathbf{1}$,

(C5) $((x \succ (x \succ y)) \succ x) \succ x \approx \mathbf{1}$,

(C6) $(\mathbf{0} \succ x) \approx \mathbf{1}$,

(C7) $(x \succ \mathbf{0}) \approx \neg x$,

(C8) $((x \wedge y) \succ z) \succ ((x \succ z) \vee (y \succ z)) = \mathbf{1}$.

反过来，若一个具有二元运算 $\succ$ 和元素 0 的代数满足 (C1)-(C8)，其中$\mathbf{1} =_{def} \mathbf{0} \succ \mathbf{0}$, $x \vee y =_{def} (x \succ y) \succ y$且 $x \wedge y =_{def} \neg(\neg x \vee \neg y)$，那么所得结构就是一个 TMA，其中 $\Box x =_{def} \neg(x \succ \neg x)$。

定义 4.3 逆否四值模态代数是一种类型为 (2, 0) 的代数 $\langle A, \succ, 0 \rangle$，满足命题 4.2 的 (C1)–(C6) 和 (C8) 项（使用其中定义的缩写）。我们将这些代数构成的类记为 TMA^c。

请注意，类 TMA 和 TMA^c 在项层面上是等价的。二者的主要区别在于定义这两个类所采用的底层语言，以及后者的刻画方式无法体现出它实际上是一个簇。正如 [13], 所示，逆否蕴涵 $\succ$ 在描述 $\mathcal{TML}$ 的希尔伯特式系统时非常有用。

值得注意的是，在 $\mathfrak{M}_{4m}$（规范 TMA）中，逆否蕴涵 $\succ$ 的真值表如下:

$\succ$	0	n	b	1	
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
n	**n**	**1**	**b**	**1**	
b	**b**	**n**	**1**	**1**	
1	**0**	**n**	**b**	**1**	

注4.4 显然，逆否四值模态代数 $\models_{TMA^c}$ 的逻辑可以类比定义2.2来定义。

新的联结词 $\succ$ 具有一些良好的性质，如下所示:

命题 4.5 设 α、$\beta \in Fm$。则在 $\mathcal{TML}$ 中有如下结论:

(i) $\models_{\mathcal{TML}} \bot \succ \alpha$, （vi） $\models_{\mathcal{TML}} \alpha \succ \neg\neg\alpha$, （ii） $\models_{\mathcal{TML}} \alpha \succ \top$, （vii） $\models_{\mathcal{TML}} \Box\alpha \succ \Box\Box\alpha$, （iii） $\models_{\mathcal{TML}} \alpha \succ (\beta \succ \alpha)$, （viii） $\models_{\mathcal{TML}} \Box\alpha \succ \alpha$, （iv） $\models_{\mathcal{TML}} (\alpha \vee \beta) \succ (\beta \vee \alpha)$, （ix） $\models_{\mathcal{TML}} \alpha \succ \Box\Diamond\alpha$, （v） $\models_{\mathcal{TML}} \neg\neg\alpha \succ \alpha$, （x） $\models_{\mathcal{TML}} \Box\alpha \succ \Diamond\alpha$, （xi） $\models_{\mathcal{TML}} \Box(\alpha \succ \beta) \succ (\Box\alpha \succ \Box\beta)$, （xii） $\models_{\mathcal{TML}} (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta) \succ (\Diamond(\alpha \wedge \Diamond\beta) \vee \Diamond(\alpha \wedge \beta) \vee \Diamond(\beta \wedge \Diamond\alpha))$。

证明。通过简单检查真值表即可得出。 ■

备注 4.6 定理 (xi) 即为 (K) 公理（见 [6]）。定理 (vii)、(viii)、(ix)、(x) 和 (xii) 分别对应公理 (4)、(T)、(B)、(D) 和 (.3)（见 [6]）。因此， $\mathcal{TML}$满足经典模态逻辑 S5 的所有模态公理。然而，我们不能断言

即 $\mathcal{TML}$ 是一种正规模态逻辑，因为蕴涵 $\succ$ 不满足经典蕴涵的某些性质（参见 [6]）。

Lukasiewicz 的 L_3 （视为一种模态逻辑）与$\mathcal{TML}$之间存在有趣的相似之处。在这两种逻辑中， $\Box\alpha$ 和 $\Diamond\alpha$ 都由相同的公式定义，即分别为 $\neg(\alpha \succ \neg\alpha)$和$\neg\alpha \succ \alpha$（对于 L_3， $\neg$ 和 $\succ$ 分别表示否定算子和蕴涵算子）。此外，这两种蕴涵（L_3 的蕴涵和逆否蕴涵）都不满足收缩律： $\alpha \succ (\alpha \succ \beta)$ 不等价于 $(\alpha \succ \beta)$。由此，两种逻辑都满足以下模态原理： $\alpha \succ (\alpha \succ \Box\alpha)$，而该原理在经典模态逻辑 S5 中并不成立。

令 $\Box^0\alpha =_{def} \alpha$ 和 $\Box^{n+1}\alpha =_{def} \Box^n\Box\alpha$，其中 $n \in \mathbb{N}$为任意值。类似地，定义 $\Diamond^n\alpha$。于是，

命题 4.7 $\mathcal{TML}$ 满足以下众所周知的 Lemmon-Scott 格式实例（参见 [23]），对任意 $n, l, k, m \in \mathbb{N}$,

$$\models_{\mathcal{TML}} \Diamond^k\Box^l\alpha \succ \Box^m\Diamond^n\alpha,$$

但 $\not\models_{\mathcal{TML}} \Box\Diamond\alpha \succ \Diamond\Box\alpha$。

证明。由命题 4.5 可得。 ■

最后，在 $\mathcal{TML}$ 中，关于逆否蕴涵，我们有演绎元定理的一个弱版本。

定理 4.8（[17]）令 $\alpha, \beta \in Fm$。以下条件等价:

(i) $\alpha \models_{\mathcal{TML}} \beta$,
(ii) $\models_{\mathcal{TML}} \alpha \succ \beta$。

这一最后的结果表明，只考虑一个前提时，逆否蕴涵 $\succ$ 将 $\mathcal{TML}$ 的后承关系内化。用代数术语来说， $\succ$ 将 TMAs 的偏序 $\leq$内化。

值得　注意，定理 4.8 无法在以下意义上得到改进:

命题 4.9 关于 $\succ$的演绎元定理，在允许多个前提时，两个方向都不成立。具体而言:

(i) α， $\beta \models_{\mathcal{TML}} \gamma$并不蕴涵 $\alpha \models_{\mathcal{TML}} \beta \succ \gamma$,
(ii) $\alpha \models_{\mathcal{TML}} \beta \succ \gamma$并不蕴涵 $\alpha, \beta \models_{\mathcal{TML}} \gamma$。

证明。(i) 注意，$\mathbf{n} \wedge \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$，但 $\mathbf{n} \not\leq \mathbf{b} \succ \mathbf{0} = \mathbf{b}$。为找到一个这样的例子，考虑 $\alpha = (\bullet p \wedge \bullet q \wedge \bullet(p \succ q) \wedge p)$、$\beta = q$和 $\gamma = \bot$，其中 p, q是两个不同的命题变元，而 $\bullet\delta =_{def} \Diamond(\delta \wedge \neg\delta)$是不一致算子。于是，对每个 $h \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$，都有 $h(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{0} = h(\gamma)$。也就是说，$\alpha, \beta \models_{\mathcal{TML}} \gamma$。现在，取满足 $h(p) = \mathbf{n}$ 且 $h(q) = \mathbf{b}$ 的 h。那么 $h(\alpha) = \mathbf{n}$ 且 $h(\beta) = \mathbf{b}$，因此 $h(\alpha) \not\leq h(\beta \succ \gamma) = \mathbf{b} \succ \mathbf{0} = \mathbf{b}$。因此，$\alpha \not\models_{\mathcal{TML}} \beta \succ \gamma$。

(ii) 注意，$\mathbf{n} \leq \mathbf{n} \succ \mathbf{0} = \mathbf{n}$，但 $\mathbf{n} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{n} \not\leq \mathbf{0}$。例如，考虑 $\alpha = p$、$\beta = \neg p$ 和$\gamma = \bot$，其中 p 是命题变元。于是 $\alpha \models_{\mathcal{TML}} \beta \succ \gamma$，因为 $\alpha \models_{\mathcal{TML}} \neg\neg\alpha$。考虑$h \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{M}_{4m})$，使得 $h(p) = \mathbf{n}$。于是 $h(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{n} \not\leq \mathbf{0} = h(\gamma)$，因此 $\alpha, \beta \not\models_{\mathcal{TML}} \gamma$。
■

特别是，逆否蕴涵不满足局部肯定前件规则（按照 [10] 的含义）。

逆否蕴涵的重要性在 [13], 中得到了证实，其中针对 $\mathcal{TML}$ 给出了以 $\succ$ 和 $\bot$ 表述的希尔伯特式公理化。

5 $\{\neg, \succ\}$语言中的 $\mathcal{TML}$ 语义树系统

在本节中，我们通过调整 [7], 中介绍的一般技术，定义一个可判定的语义树系统，用于检验逻辑 $\mathcal{TML}$中的有效性。除了 $\mathcal{TML}$ 的四值真值表以及基于 [16]中介绍的无切序列演算的方法之外，这还为检验四值模态代数簇中的有效性提供了一种新的（证明论）判定程序。

为 $\mathcal{TML}$ 寻找一组语义树规则的程序，基于 [7] 中提出的一般方法，该方法旨在为一大类有限矩阵逻辑构造二值语义和语义树规则（有关这一技术的进一步发展，请参见 [8] ）。给定的矩阵逻辑只需满足一个条件：具有足够的表达能力，能够区分同一类别中的不同真值，即指定的真值与非指定的真值。

由于我们在此只关注一个例子，即逻辑 $\mathcal{TML}$，因此我们将简化语义树规则的构造程序，不再深入探讨 [7] 和 [8]中所述一般构造法（相当复杂）的细节。此外，为了方便读者，我们将给出所构造语义树系统的可靠性与完备性的原创证明，并推广 [31], 中的经典证明，因此本节内容将自成一体。

为简化起见，并利用逆否蕴涵，我们将使用语言$\mathfrak{Fm}'' = \langle Fm'', \succ, \neg\rangle$。将 $\neg$ 而非 $\bot$ 作为原始符号，有助于简化规则的表述；此外，否定 $\neg$ 将在下文中发挥 fundamental 作用。值得注意的是，$\mathfrak{Fm}''$ 的“表达能力”与$\mathfrak{Fm}'$相同，因为对于任意 α，$\bot$ 都可以在前者中定义为 $\neg(\alpha \succ \alpha)$。此外，语义树规则将扩展到四值模态代数的通常语言 $\mathfrak{Fm}$。

在以下小节中，我们假定读者熟悉表列的定义，以及相关概念，如闭合规则、闭合分支和开放分支等。不熟悉这些概念的读者可以参阅经典著作 [31]。

5.1 分离 $\mathcal{TML}$ 的真值

从现在起，$\mathcal{TML}$ 将被视为矩阵逻辑 $\mathcal{M}_N = \langle \mathfrak{M}_{4m}, \{\mathsf{b}\ 1\}\rangle$。考虑函数$f$: $M_4 \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$，其定义为 $f(\mathsf{1}) = f(\mathsf{b}) = \mathsf{T}$ 和 $f(\mathsf{0}) = f(\mathsf{n}) = \mathsf{F}$。该函数将真值划分为两类：指定的和非指定的。

现在考虑公式 $\neg p$ in Fm''。该公式（视为作用于 M_4 上的运算符）按如下方式“分离” $\mathcal{TML}$ 的真值：给定 $x \in M_4$,

$$
\begin{aligned}
x = \mathbf{1} &\text{ iff } f(x) = \mathrm{T} \text{ and } f(\neg x) = \mathrm{F};\\
x = \mathbf{b} &\text{ iff } f(x) = \mathrm{T} \text{ and } f(\neg x) = \mathrm{T};\\
x = \mathbf{n} &\text{ iff } f(x) = \mathrm{F} \text{ and } f(\neg x) = \mathrm{F};\\
x = \mathbf{0} &\text{ iff } f(x) = \mathrm{F} \text{ and } f(\neg x) = \mathrm{T}.
\end{aligned}
$$

由此可得:

$$
(\ddagger)\ \begin{cases}
x \in \{\mathbf{1}, \mathbf{b}\} & \text{iff } f(x) = \mathrm{T};\\
x \in \{\mathbf{1}, \mathbf{n}\} & \text{iff } f(\neg x) = \mathrm{F};\\
x \in \{\mathbf{0}, \mathbf{b}\} & \text{iff } f(\neg x) = \mathrm{T};\\
x \in \{\mathbf{0}, \mathbf{n}\} & \text{iff } f(x) = \mathrm{F}.
\end{cases}
$$

5.2 用 T / F 描述 $\succ$ 的真值表

通过检查 $\succ$ 的真值表并使用（‡），可得，对于任意 x、$y \in M_4$:

$$
f(x \succ y) = \mathrm{T} \text{ iff } \begin{cases}
 & f(y) = \mathrm{T} & \text{OR}\\
f(\neg x) = \mathrm{T}, & f(y) = \mathrm{F},\ f(\neg y) = \mathrm{T} & \text{OR}\\
f(x) = \mathrm{F} & f(y) = \mathrm{F},\ f(\neg y) = \mathrm{F} &
\end{cases}
$$

$$
f(x \succ y) = \mathrm{F} \text{ iff } \begin{cases}
f(x) = \mathrm{T}, & f(y) = \mathrm{F},\ f(\neg y) = \mathrm{F}, & \text{OR}\\
f(\neg x) = \mathrm{F}, & f(y) = \mathrm{F},\ f(\neg y) = \mathrm{T}. &
\end{cases}
$$

$$
f(\neg(x \succ y)) = \mathrm{T} \text{ iff } \begin{cases}
f(x) = \mathrm{T}, & f(y) = \mathrm{F},\ f(\neg y) = \mathrm{T} & \text{OR}\\
f(\neg x) = \mathrm{F}, & f(y) = \mathrm{T},\ f(\neg y) = \mathrm{T}. &
\end{cases}
$$

$$f(\neg(x \succ y)) = \mathrm{F} \text{ iff } \begin{cases} & f(\neg y) = \mathrm{F} & \text{OR} \\ f(\neg x) = \mathrm{T}, & f(y) = \mathrm{T},\, f(\neg y) = \mathrm{T} & \text{OR} \\ f(x) = \mathrm{F}, & f(y) = \mathrm{F},\, f(\neg y) = \mathrm{T} & \end{cases}$$

5.3 推导 $\mathcal{TML}$ 的语义树规则

将上述表达式中的真值 x、 y 分别替换为 Fm''的公式 α、 β，并将方程“$f(x) = \mathrm{T}$”和“$f(x) = \mathrm{F}$”分别替换为带符号公式 $T(\alpha)$和 $F(\alpha)$后，我们即可自动得到 $\mathcal{TML}$的以下语义树规则：

$$\frac{T(\alpha \succ \beta)}{T(\beta) \,|\, T(\neg\alpha), F(\beta), T(\neg\beta) \,|\, F(\alpha), F(\beta), F(\neg\beta)}$$

$$\frac{F(\alpha \succ \beta)}{T(\alpha), F(\beta), F(\neg\beta) \mid F(\neg\alpha), F(\beta), T(\neg\beta)}$$

$$\frac{T(\neg(\alpha \succ \beta))}{T(\alpha), F(\beta), T(\neg\beta) \mid F(\neg\alpha), T(\beta), T(\neg\beta)}$$

$$\frac{F(\neg(\alpha \succ \beta))}{F(\neg\beta) \,|\, T(\neg\alpha), T(\beta), T(\neg\beta) \,|\, F(\alpha), F(\beta), T(\neg\beta)}$$

$$\frac{T(\neg\neg\alpha)}{T(\alpha)} \qquad \frac{F(\neg\neg\alpha)}{F(\alpha)}$$

闭合规则：

$$\frac{T(\alpha), F(\alpha)}{\star}$$

设 $\mathbb{T}$ 是由上述规则定义的语义树系统。给定一个带符号公式 η，从 η 开始构造的完备树形图称为 η 的语义树。若 Fm'' 中的公式 α 在 $\mathbb{T}$ 中可证，记作 $\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$，则表示存在一个针对带符号公式 $F(\alpha)$ 的封闭语义树。

给定一个语义树系统，通常定义导出规则以获得更简短的证明会比较方便。因此，我们陈述一组基本的导出规则：

命题 5.1 可以在 $\mathbb{T}$ 中推导出以下规则:

$$\frac{T(\alpha \succ \beta), T(\neg(\alpha \succ \beta))}{F(\neg\alpha), T(\beta), T(\neg\beta) \mid T(\alpha), T(\neg\alpha), F(\beta), T(\neg\beta)} \qquad \frac{F(\alpha \succ \beta), F(\neg(\alpha \succ \beta))}{T(\alpha), F(\beta), F(\neg\beta) \mid F(\alpha), F(\neg\alpha), F(\beta), T(\neg\beta)}$$

$$\frac{T(\alpha \succ \beta), F(\neg(\alpha \succ \beta))}{F(\alpha), T(\neg\alpha) \mid F(\alpha), F(\neg\alpha), F(\beta), F(\neg\beta) \mid T(\alpha), T(\neg\alpha), T(\beta), T(\neg\beta) \mid T(\beta), F(\neg\beta)}$$

$$\frac{F(\alpha \succ \beta), T(\neg(\alpha \succ \beta))}{T(\alpha), F(\neg\alpha), F(\beta), T(\neg\beta)}$$

证明。利用 $\mathbb{T}$ 的规则即可直接得出。 ■

5.4 $\mathbb{T}$ 的可靠性与完备性

现在我们将证明 $\mathbb{T}$ 的充分性，即对于每个公式 α，$\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$ 当且仅当 $\models_{\mathcal{TML}} \alpha$。首先介绍一些定义和已有结果。

给定公式 $\alpha \in Fm''$，α 的度记为 $d(\alpha)$，它是按如下方式定义的自然数：$d(p) = 1$ (对于 $p \in Var$)；$d(\alpha \succ \beta) = d(\alpha) + d(\beta) + 1$；$d(\neg\alpha) = d(\alpha) + 1$。

显然，$\mathbb{T}$ 中某条规则的结论所含公式的度严格小于该规则前提的度。由此可以立即证明以下有用结果:

命题 5.2 给定一个带符号公式 η，总是可以为 η 构造一棵（开放或封闭的）完备树形图。

给定一个同态 $h : \mathfrak{Fm}'' \to \mathfrak{M}_{4m}$ 和一个带符号公式 η，我们称 h 满足 η，如果

- $\eta = T(\alpha)$ and $h(\alpha) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{b}\}$;
- $\eta = F(\alpha)$ and $h(\alpha) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{n}\}$;

由此可知，h 满足 $T(\neg\alpha)$ 当且仅当 $h(\alpha) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{b}\}$；而 h 满足 $F(\neg\alpha)$ 当且仅当 $h(\alpha) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{n}\}$.

设 Υ 是一个带符号公式集合。则 h 满足 Υ，当且仅当对于每个 $\eta \in \Upsilon$，h 满足 η。

引理 5.3 设 $h : \mathfrak{Fm}'' \to \mathfrak{M}_{4m}$ 是一个同态，并设

$$\frac{\eta}{\Upsilon_1 \mid \ldots \mid \Upsilon_n}$$

是 $\mathbb{T}$ 的一条规则。如果 h 满足 η，那么对于某个 $1 \leq i \leq n$，h 满足 Υ_i。

证明。按情形进行直接证明。 ■

命题 5.4 如果 $\models_{\mathcal{TML}} \alpha$，那么 $F(\alpha)$ 的每个完备树形图都是开放的。

证明。假设$\models_{\mathcal{TML}} \alpha$，并设存在一个关于 $F(\alpha)$ 的完备封闭语义树$\mathcal{T}$。由于 $\models_{\mathcal{TML}} \alpha$，存在一个同态 h，使得 $h(\alpha) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{n}\}$。因此，$h$满足 $F(\alpha)$。根据前述引理，h 必定满足 $\mathcal{T}$的某个分支 θ 中出现的带符号公式集合。由于 $\mathcal{T}$是封闭的，分支 θ 也是封闭的，也就是说，闭合规则已在 θ中使用。但很容易验证，没有同态能够同时满足闭合规则的两个前提。这就导致矛盾，因此，关于 $F(\alpha)$ 的每个完备树形图都必定是开放的。■

推论 5.5（ $\mathbb{T}$的可靠性）如果 $\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$，那么 $\models_{\mathcal{TML}} \alpha$。

为了证明完备性，我们需要陈述以下结果。

命题 5.6 设 θ 是完备开放语义树 $\mathcal{T}$的一个开放分支，且 Υ 是 θ中出现的带符号公式集合。设 h 是一个同态，并且对每个 $\alpha \in Var$:

$$(\ddagger\ddagger) \begin{cases} h(\alpha) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{b}\} & \text{if } T(\alpha) \in \Upsilon; \\ h(\alpha) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{n}\} & \text{if } F(\neg\alpha) \in \Upsilon; \\ h(\alpha) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{n}\} & \text{if } F(\alpha) \in \Upsilon; \\ h(\alpha) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{b}\} & \text{if } T(\neg\alpha) \in \Upsilon. \end{cases}$$

在其他任何情况下，$h(\alpha)$ 均可任意取值，因为 $\alpha \in Var$。那么，对于任意复合公式 α，(‡‡) 都成立。

证明。对 α的度进行归纳。(i) $\alpha \in Var$。显然结果成立。(ii) $\alpha = \neg\beta$。若 $T(\alpha) \in \Upsilon$，则由归纳假设，$T(\neg\beta) \in \Upsilon$，因此 $h(\beta) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{b}\}$。于是，$h(\alpha) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{b}\}$。若 $T(\neg\alpha) \in \Upsilon$，则 $T(\neg\neg\beta) \in \Upsilon$，因此 $T(\beta) \in \Upsilon$，因为 $\mathcal{T}$ 已完成。于是由归纳假设，$h(\beta) \in \{\mathbf{1},\mathbf{b}\}$，进而 $h(\alpha) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{b}\}$。其他情形的证明类似。(iii) $\alpha = \beta \succ \gamma$。(iii.1) $T(\alpha) \in \Upsilon$。由于 $\mathcal{T}$已完成，故最终应用了 $T(\beta \succ \gamma)$的规则，将其分成三个分支。其中一个是 θ的子分支，因此以下情形之一成立:
(iii.1.1) $T(\gamma) \in \Upsilon$。由归纳假设，$h(\gamma \in \{\mathbf{1}, \mathbf{b}\}$。于是根据 $\succ$的定义，$h(\alpha) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{b}\}$。(iii. 1.2) $T(\neg\beta)$ $F(\gamma)$ $T(\neg\gamma) \in \Upsilon$。由归纳假设，$h(\beta) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{b}\}$ 且 $h(\gamma) = \mathbf{0}$，因此 $h(\alpha) \in \{\mathbf{1},\mathbf{b}\}$。(iii.1.3) $F(\beta)$ $F(\gamma)$ $F(\neg\gamma) \in \Upsilon$。由归纳假设，$h(\beta) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{b}\}$，因此 $h(\alpha) = \mathbf{1} \in \{\mathbf{1},\mathbf{b}\}$。

(iii)中其余子情形（即：$F(\alpha) \in \Upsilon$、$T(\neg\alpha) \in \Upsilon$ 和 $F(\neg\alpha) \in \Upsilon$）的证明类似。■

命题 5.7 假设存在一棵关于 $F(\alpha)$ 的完备开放语义树。那么 $\nvDash_{\mathcal{TML}} \alpha$。

证明。根据假设，考虑一棵关于 $F(\alpha)$ 的完备开放语义树 $\mathcal{T}$ 的开放分支 θ，并令 Υ 为出现在 θ 中的带符号公式集合。令 h 为按命题 5.6 中所述定义的同态。那么 $h(\alpha) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{n}\}$，因为 $F(\alpha) \in \Upsilon$，所以 $\nvDash_{\mathcal{TML}} \alpha$。■

定理 5.8（$\mathbb{T}$ 的完备性）若 $\vDash_{\mathcal{TML}} \alpha$，则 $\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$。

证明。若 $\vDash_{\mathcal{TML}} \alpha$，则根据命题 5.7，关于 $F(\alpha)$ 的每棵完备树形图都是封闭的，因此（由命题 5.2）存在一棵关于 $F(\alpha)$ 的封闭语义树。也就是说，$\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$。■

推论 5.9 设 α 为一个公式。那么，关于 $F(\alpha)$ 的每棵完备树形图都是开放的，或者关于 $F(\alpha)$ 的每棵完备树形图都是封闭的。

证明。假设存在一个关于 $F(\alpha)$ 的完备开放语义树 $\mathcal{T}$，以及一个关于 $F(\alpha)$ 的完备封闭语义树 $\mathcal{T}'$。根据命题 5.7，$\nvDash_{\mathcal{TML}} \alpha$。另一方面，根据推论 5.5，可得 $\vDash_{\mathcal{TML}} \alpha$，矛盾。■

命题 5.10 假设 $\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$。那么，关于 $T(\neg\alpha)$ 的每个完备树形图都是封闭的。

证明。若 $\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$，则根据推论 5.5，$\vDash_{\mathcal{TML}} \alpha$。因此，对于每个同态 h，$h(\alpha) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{b}\}$。假设存在一个关于 $T(\neg\alpha)$ 的完备开放语义树 $\mathcal{T}$，并令 Υ 为从 $\mathcal{T}$ 的某个开放分支 θ 得到的带符号公式集合。按照命题 5.6 定义同态 h。由于 $T(\neg\alpha) \in \Upsilon$，因此 $h(\alpha) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{b}\}$。但是 $h(\alpha) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{b}\}$，所以 $h(\alpha) = \mathbf{b}$。根据引理 2.4，存在一个同态 h'，使得 $h'(\alpha) = \mathbf{n}$，矛盾。因此，关于 $T(\neg\alpha)$ 的每个完备树形图都是封闭的。■

最后这个结果从语义树的角度说明了这样一个事实：在 $\mathcal{TML}$ 中，重言式通过同态只能取真值 1。此外，命题 5.10 将使我们能够仅凭语义树工具证明必然化规则（Nec）的可容许性。为此，假设 $\vDash_{\mathcal{TML}} \alpha$，并在 $\mathbb{T}$ 中为 $F(\Box\alpha)$ 开始构造语义树。根据命题 6.1，会产生两个分支：一个带有 $F(\alpha)$，另一个带有 $T(\neg\alpha)$。根据命题 5.2，这两棵语义树最终都会终止。利用定理 5.8 和命题 5.10，这两棵语义树均闭合，因此原先针对 $F(\Box\alpha)$ 构造的语义树也闭合。根据推论 5.5，这表明$\vDash_{\mathcal{TML}} \Box\alpha$。

值得注意的是，语义树系统 $\mathbb{T}$ 可以判定给定公式在 $\mathcal{TML}$ 中是否有效，因此也能判定 TMA 簇中形如 $\alpha \approx \mathbf{1}$ 的方程的有效性。对于形如 $\alpha \vdash_{\mathcal{TML}} \beta$ 的推理，可以在 $\mathbb{T}$ 中通过针对 $F(\alpha \succ \beta)$ 构造的语义树加以还原。因此， $\mathbb{T}$ 可以判定 TMA 簇中方程 $\alpha \approx \beta$ 的有效性。最后，正如经典情形中那样（参见 [31]），完备开放语义树的开放分支上的带符号公式集能够为该公式集找到一个模型：特别是，它能为无效公式找到一个反模型。

6 $\mathcal{TML}$ 原语言中的语义树系统

在这一简短章节中，我们利用上一节给出的结果，介绍一个 $\mathcal{TML}$ 原语言中的语义树系统。

De义 6.1 设 $\mathbb{T}'$ 为由以下规则集定义的语义树系统:

$$\frac{T(\alpha \vee \beta)}{T(\alpha) \,|\, T(\beta)} \qquad \frac{T(\neg(\alpha \vee \beta))}{T(\neg\alpha), T(\neg\beta)}$$

$$\frac{F(\alpha \vee \beta)}{F(\alpha), F(\beta)} \qquad \frac{F(\neg(\alpha \vee \beta))}{F(\neg\alpha) \,|\, F(\neg\beta)}$$

$$\frac{T(\alpha \wedge \beta)}{T(\alpha), T(\beta)} \qquad \frac{T(\neg(\alpha \wedge \beta))}{T(\neg\alpha) \,|\, T(\neg\beta)}$$

$$\frac{F(\alpha \wedge \beta)}{F(\alpha) \,|\, F(\beta)} \qquad \frac{F(\neg(\alpha \wedge \beta))}{F(\neg\alpha), F(\neg\beta)}$$

$$\frac{T(\neg\neg\alpha)}{T(\alpha)} \qquad \frac{F(\neg\neg\alpha)}{F(\alpha)}$$

$$\frac{T(\Box\alpha)}{T(\alpha), F(\neg\alpha)} \qquad \frac{F(\Box\alpha)}{F(\alpha) \mid T(\neg\alpha)} \qquad \frac{T(\neg\Box\alpha)}{F(\Box\alpha)} \qquad \frac{F(\neg\Box\alpha)}{T(\Box\alpha)}$$

闭合规则:

$$\frac{T(\alpha), F(\alpha)}{\star}$$

同态 h 对带符号公式 η 的满足关系 $\mathfrak{Fm} \to \mathfrak{M}_{4m}$ 按照第5.4小节中的定义给出。于是,

引理6.2 设 $h : \mathfrak{Fm} \to \mathfrak{M}_{4m}$ 是一个同态，并且让

$$\frac{\eta}{\Upsilon_1 \mid \ldots \mid \Upsilon_n}$$

be $\mathbb{T}'$ 对 $n = 0$的一个规则，1，2。如果 h 满足 η，那么对于某个 $1 \leq i \leq$， h 满足 Υ_i $n.$

证明。通过分类讨论可直接证明。 ■

命题6.3 如果 $\models_{\mathcal{TML}} \alpha$，那么 $F(\alpha)$的每个完备树形图都是开放的。

证明。类似于命题 5.4 的证明。 ■

推论6.4（ $\mathbb{T}'$ 的可靠性）如果 $\vdash_{\mathbb{T}} \alpha$，那么 $\models_{\mathcal{TML}} \alpha$。

接下来，我们证明命题 5.6 在此情形下的一个版本。

命题6.5 设 θ 是完备开放语义树 $\mathcal{T}$ 的一个开放分支，且 Υ 是出现在 θ 中的带符号公式集合。设 h 是一个同态，满足对每个 $\alpha \in Var$:

$$(\ddagger\ddagger) \begin{cases} h(\alpha) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{b}\} & \textit{if } T(\alpha) \in \Upsilon; \\ h(\alpha) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{n}\} & \textit{if } F(\neg\alpha) \in \Upsilon; \\ h(\alpha) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{n}\} & \textit{if } F(\alpha) \in \Upsilon; \\ h(\alpha) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{b}\} & \textit{if } T(\neg\alpha) \in \Upsilon. \end{cases}$$

在其他任何情况下， $h(\alpha)$ 的取值任意，其中 $\alpha \in Var$。那么，对于任意复合公式 α，(‡‡) 都成立。

证明。对 α 的复杂度作归纳（见定义 3.6）。我们只分析其中几种情况，其余情况类似。

(i) $\alpha \in Var$。结论显然成立。
(ii) $\alpha = \neg\beta$。若 $T(\alpha) \in \Upsilon$，则 $T(\neg\beta) \in \Upsilon$，因此由归纳假设， $h(\beta) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{b}\}$。于是，$h(\alpha)$ $\in \{\mathbf{1}, \mathbf{b}\}$。若 $T(\neg\alpha) \in \Upsilon$，则 $T(\neg\neg\beta) \in \Upsilon$，因此 $T(\beta) \in \Upsilon$，因为 $\mathcal{T}$ 是完备的。于是，由归纳假设，$h(\beta) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{b}\}$，进而 $h(\alpha) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{b}\}$。其余情况的证明类似。

(iii) $\alpha = \beta \wedge \gamma$。
假设 $T(\alpha) \in \Upsilon$。由于 $\mathcal{T}$ 已完成，因此最终使用了关于 $T(\beta \wedge \gamma)$ 的规则。于是 $T(\beta)$ $T(\gamma)$ $\in \Upsilon$，根据归纳假设， $h(\beta)$ $h(\gamma) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{b}\}$，因此$h(\beta \wedge \gamma) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{b}\}$。

如果 $T(\neg\alpha) \in \Upsilon$，那么最终使用了关于 $T(\neg(\beta \wedge \gamma))$ 的规则，并将其拆分为两个分支。其中一个是 θ 的子分支，因此以下条件之一成立:

(iii.1) $T(\neg\beta) \in \Upsilon$。于是，根据归纳假设，$h(\neg\beta) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{n}\}$。接着，根据 $\mathcal{TML}$ 中运算的定义，以及 $h(\neg\alpha) = h(\neg\beta \vee \neg\gamma)$ 这一事实，$h(\neg\alpha) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{n}\}$。(iii.2) $T(\neg\gamma) \in \Upsilon$。与 (iii.1) 类似。其余子情况的证明，即 $F(\alpha) \in \Upsilon$ 和 $F(\neg\alpha) \in \Upsilon$)，也类似。(iv) $\alpha = \Box\alpha$。我们只分析 $F(\Box\alpha) \in \Upsilon$ 的情况。由于 $\mathcal{T}$ 已完成，使用了规则 $T(\Box\alpha)$，并将其拆分为两个分支。于是，以下条件之一成立。(iv.1) $F(\alpha) \in \Upsilon$。根据归纳假设，$h(\alpha) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{n}\}$，进而 $h(\Box\alpha) = 0 \in \{\mathbf{0}, \mathbf{n}\}$。(iv.2) $T(\neg\alpha) \in \Upsilon$。根据归纳假设，$h(\alpha) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{b}\}$，因此 $h(\Box\alpha) = 0 \in \{\mathbf{0}, \mathbf{n}\}$。

■

最后，

定理 6.6（ $\mathbb{T}'$的完备性）如果 $\models_{\mathcal{TML}} \alpha$，那么 $\vdash_{\mathbb{T}'} \alpha$。

证明。设 α 是一个公式。注意（如命题 5.7 所示），如果存在一个关于 $F(\alpha)$ 的完备开放语义树，那么 $\not\models_{\mathcal{TML}} \alpha$。因此，如果 $\models_{\mathcal{TML}} \alpha$，那么关于 $F(\alpha)$ 的每棵语义树都是封闭的，因而存在一棵关于 $F(\alpha)$ 的封闭语义树。也就是说，$\vdash_{\mathbb{T}'} \alpha$。■

7 结束语

本文从证明论视角继续研究 $\mathcal{TML}$。首先，我们证明在 [16] 中引入的自然演绎系统 ND $_{\mathcal{TML}}$ 满足正规化定理。随后，利用 [17], 中为四值模态代数引入的逆否蕴涵，我们为 $\mathcal{TML}$ 定义一个可判定的语义树系统。TMA 逻辑的原语言——特别是逻辑 $\mathcal{TML}$ 的语言——并未将蕴涵联结词作为原始联结词。不过，我们将 $\mathcal{TML}$ 的逆否蕴涵用作原始联结词，并采用 [7], 中引入的一般技术，为该逻辑定义一个可靠且完备的语义树系统。最后，受这一系统启发，我们用原语言为 $\mathcal{TML}$ 提供一个可靠且完备的语义树系统。最后，受这一系统启发，我们用原语言为 $\mathcal{TML}$ 提供一个可靠且完备的语义树系统。这两个语义树系统构成了新的（证明论）判定程序，可用于检验四值模态代数簇中的有效性；此外，还有 $\mathcal{TML}$ 的四值真值表，以及基于 [16] 中引入的无切序列演算的判定方法。

一个有趣的任务（可留待未来的研究）是为$\mathcal{TML}$ 构建一个仅由否定和蕴涵（$\neg$、 $\succ$）组成的自然演绎系统。这需要为 $\succ$ 找到恰当的引入规则和消去规则；考虑到这种蕴涵的不寻常性质，这似乎并非易事。

此外，我们建议将 $\mathcal{TML}$ 扩展到一阶语言。这将为研究和开发其在计算机科学中的潜在应用提供合适的背景，正如 Antonio Monteiro 在四十五年前所设想的那样。

参考文献

[1] Anderson, A. R. 和 Belnap N. D.（另有十三位作者参与），《蕴涵：相关性与必然性的逻辑》，第二卷，（1992）普林斯顿大学出版社。[2] Arieli, O. 和 Avron, A.，《四值的价值》。《人工智能》，第 102 卷，第 1 期（1998），第 97–141 页。[3] Avron, A.、Ben-Naim, J. 和 Konikowska, B.，《适用于具有广义有限值语义的逻辑的无割普通序列演算》。《Logica Universalis》，1，41–69，2006。[4] Belnap, N.，《计算机应如何思考》。载于：《哲学的当代方面》（编者：G. Ryle）。Oriol出版社，第 30–56 页，1976。[5] B´eziau, J.-Y.，《一种新的四值方法用于模态逻辑》。《Logique et Analyse》，第 54 卷，第 213 期（2011）。[6] Blackburn, P.、de Rijke, M. 和 Venema, Y.，《模态逻辑》。剑桥大学出版社，2001。ISBN 0-521-80200-8[7] Caleiro, C.、Carnielli, W.A.、Coniglio, M. E. 和 Marcos, J.，《二人同行：多种逻辑值的骗局》。载于：《Logica Universalis》（编者 J.-Y. B´eziau）。巴塞尔：Birkh¨auser，第 169-189 页，2005。[8] Caleiro, C. 和 Marcos, J.，《有限值逻辑的类经典解析表》。载于：《逻辑、语言、信息与计算》，《计算机科学讲义》第 5514 卷，第 268-280 页。编者：H. Ono；M. Kanazawa 和 R. de Queiroz。施普林格，2009。[9]Cant´u, L. M. 和 Figallo, M.，《与对合 Stone 代数相关逻辑的无割序列式系统》。首发于《逻辑与计算杂志》（2022）。https://doi.org/10.1093/logcom/exac061,[10] Carnielli, W.A.、Coniglio, M.E.、Gabbay, D.、Gouveia, P. 和 Sernadas, C.，《逻辑的分析与综合》。《应用逻辑丛书》第 35 卷，施普林格，2008。[11] Carnielli, W.A.、Coniglio, M.E. 和 Marcos, J.，《形式不一致逻辑》。载于：《哲学逻辑手册》第 14 卷，第 15-107 页。编者：D. Gabbay；F. Guenthner。施普林格，2007。[12] Carnielli, W.A. 和 Marcos, J.，《C-系统分类》。载于 W. A. Carnielli 、 M. E. Coniglio 和 I. M. L. D'Ottaviano 编，《次协调性 —— 通往不一致的逻辑之路》，《纯粹与应用数学讲义》第 228 卷，第 1–94 页。Marcel Dekker，纽约，2002。[13] M. Coniglio 和 M. Figallo，《与四值模态代数相关的两种逻辑的希尔伯特式公理化》，《Studia Logica》，第 102 卷第 3 期（2014），525–539。

[14] Da Costa, N.C.A.，《不一致形式系统》（葡萄牙语）。特许任教资格论文，1963年。1993年由 Editora UFPR 在库里奇巴再版。[15] Da Costa, N.C.A.，《不一致形式系统的命题演算》。巴黎科学院会议纪要，A辑，第257卷（1963年），3790–3792。[16] Figallo, M.，《四值模态逻辑的无割序列演算与自然演绎》。Studia Logica，109，1347–1373（2021）。https://doi.org/10.1007/s11225-021-09944-3[17] Figallo, A.V. 和 Landini, P.，《关于广义 I-代数与四值模态代数》。《数理逻辑报告》29（1995年），3–18。[18] Figallo, A.V. 和 Ziliani, A.，《对称四值模态代数》。《智利数学会通讯》第10卷第1期（1991年），133–141。[19] Font, J.M. 和 Rius, M.，《源自 Monteiro 的 last 代数的一种四值模态逻辑》。载于：第20届国际多值逻辑研讨会论文集（夏洛特，1990年），IEEE计算机学会出版社，85–92页，1991年。[20] Font, J.M. 和 Rius, M.，《四值模态逻辑的抽象代数逻辑方法》。《符号逻辑杂志》第65卷第2期（2000年），481–518。[21] Gastaminza, M.L. 和 Gastaminza, S.，《以蕴涵和否定刻画德摩根格》。日本学士院院刊，第44卷第7期（1968年），659–662。[22] Jansana, R.，《命题后承关系与代数逻辑》，《斯坦福哲学百科全书》（2011年春季版），E.N. Zalta（编）。http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/consequence-algebraic/[23] Lemmon, E.J. 和 Scott, D.，《模态逻辑导论》。载于：Lemmon 笔记，K. Segerberg（编）。《美国哲学季刊》专著丛书第11卷。牛津：Basil Blackwell，1977年。[24] Loureiro, I，《四值模态代数》。博士论文，里斯本科学学院，1983年。[25] Loureiro, I.，《四值模态代数的同态核》。Portugaliae Mathematica，39（1980年），371–377。[26] Montgomery, H. 和 R. Routley，《正规模态逻辑的偶然性与非偶然性基底》。Logique et analyse，9（1966年），318–328。[27] Odintsov, S. P. 和 Wansing H.，《具有贝尔纳普真值的模态逻辑》。《应用非经典逻辑杂志》，20(3)：279–301，2010年。[28] Odintsov, S. P. 和 Wansing H.，《厘清基于 FDE 的容矛盾模态逻辑》。Studia Logica，105(6)：1221–1254，2017年。

[29] Priest, G.，《多值模态逻辑：一种简单方法》。《符号逻辑评论》，1(02)，2008年。[30] Rivieccio, U、Jung A. 和 Jansana, R.，《四值模态逻辑：Kripke 语义与对偶性》。《逻辑与计算杂志》，27(1)：155–199，2015年6月。[31] Smullyan, R.M.，《一阶逻辑》。柏林：施普林格出版社，1968年。1995年由 Dover Publications 在纽约推出修订再版。[32] Troelstra, A. S. 和 Schwichtenberg, H.，《基本证明系统》。英国剑桥：剑桥大学出版社（1996年）。[33] Ziliani, A.，《四值单模态德摩根代数》。博士论文，南方国立大学（巴伊亚布兰卡），2001年。