arXiv:2305.00248v1 [math.DS] 29 Apr 2023

描述集合论与动力系统中的开放问题

Jérôme Buzzi、Nishant Chandgotia、Matthew Foreman、Su Gao、Felipe García-Ramos、Anton Gorodetski、François Le Maitre、Federico Rodríguez-Hertz 和 Marcin Sabok

摘要

本文档汇集了在 2022年于加拿大班夫举行的“描述集合论与光滑动力学的相互作用”研讨会期间提出或受到关注的问题。

目录

1 分类 2

1.1 拓扑共轭.2 1.1.1 光滑动力学.2 1.1.2 康托尔极小系统.3 1.1.3 有限型移位.4 1.2 博雷尔共轭.4 1.3 测度同构.5 1.4 Kakutani 等价.6

2 结构 6

2.1 完全正熵.6 2.2 Kakutani类.7

3 群作用 7

3.1 自由群.7 3.2 遍历 $\mathbb{Z}^2$ 作用的共轭.7

4 波兰群 8

4.1 轨道等价关系.8 4.2 全群.9 4.3 拓扑全群.10

5 实现与普适性 **11**
5.1 光滑实现.11 5.2 唯一遍历作用.12 5.3 普适性.12 5.4 嵌入具有非一致规范性的系统 12

6 致谢 **14**

1 分类

1.1 拓扑共轭

1.1.1 光滑动力学

-本小节由 *Anton Gorodetski* 撰写

在斯德哥尔摩举行的国际数学家大会（1962年）上，斯蒂芬·斯梅尔提出了一项计划：研究给定流形 [40] 上微分同胚的拓扑共轭类。这项计划的动机来自一个相关问题，即研究给定流形上微分方程解的定性行为。

鉴于近期的发展 [15], ，人们应当预期，在给定闭流形（紧致且无边界）M 的光滑微分同胚空间 Diff$^\infty$(M) 上，由拓扑共轭定义的等价关系并非博雷尔关系，因此不可能进行任何合理的分类。然而， [15] 中所采用的构造本质上使用了 C^∞手术，因而无法直接推广到例如实解析微分同胚的情形。因此，第一个问题是：

问题 1.1（Gorodetski）：是否存在一种方法，能够通过完备不变量，对给定闭流形 M（维数为 $M \geq 2$）上的实解析微分同胚 ***Diff***$^\omega$（M）进行分类？***Diff***$^\omega$（M） 上由拓扑共轭给出的等价关系是博雷尔关系吗？

在提出下一个问题之前，我们先回顾一下：闭流形 M 上的微分同胚若每个周期轨道都是双曲的，且任意两个周期轨道的稳定流形和不稳定流形均横截相交，则称其为 Kupka-Smale 微分同胚。已知，对于每个 $r = 1$、2、.....、∞，给定流形 M上的 Kupka-Smale 微分同胚构成 Diff^r(M) 的一个稠密 G_δ 子空间，参见 [28] 和[41]。

问题 1.2 (Gorodetski)。给定闭流形上的 ***Kupka-Smale*** 微分同胚空间，能否通过完全不变量在拓扑共轭意义下对其进行分类？在 ***Kupka-Smale*** 微分同胚空间中，拓扑共轭是否为博雷尔等价关系？

Kupka-Smale 微分同胚空间是 Diff^r(M) 中一个非常特殊的稠密 G_δ 子集。提出一个更一般的问题是合理的：

问题 1.3 (Gorodetski)。 在 $Diff^{\infty}(M)$（维数为 $M \geq 2$）中，是否存在一个开稠密子集（或稠密 G_δ子集），使得该子集上的拓扑共轭所定义的等价关系是博雷尔的?

-接下来的两个问题由 *Matt Foreman* 提出，并且与前一个问题有关。

问题 1.4 (Foreman)。 *Axiom A* 系统的拓扑共轭关系有多复杂?

问题 1.5 (Foreman)。 设 $\mathcal{C}$ 为紧流形 M 上所有与某个结构稳定微分同胚拓扑共轭的微分同胚的集合。设 E 为限制在 $\mathcal{C}$上的拓扑共轭关系。 E是否博雷尔可约于 $\approx$ （相等关系）？

1.1.2 康托尔极小系统

本小节由 *Su Gao* 撰写。

问题 1.6 (Gao)。 所有康托尔极小系统的拓扑共轭关系是博雷尔关系吗?

Kaya [27] 证明了，所有带基点的坎托极小系统的拓扑共轭关系是博雷尔等价关系。事实上，他证明了该关系与 $=^+$ 博雷尔双可归约。但上述一般问题的答案似乎仍然未知。

问题 1.7 (Gao)。所有坎托极小系统的拓扑翻转共轭关系是博雷尔的吗?

据我所知，这个问题的答案尚不明确。Giordano、Putnam 和 Skau 的开创性工作 [18] [19] 开启了一系列研究，运用代数方法探讨拓扑轨道等价与翻转共轭关系。最引人注目的成果包括 Bezuglyi–Medynets [3], 、Juschenko–Monod [25], 和 Matui [31], 的工作，他们证明翻转共轭关系可以由这些系统的拓扑全群分类；或者说，可以由拓扑全群的换位子群分类，而这些换位子群最终被证明是无限的单可测群。然而，包含所有可数无限单可测群的类别是否是博雷尔完备的，尚不得而知。

问题1.8 （Gao）。 所有极小子移位上的拓扑共轭关系是超有限的，还是普适的可数博雷尔等价关系?

根据 Clemens 的结果 [11] ，所有子移位之间的拓扑共轭关系是一种通用的可数博雷尔等价关系。众所周知（例如，[17] [42]）， E_0 博雷尔可约到所有极小子移位之间的拓扑共轭关系。因此，在博雷尔可约层级中， E_0 是这一等价关系的下界， E_∞ 是其上界。其确切复杂度尚不清楚。

1.1.3 有限型子移位

利用矩阵的移位等价，可以刻画两个有限型移位何时共轭 [43]。但这并未给出一个（有限时间内的）算法。

问题 1.9 (Foreman)。 是否存在一种算法，能够判断两个有限型子移位是否通过同胚共轭?

1.2 博雷尔共轭

-本小节由 *Jérôme Buzzi* 撰写。

我对动力系统中许多结果的理解是，困难或不可能的分类问题源于双曲动力系统，更准确地说，源于 Lyapunov 指数为零的点，或从遍历理论的角度看是非规则的点（即伯克霍夫定理和奥塞列德茨定理中的零测集）。请注意，这个非规则子集可以承载许多动力学行为，其中某些情况下，这些行为在 Borel 同构意义下可以变得不可见。事实上，双曲部分，即使是非一致双曲的，也可以归约为伯努利系统，从而可以应用奥恩斯坦理论。这种归约依赖于编码（特别参见 [39]）和博雷尔生成元理论（尤其参见 [23]）。

下面我列出一些由多位学者先前的工作引出的结果和自然问题。

我的目标是征求大家对以下陈述的意见：

1. 这些优美的分类是否仅限于适当放宽的有趣情形?
2. 相关不变量具有博雷尔性质，是否像我认为的那样显而易见?
3. 能否利用它们来陈述并证明**更强同构概念下的相对博雷尔分类**？

定义 1.10. 若存在一个博雷尔自同构 $\psi\colon M \to M$ st $g \circ \psi = \psi \circ f$，则称微分同胚 $f, g \in \mathrm{Diff}(M)$ 博雷尔共轭，记作 $f \sim_B g$。

以下是与 Mike Boyle 合作的成果的一个直接推论[4] （前提是我对自己的表述理解无误）：

定理 1.11. 设 $\mathscr{A}$ 为某个闭曲面 M 上的 C^∞ 微分同胚集合，其中的微分同胚都是拓扑混合的，且具有正拓扑熵。$(\mathscr{A}, \sim_B)$ 是博雷尔的

证明。 由 [7], 对所有 f、$g \in \mathscr{A}$，我们有 $f \sim_B g \iff h_{\top}(f) = h_{\top}(g)$ 和 $|Fix(f^n)| = |Fix(g^n)|$ 对所有 n。这里的机制是，可以将“坏”的动力系统（非双曲且非规则）嵌入具有正熵且无周期的“好”动力系统中。这些都是博雷尔不变量。□

注 1.12。 我认为，在保守系统中同样如此，只需用度量熵代替拓扑熵（见 [36]）。

一般来说，似乎不可能忽略“坏动力学”（例如，它可能具有最大熵，或周期小于“良好动力学”的周期）。因此作出如下定义。

定义 1.13。 Borel 子集 B 称为几乎满的，如果对所有双曲（即没有零 Lyapunov 指数的）（不变 Borel 概率）测度，都有 $\mu(B) = 1$ 。

若存在几乎满的 Borel 子集 $X \subset M$、 $Y \subset M$，以及一个 Borel 同构 $\psi\colon X \to Y$，使其为共轭： $g \circ \psi = \psi \circ g$，则称两个微分同胚 f、 $g\colon M \to M$ 几乎 ***Borel*** 共轭。记作 $f \sim_{aB} g$。

对于曲面微分同胚，根据 Ruelle 不等式，若一个遍历测度具有零指数，则其熵为零（这在更高维的一般情形下并不成立）。

几乎定理令 $\mathscr{B}$ 为 C^∞ 曲面微分同胚的集合。
那么 $(\mathscr{B}, \sim_{aB})$ 是 Borel 的。

证明（大致如此）。 根据 Katok 马蹄定理的一个版本，每个双曲测度都属于某个同宿类。

从 [7], 每个同宿类恰有一个具有相同周期的最大熵测度。通过列出所有同宿类的拓扑熵和周期，可以得到几乎博雷尔共轭类。

我认为，可以通过确定马蹄的集合、它们的熵和周期，以及它们如何嵌套来实现。

□

注 1.14。 利用 [6] ，应该能够对耗散的 C^∞ 曲面微分同胚按保体积 几乎博雷尔共轭进行分类。

几乎定理设 $\mathscr{C}$ 为闭流形上的 C^2 微分同胚集合。那么$(\mathscr{C}, \sim_{aB})$ 是博雷尔的。

证明（大致如此）。 与之前相同，不过必须判定哪些同宿类具有最大熵测度（这些类更为抽象一些，即 [7]的可测同宿类）。我认为，根据 [4]中构建的按周期对流形进行的 Borel 分割，这些存在性性质仍然是博雷尔的。

□

问题 1.15 (Buzzi)。 我猜想，如果用度量熵而非拓扑熵，并且只舍弃 ***Lebesgue*** 测度为零的集合，那么类似的结论也成立（见 *[36]*）；至少在二维情形下是如此，因为我们最近得到了结果 *[6]*。

1.3 测度同构

K-自同构是一种保测动力系统，其中每个非平凡因子都具有正熵。每个伯努利过程都是 K-自同构，但反过来并不成立。

问题 1.16 (Newberger)。 将测度同构限制在 K-自同构上，是否构成博雷尔等价关系？它能否归约为一个 S_∞-作用？

问题1.17. 单位区间上的遍历保测变换之间的测度同构关系，是否与极大波兰群作用双向可约？

1.4 Kakutani 等价

已知 Kakutani 等价关系是一个完备解析集，因此不是博雷尔集 [21]。

问题1.18. 遍历保测变换上的 *Kakutani* 等价关系，在解析等价关系中处于什么位置？它能否约化到一个 S_∞-作用？

2 结构

2.1 完全正熵

本小节由 *Felipe García-Ramos* 撰写。

给定一个流形 X，我们用 $C^k(X, X)$ 表示从 X 到 X 的所有 C^k 函数所组成的集合，并赋予其一致拓扑。

我们称 $f \in C^k(X, X)$ 具有 **完全正熵**，如果每个非平凡因子都具有正拓扑熵。我们用 $\mathrm{CPE}^k(X)$ 表示这类函数的集合。

空间 $\mathrm{CPE}^0(X)$ 包含所有具有规范性的系统，以及 K 系统的任意拓扑模型或支撑。

定理 2.1 (Darji 和 García-Ramos [12])。 对于每个 n，$\mathrm{CPE}^0(\Pi^n)$ 都是完备余解析的（因此不是博雷尔集）。

对于其他紧致可定向流形上的 Lipschitz 连续函数，证明同样成立，但我们不知道光滑函数的情形如何。

问题 2.2 (García-Ramos)。 设 $k \geq 1$ 和 $n \geq 1$。CPE^k（Π^n）的复杂度如何？

具有完全正熵的系统未必是混合的。实际上，一旦加入混合性，情况就不同了。

以下结果是 Blokh 的一个结果以及混合映射（记作 Mix）构成一个博雷尔族这一事实的推论（见 [12]）。

定理 2.3。 $\mathrm{CPE}(\Pi) \cap \mathrm{Mix}$ 是博雷尔的（其中 Π 是单位圆）。

我们可以将这一结果与以下结果进行对比。

定理 2.4 (Darji 和 García-Ramos [12])。 设 X 为康托空间。我们有，$\mathrm{CPE}^k(X) \cap$ 混合 不是博雷尔集。

问题 2.5 (García-Ramos)。 设 $k \geq 0$ 和 $n \geq 2$。$\mathrm{CPE}^k(\Pi^n)$ ∩混合是博雷尔的吗?

当 $k = \infty$ 和 $n = 2$ 时，答案可能是肯定的。Buzzi、Crovisier 和 Sarig [7] 证明， Π^2 上的混合映射有唯一的最大熵测度，且该测度是伯努利的（因此具有 K性质）。如果支撑是满的，这就意味着 $\mathrm{CPE}^\infty(\Pi^2)$ ∩混合只是 Π^2上的混合映射，因此这个集合是博雷尔的。不过，我不确定最大熵测度的支撑是否是满的。

问题 2.6 (García-Ramos)。 对于环面上的每个光滑混合映射，最大熵测度是否具有满支撑（$f \in C^\infty(\Pi^2, \Pi^2)$）？

2.2 Kakutani类

问题 2.7 (RodriguezHertz)。 *Kakutani*等价类是博雷尔的吗？如果是，该类上的同构关系具有怎样的复杂度?

里程表的 Kakutani 类就是零熵松散伯努利系统。根据 Feldman 和 Katok 的 $\overline{f}$ 刻画，这似乎是博雷尔的。

3 群作用

3.1 自由群

问题 3.1 (Foreman)。 设 X 为自由群 F_2 在两个生成元上的连续作用空间。伯努利作用中与伯努利 F_2-作用测度同构的那些作用构成的集合是博雷尔集吗？（博雷尔作用呢？）

3.2 遍历 $\mathbb{Z}^2$ 作用的共轭

本小节由 *Nishant Chandgotia* 撰写。

$\mathbb{Z}^2$ 作用的共轭关系，与 $\mathbb{Z}$作用的共轭关系相比有多复杂?

让我试着为这个模糊的问题指明一些方向。以下我们将重点讨论满移位 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ 在其自由部分上的 $\mathbb{Z}^2$ 移位作用，并将其记为 X_2。移位作用将记为 σ。我接下来要说的一切都可以推广到波兰空间上的自由 $\mathbb{Z}^d$ 作用，但为求简洁，我们还是限于上述情形。

将 $\mathbb{Z}^2$ 同时视为一个群和一个以标准生成元为边的有向 Cayley 图。有向双无限哈密顿路径是 $\mathbb{Z}^2$ 的一个连通子图，其顶点集与 $\mathbb{Z}^2$ 相同，且每个顶点恰有一条入边和一条出边。这些路径上存在自然的 $\mathbb{Z}^2$ 平移作用。令 X_H 表示所有有向双无限哈密顿路径构成的空间。

我听说 Brandon Seward 提出了以下结果。

定理 3.2. *[20]* 存在一个博雷尔等变映射 Φ，从 (X_2, σ) 到 (X_H, σ)。

这一结果的一个推论是，它给出了从 (X_2, σ) 到一个 $\mathbb{Z}$ 波兰动力系统的（非常特殊的）轨道等价，我们今后将其记为 (X_2, T_Φ)。此外，如果 μ 是 (X_2, σ) 的不变遍历概率测度，那么它也是 (X_2, T_Φ) 的不变遍历概率测度。令 $\mathcal{M}_e$ 表示 (X_2, σ) 的不变概率测度空间。下面是一个相当（大胆）的问题。

问题 3.3 (Chandgotia)。能否选择 Φ，使得对于所有 $\mu, \nu \in M_e$（X_2, μ, σ）与（X_2, ν, σ）共轭，当且仅当（X_2, μ, T_Φ）与（X_2, ν, T_Φ）共轭?

4 波兰群

4.1 轨道等价关系

本小节由 *Marcin Sabok* 撰写。

给定一个标准概率空间 (X, μ)，群 $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ 通过共轭作用在自身上，并由此诱导出一个轨道等价关系。Foreman、Rudolph 和 Weiss [14] 证明了，$\mathrm{Aut}(X, \mu)$ 中与其逆元同构的遍历元素构成一个完备解析集，这意味着该轨道等价关系是 $\mathrm{Aut}(X, \mu)\times\mathrm{Aut}(X, \mu)$ 的完备解析子集。另一方面，在 [16] Foreman 和 Weiss 证明，群 $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ 通过共轭作用于 $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ 的遍历元素上的作用，按照 Hjorth 的意义是湍流的。

一般而言，给定一个波兰群在标准博雷尔空间上的博雷尔作用，我们考察其诱导的轨道等价关系。若每个轨道等价关系都博雷尔可约到 E，则称轨道等价关系 E 是完全的。

猜想 4.1 (Sabok)。$\mathrm{Aut}(X, \mu)$ 通过共轭作用于自身的作用，是一个完全轨道等价关系。

在 [38] 中证明了，肖凯单纯形之间的仿射同胚构成一个完全轨道等价关系。回顾一下，根据 Downarowicz[13] 的结果，每个肖凯单纯形都可以实现为某个（托普利兹）子移位上的不变测度单纯形；然而，这种构造并不是将肖凯单纯形的仿射同胚 Borel 约化为子移位共轭的 Borel 约化。事实上，这种约化不可能存在，因为子移位的拓扑共轭是一个可数博雷尔等价关系。不过，似乎有理由相信，若将子移位换成更复杂的系统，可能就能在可测动力系统的意义下，将肖凯单纯形的仿射同胚约化为这些系统之间的共轭。

上述猜想与这样一个问题有关：哪些群能够诱导完全轨道等价关系。回想一下，若每个波兰群都能嵌入 G，则波兰群 G 称为普遍波兰群。目前尚不清楚，是否存在一个

非普遍波兰群能够诱导完全轨道等价关系。注意，希尔伯特可分空间 H 上的酉算子群 $U(H)$并非普遍波兰群，因为存在一些波兰群（例如所谓的奇异群）不允许任何非平凡的希尔伯特空间上的表示。然而，Aut(X,μ)可通过 Koopman 表示嵌入 $U(H)$。因此，上述猜想对 [38, 问题 9.3] 给出了肯定答案: 群 $U(H)$能否诱导完全轨道等价关系

4.2 全群

以下两个小节由 *François Le Maitre* 撰写。

Dye 定理指出，在共轭意义下，标准概率空间 (X,μ) 上任意两个遍历保测变换都具有相同的轨道。这个结论可以改述如下。先固定一个遍历变换 T_0，并将其全群 $[T_0]$ 定义为由双可测双射 $U\colon X \to X$构成的群，其中对所有 x，点 $U(x)$ 都属于 T_0 的轨道。于是，每个遍历保测变换都共轭于 $[T_0]$ 中的某个元素，且该元素的轨道与 T_0 的轨道相同。这引出了 Thouvenot 提出的下述问题。简言之，该问题是在问，Ornstein 精妙的理论工具能否在 $[T_0]$ 内发挥作用。

问题 4.2 （Thouvenot）。令 T_1，T_2 为两个熵相等的伯努利移位，并假设它们与 T_0 具有相同的轨道。是否存在 $T \in [T_0]$ 使得$T_1 = TT_2T^{-1}$?

更一般地，人们可以思考群 Aut(X,μ)（由所有保测变换组成）上的共轭关系与 $[T_0]$ 上的共轭关系之间有什么联系。

问题 4.3。 $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ 上的共轭关系能否 *Borel* 约化到 $[T_0]$ 上的共轭关系？如果将范围限制为遍历变换，结论是否仍然成立？

这个问题对于否定 Sabok 关于 Aut(X,μ) 上的共轭关系具有普适性的猜想尤其重要。事实上，若答案为肯定，则由于 $[T_0]$ 具有双不变相容度量（由 $d_u(S,T) = \mu(\{x \in X\colon S(x) \neq T(x)\})$ 给出，参见例如 [26, 命题 3.2]），它所诱导的等价关系不可能对波兰群作用具有普适性；这一结论来自 Allison 和 Panagiotopoulos 的工作 [1]。实际上，他们的工作还提出了一种湍流的动力学类比，称为 不平衡性，它排除了到由具有相容双不变度量的波兰群作用所产生的等价关系的 Borel 约化。因此，对下述问题的肯定回答意味着对问题 4.3 的否定回答。

问题 4.4。 $X\mathrm{Aut}(X,\ \mu)$ 在自身上的共轭作用是否不平衡？如果是，将其限制在遍历变换上时是否仍然不平衡?

若以下问题的答案为肯定，则根据 [14]，问题 4.3 的答案也将为否定。

问题 4.5. $[T_0]$ 上的共轭关系是博雷尔的吗？如果不是，将其限制在遍历变换上时是否如此？

有关 $[T_0]$ 上共轭关系的其他性质，尤其是湍流，请参见 [26, 第 5]章。

4.3 拓扑全群

康托尔空间上的极小可数离散群作用的拓扑全群及其子群，已被证明是可数群的宝贵例子来源 [31, 25, 33, 34]。定义如下：给定一个可数群 Γ 及其在康托空间 $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上的连续作用 $\Gamma \curvearrowright X$，该作用的**拓扑全群** 由康托空间上的所有同胚 h 组成，且存在 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 的既开又闭划分 $(U_1, \ldots, U_n)$，使得$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ 满足

$$\text{for all } x \in U_i, h(x) = \gamma_i \cdot x.$$

等价地，h 属于该作用的拓扑全群，当且仅当存在一个映射 $c_h\colon X \to \Gamma$，使得 c_h 是连续的，并且对所有$x \in X$，$h(x) = c_h(x) \cdot x$。该映射 c_h 称为 h 的**余循环**；当 Γ-作用是自由作用时，方程 $h(x) = c_h(x) \cdot x$ 唯一确定该映射。需要注意的是，连续性是 c_h 的一项基本假设：没有这一假设，我们会得到一个不可数群，它甚至可能不具有波兰群拓扑，或者不是博雷尔 [24]。

有人指出，只要我们用一个连通空间替换 X，拓扑全群就等于作用群，因为作用群是可数离散的。但如果作用群不是离散的呢，例如实数直线？事实证明，Matte-Bon 和 Triestino 研究过这个问题，针对康托尔极小系统上的悬挂流，他们证明可以得到一个波兰群[1]，而且这个群是他们在附录 A]中构造的 Thompson 群 T 类似物的一种自然完备化。

更一般地，可以采用 [8] 中的方法证明：给定一个连续作用于紧波兰空间 X的波兰群 G，可以为其关联一个波兰群，即该作用的拓扑全群。当作用是自由的时，这个群由保持 G-轨道且余循环连续的同胚构成。当作用不是自由的时，这个群由保持 G 轨道且允许存在连续余循环的同胚构成。我们简要概述这一构造，并假定读者对 [8, 第 3 节2]有所了解。

构造概要。由 X 到 G 的连续映射群 $\mathcal{C}(X, G)$ 在紧开拓扑下是一个波兰群。由 X 到 X 的连续映射集合 $\mathcal{C}(X, X)$ 在紧开拓扑下也是波兰空间。Homeo(X)

[1]正如他们在引言中所解释的，这个波兰群最初被定义并研究为悬挂空间上与恒等映射同伦的同胚所构成的群，但后来发现，它等于保持流的轨道且具有连续余循环的同胚所构成的群。

是其中的一个 G_δ，因为它在紧开拓扑下是波兰的。它通过预复合在 $\mathcal{C}(X,G)$ 上连续作用。

我们有一个自然映射 $\Phi\colon\ \mathcal{C}(X,G)$ 到 $\to \mathcal{C}(X,X)$，定义为 $f\mapsto(x\mapsto f(x)\cdot x)$。这样的映射是连续的，因此 $\mathrm{Homeo}(X)$ 的原像是 G_δ in $\mathcal{C}(X,G)$。我们称之为

$$\widetilde{[G]}_c := \Phi^{-1}(\mathrm{Homeo}(X))$$

该作用的 **预完全群**（它恰好是那些保持 G-轨道、且允许存在此类连续余循环的同胚所对应的连续余循环的空间）。作为波兰空间的一个 G_δ 子集，它是波兰空间。

现在考虑其上的群运算 $\widetilde{[G]}_c$，它由相应同胚的复合所诱导，即

$$f\cdot g(x) = f[\Phi(g)(x)]g(x) = f(g(x)\cdot x)g(x).$$

由于 Φ 连续，且 $\mathrm{Homeo}(X)$ 在 $\mathcal{C}(X,G)$ 上连续作用，这一乘法是连续的，因此我们得出预完全群是一个波兰群。现在，该作用的 **拓扑全群**是预完全群对闭正规全群取商所得的群；该闭正规全群由满足 f使得 $\Phi(f)=\mathrm{id}_X$ 的元素组成。因此它是一个波兰群，其拓扑显然比 $\mathrm{Homeo}(X)$ 上的紧开拓扑更精细。

□

问题 4.6。关于这些拓扑全群，我们能说些什么，尤其是当作用群为实数直线时？例如，按照 *[37]* 的意义，它们何时粗有界？它们何时包含稠密有限生成群[2]？这样的群有多少[3]？能否对它们通过同胚给出的作用进行分类？

请注意，当作用具有更多结构时，例如与某个向量场相关联的流，研究具有更严格正则性条件的全群也会很有意义；例如，其元素可以是带有 $\mathcal{C}^1$ 余循环的 $\mathcal{C}^1$ 微分同胚。

5 实现与普适性

5.1 光滑实现

本小节内容摘自费德里科·罗德里格斯·赫茨在前述会议开放问题讨论环节提出的问题

设 (I,λ) 为区间上的勒贝格空间，(Π^n,λ_n) 为 n 维环面上的勒贝格空间。$\mathrm{Aut}_{h<\infty}(I,\lambda)$ 是具有有限熵的 I 保测自同构空间，而 $\mathrm{Diff}(\Pi^n,\lambda_n)$ 是 Π^n 上的保测微分同胚空间。

问题 5.1 (Rodriguez Hertz)**：** 是否存在一个博雷尔映射 $G:\ \mathit{Aut}_{h<\infty}(I,\ \lambda)\to\bigcup_n \mathit{Diff}(\Pi^n,\ \lambda_n)$，使得 $(I,\ \lambda,\ T)$ 与 $(\Pi^n,\ \lambda_n,\ G(T))$ 同构？

[2]参见 [32, 定理 A]，其中对康托空间上的悬挂流给出了部分答案。[3]参见 [32, 第 10] 节，其中对康托空间上的悬挂流给出了完整答案。

似乎没有迹象表明这一结果成立，因此可能需要限制（自同构的）类；例如，我们可以只考虑 K-自同构。

目前尚未知道任何（非周期的）里程表是否能够被光滑实现。

问题 5.2 （Rodriguez Hertz）。是否存在一个博雷尔映射 G： $Aut_{h<\infty}(I, \lambda) \to \bigcup_n Diff(\Pi^n, \lambda_n)$，使得 (I, λ, T) 与 $(\Pi^n, \lambda_n, G(T))$ *Kakutani*等价?

这似乎又是一个复杂的问题，唯一的优势在于，在这种情况下，里程表可以通过环面上的旋转来实现。

问题 5.3 （RodriguezHertz）。如果一个保测系统可以通过*Kakutani*实现，我们能否推断它也可以通过同构实现?

5.2 唯一遍历作用

Krieger生成元定理允许你用子移位实现有限熵保测系统。更精细的构造（Jewett-Krieger定理）则允许你用唯一遍历拓扑动力系统实现保测变换。

一般群作用的 Krieger 生成元型定理已为人所知。

问题 5.4 (Seward)。对于自由群的每个保测群作用，是否都存在唯一遍历的拓扑模型?

5.3 普适性

普适性与实现类似，但这里我们在选择 G 像集上的测度时有更大的灵活性；也就是说，要实现的测度要求具有全支撑，但不一定是 Lebesgue 测度。在这个意义上，已知具有 SL(2, $\mathbb{Z}$) 矩阵的二维环面光滑微分同胚，对于有限熵保测变换是普适的。这个论证是 Krieger生成元定理的一种改进。Soo-Quas 还取得了另一项正面结果。

问题 5.5 (RodriguezHertz)。哪些系统族具有普适性?

下一小节也与普适性有关。

5.4 嵌入具有非一致规范性质的系统

本小节由 *Nishant Chandgotia* 撰写。

问题 5.6。 *[10]* 设$(\mathbb{T}^d, R)$ 是一个关于 *Lebesgue* 测度遍历的环面自同构。设(Y, S) 是一个没有任何不变概率测度的波兰空间上的同胚。是否存在一个等变博雷尔嵌入，将(Y, S) 嵌入$(\mathbb{T}^d, R)$?

Hochman [22] 证明了可以实现这样的嵌入，只需将环面自同构 $(\mathbb{T}^d, R)$ 替换为满移位 $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$（或更一般地，替换为混合有限型移位）。据此，我认为当 R 是双曲时，问题 5.6 的答案显然是肯定的。挑战来自非双曲情形 [29, 30]中缺乏符号编码。

走出可压缩情形后，在 [35] Quas 和 Soo 证明，对于任意“适当的”波兰作用 (Y, S)，存在一个从 (Y, S) 到 $(\mathbb{T}^d, R)$ 的等变博雷尔嵌入，且允许忽略一个 μ-零测集，其中 μ 是一个不变概率测度。为证明这一点，他们关键地利用了遍历环面自同构满足一种良好的混合性质，即非一致规范性。

设 X 是一个紧致度量空间。我们称一个 $\mathbb{Z}$-作用 (X, T) 满足非一致规范性，如果存在一列递增函数 $g_n : (0,1) \to (0, \infty)$，并满足以下条件：

- 对于每个 $\epsilon > 0$，$\lim_{n\to\infty} g_n(\epsilon) = 0$，
- 对于每个 $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$，$i_1, \dots, i_s \in \mathbb{Z}$ 和 $\epsilon > 0$，满足

$$\{i_1 + (1 + g_{n_1}(\epsilon))[1, n_1], \dots, i_s + (1 + g_{n_s}(\epsilon))[1, n_s]\}$$

两两不相交，并且对于任意 x_1，.....，$x_s \in X$，都存在 $x \in X$，使得 $d_X(T^{i_j+t}(x)\ T^{i_j+t}(x_j)) < \epsilon$，对所有 $1 \le t \le n_j$ 和 $1 \le j \le s$ 均成立。

Quas 和 Soo 曾询问，他们的结果能否推广到具有非一致规范性的拓扑动力系统。Burguet [5] 肯定地证明了这一点。Burguet 证明的结果超出了 Quas 和 Soo 所询问的范围：他表明，在熵满足适当条件时，任意自由的波兰 $\mathbb{Z}$-作用 (Y, S) 都可以模去一个全局零测集嵌入到具有非一致规范性的系统中（也就是说，该集合对于所有不变概率测度而言都是零测集）。自然地，一个问题随之而来：嵌入能否推广到整个空间?

我们指出，甚至连下面这个问题的答案，我们目前也不知道。

问题 5.7。 *[10]* 设 $(\mathbb{T}^d,\ R)$ 是一个关于 *Lebesgue* 测度遍历的环面自同构。设 $(Y,\ S)$ 是波兰空间上的一个同胚，且没有任何不变概率测度。是否存在一个等变博雷尔映射，将 $(Y,\ S)$映入$(\mathbb{T}^d,\ R)$的自由部分?

我们与 Tom Meyerovitch 一起，为 David Burguet 在 [9] 中的结果给出了另一种证明，并引入了一种称为灵活性的、类似规范性的性质。我们使用逼近方法来构造嵌入：在构造的每个阶段，我们都会修改空间一小部分上的近似嵌入，最后利用博雷尔–坎泰利引理，确保对于任意不变概率测度，近似不收敛的空间部分的测度均为零。此类方法无法用于构造波兰作用的嵌入，因为在这种情形下，博雷尔–坎泰利引理没有替代方案。

6 致谢

我们感谢 BIRS 行政部门在举办“描述集合论与光滑动力学的相互作用”研讨会期间提供必要的支持。

参考文献

[1] S. Allison 和 A. Panagiotopoulos。由（上）同调及其他 TSI 群不变量进行分类的动力学障碍。《美国数学会汇刊》，374(12):8793–8811，2021年。[2] S. Benovadia。紧致光滑流形上的非一致双曲微分同胚的符号动力学。《现代动力学杂志》*13:43-113*，2018年。[3] S. I. Bezuglyi 和 K. Medynets。康托尔极小系统的全群、翻转共轭与轨道等价，《数学讨论》110:409–420，2006年。[4] M. Boyle 和 J. Buzzi。曲面微分同胚、马尔可夫移位及其因子的几乎博雷尔结构。《欧洲数学会杂志》*19(9):2739–2782*，2017年。[5] D. Burguet。具有弱规范性质的系统的拓扑普适性与几乎博雷尔普适性。《遍历理论与动力系统》，40(8):2098–2115，2020年。[6]D. Burguet。C^∞ 曲面微分同胚的 SRB 测度。*arXiv:2111.06653*[7] J. Buzzi、S. Crovisier 和 O. Sarig。曲面微分同胚的最大熵测度。《数学年刊》*195(2):421-508*，2022年。[8] A. Carderi 和 F. Le Maître。更多波兰全群。《拓扑学及其应用》，202:80–105，2016年。[9] N. Chandgotia 和 T. Meyerovitch。通过规范性及其推广，紧致 $\mathbb{Z}^d$系统的博雷尔子系统与遍历普适性。《伦敦数学会会刊》，123(3):231–312，2021年。[10] N. Chandgotia 和 S. Unger。子移位中系统的博雷尔因子与嵌入。*arXiv:2203.09359*。[11] J. Clemens。子移位同构是一种普适的可数博雷尔等价关系，《以色列数学杂志》170:113–123，2009年。[12] U. Darji 和 F. García-Ramos。局部熵理论与描述集合论复杂性。*arXiv:2107.09263*。

[13] T. Downarowicz。极小流的不变测度肖凯单纯形。《以色列数学杂志》，74:241–256，1999年。[14] Matthew Foreman、Daniel Rudolph 和 Benjamin Weiss。遍历理论中的共轭问题。《数学年刊》，173(3):1529–1586，2011年。[15] M. Foreman 和 A. Gorodetski。进行中的工作。[16] M. Foreman 和 B. Weiss。关于遍历保测变换的反分类定理。《欧洲数学会杂志》，6.3:277–292，2004年。[17] S. Gao 和 A. Hill。秩一系统的拓扑同构，《数学分析杂志》128:1-49，2016年。[18] T. Giordano、I. F. Putnam 和 C. F. Skau。拓扑轨道等价与 C^*交叉积，《纯粹与应用数学杂志》469:51-111，1995年。[19] T. Giordano、I. F. Putnam 和 C. F. Skau。康托尔极小系统的全群，《以色列数学杂志》111:285–320，1999年。[20] S. Gao、S. Jackson、E. Krohne 和 Brandon Seward。可数群作用的博雷尔组合学。即将出版。[21] M. Gerber 和 P. Kunde。关于 Kakutani 等价关系的反分类结果。*arXiv:2109.06086*。[22] M. Hochman。每个没有有限不变测度的博雷尔自同构都具有一个二集生成元。《欧洲数学会杂志》，21(1):271–317，2019年。[23] M. Hochman。每个没有有限不变测度的博雷尔自同构都具有一个二集生成元。《欧洲数学会杂志》*21(1):271–317*，2018年。[24] T. Ibarlucía 和 J. Melleray。极小同胚的全群与贝尔范畴方法。《遍历理论与动力系统》，36(2):550–573，2016年。[25] K. Juschenko 和 N. Monod。康托尔系统、分段平移与单可测群，《数学年刊》178:775–787，2012年。[26] A. S. Kechris。《遍历群作用的整体方面》，《数学综述与专著》丛书第160卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2010年。[27] B. Kaya。带标记康托尔极小系统的拓扑共轭复杂性，《数学逻辑档案》56(3):215–235，2017年。

[28] I. Kupka。《一般场论贡献》，《微分方程论集》*2* 457–484，1963 年。[29] E. Lindenstrauss 和 K. Schmidt。非膨胀群自同构的不变集与测度。《以色列数学杂志》，144(1):29–60，2004 年。[30] E. Lindenstrauss 和 K. Schmidt。非膨胀群自同构的符号表示。《以色列数学杂志》，149(1):227–266，2005 年。[31] H. Matui。关于 Cantor 极小系统的拓扑全群的若干注记 II，《遍历理论与动力系统》33（2013），1542–1549。[32] N. Matte Bon 和 M. Triestino。流的分片线性同胚群。《数学汇刊》，156(8):1595–1622，2020 年 8 月。[33] V. Nekrashevych。具有动力学起源的单群。《遍历理论与动力系统 *39(3):1-26*》，2017 年。[34]V. Nekrashevych。回文子移位与具有中间增长的单周期群。《数学年刊》187(3):667–719，2018 年。[35] A. Quas 和 T. Soo。某些拓扑动力系统的遍历普适性。《美国数学会汇刊》，368(6):4137–4170，2016 年。[36] F. Rodriguez-Hertz、J. Rodriguez-Hertz、A. Tahzibi 和 R. Urès。曲面传递微分同胚的 SRB 测度的唯一性，《数学物理通讯》*306:35–49*，2011 年。[37] C. Rosendal。伯格曼性质的一个拓扑版本。《数学论坛》，21(2):299–332，2009 年。[38] M. Sabok。可分 C*-代数同构问题的完备性。《数学创刊》，204.3:833–868，2016 年。[39] O. Sarig。具有正熵的曲面微分同胚的符号动力学。《美国数学会杂志》*26(2):41–426*，2013 年。[40] S. Smale。微分同胚的动力系统与拓扑共轭问题，*1963* 年国际数学家大会论文集（斯德哥尔摩，*1962* 年）[41] S. Smale。微分方程与微分同胚的稳定流形，《比萨高等师范学校年刊》，*17*: 97–116，1963 年。[42] S. Thomas。极小子移位的拓扑全群与近乎无限群，载于《第十二届亚洲逻辑会议论文集》，298–313。World Scientific Publishing，Hackensack，新泽西州，2013 年。[43] R.F. Williams。有限型子移位的分类。《数学年刊》。98（1973），120–153；勘误。" 《数学年刊》99：380–381，1974 年。