arXiv:2305.00272v1 [math.CT] 29 Apr 2023

Moore自动机半双范畴

Guido Boccali[1]、Bojana Femić[2]、Andrea Laretto[3]、Fosco Loregian[3]和 Stefano Luneia[4]

[1]都灵大学`，都灵，意大利
guidoboccali@gmail.com[2]塞尔维亚科学与艺术院，贝尔格莱德，塞尔维亚femicenelsur@gmail.com[3]塔林理工大学，塔林，爱沙尼亚anlare@ttu.ee, folore@ttu.ee[4]博洛尼亚大学`，博洛尼亚，意大利
stefano.luneia@gmail.com

2023年5月2日

摘要

我们研究自动机的半双范畴Mre：它由对象、1-胞和2-胞腔构成，这种结构在一维上本质上且无可挽回地是非幺的。

在 Moore 自动机半双范畴与性质更佳的双范畴 Mly 之间，有大量伴随关系：众所周知，分别刻画 Mre 和 Mly 定义的两类状态机之间存在本质等价；在范畴层面上，这种等价体现为伴随所诱导的不动点之间的等价，事实上，它表明 Mre($A,\ B$) 是 Mly($A,\ B$) 的余反射子范畴；这一伴随所诱导的余模态，只是双范畴 Mre 在一个可数的本质双局部化族 $\mathbb{s}^n$Mre $\subseteq$ Mre 中「类层级」滤过的第 0 步。我们概述一种生成这类具有内在意义的伴随关系的方法。我们使用 Agda 证明助手，将部分主要结果形式化。

1 引言

An集合与函数的 y 排列 $E \xleftarrow{d} A \times E,\ E \xrightarrow{s} B$ 可作如下解释 :

- E 作为一组“状态”，而 $A,\ B$ 则分别是“输入”和“输出”的集合；
- 函数 $d\colon E \times A \to E$ 是一个转移函数 （指定一种**动力学**），而函数$s\colon E \to B$ 则根据初始状态提供输出（指定一个最终**状态**）。

总而言之，($d,\ s$) 构成一个*Moore* 自动机 ，也称为穆尔“机器”。

这个定义可推广到 E, A, B 是同一个幺半范畴 $(\mathcal{K}, \otimes)$[Ehr+74] 中的对象的情形；当 $\mathcal{K}$ 是笛卡尔或半笛卡尔时，这种情形尤为值得关注：例如 $\mathcal{K} =$(拓扑空间范畴 $\times$)（此时 d, s 是连续的，尤其是我们可以将 f 看作 E 上的一个作用，

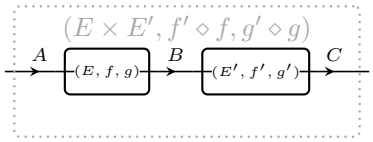
自由拓扑幺半群 A^* 由 A 生成，参见 [Reu79]）；[1] 也包括 $\mathcal{K} = (\mathsf{Cat}\ \times)$（此时 f, g 是函子，参见 [Boc+23a; Gui74; Gui78]）、$\mathcal{K} = \mathsf{Par}$（集合与偏函数范畴；在这种情况下，$f, g$ 是"部分定义"的函数，可能在某些输入上无定义），或光滑流形范畴 [Spi16]。

对于固定的输入和输出 A，B 穆尔自动机类 $\mathsf{Mre}(A,\ B)$ 的结构可描述为严格拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Mre}(A,B) & \xrightarrow{V'} & \mathcal{K}/B \\ {\scriptstyle U'}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle V} \\ \mathsf{Alg}(A \otimes _) & \xrightarrow[U]{} & \mathcal{K} \end{array} \tag{1.1}$$

其中 $U : \mathsf{Alg}(A \otimes _) \to \mathcal{K}$ 是从自函子 $A \otimes : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ 的自函子代数范畴出发的忘却函子；或者——若 $\mathcal{K}$ 具有可数余极限，这两者等价——是 A^* 的作用，而 $V : \mathcal{K}/B \to \mathcal{K}$ 是通常的"定义域"纤维化 [Jac99，第 30], [LR20] 页，来自切片范畴 B。泛构造由底层范畴 $\mathcal{K}$ 诱导而来（特别是，所有余极限和连通极限都由 V' 创建；我们将在 [Boc+23b] 中综述这一结果）。

尽管这种刻画看起来简洁明了，但它遗漏了故事的一部分；若将 $\mathsf{Mre}(A,\ B)$ 中的对象视为从 A 到 B 的过程，那么自然可以按顺序将它们复合，如下所示：



(1.2)

给定 $(E,\ f,\ g) \in \mathsf{Mre}(A,\ B)$ 和 $(E',\ f',\ g') \in \mathsf{Mre}(B,\ C)$，我们可以考虑 Moore 自动机 $(E \times E',\ f' \diamond f,\ g' \diamond g) \in \mathsf{Mre}(A,\ C)$，其定义为

$$\begin{cases} f' \diamond f : E \times E' \times A \to E \times E' : (e, e', a) \mapsto (f(e, a), f'(e', ge)) \\ g' \diamond g : E \times E' \to C : (e, e') \mapsto g'(e') \end{cases} \tag{1.3}$$

容易看出，这个二元复合律在同构意义下是结合的。现在，(1.1) 中的各个 $\mathsf{Mre}(A,\ B)$ 是否能作为一个 Moore 自动机双范畴 Mre 的同态范畴排列起来？这将是最理想的情况。

然而，复合 $\diamond$ 看起来无可挽救地不具恒等元，因为没有希望找到一个公共截面 $A \mapsto \mathsf{id}_A$，使定义域自函子和陪域自函子分别将 $(E,\ f,\ g) \in \mathsf{Mre}(A,\ B)$ 发送到 A 和 B。事实上，要找到这样的恒等箭头，应固定一个三元组 $(U_A,\ x,\ y)$：$U_A \xleftarrow{x} A \times U_A,\ U_A \xrightarrow{y} A$，使得至少复合 $(E \times U_B,\ ,\ )$ 和 $(U_A \times E,\ ,\ )$ 在 $\mathsf{Mre}(A,\ B)$ 中同构于 $(E,\ f,\ g)$。因此，特别地，载体 U_A 必须是终对象 / 幺半群单位元，但很容易看出这并不可行。

面对这个问题，有两种可能的做法：一种是忽略 (1.3) 中的复合律，寻找一种能够构成双范畴结构的复合律；另一种是忽略缺少恒等 1-胞腔这一事实，研究 Mre「本来的」结构。

[1] 值得指出的是，此处的"拓扑"可以——而且应该——作广义理解如下：设 $\mathcal{E}$ 为一个格罗滕迪克托普斯；我们可以在 $\mathcal{E}$ 中考虑穆尔自动机，此时 E 是 $\mathcal{E}^M$ 的一个对象；$\mathcal{E}^M$ 是由 $\mathcal{E}$ 上的对象以及 $M = A^*$ 的作用构成的范畴，而 $M = A^*$ 是由 A 生成的自由幺半群。关于 $\mathcal{E} =$ 为 [Set 时"幺半群作用的拓扑斯"的深入研究，另见 21] Rog。

不建议采用第一种做法，因为上述复合律是通过限制一个已有的双范畴结构得到的。如果我们考虑更一般的跨越，例如

$$E \xleftarrow{f} A \times E \xrightarrow{g} B, \tag{1.4}$$

安排在类 Mly(A, B) 中时，上文阐述的所有良好性质依然成立，同时也解决了这个问题：既然 g 对输入敏感，对象 A 的恒等 1-胞腔便由跨越 $1 \xleftarrow{!} A \times 1 \xrightarrow{\pi_A} A$ 给出，它由两个投影定义。此外，这一定义“说得通”，因为当 $\mathcal{K} =$Set（或者更一般地说，任意笛卡尔范畴）时，由此确定的双范畴 Mly 就是米利自动机范畴；众所周知，它不只是一个双范畴，而且是一个由伪函子和松自然变换构成的双范畴 [KSW97; KSW02; Lav+21]，其源为 **N**（自然数幺半群），靶为 $(\mathcal{K}, \otimes)$：借用 [Tie69]的类比，这是一种“松动力系统”双范畴。我们选择 1-胞腔的复合方式，受到这样一个事实的约束：Mly 中的 $\diamond$ 具有某种泛性质，并且在该双范畴中，1-胞腔的复合会限制到由形如 (1.4) 的跨越构成的子范畴，–其– 中 g 在输入变量中保持不变。

因此，我们选择第二条路径，并认识到 Mre 是一个半双范畴：这种结构与双范畴完全相同，只是缺少恒等 1-胞。

本文旨在开启对作为半双范畴的 Mre 的研究，探讨其恒等（结构的缺失），并试图揭示它的性质：既将其视为半双范畴范畴中的一个对象，也考察它与通过典范函子 J （定义 2.9）嵌入其中的“真正”双范畴 Mly 之间的关系。

特别地，假设 $\mathcal{K}$ 是笛卡尔闭的，我们着重考察半双范畴 Mre 与由 J 联系起来的双范畴 Mly 在何种精确意义上构成伴随情形，并提供一种生成此类伴随的通用方法；借助拉回 (1.1)，并利用定义 2.1.CF1 中对 Mly(A, B) 作为 Cat 中严格拉回的类似刻画，所有伴随

$$\mathcal{K}/B \underset{\perp}{\rightleftarrows} \mathsf{Alg}(A \times _) \cong \mathcal{K}/B^A \tag{1.5}$$

在切片范畴之间拉回到 Mre(A, B) 和 Mly(A, B)。如今，范畴代数提供了获得这类伴随的“标准”自然方法，只要 $\mathcal{K}$ 足够丰富（例如，它是局部笛卡尔闭的）：沿态射拉回，或计算直接像/逆像 [Joh02, A1.5.3], 利用 Cat 中逗号对象的 2-函子性 [Kel89], ，或利用由整个函子 Mre(A, B) $\to \mathcal{K}/B \times \mathcal{K}/B^A$ 所诱导的结构，该函子由拉回跨越（1.1）得到。这些构造各自导出不同的伴随；在将 Mre(A, B) 和 Mly(A, B) 的 1-胞腔转换为“机器”（它们接受类型为 A 的输入，并产生类型为 B 的输出）时，每个伴随都有一定意义。特别地，我们为 J 提供一个右伴随，却不久便发现 $J = D_0$ 是函子可数序列 D_n的第 0 项，其中每个函子都是全忠实左伴随 $D_n \dashv K_n$ （参见（3.6））：这样，我们便得到了 Moore 机与 Mealy 机之间经典等价定理的一种颇为内在的描述 [Sha08, pp. 3.1.4, 3.1.5], ，即将 Mre(A, B) 嵌入 Mly(A, B)，使其成为一个余反射子范畴；在定义 3.9、定理 3.10 中，我们非常明确地描述了余反射函子：它是与一个泛 Moore 胞腔 $\mathfrak{u}X$作后复合。在定理 3.19 中采用类似的观点，我们证明了一个类似的伴随将 Mly(A, B) 余局部化到我们称为软 Moore 机器（定义 3.14）的子范畴上；同样，定理 3.19 中的余反射函子是与一个泛软自动机 $\mathfrak{p}X$作后复合。该自动机可以（构造 3.12、注 3.16）刻画为某个拉回，或刻画为另一个函子的像（注 3.5）；后者由基变换/直接像伴随情形（3.7）得到。这种情形可以推广：我们可以定义一个完整的层级，包含

子范畴 $\mathsf{s}^n\mathsf{Mre}$（对应于 $n \geq 1$），其中每个都是 D_nK_n-余代数的范畴，因而构成一个由余反射嵌入组成的滤过图表

$$\mathsf{sMre} \hookrightarrow \mathsf{s}^2\mathsf{Mre} \hookrightarrow \mathsf{s}^3\mathsf{Mre} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathsf{Mre} \tag{1.6}$$

在某些方面类似于托扑斯的“层级”滤过 [KL89；MM19], 尽管此处研究的局部化并非本质性的。

不足为奇，像 [Sha08, pp. 3.1.4, 3.1.5] 这样广为人知且“扎实”的过程，不过是一个伪装起来的泛构造。不过，这一发现也具有教学意义：如果假想的读者只凭借双范畴理论，沿任意方向探索自动机理论，他们就能够仅仅通过运用自己对更熟悉的泛构造的了解，重新发现状态机上的自然构造（1-胞腔的复合、双范畴极限 [Kel89；Str76；Bir+89]，尤其是 Kan 型的极限，[2] [Str81] 笛卡尔闭范畴的基本演算、基变换伴随.....）。这种意外发现的重要性怎么强调都不为过。

2 穆尔机器的半双范畴

我们先给出穆尔机与米利机范畴的精确定义。固定一个背景幺半范畴 $(\mathcal{K}, \otimes)$，我们称之为“基范畴”。

定义 2.1（Mly 和 Mre 的同态范畴）。 **(** 固定两个对象 $A, B \in \mathcal{K}_0$； A 视为“输入”对象， B 视为“输出”对象。

将函子 $X \mapsto A \otimes X$（或作用，参见 [KKM00]）的自函子代数范畴记为 $\mathsf{Alg}(A \otimes)$，并将态射 $A \otimes X \to B$ 的逗号范畴记为 $(A \otimes \quad /B)$。那么，

CF1) 输入为 A 、输出为 B 的 Mealy 机范畴 $\mathsf{Mly}(A, B)$ 是严格拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Mly}(A,B) & \xrightarrow{U'} & (A \otimes _ /B) \\ {\scriptstyle V'}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle V} \\ \mathsf{Alg}(A \otimes _) & \xrightarrow[U]{} & \mathcal{K} \end{array} \tag{2.1}$$

CF2) 输入为 A 、输出为 B 的穆尔机范畴 $\mathsf{Mre}(A, B)$ 是严格拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Mre}(A,B) & \xrightarrow{U'} & \mathcal{K}/B \\ {\scriptstyle V'}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle V} \\ \mathsf{Alg}(A \otimes _) & \xrightarrow[U]{} & \mathcal{K} \end{array} \tag{2.2}$$

如果 $\mathcal{K}/B$ 是 恒等函子 $\mathsf{id} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$与常值函子的逗号范畴 在$B \in \mathcal{K}_0$.[3]

[2]粗略地说，“Kan 型的双范畴极限”是左或右 Kan 延拓，或左／右 Kan 提升，并且可能是逐点的或绝对的。[3]值得注意的是以下三点：$\mathsf{Mly}(A, B)$ 和 $\mathsf{Mre}(A, B)$ 的定义取决于 $\mathcal{K}$；每个松幺半函子 $F\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ 都会诱导基变换伪函子 $F_*\colon \mathsf{Mly}_{\mathcal{H}}(A, B) \to \mathsf{Mly}_{\mathcal{K}}(FA, FB)$——穆尔情形也类似；在适当的假设下，这可以扩展为一个 3-函子，其定义域为（笛卡尔幺半范畴、保积函子、笛卡尔自然变换）。这正是 [Boc+23a 的注 2.6], 所述内容，不过也可以根据 [KSW97] 中的刻画，一举推导出来。

注 2.2. ( ) 展开定义可知，$\mathrm{Mly}(A,B)$ 的对象是一个跨越 $\overset{E}{\underset{d,s}{:}}\ E \xleftarrow{d} A\otimes E \xrightarrow{s} B$，而从 $\overset{E}{\underset{d,s}{:}}$ 到 $\overset{F}{\underset{d',s'}{:}}$ 的态射 f 是基范畴中的一个 $f\colon E\to F$，满足 $f\circ d = d'\circ(A\otimes f)$ 和 $s'\circ(A\otimes f) = s$。类似地，$\mathrm{Mre}(A,B)$ 的对象是一个跨越 $\overset{E}{\underset{d,s}{:}}\ E \xleftarrow{d} A\otimes E, E \xrightarrow{s} B$，而从 $\overset{E}{\underset{d,s}{:}}$ 到 $\overset{F}{\underset{d',s'}{:}}$ 的态射 f 是基范畴中的一个 $f\colon E\to F$，满足 $f\circ d = d'\circ(A\otimes f)$ 和 $s'\circ f = s$。

推论 2.3。 ( ) 根据此定义可立即得出（详情参见 [Boc+23b] ）：当 $\mathcal{K}$ 是闭的，且 $\otimes$ 分别与小余极限交换时（例如，当 $\mathcal{K}$ 是闭的），范畴 $\mathrm{Mly}(A,B)$ 和 $\mathrm{Mre}(A,B)$ 都是完备且余完备的：

- 范畴 $\mathrm{Mre}(A,B)$ 有一个终对象，即内部同态 $[A^*,B]$;
- 范畴 $\mathrm{Mly}(A,B)$ 有一个终对象，即内部同态 $[A^+,B]$。[4]

从现在起，我们假设 $(\mathcal{K},\times)$ 是一个笛卡尔 范畴（通常还是笛卡尔闭范畴）。于是，可以如下定义一个双范畴 Mly $=\mathrm{Mly}_{\mathcal{K}}$（参见 [RSW98] ，其中它被称为"Circ"；文中还研究了一种更一般的结构，即基范畴具有非笛卡尔幺半结构的情形——但这样一来，与 Mealy 机的明显类比就不复存在）：

定义 2.4（双范畴 Mly， [RSW98]）。（ ）在双范畴 Mly 中

- *0*-胞腔 A、B、C、..... 是 $\mathcal{K}$ 的相同对象;
- *1*-胞腔 $A \nrightarrow B$ 是米利机（E、d、s），即方程 2.1 中范畴 $\mathrm{Mly}(A,\ B)$ 的对象，将其视为态射 $\langle s,d\rangle\colon E\times A\to B\times E$ 于 $\mathcal{K}$ 中;
- *2*-胞腔 是方程 2.1 中的米利机态射;
- 1-胞腔 $\diamond$ 的复合定义如下：给定 1-胞 $\langle s,d\rangle\colon E\times A\to B\times E$ 和 $\langle s',d'\rangle\colon F\times B\to C\times F$，它们的复合是 1-胞 $\langle s'\diamond s, d'\diamond d\rangle\colon (F\times E)\times A\to C\times(F\times E)$，其构造如下：

$$F\times E\times A \xrightarrow{F\times\langle s,d\rangle} F\times B\times E \xrightarrow{\langle s',d'\rangle\times E} C\times F\times E; \tag{2.3}$$

- 2-胞的纵向 复合是米利机态射 f 的复合，如方程 2.1 所示； $E\to F$
- 2-胞的横向 复合是利用 $\diamond$ 的双函子性定义的运算：$\mathrm{Mly}(B,\ C)\times\mathrm{Mly}(A,\ B)\to\mathrm{Mly}(A,_\ C)$;
- 结合子和单位子继承自 $\mathcal{K}$ 的幺半结构。

注记 2.5（Mly 的泛性质）。 将 $\mathcal{K}$ 视为只有一个 0-胞的双范畴，并令 $\Omega\mathcal{B}$ 为由伪函子 $\mathbf{N}\to\mathcal{B}$、松自然变换和修正构成的双范畴；那么（参见 [KSW97；KSW02]）存在双范畴等价 $\mathrm{Mly}_{\mathcal{K}}\cong\Omega\mathcal{K}$。

[4]假设 $\mathcal{K}$ 中存在可数余积，则 A 上的自由 *monoid* A^* 是对象 $\sum_{n\geq 0}A^n$；A 上的自由 *semigroup* A^+ 是对象 $\sum_{\geq 1}A^n$；显然，若 1 是 $\otimes$ 的幺半群单位元，则 $A^*\cong 1+A^+$，且这两个对象满足"递归方程" $A^+\cong A\otimes A^+$ 和 $A^*\cong 1+A\otimes A^*$。

备注 2.6（1-胞腔复合的详细说明）。（）Mly 中 1-胞腔的复合如下进行（这里我们自由使用任意笛卡尔闭范畴中可用的 λ-记号）：

$$d_2 \diamond d_1 : \lambda efa.\langle d_2(f, s_1(e,a)), d_1(e,a)\rangle \qquad s_2 \diamond s_1 : \lambda efa.s_2(f, s_1(e,a))$$

定义 2.7（机器的终端扩张）。（）

- 每个穆尔机 $\overset{E}{d,s}$ 都可以扩张为 $E \prec^{d^\Delta} E \times A^* \overset{s^\Delta}{\succ} B$，其中 d^Δ 由 A^* 的泛性质得到，而 s^Δ 则利用积对余积的分配律归纳定义：$s_1 = s$ 并且对每个 $n \geq 2$,

$$s_n := \big(E \times A^n \xrightarrow{d \times A^{n-1}} E \times A^{n-1} \to \cdots \xrightarrow{d \times A} E \times A \xrightarrow{d} E \xrightarrow{s} B\big). \tag{2.4}$$

- 类似地，每个 Mealy 机 $\overset{E}{d,s}$ 都有一个扩张 $E \prec^{d^\Delta} E \times A^+ \overset{s^\Delta}{\succ} B$。

注 2.8. 上述过程定义了函子 $(\,)^{e*} : \mathsf{Mre}(A,B) \to \mathsf{Mly}(A^*, B)$ 和 $(\,)^{e+} : \mathsf{Mly}(A,B) \to \mathsf{Mly}(A^+, B)$。我们称它们为所研究的穆尔机/米利机的终端扩张（这是由于它们与 $\mathsf{Mre}(A,B)$ 和 $\mathsf{Mly}(A,B)$ 中的终端态射有关，参见 [Ehr+74，第 11] 章及 [Boc+23b]）。

定义 2.9 (将 Mre 嵌入 Mly)。() 存在一个 2-函子 $J : \mathsf{Mre} \to \mathsf{Mly}$，将穆尔机器范畴映到米利机范畴，并将每个穆尔机 (E, d, s) 视为米利机

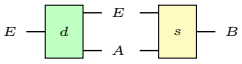
$$E \xleftarrow{d} E \times A \xrightarrow{\pi_E} E \xrightarrow{s} B \tag{2.5}$$

记号 2.10。图示记法在梳理米利机或穆尔机的结构时非常有用，在简化计算时更是不可或缺：因此，我们用输入和输出为 A, B 的通用米利机（红色）和穆尔机（蓝色）表示如下：



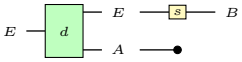
(2.6)

相反，当我们需要仔细考察某个自动机的结构时，可以使用以下弦图记法：这些图表



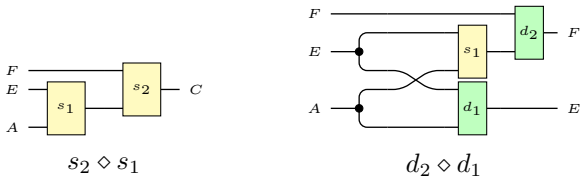
(2.7)

表示（2.2）中构成米利 1-胞 (E, d, s) 的同一个跨越（并且 d 的方向是从右到左！）；若该机器属于上面函子 J 的像，则图形可以简化为



(2.8)

（在这种情况下，我们称 s 为“穆尔”或“穆尔型”。）采用这一记号，$(E,\ d_1,\ s_1) : A \nrightarrow B$ 与 $(F,\ d_2,\ s_2) : B \nrightarrow C$ 的复合写作



$s_2 \diamond s_1$　　$d_2 \diamond d_1$

(2.9)

如果 s_2 （分别地， s_1）是穆尔型，表达式则相应地简化。

由此我们立即得到以下引理。

引理 2.11 （穆尔覆盖米利，左右皆然）. ( ) 米利 1-胞 $\overset{E}{d,s}$ 与穆尔 1-胞 $\overset{F}{d',s'}$ 的复合是穆尔 1-胞 $\#,\#^{F\times E}$。
反之，穆尔 1-胞 $\overset{E}{d,s}$ 与米利 1-胞 $\overset{F}{d',s'}$ 的复合是穆尔 1-胞 $\#,\#^{F\times E}$。

用代数术语表述，该结论如下：式 (2.3) 中给出的复合双函子限制为双函子

$$\begin{aligned} J_ \diamond _ &: \mathsf{Mre}(B,C)\times\mathsf{Mly}(A,B)\longrightarrow\mathsf{Mre}(A,C)\\ _\diamond J_ &: \mathsf{Mly}(B,C)\times\mathsf{Mre}(A,B)\longrightarrow\mathsf{Mre}(A,C). \end{aligned} \tag{2.10}$$

证明。 根据图示推理以及式 (2.9) 中复合的定义，结论立即成立。 □

注 2.12. ( ) 由于 $\mathcal{1}$的“几乎所有”穆尔机与米利机的复合方式都一致：

$$\begin{array}{cccc} J(\mathfrak{m}\diamond\mathfrak{n})=\mathfrak{m}\diamond J\mathfrak{n} & J(\mathfrak{m}\diamond\mathfrak{n})=J\mathfrak{m}\diamond\mathfrak{n} & \mathfrak{m}\diamond J\mathfrak{n}=J\mathfrak{m}\diamond\mathfrak{n} & J(\mathfrak{m}\diamond\mathfrak{n})=J\mathfrak{m}\diamond J\mathfrak{n}\\ \mathfrak{m}\in\mathsf{Mly},\mathfrak{n}\in\mathsf{Mre} & \mathfrak{m}\in\mathsf{Mre},\mathfrak{n}\in\mathsf{Mly} & \mathfrak{m},\mathfrak{n}\in\mathsf{Mre} & \mathfrak{m},\mathfrak{n}\in\mathsf{Mre}\end{array} \tag{2.11}$$

（对涉及的 λ-项进行约化后，得到严格相等。）

推论 理 2.13 （穆尔化函子）。 对于任意两个对象 A， $B\in\mathsf{Mly}$，都存在函子

$$\begin{aligned} _\rtimes_{AB}_ &: \mathsf{Mly}(A,B)\times\mathsf{Mre}(A,A)\longrightarrow\mathsf{Mre}(A,B)\\ _\ltimes_{AB}_ &: \mathsf{Mre}(B,B)\times\mathsf{Mly}(A,B)\longrightarrow\mathsf{Mre}(A,B) \end{aligned} \tag{2.12}$$

显然，给定 Mre 中的自 1-胞 $\mathfrak{m}:\ A\to A$ 和 $\mathfrak{n}:\ B\to B$，我们可以定义前复合与后复合运算 $R_{\mathfrak{m}}=\ \rtimes_{AB}\mathfrak{m}$ 和 $L_{\mathfrak{n}}=\mathfrak{n}\ltimes_{AB}$，并将在定理 3.19、定理 3.10 中使用它们，以刻画将米利机转换为穆尔机的函子。

2.1 Mre 的半双范畴结构

推论 2.14 （有时没有恒等元也没关系）。 一个穆尔 1-胞腔$[E,d,s]$与一个穆尔 1-胞腔 $[F,\overset{E}{d'},s']$ 的复合是一个穆尔 1-胞腔 $[F\times E,d'\diamond d,s'\diamond s]$。因此，若取与 $\mathcal{K}$相同的对象，将穆尔型米利机 $\overset{1}{d,\ s}:\ A\nrightarrow B$作为 1-胞腔，并按照注 2.2 的含义考虑 2-胞腔，我们便得到 Mly的一个子半双范畴，即穆尔机半双范畴。需要注意的是，穆尔机的复合律本质上不含单位元：根据定义 2.4 中给出的复合律，除 $\overset{1}{\pi_1,\ \pi_A}:\ A\nrightarrow A$ 之外，不可能有其他恒等 1-胞腔，而它并非穆尔型。

值得明确记下我们所称的半双范畴的定义。宽泛地说，我们考虑的是对 [MBCB02，定义 1.1] 的一种弱化，其中放宽了严格结合的复合这一要求；半双范畴因而是半范畴意义下等价于

[5] *Semicategories* 由 Mitchell 引入，称为“无恒等态射的范畴”，并在 [Mit72] 中得到了一定程度的研究；*semigroupal categories* 常与其近亲—— *magmoidal* 半幺半范畴⊙（仅给定一个二元函子 $\mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$，参见 [Dav17]）一同研究；只有一个对象的半双范畴恰好是一个（非严格的）半幺半范畴。关于半幺半范畴支持图形演算的证明，参见 [LYH18]。

双范畴 [B´en67], [Gra74，第 I.3]，页；或者，等价地说，是半幺半范畴的多对象版本（例如，参见 [Boy07，第 3.3], [LYH18]，页，不过这里采用严格意义；弱版本参见 [Elg04，第 4.1]，页，或对 [MBCB02] 作相应调整，如本文所做）。另参见 [Koc08；Koc10]。

定义 2.15. ( ) 一个 半双范畴 由以下部分组成

SC1) 一组对象或 0-胞腔 $\mathbf{S}_0$;

SC2) 对所有对象 $X, Y \in \mathbf{S}_0$，都有一个范畴 $\mathbf{S}(X, Y)$;

SC3) 对所有对象 $X, Y, Z \in \mathbf{S}_0$，都有一个复合 双函子 $\circ\colon \mathbf{S}(Y, Z) \times \mathbf{S}(X, Y) \to \mathbf{S}(X, Z)$;

SC4) 对所有 $f\colon Z \to W, g\colon Y \to Z, h\colon X \to Y$，都有一个结合子 同构 $\alpha_{fgh}\colon f\circ(g\circ h) \cong (f\circ g)\circ h$(参见 (A.1)).

结合子态射必须满足对所有 f, g, h, k 成立的通常五边形方程： 图表 (A.2) 是交换的。

现在，一个一般性的技术结果允许我们用一个“穆尔机”双范畴来替代穆尔机器半双范畴；该双范畴在所有方面都与 Mre 相同，唯一不同之处在于，它被强行加入了一类符号 id_A，每个对象 $A \in \mathcal{K}_0$ 对应一个，用作恒等1-胞。

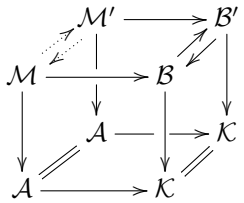
定理 2.16. 显然的遗忘2-函子 MonCat $\to$ SgCat 存在一个左伴随 $(\ )^{\mathrm{u}}$: SgCat $\to$MonCat。

证明。 证明推迟至附录第 18 页。另参见构造 A.1。 □

3 机器的众多伴随函子

贯穿本节、引导我们形成直觉的关键观察如下。

引理 3.1 （拉回纤维化伴随）。 ( ) 给定一个交换立方体



(3.1)

假设前后两个垂直面都是 Cat 中的严格拉回；那么任意伴随 $F\colon \mathcal{B} \leftrightarrows \mathcal{B}'\colon G$ 都会拉回为一个伴随 $F'\colon \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{M}'\colon G'$.[6]

证明。 由所涉及拉回的二维泛性质立即可得 . □

[6]当底部的水平方块替换为 [ML78，第 IV 页的意义下的伴随的交换方块时，也有类似的结果。我们也将运用这个更一般的版本：参见 (A.3) 的右侧。7]

推论 3。 **2.** 任何纤维化于 $\mathcal{K}$ 上的伴随 $F\colon \mathcal{K}/B \perp A\times\ /B\ \ G$ 都诱导出一个伴随

$$F : \mathsf{Mre}(A,B) \rightleftarrows \mathsf{Mly}(A,B) : G \tag{3.2}$$

纤维化于 Alg($A\times$) 之上。（在不会引起混淆时，我们仍将拉回的伴随记作 $F \dashv G$。关于我们所设想的图表，请参见 (A.3) 左侧。）

以下所有内容都采用一个普遍假设：$\mathcal{K}$ 是（局部）笛卡尔闭的。于是有一个显然的范畴等价 $(A\times)/B \cong \mathcal{K}/B^A$；由此可得：

引理 3.3。 存在伴随三元组

$$\Sigma_f \dashv f^* \dashv \Pi_f : \mathcal{K}/B^A \rightleftarrows \mathcal{K}/B \tag{3.3}$$

纤维化于 $\mathcal{K}$ 之上，由一个态射 $f'\colon B \to B^A$（更准确地说，由其伴随对应态射 $f\colon A\times B \to B$）诱导；它拉回后得到一个纤维化于 Alg($A\times$) 之上的伴随三元组，介于 Mre(A,B) 与 Mly(A,B) 之间。

例 3.4。 设 $\mathcal{K}$ 局部笛卡尔闭；设 $\pi_B\colon A\times B \to B$ 为到第二因子的投影，$\varpi_B : B \to B^A$ 为其伴随对应态射；众所周知，存在一个伴随三元组 $\varpi_B\circ\ \ \dashv \varpi_B^* \dashv \Pi_{\varpi_B}$，分别对 ϖ_B [起复合、拉回和直接像的作用（Joh02，A4.1.2]）。因此，我们得到一个由函子构成的三元组

$$\varpi_B \circ _ \dashv \varpi_B^* \dashv \Pi_{\varpi_B} : \mathsf{Mly}(A,B) \rightleftarrows \mathsf{Mre}(A,B) \tag{3.4}$$

这并非从逗号范畴之间的伴随情形得到机器之间伴随情形的唯一方法：我们可以利用引理 3.1 适用范围稍广这一事实，它也适用于不在 $\mathcal{K}$ 上纤维化的伴随；因此，

- $A\times$ 与 $\mathcal{K}$ 的恒等函子之间的任意自然变换 α 都可以根据逗号对象泛性质的二维部分，诱导出一个函子 α^*，其作用于 $\mathcal{K}/B$ 与 $(A\times)/B \cong \mathcal{K}/B^A$之间。不过，函子 $A\times$ 在任意笛卡尔范畴上都是一个余单子，因此它由余单位 $\epsilon\colon A\times\ \ \Rightarrow \mathsf{id}_{\mathcal{K}}$自然地赋予余点结构；由此，我们得到一个函子

$$\epsilon^* : \mathcal{K}/B \longrightarrow (A\times_)/B \cong \mathcal{K}/B^A \tag{3.5}$$

  拉回得到一个函子 $\bar{\epsilon}^*$: Mre($A,\ B$) $\to$ Mly($A,\ B$)。

- 所有由定义 2.7 中的规则归纳定义的态射 $d_{(0)} := \pi_E$, $d_{(1)} = d\colon A\times E \to E$, $d_{(n)} := d\circ(A\times d_{(n-1)})$ 都会诱导出函子

$$D_n^* : \mathcal{K}/B \longrightarrow (A\times_)/B \cong \mathcal{K}/B^A : s \longmapsto s\circ d^{(n)} \tag{3.6}$$

  借助引理 3.1 拉回到一个函子 D_n : Mre(A,B) $\to$ Mly(A,B)。

不过，类似于 (3.4) 的伴随情形为由基范畴中的 $u\colon A \to A'$ 诱导的前复合函子 Mly($u,\ B$) : Mly($A',\ B$) $\to$ Mly($A,\ B$) 提供了一种巧妙的刻画。由 u，利用 $\mathcal{K}$ 的笛卡尔闭结构，我们得到 B^u : $B^{A'} \to B^A$；进而将引理 3.1 应用于伴随三元组

$$B^u \circ _ \dashv (B^u)^* \dashv \Pi_u : \mathcal{K}/B^A \rightleftarrows \mathcal{K}/B^{A'} \tag{3.7}$$

（记号同引理 3.3），我们得到一个伴随三元组 $\mathbf{Mly}(A,\ B) \succ \mathbf{Mly}(A',\ B) \prec$，并将最左侧的伴随函子 $B^u \circ$ 识别为 $\mathbf{Mly}(u,\ B) : \mathbf{Mly}(A',\ B) \to \mathbf{Mly}(A,\ B)$。

因此，

注 3.5. 设 $\mathcal{K}$ 局部笛卡尔闭；则每个函子 $\mathbf{Mly}(u, B) : \mathbf{Mly}(A', B) \to \mathbf{Mly}(A, B)$ 都构成一个伴随三元组 $\mathbf{Mly}(u, B) \dashv (B^u)^* \dashv \Pi_u$。

备注 3.6（同态范畴之间的伴随）。若 $\mathcal{K}$ 是局部可呈现的（例如，$\mathcal{K} =$Set、任意格罗滕迪克托普斯、温顺空间范畴等），则经典形式的伴随函子定理 [Bor94b, Ch.5], [Bor94a, pp. 3.3.3–3.3.8] 应用于 ϵ^*, D_n^* 可得右伴随 R 和 K_n；因此，依据上述引理 3.1，我们得到

- 一个伴随 $\bar{\epsilon}^* : \mathbf{Mre}(A, B) \rightleftarrows \mathbf{Mly}(A, B) : R$；
- 对于每个 $n \geq 1$ 伴随 $D_n : \mathbf{Mre}(\bar{A}, B) \rightleftarrows \mathbf{Mly}(A, B) : K_n$，其中 D_n 全忠实，因此 K_n 是一个余反射函子。

其中，第二个对自动机理论尤为重要。我们将在本节余下部分分析其结构，并为 K_0, K_1 给出清晰明确的构造；具体而言，我们将完整刻画 $D_n K_n$-余代数的余反射子范畴。讨论中的一个关键点是，K_n 是作为一个普适 Moore 型 1-胞 $\mathfrak{u}$ 的复合 $\mathfrak{u} \ltimes$ 而产生的，这遵循推论 2.13 中的记号。

注 3.7（Mly 与 Mre 之间的双伴随）。注 3.6 中的伴随构成了双伴随在同态范畴上的作用（参见 [BK81]，此为较早的参考文献；另可参见 [Str72，第 8] 页中关于左松变换的左伴随的概念。这是对 [Fio06，第 9] 章中概念的弱化：它不再要求同态范畴之间存在伴随等价，而是将其替换为一族由两个双范畴的对象索引的伴随） $\boldsymbol{E} \dashv \boldsymbol{R}$，$\{\boldsymbol{D}_n \dashv \boldsymbol{K}_n \mid n \geq 0\}$ 它们介于半双范畴 Mre（或等价地，定理 2.16 意义下的双范畴反射 $\mathbf{Mre}^{\mathfrak{u}}$）与定义 2.4 中米利机的双范畴 Mly 之间。这些（2-半）函子在 0-胞腔上均为恒等映射。

定义 3.8。按照公式 3.6 的记号，函子 D_0 和 D_1 分别定义如下：一个一般的穆尔机 $\overset{E}{d,\ s}$ 映射为 $\overset{E}{d,\ s\pi_E}$ 而 $\overset{E}{d,\ sd}$；更一般地，D_n 是下图中的上方水平函子

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}/B & \xrightarrow{D_n} & \mathcal{K}/B^A \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U'} \\ \mathcal{K} & \xrightarrow[A^n \times _]{} & \mathcal{K} \end{array} \tag{3.8}$$

改编自引理 3.1（下方各行中的函子 $X \mapsto A^n \times X$ 显然都是左伴随）。

定义 3.9（泛 Moore 机）。（）设 $X \in \mathcal{K}_0$ 为一个对象。存在一个穆尔机 $\mathfrak{u}X = \overset{X}{\pi_X,\ \mathrm{id}_X}$，属于 $\mathbf{Mre}(X,\ X)$，其中 $\pi_X : X \times X \to X$ 是到第一坐标的投影。

根据上面的推论 2.14，机器 $\mathfrak{u}X$ 不可能是 $\mathbf{Mre}(X,\ X)$ 中的恒等 1-胞腔；但在某种意义上，它在 $\mathbf{Mly}(X,\ X)$ 中“已是穆尔 1-胞腔所能达到的最接近恒等的对象”。以下结果将精确说明这一点：与 $\mathfrak{u}X$ 后复合，可以实现与米利机相关联的穆尔机。

定理 3.10（Moorification 是与一个泛胞复合）。 ( ) 推论 2.13 中的函子 K_1（见注释 3.6）与函子 $L_{\mathfrak{u}B} = \mathfrak{u}B \ltimes : \mathbf{Mly}(A,\ B) \to \mathbf{Mre}(A,\ B)$ 自然同构。 –

备注 3.11. 通俗地说，$\mathfrak{u}B = {}^{B}_{\pi_B,\ \mathrm{id}_B}$ 是泛穆尔型机器，也就是说，与它进行顺序复合，会将每个米利机变成一个“等价的”穆尔机。

这是一个简洁明了的范畴论对应物，体现了一个广为人知的事实：穆尔机与米利机这两个概念在某种意义上“本质等价”，而 [Sha08, pp. 3.1.4, 3.1.5] 对此给出了精确定义。

构造 3.12. ( ) 设 $X \in \mathcal{K}_{\mathrm{obj}}$ 为一个对象。我们按如下方式定义 $\mathbf{Mre}(X,\ X)$ 中的一个穆尔机 $\mathfrak{p}X = {}^{P_\infty X}_{\sigma_X}$：

- 其载体由基范畴 $\mathcal{K}$ 中的拉回得到

$$\begin{array}{ccc} P_\infty X & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{head}} \\ [X^*, X] & \longrightarrow & [X^+, X] \end{array} \tag{3.9}$$

  其中，下方的水平映射由显然的包含 $A^+ \hookrightarrow A^* = 1 + A^+$ 得到，而 head 选取元素 $\lambda(a{::}\ as).a$.[7]

- 映射 $\delta_X :\ P_\infty X \times X \to P_\infty X$ 通过将其限制到 $[X^*, X]$ 的动力学上定义为 $(f,\ a) \mapsto f$;
- 映射 $\sigma_X :\ P_\infty X \to X$ 定义为 $f \mapsto f[]$。

备注 3.13。 非正式地说，$\mathfrak{p}X$ 的载体是 $[X^*, X]$[8] 的子对象 H，由满足以下条件的函数 $f :\ X^* \to X$ 构成：它们在非空列表上与头部函数一致；$f[]$ 可以自由取任意值，而对于每个非空列表 $a :: as$，$f\ (a :: as) = a$。

鉴于此，$\sigma :\ f \mapsto f[]$ 显然是一个双射。因此，将 $\mathfrak{u}X$ 和 $\mathfrak{p}X$ 区分开来似乎是冗赘的；然而，σ 并不是 一个穆尔机同态，因为用 σ 填入时，(2.2) 的图表并不交换。

在 $P_\infty A$ 中成立而在 A_∞ 中不成立、且在同构下保持不变的性质如下：图表

$$\begin{array}{ccc} X \times P_\infty X & \xrightarrow{\delta_X} & P_\infty X \\ {\scriptstyle \pi_{P_\infty X}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ P_\infty X & \xrightarrow[s]{} & X \end{array} \tag{3.10}$$

对 $P_\infty X$ 成立，但对 X 不成立；若对 $\mathfrak{u}X$ 也施加同样的性质，则意味着 $\forall(x,\ x')\ \in X.x = x'$，这是一个明显错误的陈述。

[7] 在每个笛卡尔闭范畴中，借助 $X^+ = \sum_{n\geq 1} X^n$ 的泛性质，可从第一坐标上的投影族 $\pi_1 :\ X^n \to X$ 得到 $\mathsf{head} : X^+ \to X$。[8] 事实上，左侧的竖直映射是单态射；为清晰起见，我们假设 $\mathcal{K} =$ 是 Set，将直接的不涉及元素的改述留给细心的读者。

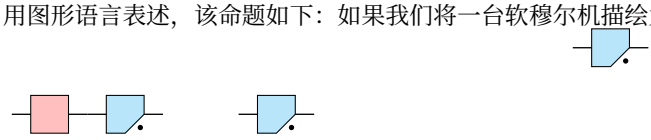
定义 3.14（软机器，[Bur61]）。（）若穆尔机 $\overset{E}{d,\ s}$ 满足以下交换图，则称其为软的：

$$\begin{array}{ccc} A\times E & \xrightarrow{d} & E \\ {\scriptstyle \pi_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ E & \xrightarrow[s]{} & B \end{array} \tag{3.11}$$

简单来说，它可以看作一台穆尔机，其输出映射“先停顿一拍，然后开始计算”；因为它的终端扩张 s^{Δ}（参见定义 2.7）满足 $s^{\Delta}(a::as,\ e) = s^{\Delta}(as,\ e)$。

显然，软 Moore 机器 $A \twoheadrightarrow B$ 构成 Mre$(A,\ B)$ 的一个全子范畴 sMre$(A,\ B)$；我们将i : sMre $\to$ Mre 这个最明显的局部完全忠实包含二函子记作。更进一步：

引理 3.15（软机器切断其他头部）。（）设 $\mathfrak{m}$: $A \twoheadrightarrow B$ 和 $\mathfrak{n}$: $B \to C$ 分别是一台米利机和一台穆尔机；若 $\mathfrak{n}$ 是软的，那么复合 $J\mathfrak{n} \diamond \mathfrak{m}$ 也软。[9] 用图形语言表述，该命题如下：如果我们将一台软穆尔机描绘为 $_{\mathfrak{n}}$ ：



(3.12)

证明。通过检查即可直接得出，运用图示推理（图表 (3.11) 很容易用图示方式转换）以及方程 2.9 中复合的定义。 □

注 3.16。( ) 构造 3.12 中的穆尔机 $\overset{P_\infty X}{\delta_X,\ \sigma_X}$ 是软的。

推论 3.17。( ) 设 $\overset{E}{d,s}$: $A \twoheadrightarrow B$ 是一般米利机器；那么，根据引理 2.11，复合 $\overset{P_\infty B}{\delta_B,\ \sigma_B} \ltimes AB\ \overset{E}{d,s}$ 是一台穆尔机；根据引理 3.15，它是软的。因此，函子 $L_{\mathfrak{p}B}$: Mly(A, B) $\to$ Mre(A, B) 可分解为经由显然的全包含 i_A : sMre $\to$ Mre 的复合。

注 3.18。鉴于 D_1 是全忠实的，伴随 $D_1 \dashv K_1$ 的单位是一个自然同构；将由此得到的余模态（= 幂等余单子）记作 $S_1 := D_1K_1$。那么，S_1-余代数范畴与软 Moore 机器范畴同构。

形如 $\overset{P_\infty A}{\delta_A,\ \sigma_A}$ 的对象因此是一个泛软穆尔机器，其含义由下述余反射定理给出：

定理 3.19 (作为右伴随的去头化)。( ) 注记 3.18 中余模态的余反射函子自然同构于后复合函子 $L_{\mathfrak{p}B} = \mathfrak{p}B \ltimes$。 –

类似地，将由公式 3.6 得到的伴随的余模态记为 $S_n = D_nK_n$。那么，S_1-余代数范畴同构于由 n-软 *Moore* 机器构成的全子范畴 s^{n}Mre，前提是我们将定义 3.14 作如下推广：交换图

$$\begin{array}{ccc} A^n\times E & \xrightarrow{d^{(n)}} & E \\ {\scriptstyle \pi_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ E & \xrightarrow[s]{} & B \end{array} \tag{3.13}$$

[9] 警告：一般而言，复合 $\mathfrak{m} \diamond J\mathfrak{n}$ 是软的，这一点是 *not* 成立的。

交换（关于 $d^{(n)}$ 的定义，参见（3.6））。

显然，sMre $=$s^{1}Mre $\subseteq$s^{2}Mre，更一般地，存在一串全包含

$$\mathsf{sMre} \hookrightarrow \mathsf{s}^2\mathsf{Mre} \hookrightarrow \mathsf{s}^3\mathsf{Mre} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathsf{Mre} \tag{3.14}$$

这类似于托扑斯的“层级”滤过（参见 [KL89；Ken+11；MM19；Roy21；Str00], ，尤其是在单纯集合或以自然数为指标的更高结构的几何形状的情形下）。

最后补充一点，我们记录如下：注 3.5 的结果为构造 3.12 中的对象 $P_\infty X$ 给出了极为内在的刻画，并为注 2.8 中阐述的米利机与穆尔机的终端扩张操作 $(\,)^{e*}$，$(\,)^{e+}$ 提供了一个比较定理。

引理 3.20。 $(\,)$ (A.4)中左侧的方块交换（沿用 (3.7) 的记号，Mly(t, B) 是由“toList”映射 $t : A^+ \hookrightarrow A^*$ 诱导的显然的限制函子）。

证明。 直接检查即可。 □

推论 3.21（注 3.5 的推论）。 函子 Mly(t, B) 属于伴随三元组 Mly(t, B) $\dashv (B^t)^* \dashv \Pi_t$，其中 $(B^t)^*$ 是通过沿 B^t 拉回态射 $\begin{bmatrix} X \\ \downarrow \\ B^{A^+} \end{bmatrix}$ 得到的：$B^{A^*} \to B^{A^+}$。

通过简单检查可知，$B^t : [A^*, B] \cong B \times [A^+, B] \to [A^+, B]$ 与投影映射重合，因此我们可以考虑由左侧方块取伴随得到的 (A.4) 中右侧方块，并立即证明

命题 3.22。 根据 [Gui80；Gui81；Pav91]或 [Jac99, 1.8.9.(b)], (A.4) 的左侧方块是正合的。也就是说，同上。 右侧图表中的 θ 可逆。

现在令 head : $1 \to [A^+, A]$ 为 (3.9) 中的态射：由注 3.5 可得一个沿 head 拉回的函子 head*（同时具有左伴随和右伴随），以及穆尔机 $\mathfrak{p}X$ 与 $(A^t)^*$(head) 之间的同构。

4 未来计划

诸多问题中，我们还留下了三个问题：

- 链 s^{n}Mre $\to$s^{n+1}Mre 的滤过余极限是什么？这些包含也具有余反射性吗?
- 我们能否用与泛 1-胞腔的后复合来表示所有 K_n？换言之，我们能否找到泛 n-软机器，或许可以改造构造 3.12?
- 定理 3.10 和定理 3.19 将 K_0, K_1 刻画为后复合；但 D_0, D_1 在 Mly 中是左提升：我们能否从这一内在刻画中推导出有意义的结论？[10]

[10]请注意，右提升的存在性 [Lor21, p. 2.1.3] 可以由后复合一般不保余极限这一事实排除。

参考文献

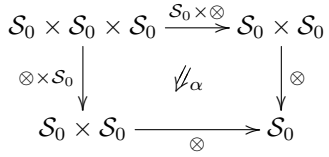
[B´en67] J. B´enabou.《双范畴导论》。载于：《中西部范畴研讨会报告》。柏林，海德堡：Springer Berlin Heidelberg，1967年，第1–77页。 ISBN: 978-3-540-35545-8。[Bir+89] G.J. Bird 等。《2-范畴的柔性极限》。载于：《纯粹与应用代数杂志》61.1（1989年），第1–27页。[BK81] R. Betti 和 S. Kasangian。《自动机的一种准普遍实现》。载于：的里雅斯特大学数学科学系（1981年）。 Trieste[Boc+23a] G. Boccali 等。《自动机双范畴，双范畴中的自动机》。2023年。arXiv：2303.03865 [math.CT]。[Boc+23b] G. Boccali 等。《广义自动机范畴的完备性》。2023年。arXiv：2303.03867 [math.CT]。[Bor94a] F. Borceux。《范畴代数手册》。第1卷，第50卷。《数学及其应用百科全书》。基础范畴论。剑桥：剑桥大学出版社，1994年，第xvi+345页。[Bor94b] F. Borceux。《范畴代数手册》。第2卷，第51卷。《数学及其应用百科全书》。范畴与结构。剑桥：剑桥大学出版社，1994年，第xviii+443页。[Boy07] M. Boyarchenko。《幺半范畴中的结合约束》。2007年。 URL: http:// www.math.uchicago.edu/~may/TQFT/Boyarchenko%20on%20associativity.pdf。[Bur61] W. S. Burroughs。《软机器》。《新星三部曲》。182页。奥林匹亚出版社，1961年。[Dav17] A. Davydov。《带张量积的范畴的核》。载于：Theory Appl. Categ. 18.16（2017年），第440–472页。 ISSN: 1201-561X。[Ehr+74] H. Ehrig 等。《自动机的普遍理论》。一种范畴论方法。英文。Teubner Studienbücher. Informatik。斯图加特：B. G. Teubner.，1974年。 DOI: 10.1007/978-3-322- 96644-5。[Elg04] J. Elgueta。《幺半2-范畴的上同调与变形理论 I》。载于：《数学进展》182.2（2004年3月），第204–277页。 DOI: 10.1016/s0001-8708(03)00078-1。URL: https://doi.org/10.1016/s0001-8708(03)00078-1。[Fio06] T.M. Fiore。《伪极限、双伴随与伪代数：共形场论的范畴论基础》。《美国数学会回忆录》860。美国数学会，2006年。 ISBN: 0821839144; 9780821839140。[Gra74] J.W. Gray。《形式范畴论：2-范畴的伴随性》。Springer Berlin Hei- delberg，1974年。 DOI: 10.1007/bfb0061280。 URL: https://doi.org/10.1007/bfb0061280。[Gui74] R. Guitart。《关于机器与结构的札记》。载于：Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques 15（1974年），第113–144页。[Gui78] R. Guitart。《从机器到双模》。巴黎第七大学。1978年。 URL: http://rene.guitart.pagesperso-orange.fr/textespublications/rg30.pdf。[Gui80] R. Guitart。《关系与正合方块》。载于：Ann. Sci. Math. Québec 4.2（1980年），第103–125页。

[Gui81] R. Guitart. “正合范畴与演绎范畴”。法语。载于：*Diagrammes* 6（1981年），G1–G17。URL: http://eudml.org/doc/192983。[Jac99] B. Jacobs. 范畴逻辑与类型论。SLFM141。爱思唯尔，1999年。ISBN: 97804445085 39.
[Joh02] P.T. Johnstone.《大象素描：托扑斯理论纲要》。第 I 卷。牛津：牛津大学出版社，2002年。1288 页。[Kel89] G.M. Kelly。《关于 2-范畴极限的初步观察》。载于：《澳大利亚数学会通报》39.2（1989年），301–317 页。 DOI: 10.1017/S0004972700002781.[Ken+11] C. Kennett 等。《单纯集合与立方集合的层级》。载于：《纯粹与应用代数杂志》215.5（2011年5月），949–961 页。 DOI: 10.1016/j.jpaa.2010. 07.002. URL: https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2010.07.002.[KKM00] M. Kilp、U. Knauer 和 A.V. Mikhalev。《幺半群、作用与范畴：花环积与图的应用》。学生与研究人员手册。德古意特，2000年。[KL89] G.M. Kelly 和 F.W. Lawvere。《本质局部化的完备格》。悉尼大学纯数学系，1989年。[Koc08] J. Kock。《关于幺半范畴中单位的初步说明》。载于：《剑桥哲学学会数学汇刊》144.1（2008年1月），53–76 页。 DOI: 10. 1017/s0305004107000679. URL: https://doi.org/10.1017/s0305004107000679.[Koc10] J. Kock。《高阶范畴中的弱单位箭头》。载于：《国际数学研究论文集》（2010年7月）。 DOI: 10.1155/imrp/2006/69163. URL: https://doi.org/10.1155/imrp/2006/69163.[KSW02] P. Katis、N. Sabadini 和 R.F.C. Walters。《反馈、迹与不动点语义》。英文。载于：RAIRO—理论信息学与应用—理论信息学与应用 36.2（2002年），181–194 页。 DOI: 10.1051/ita:2002009. URL: http://www. numdam.org/articles/10.1051/ita:2002009/.[KSW97] P. Katis、N. Sabadini 和 R.F.C. Walters。《过程双范畴》。载于：《纯粹与应用代数杂志》115.2（1997年2月），141–178 页。 DOI: 10.1016/s0022-4049(96) 00012-6. URL: https://doi.org/10.1016/s0022-4049(96)00012-6.[Lav+21] E. Di Lavore 等。《开放迁移系统的典范代数》。载于：《形式化方面的构件软件——第 17 届国际会议 FACS 2021，线上会议，2021年10月28—29日，会议论文集》。Gwen Sala¨un 和 Anton Wijs 编。第 13077 卷。《数学讲义》。施普林格，2021年，63–81 页。 DOI: 10.1007/978-3-030- 90636-8_4. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-90636-8_4.[Lor21] F. Loregian。《余端演算》。第 1 版。第 468 卷。《伦敦数学学会讲义丛书》。ISBN 9781108746120。剑桥大学出版社，2021年。[LR20] F. Loregian 和 E. Riehl。《纤维化的范畴论概念》。载于：《数学论述》38.4（2020年12月），496–514 页。 DOI: 10.1016/j.exmath.2019.02.004. URL: https://doi.org/10.1016/j.exmath.2019.02.004.[LYH18] Xuexing L.、Yu Y. 和 Sen H.。《半群范畴的图形演算》。载于：Appl. Categor. Struct. 27.2（2018年），163–197 页。 DOI: 10.1007/s10485-018-9549-8.

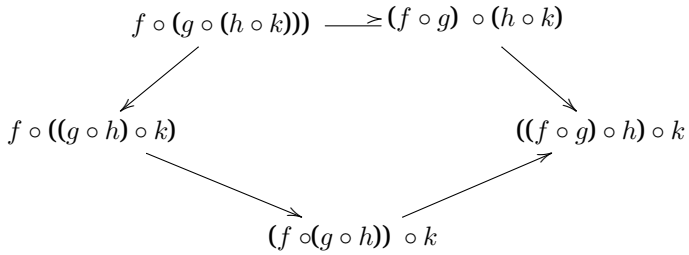
[MBCB02] M.-A. Moens、U. Berni-Canani 和 F. Borceux。《关于正则预层与正则半范畴》。英文。载于：《拓扑与范畴几何手册》43.3（2002年），163–190 页。 URL: http://www.numdam.org/item/CTGDC_2002__43_3_163_0/.[Mit72] B. Mitchell。《Isbell 的支配域》。载于：《美国数学会汇刊》167.0（1972年），319–331 页。 DOI: 10.1090/s0002- 9947- 1972- 0294441- 0. URL: https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1972-0294441-0.[ML78] S. Mac Lane。《工作数学家的范畴论》。第 2 版。第 5 卷。《数学研究生教材》。纽约：施普林格出版社，纽约，1978年，xii+314 页。 ISBN: 0-387-98403-8. DOI: 10.1007/978-1-4757-4721-8.（访问于2018年5月5日。）[MM19] M. Menni 和 F. Marmolejo。《层级 ϵ》。载于：《拓扑与范畴几何手册》LX.4（2019年），450–477 页。[Pav91] D. Pavlovi´c。《范畴插值：无需正像的下降与 Beck-Chevalley 条件》。载于：《数学讲义》。Springer Berlin Heidelberg，1991年，306–325 页。 DOI: 10.1007/bfb0084229. URL: https://doi.org/10.1007/bfb0084229.[Reu79] C. Reutenauer。《自由幺半群的一种拓扑》。载于：《半群论坛》。第 18 卷。施普林格，1979年，33–49 页。[Rog21] M. Rogers。《幺半群作用的拓扑斯》。2021年。arXiv: 2112.10198 [math.CT].[Roy21] M. Roy。《球复形的拓扑斯》。载于：《理论与范畴应用重印本》28（2021年），1–63 页。[RSW98] R. Rosebrugh、N. Sabadini 和 R.F.C. Walters。《自动机双范畴中的最小实现》。载于：《计算机科学中的数学结构》8.2（1998年），93–116 页。 DOI: 10.1017/S0960129597002454.[Sha08] J. Shallit。《形式语言与自动机理论进阶教程》。英文。英国剑桥：剑桥大学出版社，2008年9月。[Spi16] D.I. Spivak。《耦合动力系统的稳态遵循矩阵算术进行复合》。2016年。arXiv: 1512.00802 [math.DS].[Str00] R. Street。《球状集合的小拓扑斯》。载于：《纯粹与应用代数杂志》154.1-3（2000年12月），299–315 页。 DOI: 10.1016/s0022-4049(99)00183-8. URL: https: // doi.org/10.1016/s0022-4049(99)00183-8.[Str72] R. Street。《Lax 函子的两种构造》。英文。载于：《拓扑与范畴几何手册》13.3（1972年），217–264 页。 URL: http :/ / www . numdam . org / item / CTGDC _1972__13_3_217_0/.[Str76] R. Street。《由取值于范畴的二函子指标化的极限》。载于：《纯粹与应用代数杂志》8.2（1976年），149–181 页。 ISSN: 0022-4049. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/ 0022- 4049(76)90013- X. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/002240497690013X.[Str81] R. Street。《变变量范畴概述》。载于：《纯粹与应用代数杂志》21.3（1981年），307–338 页。[Tie69] M. Tierney。《稳定同伦论中的范畴构造》。Springer Berlin Heidelberg，1969年。 DOI: 10.1007/bfb0101425. URL: https://doi.org/10.1007/bfb0101425.

A 图表与证明

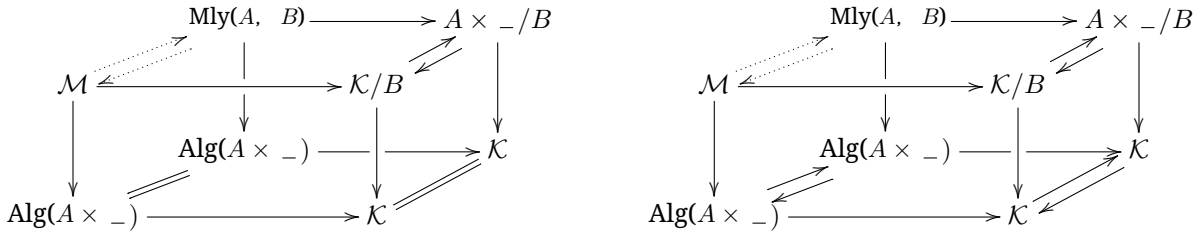
A.1 图表



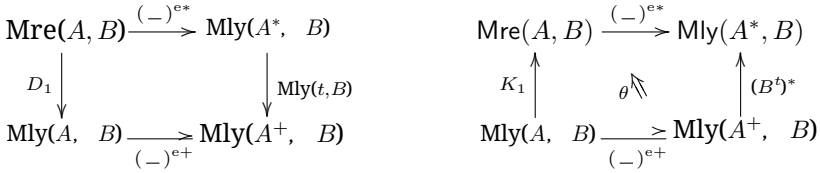
(A.1)



(A.2)



(A.3)



(A.4)

A.2 证明

这本质上是 [LYH18], 中顺带出现的论证，从严格的半幺半范/幺半范畴推广到非严格的半幺半范/幺半范畴。

构造 A.1。 设 $\mathcal{S}$ 是一个半幺半范畴，其底层范畴为 $\mathcal{S}_0$，并配备了一个双函子 $\otimes$： $\mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0$，满足结合律公理。- 我们定义 $\mathcal{S}^{\mathsf{u}}$ 如下:

- 底层范畴（$\mathcal{S}_{\mathsf{u}}$）$_0$ 是余积 $\mathcal{S}_0 + \mathbf{1}$，其中 $\mathbf{1}$ 是具有唯一对象 $\perp$ 的终端范畴;

- “扩展的”乘法函子

$$_ \otimes^{\mathsf{u}} _ : (\mathcal{S}_0 + \mathbf{1}) \times (\mathcal{S}_0 + \mathbf{1}) \cong (\mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_0) + (\mathcal{S}_0 \times \mathbf{1}) + (\mathbf{1} \times \mathcal{S}_0) + (\mathbf{1} \times \mathbf{1}) \longrightarrow \mathcal{S}_0 + \mathbf{1} \tag{A.5}$$

分段定义为 $S \otimes^{\mathsf{u}} S' = S \otimes S'$ 若 $S,\ S' \in \mathcal{S}_0$ 且 $\bot \otimes^{\mathsf{u}} S' = S'$, $\bot \otimes^{\mathsf{u}} \bot = \bot$。（特别注意，如果 $\mathcal{S}$ 有幺半群单位元，$\bot$ 就“替换”了它：我们添加了 $\bot$ 作为自由单位元。）对于态射，我们采用类似的策略；$\mathbf{1}$中只有一个恒等态射，而没有态射$\bot \leftrightarrows S$，因此我们只需定义 $f \otimes^{\mathsf{u}} g := f \otimes g$，而 $\mathrm{id}_\bot \otimes^{\mathsf{u}} \mathrm{id}_\bot = \mathrm{id}_\bot$, $f \otimes^{\mathsf{u}} \mathrm{id}_\bot = f$ 和 $\mathrm{id}_\bot \otimes^{\mathsf{u}} g$必然分别为 f 和 g，这样才能使 $\otimes^{\mathsf{u}}$ 将恒等态射映为恒等态射，并确保其具有双函子性。因此，$\bot \otimes^{\mathsf{u}}$ 和 $\otimes^{\mathsf{u}} \bot$ 是范畴 $(\mathcal{S}^{\mathsf{u}})_0$的严格 恒等函子。

定理 *2.16* 中的函子是左伴随的证明。首先，我们来明确一下定义添单位化所需的最后一个（直接的）结构部分。

- 结合子的分量是 α_{XYZ}在 $\mathcal{S}_0$的对象上的态射；当 X, Y或 Z为 $\bot$时，我们将其定义为其余两个对象张量积上的相应恒等态射。根据这些选择，自然性 α 得以保证。这也确保了对于 4 个对象 X, Y, Z, W，五边形公理显然成立：要么因为 X, Y, Z, W 全都属于 $\mathcal{S}_0$（因此五边形公理在 $\mathcal{S}_0$的半幺结构中成立），要么因为五边形由恒等态射构成。

- 最后，我们需要考察的结构部分是幺半结构的“三角形公理”：三角形

$$\begin{array}{ccc} X \otimes^{\mathsf{u}} (\bot \otimes^{\mathsf{u}} Y) & \xrightarrow{\quad\alpha_{X\bot Y}\quad} & (X \otimes^{\mathsf{u}} \bot) \otimes^{\mathsf{u}} Y \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X \otimes^{\mathsf{u}} Y & \end{array} \tag{A.6}$$

必定可交换，因为它由恒等态射复合而成；通过类似的直接情形分析，我们得出它确实如此。

我们已经给出了半幺半范畴 $\mathcal{S}$ 的添单位化构造；我们还必须证明这是一个函子（不过这显而易见：每个半幺函子 $H : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ 都会诱导一个与 H 在 $\mathcal{S}_0$ 上相一致、并将 $\bot_{\mathcal{S}}$ 映至 $\bot_{\mathcal{S}'}$的幺半函子），并证明其泛性质。对于后者，我们需要验证存在一个同构

$$\mathsf{SgCat}(\mathcal{S}, \mathrm{U}\,\mathcal{M}) \cong \mathsf{MonCat}(\mathcal{S}^{\mathsf{u}}, \mathcal{M}) \tag{A.7}$$

强半幺函子 $\mathcal{S} \to \mathrm{U}\,\mathcal{M}$ 到幺半范畴的范畴，与强幺半函子 $\mathcal{S}^{\mathsf{u}} \to \mathcal{M}$的范畴之间，其中两个范畴分别配备半幺半自然变换和幺半自然变换。

在底层范畴的层级上，$(\,)^{\mathsf{u}}$ 充当“Maybe”函子，而 $\mathcal{M}_0$ 是 Cat 中的一个带基点对象（由幺半群单位元 $I_{\mathcal{M}} : \mathbf{1} \to \mathcal{M}$给出），因此 $H : \mathcal{S} \to \mathrm{U}\,\mathcal{M}$ 诱导出唯一的函子 $\hat{}H : \mathcal{S}_0 + \mathbf{1} \to \mathcal{M}_0$；该函子现在保持 $\mathcal{S}_0$ 上的张量积（因为 H 一开始就是半幺函子），并且根据“Maybe”的泛性质，它必然将 $\bot$ 映射到 $I_{\mathcal{M}}$，所以严格来说，它成为一个正规强幺半函子（=严格保持恒等元）。 □

定理 *2.16* 的证明。令$\mathbf{S} = (\mathbf{S}_0, \circ)$为定义 2.15 中的半双范畴；定义 FS 如下：

- $(\mathbf{FS})_0$ 是$\mathbf{S}$的同一对象类；

- 对于每个 $X \in \mathbf{S}_0$，我们将 A.1 中的构造应用于范畴 $\mathbf{S}(X,\ X)$；因此，每个半幺范畴 $\mathbf{S}(X,\ X)$ 都被幺化为 $\mathbf{S}(X,\ X)_{\mathsf{u}}$。

• 复合函子与 **S** 中的定义相同，其中 X，Y，Z 满足既非 $Y = Z$ 也非 $X = Y$，这意味着在这种情况下我们取相同的

$$_ \circ_{XYZ} _ : \mathbf{S}(Y,Z) \times \mathbf{S}(X,Y) \longrightarrow \mathbf{S}(X,Z) \tag{A.8}$$

作为复合映射。当 $X = Y$ 时，我们改为定义

$$_ \circ_{\mathsf{u},XXZ} _ : \mathbf{S}(X,Z) \times (\mathbf{S}(X,X) + \mathbf{1}) \cong \mathbf{S}(X,Z) \times \mathbf{S}(X,X) + \mathbf{S}(Y,Z) \times \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{S}(X,Z) \tag{A.9}$$

通过 $\circ_{XXZ}$ 的余积映射以及 (Cat $\times$) 的右单位约束。我们以类似方式定义

$$_ \circ_{\mathsf{u},XYY} _ : (\mathbf{S}(Y,Y) + \mathbf{1}) \times \mathbf{S}(X,Y) \cong \mathbf{S}(Y,Y) \times \mathbf{S}(X,Y) + \mathbf{1} \times \mathbf{S}(X,Y) \longrightarrow \mathbf{S}(X,Y) \tag{A.10}$$

利用 $\circ_{XYY}$的余积映射以及 (Cat $\times$) 的左单位约束。

显然，所有如此定义的 $\circ_{XYZ}$ 都是函子。

• 结合子 α_{u} 的分量在 f, g 或 h 是 $\mathbf{S}(X,X)$ 中的“虚单位”时，会化为其余两个对象的恒等 2-胞腔，这由我们对复合运算的定义可知；对于所有其他分量，$\alpha_{\mathsf{u}} = \alpha_{\circ}$。同样，这些选择确保了 α_{u} 的自然性。

• 显然，任意强半幺半函子 $H : \mathbf{S} \to \mathbf{T}$ 都会诱导出一个强幺半函子 $H_{\mathsf{u}} : \mathbf{S}_{\mathsf{u}} \to \mathbf{T}_{\mathsf{u}}$，它在 $\mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{S}_{\mathsf{u}}$ 上与 H 重合。

还需要证明泛性质。来自半双范畴的伪函子 $H : \mathbf{S} \to \mathbf{B}$ 到双范畴必须诱导出一个伪函子 $\mathbf{S}^{\mathsf{u}} \to \mathbf{T}$：在对象层面没有任何变化；每个同函子

$$H_{XY} : \mathbf{S}(X,Y) \longrightarrow \boldsymbol{B}(HX, HY) \tag{A.11}$$

连同 $X \neq Y$ 也保持不变；并且由于每个 $\mathbf{B}(HX, HX)$ 都是幺半范畴（因此特别是带基点范畴），函子 H 可扩展为 $H^{\mathsf{u}}_{XX} : \mathbf{S}(X,X)^{\mathsf{u}} \to \mathbf{B}(HX, HX)$；很容易看出，这个扩展是一个强幺半函子。 □