arXiv:2305.00317v1 [math.OA] 29 Apr 2023

A代数的谱保持性质

MOHAMED MABROUK[1] 和 ALI ZAMANI[2]

Abstract. 对于 C^*代数 $\mathfrak{A}$中的正元 A，令 $\|X\|_A$ 表示 $X \in \mathfrak{A}$的A算子半范数。本文旨在引入并研究 X 的 A谱概念，使得 $\|X\|_A < \infty$。特别地，当 A 是良支撑时，我们为C^*代数建立 A谱保持性质。

1. Introduction and preliminaries

本文中，设 $\mathfrak{A}$ 是一个含单位元的 C^*代数，其单位元记为 $\mathbf{1}$，并假设 $A \in \mathfrak{A}$ 是一个正元。分别令 $\mathfrak{A}^*$ 和 $\mathfrak{A}^+$ 表示 $\mathfrak{A}$ 的拓扑对偶空间以及 $\mathfrak{A}$中的正元锥。我们用 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$表示复希尔伯特空间 $(\mathcal{H}$上所有有界线性算子的 C^*代数，$\langle\cdot,\ \cdot\rangle)$。令 $\mathcal{R}(X)$和 $\mathcal{N}(X)$分别表示$X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$的值域和零空间。根据 Gelfand–Naimark定理，每个 C^*代数 $\mathfrak{A}$都可视为某个希尔伯特空间$\mathcal{H}$上的 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$的范数闭 $*$子代数。若 $*$子代数 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$的子代数，且在 $\mathcal{H}$ 中关于弱算子拓扑闭合并包含恒等算子 $\mathbf{1}$，则称其为冯·诺伊曼代数。关于 C^*代数和冯·诺伊曼代数理论的更全面论述，请参阅[12]。

若线性泛函 $f \in \mathfrak{A}^*$ 满足对所有 $X \in \mathfrak{A}^+$，$f(X) \geq 0$，则称其为正泛函。给定定义在 $\mathfrak{A}$上的正泛函 f，我们有以下有用的柯西–施瓦茨不等式：

$$\left|f(X^*Y)\right|^2 \leq f(X^*X)f(Y^*Y) \qquad (X, Y \in \mathfrak{A}).$$

令 $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ 表示 $\mathfrak{A}$ 上的态集，即所有满足 $\|f\| = 1$ 的正线性泛函 f 的集合，其中 f 定义在 $\mathfrak{A}$ 上。令 $\mathcal{S}_A(\mathfrak{A}) = \left\{ {}_f{}^f(A) : f \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}) \ \ f(A) \neq 0 \right\}$，对于元素 $X \in \mathfrak{A}$，令 $\|X\|_A = \sup\left\{\sqrt{f(X^*AX)} : f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A})\right\}$。值得注意的是，$\|\cdot\|_{\mathbf{1}} = \|\cdot\|$ 当且仅当 $AX = 0$，且此时 $\|X\|_A = 0$。此外，集合 $\mathcal{S}_A(\mathfrak{A})$ 是 $\mathfrak{A}^*$ 的非空凸子集，但它是弱 *-紧的，当且仅当 A 在 $\mathfrak{A}$ 中可逆；参见命题 2.3]。特别地，若 A 不可逆，由于 $\mathcal{S}_A(\mathfrak{A})$ 缺乏紧性，对于某个 $X \in \mathfrak{A}$，可能出现$\|X\|_A = \infty$；参见例 3.2]。下文中，我们将记 $\mathfrak{A}^A = \{X \in \mathfrak{A} : \ \|X\|_A < \infty\}$。集合 $\mathfrak{A}^A$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个未必闭的子代数。根据命题 3.3] $\|\cdot\|_A$，[6, 是 $\mathfrak{A}^A$ 上的半范数，并且对所有 X、$Y \in \mathfrak{A}^A$ 都满足$\|XY\|_A \leq \|X\|_A\|Y\|_A$。对于一个元素 $X \in \mathfrak{A}$，一个元素

2010年数学学科分类。47A05；47C15；47B65；47A10。关键词和短语。 C^*-代数；正算子；谱；良支撑算子。1

$Y \in \mathfrak{A}$ 被称为 X 的一个 A-伴随元，如果 $AX = Y^*A$。若 AX 是自伴的，即 $AX = X^*A$，则称元素 $X \in \mathfrak{A}$ 为 A-自伴元。用 $\mathfrak{A}_A$ 表示 $\mathfrak{A}$ 中所有存在 A-伴随元的元素所构成的集合。众所周知，$\mathfrak{A}^A$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个子代数；即使当 $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 时，它在 $\mathfrak{A}$ 中也既不闭也不稠密。此外，当 A 属于 $\mathfrak{A}$ 的中心时，$\mathfrak{A}_A = \mathfrak{A}$；但一般而言，$\mathfrak{A}_A \neq \mathfrak{A}$，并且当 $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 时，$\mathfrak{A}_A \subseteq \mathfrak{A}^A$ 和 $\mathfrak{A}^A = \mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$。这里，$\mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{H}$ 上所有具有 $A^{1/2}$- 伴随元的有界线性算子所构成的集合。关于 $\mathfrak{A}_A$ 的更多性质见 [1, 6]。

近期，Baklouti 和 Namouri 在 [4] 中针对 $X \in \mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ 定义了 A-谱 $\sigma_A(X, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ 的概念（另见 [7]）。他们确立了这一概念的一些保持性质。本文的研究受 [4] 启发。我们将研究元素 $X \in \mathfrak{A}^A$ 的 A-谱 $\sigma_A(X, \mathfrak{A})$ 的概念。

本文内容安排如下。第 2 节介绍A-谱在 C^*-代数中的基本结果，并得到若干性质。第 3 节中，若A 是良支撑的，我们将证明一个 A-谱保持定理，适用于 C^*-代数。具体而言，我们证明：若 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是两个满足 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$和 $A \in \mathfrak{B}$ 条件的冯·诺伊曼代数，那么对于任意 $\sigma_A(X, \mathfrak{A})$，有 $= \sigma_A(X, \mathfrak{B})$。最后，我们给出若干推论。

2. A-INVERTIBILITY ON $\mathfrak{A}^A$

我们将 C^*-代数记作 $\mathfrak{A}$和 $\mathfrak{B}$，将冯·诺伊曼代数记作$\mathfrak{M}$、$\mathfrak{N}\cdots$。回顾一下，给定 $\mathfrak{A}$中的一个元素 X，若 $Y \in \mathfrak{A}$ 满足方程 $AX = Z^*A$，则称 $Y \in \mathfrak{A}$ 为 X 的一个 A-伴随。在冯·诺伊曼代数的框架下，可以通过应用下述定理（称为冯·诺伊曼代数的 Douglas 定理）来研究这类方程。

引理 2.1. [14] 设 X、$Y \in \mathfrak{M}$。则以下条件等价：

(i) $X^*X \leq \alpha Y^*Y$对某个 $\alpha \geq 0$成立；

(ii) 存在 $Z \in \mathfrak{M}$ 使得 $X = Z^*Y$。

此外，若 $X^*X = Y^*Y$，则可将 Z 选为一个部分等距算子，其初始投影为 X 的值域投影，终投影为 Y的值域投影。

注意，引理 2.1 在一般的 C^*-代数情形下并不成立。事实上，对于局部紧豪斯多夫空间 Ω，交换 C^*-代数 $C_0(\Omega)$ 具有 Douglas 性质，当且仅当 Ω 是次 Stonean。有关更多细节，读者可参阅 [13]和 [14]。尽管如此，我们仍有如下结论。

引理 2.2。设 $X \in \mathfrak{A}$ 和 $B \in \mathfrak{A}^+$。若 $X^*X \leq B$ 和 $0 < \alpha < 1/2$，则存在一个 $V \in \mathrm{cl}(\mathfrak{A}A) \subseteq \mathfrak{A}$，使得 $V^*V \leq B^{1-2\alpha}, VV^* \leq (XX^*)^{1-2\alpha}$ 且 $X = VB^\alpha$。

证明。参见 [5, 命题 II.3.2.1]。 □

回顾一下，若 $X \in \mathfrak{A}$ $\sigma(X^*X)\backslash\{0\}$ 是闭的，则称元素为良支撑。更多信息请参见 [5, 第 69] 页。如 [3], 中 Douglas 定理所述，当 $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 时，我们有 $\mathfrak{A}^A = \mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$。特别地，如果 A 是良支撑的，我们便可知 $\mathfrak{A}_A = \mathfrak{A}^A$。但一般而言，$\mathfrak{A}_A \subseteq \mathfrak{A}^A \subseteq \mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$。该

下一个定理推广了 [3, 命题 1.1]，并给出了集合 $\mathfrak{A}^A$ 的另一种刻画。

定理 2.3. 以下陈述成立。

(i) $\mathfrak{A}^A = \left\{X \in \mathfrak{A}: \ \exists\ c > 0,\ U \in \mathfrak{A}$使得 $A^{1/2}X = UA^{1/4}$且 $U^*U \leq cA^{1/2}\right\}$. (ii) 如果 A 是良支撑的，那么 (iii) $\mathfrak{M}^A = \mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) \cap \mathfrak{M} = \left\{X \in \mathfrak{M}: X$ 有一个 $A^{1/2} -$ 伴随元 $\right\}$.

$$\mathfrak{A}^A = \mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) \cap \mathfrak{A} = \left\{X \in \mathfrak{A} : X \ has\ an\ A^{1/2} - adjoint\right\}.$$

证明. (i) 如果 $X \in \mathfrak{A}$ 满足：对某个 $U \in \mathfrak{A}$ 有 $A^{1/2}X = UA^{1/4}$，且 $c > 0$ 满足 $U^*U \leq cA^{1/2}$。那么对于任意 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$，由于 $A^{1/4}U^*UA^{1/4} \leq cA$，我们有

$$f(X^*AX) = f(A^{1/4}U^*UA^{1/4}) \leq cf(A),$$

因此 $\|X\|_A < \infty$。所以 $X \in \mathfrak{A}^A$。现在，令 $X \in \mathfrak{A}^A$ 并设 $c = \|X\|_A^2$。那么根据 $\|X\|_A$ 的定义，对于任意满足 $f(A) \neq 0$的态 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$，我们有 $f(X^*AX) \leq cf(A)$。现在，令 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$满足 $f(A) = 0$。由于 $A \neq 0$，存在 $g \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$使得 $g(A) \neq 0$。设 $f_\varepsilon = \varepsilon f + (1-\varepsilon)g$，则 f_ε 是 $\mathfrak{A}$ 上的一个态，并且对于任意 $0 < \varepsilon < 1$，有 $f_\varepsilon(A) \neq 0$。特别地，对于任意 $0 < \varepsilon < 1$，有 $f_\varepsilon(X^*AX) \leq cf_\varepsilon(A)$。令 ϵ趋于 1，得到对于任意 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$，有 $f(X^*AX) \leq cf(A)$。因此 $X^*AX \leq cA$。将引理 2.2应用于 $\alpha = \frac{1}{4}$ 和 $B = cA$，得到对于某个 $V \in$，有$A^{1/2}X = c^{1/4}VA^{1/4}$，其中cl$(\mathfrak{A}A) \subseteq \mathfrak{A}$ 满足 $V^*V \leq c^{1/2}A^{1/2}$。令$U = c^{1/4}V$，可见 $A^{1/2}X = UA^{1/4}$且 $U^*U \leq cA^{1/2}$。

(ii) 假设 A 是良支撑的。那么 cl$(\mathfrak{A}A) = \mathfrak{A}A$，由 [5, 命题 II.3.2.11]可知。因此，由 (i) 可得，对于某个 $B \in \mathfrak{A}$，有 $U = BA$。

$$A^{1/2}X = BA^{5/4} = \left(A^{3/4}B^*\right)^* A^{1/2}.$$

因此证明完成，因为 $A^{3/4}B^*$ 是 X的 $A^{1/2}$-伴随。

(iii) 其证明与 (ii) 的证明非常相似，故略去。 □

设 A 是良支撑的。回顾一下，A的 Moore–Penrose逆记作 $A^\dagger$，它是满足以下条件的唯一元素 $Z \in \mathfrak{A}$：

$$A = AZA,\ ZAZ = Z,\ (AZ)^* = AZ,\ (ZA)^* = ZA.$$

注意，若记 A值域上的正交投影为 P，则 $AA^\dagger = A^\dagger A = P$。更多信息请参见 [11]。

推论 2.4. 若 A 是良支撑的，则 $\mathfrak{A}^A = \mathfrak{A}_A$。

证明。只需证明 $\mathfrak{A}^A \subseteq \mathfrak{A}_A$。为此，令 $X \in \mathfrak{A}^A$。根据定理2.3(ii) $A^{1/2}X = Y^*A^{1/2}$ 对某个 $Y \in \mathfrak{A}^A$。注意到 $A^\dagger \in \mathfrak{A}$ 且$AA^\dagger = A^\dagger A = P$，可得

$$AX = A^{1/2}Y^*A^{1/2} = \left(A^{1/2}Y^*A^{1/2}A^\dagger\right)A = \left((A^\dagger)^*A^{1/2}YA^{1/2}\right)^* A.$$

因此，$(A^\dagger)^*A^{1/2}YA^{1/2}$ 是 X 的 A-伴随元，所以 $X \in \mathfrak{A}_A$，如所需。 □

注 2.5. 注意，由定理 2.3 的证明可知 $f(X^*AX) = 0$对任意 $X \in \mathfrak{A}^A$ 以及 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$ 当 $f(A) = 0$。

最近，作者在 [4] 中引入了 $\mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$中元素的 A-可逆性概念。更确切地说，如果存在$Y \in \mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$使得 $AXY = AYX = A$，则称算子 $X \in \mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$在$\mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$中是 A-可逆的。$\mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$中 A-逆存在的充要条件陈述于[4, 定理 4.2] 如下。

引理 2.6. [4]算子$X \in \mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$在$\mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$中可逆，当且仅当满足以下两个条件：

(i) *there exists* $c > 0$ *such that* $\frac{1}{c}\|h\|_A \leq \|Xh\|_A \leq \|h\|_A$ *for all* $h \in \mathcal{H}$;
(ii) $\mathcal{R}(AX) = \mathcal{R}(A)$.

现在，我们给出以下定义。

定义 2.7. 若元素 $X \in \mathfrak{A}^A$ 满足 A-左（分别为 A-右）可逆于 $\mathfrak{A}^A$，即存在 $Y \in \mathfrak{A}^A$ 使得 $AYX = A$ （分别为 $AXY = A$），则称其为 A-左（分别为 A-右）可逆。若元素 $X \in \mathfrak{A}^A$ 在 $\mathfrak{A}^A$ 中有一个 A-逆，即存在元素 $Y \in \mathfrak{A}^A$ 使得 $AXY = AYX = A$，则称其为 A-可逆。

注 2.8. 注意，给定的 $X \in \mathfrak{A}^A$ 可能有零个、一个或多个 A-逆元。事实上，若 Y 是 X 的一个 A-逆元，且对于某个$Z \in \mathfrak{A}$ 有 $AXZ = AZX = 0$，那么 $Y + Z$ 也是 X的一个 A-逆元。

显然， $\mathfrak{A}^A$ 中的任何 A-可逆元在 $\mathfrak{A}^A$中都是 A-左可逆且 A-右可逆的。如下结果表明，反之亦然。

定理 2.9. 设 $X \in \mathfrak{A}^A$。以下陈述等价。

(i) X 在 $\mathfrak{A}^A$中是 A-可逆的；(ii) X 在 $\mathfrak{A}^A$中是 A-左可逆且 A-右可逆的；(iii) 存在 $Y \in \mathfrak{A}^A$ 使得 $AXY = A$ 且 $\mathcal{N}(AX) \subseteq \mathcal{N}(A)$ 。

证明. (i)$\Longrightarrow$(ii) 该推论显然。

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 假设对于某个 Y， $AXY = AZX = A$ 且 Z 属于 $\mathfrak{A}^A$。注意

$$\mathcal{N}(A^t) = \mathcal{N}(A), \tag{2.1}$$

对任意 $t > 0$ （例如参见 [15, 引理 2。9]）。由定理 2.3 （i），存在$V \in \mathfrak{A}$ 使得 $A^{1/2}Z = VA^{1/4}$。我们有

$$A = AZX = A^{1/2}\big(A^{1/2}Z\big)X = A^{1/2}VA^{1/4}X. \tag{2.2}$$

现在，令 $h \in \mathcal{N}\ (AX)$。则 $Xh \in \mathcal{N}\ (A)$，并由 （2.1）可得 $Xh \in \mathcal{N}\ (A^{1/4})$。因此 $h \in \mathcal{N}\ (A^{1/4}X)$，故由 （2.2）可得 $h \in \mathcal{N}\ (A)$。于是$\mathcal{N}\ (AX) \subseteq \mathcal{N}\ (A)$。

(iii)$\Longrightarrow$(i) 假设 (iii) 成立。因此， $AXY = A$ 对于某个 $Y \in \mathfrak{A}^A$ 和 $\mathcal{N}(AX) \subseteq \mathcal{N}(A)$。令 P 为 A 值域上的正交投影。由定理 2.3(i)，存在 $U \in \mathfrak{A}$ 使得 $A^{1/2}X = UA^{1/4}$。令 $h \in \mathcal{N}(A)$。于是，由 (2.1)， $h \in \mathcal{N}(A^{1/4})$。因此， $h \in \mathcal{N}(UA^{1/4}) = \mathcal{N}(A^{1/2}X)$，进而 $h \in \mathcal{N}(AX)$。所以， $\mathcal{N}(AX) = \mathcal{N}(A)$。类似地，我们可以看到 $\mathcal{N}(AY) = \mathcal{N}(A)$。我们

有 $h \in \mathcal{N}(AYX)$ 当且仅当 $Xh \in \mathcal{N}(AY)$，或者等价地，当且仅当$Xh \in \mathcal{N}(A)$。这当且仅当 $h \in \mathcal{N}(AX)$ 成立，或者等价地，$h \in \mathcal{N}(A)$。由此，$\mathcal{N}(AYX) = \mathcal{N}(A)$。注意到 $X\big(\mathcal{N}(A)\big) \subseteq \mathcal{N}(A)$ 且$Y\big(\mathcal{N}(A)\big) \subseteq \mathcal{N}(A)$，我们得到 $(PYX)^2 = PYX$。也就是说，PYX 是 $\mathcal{H}$ 上的一个投影。最后，由于 $\mathcal{R}(PYX) \subseteq \mathcal{R}(P) = \mathrm{cl}(\mathcal{R}(A))$ 且 $\mathcal{N}(AYX) = \mathcal{N}(A)$，可得 $PYX = P$。我们有

$$AYX = APYX = AP = A$$

因此 $AYX = A$。所以，X 是 A-可逆的。 □

由于冯·诺伊曼代数包含其元素的值域投影，我们还得到以下结果。

推论 2.10。设 $X \in \mathfrak{M}^A$ 和 P 是到 A 的值域上的正交投影。以下条件等价：

(i) XP 是 A-可逆的；
(ii) PX 是 A-可逆的；
(iii) X 是 A-可逆的。

证明。(i)$\Longrightarrow$(ii) 假设 (i) 成立。那么 $AXPY = AYXP = A$ 对某个 $Y \in \mathfrak{M}^A$。由于 $A = AP$，$PXP = PX$且 $PYP = PY$那么，$A = A(PX)Y$且$A(PY)(PX) = A$。因此 PX是 A-可逆的，由定理 2.9。

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 设 PX 为 A-可逆的。则存在 $Y \in \mathfrak{A}^A$ 使得 $APXY = AYXP = A$。注意到 $A = AP$且 $PYXP = PYX$，可得 $AXY = A$ 且 $AYX = APYX = A(PYXP) = AYXP = A$。因此，$X$ 是 A-可逆的。

蕴含关系 (iii)$\Longrightarrow$(i) 可用类似的方法处理。 □

我们引用[8]中的一个结果。

引理 2.11. [8, 推论 1] 设 B 和 C 是 $\mathcal{H}$上的有界算子。存在 $\mathcal{H}$ 上的可逆算子 D，使得 $B = CD$，当且仅当 B 和 C 具有相同的值域和零度。

下面的结果表明，$\mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$中的 A-逆可以选为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的可逆算子。

定理 2.12. 设 $X \in \mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$。以下陈述等价。

(i) X 在$\mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$中可逆；(ii) 存在一个算子$Y \in \mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$，它在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中可逆，使得 $AXY = AYX = A$。

证明。蕴含关系 (ii)$\Longrightarrow$到 (i) 是显然的。下面证明蕴含关系 (i)$\Longrightarrow$到 (ii)。假设 X 在 $\mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ 中可逆。因此，根据引理 2.6，$\mathcal{R}(AX) = \mathcal{R}(A)$，并且存在 $c > 0$ 使得

$$\frac{1}{c}\|h\|_A \leq \|Xh\|_A \leq \|h\|_A \qquad (h \in \mathcal{H}). \tag{2.3}$$

由此可知 $\mathcal{N}(AX) = \mathcal{N}(A)$。因此，根据引理2.11 存在一个可逆算子 Y 在 $\mathcal{H}$ 上，使得 $AXY = A$。现在，令 $k \in \mathcal{H}$。由 (2.3)

有

$$\begin{aligned}\|Yk\|_A^2 &\leq c\|XYk\|_A^2 = c\langle AXYk, XYk\rangle \\ &= c\langle Ak, XYk\rangle = c\langle k, AXYk\rangle = c\langle k, Ak\rangle = c\|k\|_A^2,\end{aligned}$$

因此 $\|Yk\|_A \leq \sqrt{c}\|k\|_A$。由此可得 $Y \in \mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$。因此有 $AXY = A$ 其中 $Y \in \mathcal{B}_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ 以及 $\mathcal{N}(AX) \subseteq \mathcal{N}(A)$。现在，定理 2.9可推出 (ii)。□

现在，根据定理 2.9，元素 A-谱的定义自然地给出。更确切地，令:

$$\sigma_A^l(X, \mathfrak{A}) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\mathbf{1} - X \text{ is not } A - \text{left invertible}\Big\},$$

$$\sigma_A^r(X, \mathfrak{A}) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\mathbf{1} - X \text{ is not } A - \text{right invertible}\Big\},$$

and

$$\sigma_A(X, \mathfrak{A}) = \sigma_A^l(X, \mathfrak{A}) \cup \sigma_A^r(X, \mathfrak{A}).$$

我们分别将 $\sigma_A^l(X, \mathfrak{A})$、 $\sigma_A^r(X, \mathfrak{A})$ 和 $\sigma_A(X, \mathfrak{A})$ 称为 A 的左谱、右A-谱和 A-谱。若不致混淆，我们也将这些子集分别简单记为 $\sigma_A^l(X)$、 $\sigma_A^r(X)$ 和 $\sigma_A(X)$。

注 2.13. 值得注意的是，当 A 在 $\mathfrak{A}$ 中可逆时，上述集合分别与 X 的左谱 $\sigma^l(X)$、右谱 $\sigma^r(X)$ 以及谱 $\sigma(X)$ 重合。

下一个定理是 [4, 定理 4.2] 的一个变体。它刻画了 $\mathfrak{A}^A$ 上的 A-可逆性。

定理 2.14. 设 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的冯·诺伊曼代数（分别地，是一个带有A 良支撑的 C^*-代数），且 $X \in \mathfrak{M}^A$ （分别地， $X \in \mathfrak{A}^A$）。那么，当且仅当以下两个条件成立时， X 在 $\mathfrak{M}^A$（分别地，在 $\mathfrak{A}^A$）中是 A-可逆的:

(i) *there exists* $c > 0$ *such that* $\frac{1}{c}f(A) \leq f(X^*AX) \leq cf(A)$ *for any* $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{M})$ *(resp.* $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$*);*
(ii) *there exists* $\alpha > 0$ *such that* $A^2 \leq \alpha AXX^*A$.

证明。 我们只给出冯·诺伊曼代数情形的证明。对于带有 C^*-代数 $\mathfrak{A}$且 A 良支撑的情形，采用相同的证明思路，并结合定理2.3(ii)。

假设 X 在 $\mathfrak{M}^A$ 中是 A-可逆的。因此，存在某个 $Y \in \mathfrak{M}^A$，使得 $AXY = AYX = A$ 。令 $c := \max\{\|X\|_A, \|Y\|_A\}$，并令 $\alpha := \|Y\|^2$。由于 $X \in \mathfrak{M}^A$，于是对任意满足 $f(A) \neq 0$ 的 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{M})$，都有 $f(X^*AX) \leq \|X\|_A f(A)$。回忆注记 2.5，当 $f(A) = 0$ 时，我们有 $f(X^*AX) = 0$，因此 $f(X^*AX) \leq \|X\|_A f(A)$。于是，对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{M})$，都有 $f(X^*AX) \leq cf(A)$。

现在，若 $f(X^*AX)=0$再次由注记 2.5可知 $f(A)=0$，因此$\frac{1}{c}f(A)=f(X^*AX)$。若 $f(X^*AX)\neq 0$，则由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} f^2(A)=f^2(AYX) &\leq f(A)f(X^*Y^*AYX) \\ &= f(A)f(X^*AX)\frac{f(X^*Y^*AYX)}{f(X^*AX)} \\ &\leq f(A)f(X^*AX)\|Y\|_A \leq cf(A)f(X^*AX), \end{aligned}$$

由此可得 $f^2(A)\leq cf(A)f(X^*AX)$。因此，对任意 $f\in\mathcal{S}(\mathfrak{M})$，都有$\frac{1}{c}f(A)\leq f(X^*AX)$。

此外，由于 $YY^*\leq\|Y\|^2\mathbf{1}=\alpha\mathbf{1}$，根据[12, 定理 2.2.5]，，我们有

$$AX\big(\alpha\mathbf{1}-YY^*\big)X^*A\geq 0.$$

因此，

$$\begin{aligned} A^2 &= AXYY^*X^*A \\ &= \alpha AXX^*A-AX\big(\alpha\mathbf{1}-YY^*\big)X^*A\leq\alpha AXX^*A, \end{aligned}$$

所以 $A^2\leq\alpha AXX^*A$。

对于逆命题，注意到条件 (i) 蕴含

$$\frac{1}{c}\langle Ah,h\rangle\leq\langle X^*AXh,h\rangle\leq c\langle Ah,h\rangle\quad(h\in\mathcal{H}). \tag{2.4}$$

由于 $A^2\leq\alpha AXX^*A$ 对某个 $\alpha>0$成立，因此由引理 2.1 可知存在 $Y\in\mathfrak{M}$使得 $A=Y^*X^*A$ 或者等价地 $AXY=A$。利用条件（2.4），显然 $\mathcal{N}(AX)\subseteq\mathcal{N}(A)$。此外，对任意 $h\in\mathcal{H}$，由（2.4）可得

$$\begin{aligned} \langle Y^*AYh,h\rangle &= \langle AYh,Yh\rangle \\ &\leq c\langle X^*AXYh,Yh\rangle \\ &= c\langle Y^*X^*AXYh,h\rangle=c\langle AXYh,h\rangle=c\langle Ah,h\rangle. \end{aligned}$$

因此 $\|Y\|_A<\infty$ 进而 $Y\in\mathfrak{M}^A$。结合定理 2.9 即可得出结论。□

接下来的结果探讨冯·诺伊曼代数中两个 A-可逆元素的乘积的 A-可逆性。

定理 2.15. 设 X 和 Y 是 $\mathfrak{M}^A$ 中的 A-可逆元素，其 A-逆分别为 $Z\in\mathfrak{M}^A$和 $W\in\mathfrak{M}^A$。则 XY是 A-可逆的，其 A-逆为 WZ。

证明。假设 $AXZ=AZX=A$ and $AYW=AWY=A$。由定理 2.9 可得 $\mathcal{N}(AX)\subseteq\mathcal{N}(A)$ 且 $\mathcal{N}(AY)\subseteq\mathcal{N}(A)$。令 $h\in\mathcal{N}(AXY)$。因此$Yh\in\mathcal{N}(AX)$，进而 $Yh\in\mathcal{N}(A)$。于是 $h\in\mathcal{N}(AY)$，所以 $h\in\mathcal{N}(A)$。因此，$\mathcal{N}(AXY)\subseteq\mathcal{N}(A)$。此外，由 (2.1) 可得 $A^{1/2}XZ=A^{1/2}ZX=A^{1/2}$ and $A^{1/2}YW=A^{1/2}WY=A^{1/2}$。由于根据定理 2.3(iii)，存在某个 $L\in\mathfrak{M}^A$ 使得$A^{1/2}X=L^*A^{1/2}$，于是

$$AXYWZ=A^{1/2}L^*A^{1/2}YWZ=A^{1/2}L^*A^{1/2}Z=AXZ=A.$$

由于 $WZ\in\mathfrak{M}^A$，证明得证。□

我们以下述结果结束本节。

定理 2.16. 若 X、Y、R和 W属于 $\mathfrak{A}^A$，且 $A^{1/2}X = W^*A^{1/2}$和$A^{1/2}Y = R^*A^{1/2}$，则 X 是 A-可逆的，其 A-逆为 Y，当且仅当 W 是A-可逆的，其 A-逆为 R。

证明。 假设 $AXY = AYX = A$。因此，由（2.1），我们有 $A^{1/2}XY = A^{1/2}YX = A^{1/2}$ 于是 $W^*R^*A^{1/2} = R^*W^*A^{1/2} = A^{1/2}$。因此， $A^{1/2}RW = A^{1/2}WR = A^{1/2}$所以 $ARW = AWR = A$由此可得 W是 A-可逆的，其A-逆元为 R。反向结论可用类似方法证明。 □

3. A-SPECTRAL PERMANENCE

在 C^*-代数理论中，最重要的结果之一是所谓的谱保持定理（见[12, 定理 2.1.11]），该定理指出，若$\mathfrak{B}$是含单位元的 C^*-代数 $\mathfrak{A}$ 的 C^*-子代数，且包含 $\mathfrak{A}$的单位元，则$\sigma(X, \mathfrak{B}) = \sigma(X, \mathfrak{A})$ $(X \in \mathfrak{B})$。这意味着，如果 $X \in \mathfrak{B}$ 在 $\mathfrak{A}$中可逆，那么X 在 $\mathfrak{B}$中可逆。显然，若 A 可逆，则对任意$X \in \mathfrak{A}$，都有 $\sigma_A(X) = \sigma(X)$，并且谱保持性质成立。但一般而言，对于 A-谱，该性质并不成立，以下示例说明了这一点。

例 3.1. 设 $\Omega := \left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\} \cup \{0\}$。注意，在从 $\mathbb{R}$ 继承的通常拓扑下，Ω 是一个紧豪斯多夫空间。设 A 和 X 是交换 C^*-代数 $C(\Omega)$ 中定义如下的两个函数：

$$A(t) = \begin{cases} t & \text{if } t = \frac{1}{2n}, n \geq 1, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{3.1}$$

并且 $X(t) = t$ 对任意 $t \in \Omega$ 都成立。若 Y 是一个复值函数，且 $A = AXY$，则对任意 $n \geq 1$，必有 $Y(\frac{1}{2n}) = 2n$。因此， Y不可能连续。另一方面，函数

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{if } t = \frac{1}{2n}, n \geq 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

是 $L^\infty(\Omega, \mu)$ 中 X 的一个 A-逆元，其中 μ 是勒贝格测度。因此，$0 \notin \sigma_A(X, C(\Omega))$，但 $0 \in \sigma_A(X, L^\infty(\Omega, \mu))$。

注意，由(3.1)给出的正算子并非良支撑，因为 0 是 $A(\Omega)$ 的一个聚点。下文的目的是证明当 A 良支撑时， C^*-代数的 A-谱保持定理 A。因此，在本文余下部分，我们假设 A是良支撑的。为证明所述结果，我们先给出研究所需的一些预备结果。第一个引理见 [1, 定理 2。13]。

引理 3.2. 设 $g : A\mathfrak{A}^A \longrightarrow \mathbb{C}$，使得对所有 $Y \in \mathfrak{A}^A$， $g(A) = 1$ 且 $|g(AY)| \leq \|Y\|_A$。那么存在 $f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A})$，使得对所有 $Y \in \mathfrak{A}^A$， $f(AY) = g(AY)$。

第二个引理如下。

引理 3.3. 设 $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和 $X \in \mathfrak{A}^A$。若 $\|X\|_A < 1$，则 $\mathbf{1} - X$ 在 $\mathfrak{A}^A$ 中是 A-可逆的。

证明. 注意到 $A^{1/2}$ 是良支撑的。令 $W = (A^{1/2})^\dagger X^* A^{1/2}$。由于 $X(\mathcal{N}(A)) \subset \mathcal{N}(A)$，我们得到 $A^{1/2}X = W^* A^{1/2}$。因此， W 是 X 的一个 $A^{1/2}$-伴随元。此外，根据 [6, 定理 3.5] 和 [2, 命题 2.2], ，我们有 $\|X\|_A = \|A^{1/2}X(A^{1/2})^\dagger\| = \|W\|$。应用 [12, 定理 1-2.2], ，可知 $\mathbf{1} - W$ 在 $\mathfrak{A}$ 中可逆，且

$$(\mathbf{1} - W)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} W^n = \sum_{n=0}^{\infty} (A^{1/2})^\dagger (X^*)^n A^{1/2}.$$

显然， $(\mathbf{1} - W)^{-1} \in \mathfrak{A}^A$ ，因此 $\mathbf{1} - W$ 是 A-可逆的。最后，利用 $A^{1/2}(\mathbf{1} - W) = (\mathbf{1} - X)^* A^{1/2}$ 这一事实，可以很容易看出 $\mathbf{1} - X$ 在 $\mathfrak{A}^A$ 中是 A- 可逆的。□

推论 3.4. 设 $(X_n)_{n\geq 1}$ 是 $\mathfrak{A}^A$ 中一列 A-可逆元素，且 $X \in \mathfrak{A}^A$ 是一个非 A-可逆元素，使得 $\lim_{n\to\infty} \|X - X_n\|_A = 0$。若对每个 $n \geq 1$， $Y_n \in \mathfrak{A}^A$ 都是 X_n 的一个 A-逆，则 $\lim_{n\to\infty} \|Y_n\|_A = +\infty$。

证明。反设 $\lim_{n\to\infty} \|Y_n\|_A < \infty$。那么存在 $c > 0$ 和 $(Y_n)_{n\geq 1}$ 的一个子序列 $(Y_{\theta(n)})_{n\geq 1}$ ，使得对任意 $n \geq 1$，都有 $\|Y_{\theta(n)}\|_A \leq c$ 。我们有

$$AX = A\left(X - X_{\theta(n)}\right) + AX_{\theta(n)} = AX_{\theta(n)}\Big(Y_{\theta(n)}\left(X - X_{\theta(n)}\right) + \mathbf{1}\Big).$$

由于 $\left\|Y_{\theta(n)}\left(X - X_{\theta(n)}\right)\right\|_A \leq c\left\|X - X_{\theta(n)}\right\|_A$ 且 $\lim_{n\to\infty} \left\|X - X_{\theta(n)}\right\|_A = 0$，因此，根据引理 3.3， $Y_{\theta(n)}\left(X - X_{\theta(n)}\right)$ 是 A-可逆的，当 n 足够大时。因此，根据定理 2.15 X 是 A- 可逆的，这就产生了矛盾。 □

第三个引理如下。

引理 3.5. 设 $X \in \mathfrak{A}^A$。以下陈述成立。

(i) 如果 $AX\mathfrak{A}^A \subsetneq A\mathfrak{A}^A$，则存在 $f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A})$，使得 $f(AXY) = 0$ 对所有 $Y \in \mathfrak{A}^A$成立。(ii) 如果 $A\mathfrak{A}^A X \subsetneq A\mathfrak{A}^A$，则存在 $f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A})$，使得 $f(AYX) = 0$ 对所有 $Y \in \mathfrak{A}^A$成立。

证明。 (i) 对于任意 $Z \in \mathfrak{A}^A$，令 $N(AZ) := \|Z\|_A$，并注意到 $N(\cdot)$ 在 $A\mathfrak{A}^A$上定义了一个范数。我们有

$$\operatorname{dist}(A, AX\mathfrak{A}^A) = \inf_{Z\in\mathfrak{A}^A} N(AXY - A) = \inf_{Z\in\mathfrak{A}^A} \|XZ - \mathbf{1}\|_A.$$

显然， $\operatorname{dist}(A, AX\mathfrak{A}^A) \leq \|\mathbf{1}\|_A = 1$。如果 $\operatorname{dist}(A, AX\mathfrak{A}^A) < 1$，那么 $\|XZ - \mathbf{1}\|_A < 1$ 对某个 $Z \in \mathfrak{A}^A$ 成立。根据引理 3.3， XZ 是 A-可逆的，于是 $AX\mathfrak{A}^A = A\mathfrak{A}^A$ ，这与我们的假设矛盾。因此 $\operatorname{dist}(A, AX\mathfrak{A}^A) = 1$。因此，存在 $A\mathfrak{A}^A$ 上的一个范数为 1 的有界线性泛函 g ，使得 $g_{|AX\mathfrak{A}^A} = 0$ 且 $g(A) = 1$。由于对于任意 $Z \in \mathfrak{A}^A$， $|g(AZ)| \leq N(AZ) = \|Z\|_A$ ，根据引理 3.2，存在 $f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A})$，使得对所有 $Z \in \mathfrak{A}^A$， $f(AZ) = g(AZ)$。因此，对所有 $Y \in \mathfrak{A}^A$， $f(AXY) = g(AXY) = 0$ 。

(ii) (ii) 的证明与 (i) 类似，因此略去。 □

现在，我们可以陈述本节的主要结果之一。

定理 3.6. 设 $X \in \mathfrak{A}^A$。则

$$\sigma_A^r(X) = \Big\{ f(AX) : f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A}) \text{ and } f(AXY) = f(AX)f(AY), \forall Y \in \mathfrak{A}^A \Big\} \quad (3.2)$$

and

$$\sigma_A^l(X) = \Big\{ f(AX) : f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A}) \text{ and } f(AYX) = f(AX)f(AY), \forall Y \in \mathfrak{A}^A \Big\}. \quad (3.3)$$

证明。首先，令 $\lambda \in \sigma_A^r(X)$。于是 $A(\lambda \mathbf{1} - X)\mathfrak{A}^A \subsetneq A\mathfrak{A}^A$。根据引理 3.5(i)，存在 $f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A})$，使得对所有 $Y \in \mathfrak{A}^A$，$f(A(\lambda \mathbf{1} - X)Y) = 0$。因此，对所有 $Y \in \mathfrak{A}^A$，$f(AXY) = \lambda f(AY)$。由于 $f(A) = 1$，取 $Y = \mathbf{1} \in \mathfrak{A}^A$ 后得到 $\lambda = f(AX)$，进而对每个 $Y \in \mathfrak{A}^A$，$f(AXY) = f(AX)f(AY)$。反过来，若对某个 $f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A})$，$\lambda = f(AX)$，且对所有$Y \in \mathfrak{A}^A$，$f(AXY) = f(AX)f(AY)$。那么 $X - \lambda \mathbf{1}$ 不是 A-可逆的，因为若对某个$Y \in \mathfrak{A}^A$，$A(X - \lambda \mathbf{1})Y = A$，则可得 $f(A) = f(A(X - \lambda \mathbf{1})Y) = f(AX)f(AY) - \lambda f(AY) = 0$，这不可能，因为 $f(A) = 1$。类似地，可以证明 $\sigma_A^l(X)$ 的等式。□

注 3.7. 注意，如果 A 不是良支撑的，那么

$$\Big\{ f(AX) : f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A}) \text{ and } f(AXY) = f(AX)f(AY), \forall Y \in \mathfrak{A}^A \Big\} \subsetneq \sigma_A^r(X)$$

or

$$\Big\{ f(AX) : f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A}) \text{ and } f(AYX) = f(AX)f(AY), \forall Y \in \mathfrak{A}^A \Big\} \subsetneq \sigma_A^l(X).$$

事实上，当且仅当 A是良支撑的时，这些等式成立。确实：若 A是良支撑的，则结论由定理 3.6 得出。反之，假设对于任意 X，等式（3.2）和（3.3）均成立。特别地，$0 \notin \sigma_A(A)$。也就是说，A 是 A-可逆的。因此存在 $B \in \mathfrak{A}^A$ 使得 $A = A^2B = ABA$。于是$A\mathfrak{A}$ 是闭的，从而根据[9, 定理 2，1] A 是良支撑的。

当 $A = \mathbf{1}$ 时，我们得到以下结果。

推论 3.8. 设 $X \in \mathfrak{A}$。则

$$\sigma(X) = \Big\{ f(X) : f \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}) \text{ such that } f(XY) = f(X)f(Y), \forall Y \in \mathfrak{A} \text{ or } f(YX) = f(X)f(Y), \forall Y \in \mathfrak{A} \Big\}.$$

给定一个元素 $X \in \mathfrak{A}$，A-代数数值值域 $V_A(X)$ 的 X 在[6]中定义为

$$V_A(X) := \big\{ f(AX) : f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A}) \big\}.$$

由于 A 是良支撑的，因此对任意 $X \in \mathfrak{A}^A$，A-数值域都是 $\mathbb{C}$的非空、凸且紧子集。关于该集合的更多细节和性质见 [1, 6, 10]。由定理 3.6可立即得到以下结果。

推论 3.9. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个 C^*代数，且 $X \in \mathfrak{A}^A$。则 $\sigma_A(X) \subseteq V_A(X)$。

下一个主要结果给出了 C^*代数的 A谱保持性质。

定理 3.10. 设 $X \in \mathfrak{A}^A$。那么

(i) $\sigma_A^r(X) = \Big\{f(AX) : f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A}),\, f(AXX^*A) = f(AX)f(AX^*A) = |f(AX)|^2 f(A^2)\Big\}$.

(ii) $\sigma_A^l(X) = \Big\{f(AX) : f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A}),\, f(X^*AX) = |f(AX)|^2\Big\}$.

特别地，如果 $\mathfrak{B}$ 是一个 C^*-代数，且 $A \in \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$，那么对于任意 $X \in \mathfrak{B}^A$，$\sigma_A(X,\mathfrak{A}) = \sigma_A(X,\mathfrak{B})$。

证明。(i) 令 $\zeta \in \sigma_A^r(X)$。因此，根据定理 3.6，存在 $f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A})$，使得$f(AXY) = f(AX)g(AY)$，对任意 $Y \in \mathfrak{A}^A$ 以及 $\zeta = f(AX)$。由于 $X^*A \in \mathfrak{A}_A \subseteq \mathfrak{A}^A$，我们有

$$\begin{aligned} f(AXX^*A) &= f(AX)f(AX^*A) = f(AX)\overline{f(AXA)} \\ &= f(AX)\overline{f(AX)f(A^2)} = |f(AX)|^2 f(A^2). \end{aligned}$$

因此 $\zeta \in \Big\{f(AX) : f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A})\ f(AXX^*A) = f(AX)f(AX^*A) = |f(AX)|^2 f(A^2)\Big\}$。

反过来，假设存在 $f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A})$，使得 $f(AXX^*A) = f(AX)f(AX^*A) = |f(AX)|^2 f(A^2)$。令 $\eta = f(AX)$。对于任意 $Y \in \mathfrak{A}^A$，由柯西–施瓦茨不等式，我们有

$$\left|f\left(A(X-\eta\mathbf{1})Y\right)\right|^2 \le f\big(A(X-\eta\mathbf{1})(X^*-\overline{\eta}\mathbf{1})A\big) f\left(Y^*Y\right). \tag{3.4}$$

由于

$$f\big(A(X-\eta\mathbf{1})(X^*-\overline{\eta}\mathbf{1})A\big) = f(AXX^*A) - \eta f(AX^*A) - \overline{\eta f(AX^*A)} + |\eta|^2 f(A^2) = 0,$$

由（3.4）可推出 f（A（$X-\eta\mathbf{1}$）Y）$=0$ 对任意 $Y \in \mathfrak{A}^A$均成立；也就是说 f（AXY）$=f$（AX）f（AY）对任意 $Y \in \mathfrak{A}^A$均成立。因此，由定理 3.6（i），可得 $\eta \in \sigma_A^r$（X）。

（ii）假设存在 $f \in \mathcal{S}_A$（$\mathfrak{A}$），使得 f（X^*AX）$=|f$（AX）$|^2$。令$\lambda = f$（AX）。对任意 $Y \in \mathfrak{A}^A$，由定理 2.3（ii），存在 $Z \in \mathfrak{A}^A$ 使得$A^{1/2}Y = Z^*A^{1/2}$。由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} &\left|f(AYX) - f(AX)f(AY)\right|^2 \\ &\quad= \left|f\left(AY(X-\lambda\mathbf{1})\right)\right|^2 \\ &\quad= \left|f\left(A^{1/2}Z^*A^{1/2}(X-\lambda\mathbf{1})\right)\right|^2 \\ &\quad\le f\left(A^{1/2}Z^*ZA^{1/2}\right) f\left((X^*-\overline{\lambda}\mathbf{1})A(X-\lambda\mathbf{1})\right) \\ &\quad= f\left(A^{1/2}Z^*ZA^{1/2}\right)\Big(f(X^*AX) - \overline{\lambda}f(AX) - \lambda f(X^*A) + |\lambda|^2 f(A)\Big) \\ &\quad= f\left(A^{1/2}Z^*ZA^{1/2}\right)\Big(|\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2\Big) = 0. \end{aligned}$$

因此 f（AYX）$=f$（AX）f（AY）对任意 $Y \in \mathfrak{A}^A$ 均成立，进而由定理 3.6（ii）可得 $\lambda \in \sigma_A^l$（X）。

现在，令 $\lambda \in \sigma_A^l(X)$。于是 $A^{1/2}\mathfrak{A}^A(X-\lambda\mathbf{1}) \subsetneq A^{1/2}\mathfrak{A}^A$。仿照引理 3.5 的证明，用 $A^{1/2}$ 代替 A，可以证明存在一个定义在 $\mathfrak{A}$ 上的正线性泛函 g，使得 $g(A^{1/2}) = 1$ 且对所有 $Y \in \mathfrak{A}^A$，$g(A^{1/2}Y(X-\lambda\mathbf{1})) = 0$。特别地，$\lambda = g(A^{1/2}X)$ 且 $g(A^{1/2}YX) = g(A^{1/2}Y)g(A^{1/2}X)$

对所有 $Y \in \mathfrak{A}^A$。由于 $g(A^{1/2}) = 1$，因此 $g(A) \neq 0$。令 $f = \frac{g}{g\,A()}$，并注意到 f属于 $\mathcal{S}_A(\mathfrak{A})$。此外

$$g(A)f(AX) = g(AX) = g(A^{1/2}A^{1/2}X) = g(A)g(A^{1/2}X) = g(A)\lambda.$$

因此 $\lambda = g(A^{1/2}X) = f(AX)$。注意，根据定理 2.3(ii)，我们有 $A^{1/2}X = W^*A^{1/2}$ 其中某个 $W \in \mathfrak{A}^A$，因此

$$\begin{aligned} f(X^*AX) &= f(X^*A^{1/2}A^{1/2}X) \\ &= f(A^{1/2}WA^{1/2}X) = \frac{g(A^{1/2}WA^{1/2}X)}{g(A)} \\ &= \frac{g(A^{1/2}W)g(AX)}{g(A)} = g(X^*A^{1/2})f(AX) \\ &= \overline{f(AX)}f(AX) = |f(AX)|^2. \end{aligned}$$

因此，$\lambda \in \left\{f(AX):\ \ f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A})\ \ f(X^*AX) = |f(AX)|^2\right\}$，证明 (ii) 至此完成。

最后，设 $\mathfrak{B}$ 是一个 C^*-代数，满足 $A \in \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$，并设 $X \in \mathfrak{B}^A$。则 AX、X^*AX 属于 $\mathfrak{B}^A$。由哈恩–巴拿赫定理可推知，$\sigma_A(X, \mathfrak{A}) = \sigma_A(X, \mathfrak{B})$。□

作为定理 3.10的直接推论，我们得到以下结果。

推论 3.11. 设 $X \in \mathfrak{A}$。则 $\lambda \in \sigma^r(X)$（分别地，$\lambda \in \sigma^l(X)$）当且仅当存在 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$，使得 $\lambda = f(X)$ 且 $f(XX^*) = |f(X)|^2$（分别地，$f(X^*X) = |f(X)|^2$）。

证明。在定理 3.10 令 $A = \mathbf{1}$。 □

在下面的结果中，我们给出 $\sigma_A(X)$ 的另一种刻画。

定理 3.12。设 $X \in \mathfrak{A}^A$ 和 P 是到 A 的值域上的正交投影。那么 $\sigma_A(X)\backslash\{0\} = \sigma(PX)\backslash\{0\}$。特别地，$\sigma_A(P) = \{1\}$。

证明。首先注意到，由定理 3.10，我们有 $\sigma_A(P) = \{1\}$，因为 $AP = A$。令 $\lambda \in \sigma(PX)\backslash\{0\}$。由推论 3.8，存在一个态 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$，使得$\lambda = f(PX)$ 且 $f(PXY) = f(PX)f(Y)$，对所有 $Y \in \mathfrak{A}$或 $f(YPX) = f(PX)f(Y)$，对所有 $Y \in \mathfrak{A}$。利用 $PXP = PX = P^2X$ 这一事实，$f(PX) = f(PX)f(P)$。由于 $\lambda \neq 0$，我们得到 $f(P) = \|P\| = 1$。特别地，对任意 $Y \in \mathfrak{A}$，有 $f(PY) = f(YP) = f(P)f(Y)$。因此 $\lambda = f(X)$ 且 $f(XY) = f(X)f(Y)$，对任意 $Y \in \mathfrak{A}$。若 $\lambda \notin \sigma_A(X)\backslash\{0\}$，则对某个 $Y \in \mathfrak{A}^A$，有 $A(\lambda\mathbf{1} - X)Y = A$。相应地 $P(\lambda\mathbf{1} - X)Y = P$。因此 $1 = f(P) = f(P(\lambda\mathbf{1} - X)Y) = f(X) - \lambda = 0$，这就产生了矛盾。现在，令 $\lambda \in \sigma_A(X)\backslash\{0\}$。于是由定理 3.6，$\lambda = g(AX)$，其中 $g \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A})$ 且 $g(AXY) = g(AX)g(AY)$，对任意 $Y \in \mathfrak{A}^A$或$g(AYX) = g(AX)g(AY)$，对任意 $Y \in \mathfrak{A}^A$。为明确起见，假设对任意 $Y \in \mathfrak{A}^A$，$g(AXY) = g(AX)g(AY)$，并令 $\varphi(Z) = {}^{g}(AZA)\,{}_{g}(A^2)$，$Z \in \mathfrak{A}$。由于对任意 $Y \in \mathfrak{A}$，YA 属于 $\mathfrak{A}^A$，直接计算可得 $\lambda = \varphi(PX)$ 且 $\varphi(PXY) = \varphi(PX)\varphi(Y)$，对任意 $Y \in \mathfrak{A}$。因此，由推论 3.8，$\lambda \in$

$\sigma(PX)\backslash\{0\}$。当 $g(AYX) = g(AX)g(AY)$，对任意 $Y \in \mathfrak{A}^A$ 时，可用类似的方法处理。□

注记 3.13。注意，一般而言，可能会出现以下情况：$\sigma_A(X) \neq \sigma(PX)$ 对于某些 $X \in \mathfrak{A}^A$。例如，如果 A 的值域在 $\mathcal{H}$中不稠密，那么 $P \notin \{0, I\}$。特别地，$\sigma(P) = \{0, 1\}$。利用定理 3.10 以及 $AP = A$这一事实，很容易看出 $\sigma_A(P) = \{1\}$。

根据 [12, 第 9], 页，如果 X 是 $\mathfrak{A}^A$的一个元素，则其 A-谱半径定义为

$$r_A(X) := \sup\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(X)\right\}.$$

定理 3.14。设 $X \in \mathfrak{A}^A$。则 $\sigma_A(X)$ 是 $\mathbb{C}$的一个非空紧子集，并且

$$r_A(X) = \lim_{n\to\infty} \|X^n\|_A^{1/n}.$$

证明。由定理 3.10 显然可知，$\sigma_A(X)$ 是 $\mathbb{C}$的一个非空紧子集。设 P 是投影到 A的值域上的正交投影。由于$P = (A^{1/2})^\dagger A^{1/2}$，由定理 3.12，可得

$$\begin{aligned} r_A(X) = r(PX) &= r\left((A^{1/2})^\dagger A^{1/2}X\right) = r\left(A^{1/2}X(A^{1/2})^\dagger\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\|\left(A^{1/2}X(A^{1/2})^\dagger\right)^n\right\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left\|A^{1/2}X^n(A^{1/2})^\dagger\right\|^{1/n}. \end{aligned}$$

利用 [2, 命题 2.2] 和 [6, 定理 3.5], ，我们推得 $r_A(X) = \lim_{n\to\infty} \|X^n\|_A^{1/n}$。

□

下一个结果是盖尔范德–马祖尔定理关于 A-谱的一种变体 m.

推论 3.15. 若 $\mathfrak{A}^A$ 的每个非零元素都是 A-可逆的，则 $\mathfrak{A}^A = \mathbb{C}\mathbf{1}$。特别地，$A = \alpha\mathbf{1}$，其中某个 $\alpha > 0$ 和 $\mathfrak{A}^A = \mathfrak{A}$。

证明。设 $X \in \mathfrak{A}^A$。由定理 3.14 存在一个复数 λ 使得$\lambda \in \sigma_A(X)$。因此 $\lambda\mathbf{1} - X$ 不是 A-可逆的，所以 $\lambda\mathbf{1} - X = 0$。于是$X = \lambda\mathbf{1}$。□

对于 $X \in \mathfrak{A}^A$，令 $\partial\sigma_A(X)$ 表示 $\sigma_A(X)$ 的边界。以下是定理 3.14 的另一个推论。

推论 3.16. 设 $X \in \mathfrak{A}^A$。若 $\lambda \in \partial\sigma_A(X)$，则存在 $\mathfrak{A}^A$ 中的一个序列 (X_n)，使得 $\|X_n\|_A = 1$ 且

$$\lim_{n\to\infty} \left\|X_n\left(\lambda\mathbf{1} - X\right)\right\|_A = \lim_{n\to\infty} \left\|\left(\lambda\mathbf{1} - X\right)X_n\right\|_A = 0.$$

证明。令 $\lambda \in \partial\sigma_A(X)$。由于根据定理 3.14 $\sigma_A(X)$ 是 $\mathbb{C}$ 的非空紧子集，因此存在一个复数序列 (λ_n) 收敛于 λ，且满足 $\lambda_n \notin \sigma_A(X)$。对于任意 $n \geq 1$，令 $Y_n \in \mathfrak{A}^A$，使得 $A(\lambda_n\mathbf{1} - X)Y_n = AY_n(\lambda_n\mathbf{1} - X) = A$。设 $X_n = \frac{Y_n}{\|Y\|_A}$。然后 $\|X_n\|_A = 1$，经过简单计算可得 $\lim_{n\to\infty} \|X_n(\lambda\mathbf{1} - X)\|_A = \lim_{n\to\infty} \|(\lambda\mathbf{1} - X)X_n\|_A = 0$。

□

注意，若 $X \in \mathfrak{A}^A$，根据定理 3.14 推论 $X_n)_{n\geq 1}$ 3.16中的序列也属于 $\mathfrak{A}_A$。此外，注意若 $X \in \mathfrak{A}_A$，则

$$\|A^{1/2}X\| \leq \|A^{1/2}\|\|X\|_A. \tag{3.5}$$

事实上，利用备注 2.5 以及 $\|\cdot\|_A$ 的定义，我们得到 $f(X^*AX) \leq \|X\|_A f(A)$，对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$。对所有 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$ 取上确界，可得 $\|A^{1/2}X\|^2 = \|X^*AX\| \leq \|X\|_A^2\|A\|$。此外，根据[1, 引理 2.12] 存在一个正数 c使得

$$\|X\|_A \leq c\|A^2X\|, \tag{3.6}$$

对于所有 A-自伴算子 $X \in \mathfrak{A}_A$。我们将在下一个结果的证明中使用这些事实。

定理 3.17. 设 $X \in \mathfrak{A}^A$。则 $\sigma_A^r(X) \subseteq \sigma(X)$ 且 $\partial\sigma_A(X) \subseteq \sigma_A^r(X) \cap \sigma_A^l(X)$。特别地，$\sigma_A^l(X)$ 和 $\sigma_A^r(X)$ 是非空集。

证明。令 $\lambda \in \sigma_A^r(X)$。由定理 3.10(i)，存在 $f \in \mathcal{S}_A(\mathfrak{A})$，使得$\lambda = f(AX)$ 且 $f(AXX^*A) = f(AX)f(AX^*A) = |f(AX)|^2 f(A^2)$。令 $\varphi = \frac{f}{f(A^2)}$。由于 $\overline{\mathfrak{A}A} \subset \mathfrak{A}^A$，直接计算可得 $\lambda = \varphi(X)$ 且$\varphi(XY) = \varphi(X)\varphi(Y)$，对任意 $Y \in \mathfrak{A}$ 均成立。因此，由推论 3.11 可得 $\lambda \in \sigma(X)$。

现在，令 $\lambda \in \partial\sigma_A(X)$。由推论 3.16 ，存在一个序列 (X_n)，其中元素属于 $\mathfrak{A}_A$，使得 $\|X_n\|_A = 1$ 且

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n(\lambda\mathbf{1} - X)\|_A = \lim_{n\to\infty} \|(\lambda\mathbf{1} - X)X_n\|_A = 0.$$

注意到 $X_n \in \mathfrak{A}^A$，于是存在 $Y_n \in \mathfrak{A}_A$ 使得 $AX_n = Y_n^*A$。若$\lambda \notin \sigma_A^r(X)$，则存在 $Y \in \mathfrak{A}^A$ 使得 $A(\lambda\mathbf{1} - X)Y = A$。因此

$$\|AX_n\| = \|Y_n^*A\| = \|Y_n^*A(\lambda\mathbf{1} - X)Y\| = \|AX_n(\lambda\mathbf{1} - X)Y\| \leq \|AX_n(\lambda\mathbf{1} - X)\|\|Y\|.$$

由此结合不等式（3.5）和（3.6）可推出 $\lim_{n\to\infty} \|X_n\|_A = 0$。这与 $\|X_n\|_A = 1$ 对任意 $n \geq 1$ 都成立相矛盾。因此 $\lambda \in \sigma_A^r(X)$。类似地，我们可以证明 $\lambda \in \sigma_A^l(X)$。于是 $\partial\sigma_A(X) \subseteq \sigma_A^r(X) \cap \sigma_A^l(X)$。□

下面的结果给出了 $\mathfrak{A}_A$ 中元素的 A-谱半径的另一种表达式。

推论 3.18。设 $X \in \mathfrak{A}_A$。那么

$$r_A(X) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A^l(X)\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A^r(X)\}.$$

证明。令 $\alpha = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A^l(X)\}$ 且 $\beta = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A^r(X)\}$。显然，$\alpha \leq r_A(X)$ 且 $\beta \leq r_A(X)$。现在，由于 $r_A(X)$ 在 $\partial\sigma_A(X)$ 上取得，根据定理 3.17，我们得到 $\alpha \geq r_A(X)$ 和 $\beta \geq r_A(X)$。因此 $r_A(X) = \alpha = \beta$。□

我们以如下结果作为本文的结尾。

推论 3.19. 设 $X \in \mathfrak{A}_A$。则 $r_A(X) \leq r$({v5)。

证明。 由推论 3.18，可得

$$r_A(X) = \sup\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A^r(X)\right\} \leq \sup\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma^r(X)\right\} = r(X).$$

□

声明。：本文所述工作由所有作者共同完成。所有作者均为本文写作作出了同等且重要的贡献。所有作者均对稿件作出了贡献。所有作者均已阅读并同意发表稿件的最终版本。

利益冲突。作者声明不存在利益冲突。

References

1. A. Alahmari、M. Mabrouk 和 A. Zamani， a代数中C^*数值域的进一步结果，Banach 数学分析杂志 16（2022），第 25 期。2. M. L. Arias、G. Corach 和 M. C. Gonzalez，半希尔伯特空间中投影的度量性质，积分方程与算子理论，62（2008），第 1 期，11–28。3. M. L. Arias、G. Corach 和 M. C. Gonzalez，算子值域中的提升性质，Acta Sci. Math.（塞格德）75（2009），635–653。4. H. Baklouti 和 S. Namouri，半希尔伯特空间上有界算子的谱分析，Banach 数学分析杂志 16（2022），第 12 期。5. B. Blackadar，算子代数： C^*代数与冯·诺伊曼代数理论。载于：算子代数与非交换几何，III。第 122 卷，数学科学百科全书。柏林：施普林格出版社；2006年。6. A. Bourhim 和 M. Mabrouk， C^*代数上的 a 数值域，Positivity 25（2021），1489–1510。7. K. Feki，半希尔伯特空间算子的谱半径及其应用，Ann. Funct. Anal. 11（2020），929–946。8. A. Fillmore 和 J. P. Williams，关于算子值域，数学进展，7，（1971），第 3 期，254–281。9. S. H. Kulkarni 和 M. T. Nair，闭值域算子的刻画，印度纯数学与应用数学杂志 31（2000），第 4 期，353–362。10. M. Mabrouk 和 A. Zamani， C^*代数上 a数值半径的扩展，Banach 数学分析杂志。DOI: 10.1007/s43037-023-00265-2。11. S. Roch 和 B. Silbermann，巴拿赫代数中广义逆的连续性，Studia Math. 136（1999），第 3 期，197–227。12. G. J. Murphy， C^*代数与算子理论，学术出版社，纽约，1990年。13. S. Nayak，冯·诺伊曼代数上矩阵代数中投影的对角线，博士论文，宾夕法尼亚大学公开学位论文，1912年。14. S. Nayak，冯·诺依曼代数的道格拉斯引理及其若干应用，Adv. Oper. Theory 6（2021），第 47 期。15. A. Zamani，满足广义柯西–施瓦茨型不等式的 C^*模算子，线性与多重线性代数，DOI: 10.1080/03081087.2022.2160862。

[1]Faculty of Sciences of Sfax, Department of Mathematics University of Sfax Tunisia & Department of Mathematics, Faculty of Applied Sciences, Umm Al-Qura University 21955 Makkah, Saudi Arabia
电子邮箱地址：msmabrouk@uqu.edu.sa

[2]School of Mathematics and Computer Sciences, Damghan University, P.O.BOX36715-364, Damghan, Iran电子邮箱地址：zamani.ali85@yahoo.com