arXiv:2305.00364v1 [math.AC] 30 Apr 2023

ϕ-(k,n)-吸收与 ϕ-(k,n)-吸收主超理想在 Krasner (m,n)-超环中

M. ANBARLOEI

ABSTRACT. 在 Krasner (m,n)-超环 R 中，素超理想的各种推广形式已得到研究。例如，若真超理想 Q 属于 R，并且对于 $r_1^{kn-k+1} \in R$,$g(r_1^{kn-k+1}) \in Q-\{0\}$，有 k,n-弱吸收（主）性质，即存在 $(k-1)n-k+2$ 个 $r_{,i}$，使其g-乘积属于 Q ($g(r_1^{(k-1)n-k+2}) \in Q$，或者除 $g(r_1^{(k-1)n-k+2})$ 外，$k-1$ 个 $r_{,i}$ 的 g-乘积属于 $\mathrm{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$）。本文旨在将这些概念推广为 ϕ-(k,n)-吸收超理想和 ϕ-(k,n)-吸收主超理想。设 ϕ 是从 $\mathcal{HI}(R)$ 到 $\mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 的函数，其中 $\mathcal{HI}(R)$ 是 R 的超理想集合，且 k 是正整数。若真超理想 Q 属于 R，并且对于 $r_1^{kn-k+1} \in R$, $g(r_1^{kn-k+1})$，若 $\in Q-\phi(Q)$，则存在 $(k-1)n-k+2$ 个 $r_{,i}$，使其 g-乘积属于 Q ($g(r_1^{(k-1)n-k+2}) \in Q$，或者除 $g(r_1^{(k-1)n-k+2})$ 外，$k-1$ 个 $r_{,i}$ 的 g-乘积属于 $\mathrm{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$），则称其为 ϕ-(k,n)-吸收（主）超理想。本文还给出了它们的若干性质和刻画。

1. INTRODUCTION

在 [7, 12] 中，研究了将素理想和主理想推广到 ϕ-素理想和 ϕ-主理想的情形。随后，Khaksari 在 [20] 和 Badawi 等人在 [9] 分别引入了 ϕ-2-素理想和 ϕ-2-主理想。设 R 为交换环。假设 ϕ 是从 $\mathcal{I}(R)$ 到 $\mathcal{I}(R)$ 的一个函数，其中 $\mathcal{I}(R)$ 是 R 的理想集。若对任意 x、y、$z \in R$，只要 $xyz \in I-\phi(I)$，就有 $xy \in I$ 或 $xz \in I$ 或 $yz \in I$，则称 R 的真理想 I 为 ϕ-2-吸收理想。此外，若对任意 x、y、$z \in R$，只要 $xyz \in I-\phi(I)$，就有 $xy \in I$ 或 $xz \in \mathrm{r}(I)$ 或 $yz \in \mathrm{r}(I)$，则称 R 的真理想 I 为 ϕ-2-吸收主理想。

超结构是至少配备一种多值运算（称为超运算）的代数结构。非空集合上的超运算是一个从映射到非空幂集的映射。关于这一主题已有数百篇论文和数部著作（更多详情见 [2, 10, 11, 13, 17, 21, 26, 30, 32,33, 34]）。代数结构的 n 元扩展是深入理解其基本性质最自然的方法。Mirvakili 和 Davvaz 在 [28] 中引入了 (m,n)-超环，并给出了若干相关结果。他们定义并描述了超群概念的一种推广，以及 n 元群的一种推广，后者称为 n 元超群 [14]。关于 n 元结构的一些综述可见于 [22, 23, 24, 25, 31]。超环中的一个重要类别是 Krasner 超环，其中加法是超运算，而乘法是普通的二元运算。Krasner

2010 *Mathematics Subject Classification.* 20N20, 16Y99, 20N15, 06E20.
Key words and phrases. ϕ-(k,n)-吸收超理想， ϕ-(k,n)-吸收主超理想。1

超环是（m,n）-超环的一个子类。Mirvakili 和 Davvaz [27], 提出了它的扩展，并称之为 Krasner（m,n）-超环。Ameri 和 Norouzi 在 [1]中定义了 Krasner（m,n）-超环中的一些重要超理想，包括 Jacobson根、幂零根、 n 元素超理想中的素超理想与主超理想，以及 n 元乘法子集。随后，Hila 等人研究了（k,n）-吸收（主）超理想的概念 [18]。Norouzi 等人参照 [27] 中的定义，为 Krasner（m,n）-超环中的正规超理想给出了新定义，并证明这些超理想与强正则关系相对应 [29]。Asadi 和 Ameri 在 Krasner（m,n）-超刚范畴中定义并分析了一个直系的直接极限 [8]。 δ-主超理想的概念适用于 Krasner（m,n）-超环，它将素超理想与主超理想统一在同一框架下，并于 [4]中提出。最近，Davvaz 等人在 Krasner（m,n）-超环中引入了新的扩张类，即弱（k,n）-吸收（主）超理想 [16]。

本文在交换 Krasner (m,n)-超环中引入并研究了 ϕ-(k,n)-吸收超理想和 ϕ- (k,n)-吸收主超理想的概念。本文给出了一些主要结果，以阐释这些结构的一般框架。在本文的诸多结果中，我们证明（定理 3.4）：若 Q 是 R 的 ϕ-(k,n)-吸收超理想，则对所有 $s \geq k$， Q 都是 ϕ-(s,n)-吸收超理想。虽然 Krasner (m,n)-超环的每个 ϕ-(k,n)-吸收超理想都是 ϕ-(k,n)-吸收主超理想，但例 4.3 表明，反之未必总成立。我们证明（定理 4.12）： Q 是 R 的 ϕ-(k,n)-吸收主超理想，当且仅当 $Q/\phi(Q)$ 是 $R/\phi(Q)$ 的弱 (k,n)-吸收主超理想。在定理 4.15 中，我们证明：若 Q 是 R 的 ϕ-(k,n)- 吸收主超理想，但不是 (k,n)- 吸收主超理想，则 $g(Q^{k(n-1)+1}) \subseteq \phi(Q)$。由此定理可得，若 Q 是 R 的 ϕ-(k,n)-吸收主超理想，但不是 R 的 (k,n)-吸收主超理想，则 $\mathrm{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q) = \mathrm{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(\phi(Q))$。

2. 克拉斯纳（m，n）超环

本节总结与 Krasner (m,n)-超环相关的预备定义。

设 A 是一个非空集合， $P^*(A)$ 是 A 的所有非空子集所成的集合。定义在 A 上的一个 n 元超运算是映射 f: $A^n \longrightarrow P^*(A)$，而有序对 ($A, f$) 称为一个 n 元超群胚。记号 a_i^j 表示序列 $a_i, a_{i+1}, ..., a_j$，其中 $j \geq i$，当 $j < i$ 时则表示空符号。若 $G_1, ..., G_n$ 是 A 的非空子集，则定义 $f(G_1^n) = f(G_1, ..., G_n) = \bigcup\{f(a_1^n) \mid a_i \in G_i, 1 \leq i \leq n\}$. 若 $b_{i+1} = ... = b_j = b$，则记 $f(a_1^i, b_{i+1}^j, c_{j+1}^n) = f(a_1^i, b^{(j-i)}, c_{j+1}^n)$。若 f 是一个 n 元超运算，则 t 元超运算 $f_{(l)}$ 定义为

$$f_{(l)}(a_1^{l(n-1)+1}) = f\Big(f(..., f(f(a_1^n), a_{n+1}^{2n-1}), ...), a_{(l-1)(n-1)+1}^{l(n-1)+1}\Big).$$

其中 $t = l(n-1) + 1$。

定义 2.1. 如果满足以下陈述，则将 [27] (R, f, g)，或简称为 R，定义为 Krasner (m,n)-超环:
(1) (R, f) 是一个典范 m 元超群；(2) (R, g) 是一个 n 元半群；(3) n 元运算 g 相对于 m 元超运算具有分配性

f，即对于每个 a_1^{i-1}、a_{i+1}^n、$x_1^m \in R$ 和 $1 \le i \le n$,

$$g\left(a_1^{i-1}, f(x_1^m), a_{i+1}^n\right) = f\left(g(a_1^{i-1}, x_1, a_{i+1}^n), ..., g(a_1^{i-1}, x_m, a_{i+1}^n)\right);$$

(4) 0 是 n元运算 g 的零元，即对于每个 $a_1^n \in R$, $g(a_1^{i-1}, 0, a_{i+1}^n) = 0$。

本文中，R 表示一个具有标量单位元 1 的交换 Krasner (m,n)-超环。

T的非空子集 R 称为 R 的子超环，当且仅当 (T,f,g) 是一个 Krasner (m,n)-超环。R的非空子集 I 是超理想，当且仅当 (I,f) 是 (R,f) 的 m元子超群，且对于每个 $x_1^n \in R$ 和 $1 \le i \le n$，$g(x_1^{i-1}, I, x_{i+1}^n) \subseteq I$。

定义 2.2. [1] 设 I 是 R的一个真超理想。若对于 R的超理想 I_1^n，$g(I_1^n) \subseteq P$ 蕴含对某个 $1 \le i \le n$有 $I_i \subseteq I$，则称 I为素超理想。

[1] 中的引理 4.5 表明，若对所有 $a_1^n \in R$，$g(a_1^n) \in I$ 蕴含对某个 $1 \le i \le n$有 $a_i \in I$，则 R 的真超理想 I 是素超理想。

定义 2.3. [1] R的真超理想 I 的根记为 $\mathbf{r^{(m,n)}}(I)$，它是包含 I的 R 的所有素超理想的交。若包含 I 的素超理想集合为空，则 $\mathbf{r^{(m,n)}}(I) = R$。

已证明（ [1]中的定理 4.23），若 $a \in \sqrt{I}^{(m,n)}$，则存在 $s \in \mathbb{N}$，使得对于 $s \le n$有 $g(a^{(s)}, 1_R^{(n-s)}) \in I$，或者对于 $s = l(n-1)+1$有 $g_{(l)}(a^{(s)}) \in I$。

定义 2.4. [1] I 的真超理想 R 若满足：$g(a_1^n) \in I$ 且 $a_i \notin I$，则存在某个 $1 \le i \le n$，使得 $g(a_1^{i-1}, 1_R, a_{i+1}^n) \in \mathbf{r^{(m,n)}}(I)$。

[1] 中的定理 4.28 表明，R 的初等超理想的根是素超理想。

定义 2.5. [18] 设 R的真超理想为 I。I 指的是

(1) (k,n)-吸收超理想：如果对于 $r_1^{kn-k+1} \in R$, $g(r_1^{kn-k+1}) \in I$，则存在 $(k-1)n-k+2$ 个 $r_{,i}$，使其 g-积属于 I。在此情况下，若 $k=1$，则 I 是 n-元素素超理想；若 $n=2$ 且 $k=1$，则 I 是 R的经典素超理想。(2) (k,n)-吸收主超理想：如果对于 $r_1^{kn-k+1} \in R$, $g(r_1^{kn-k+1}) \in I$，则 $g(r_1^{(k-1)n-k+2}) \in I$，或者除 $g(r_1^{(k-1)n-k+2})$ 外，$k-1$个 g-积（由 $n-k+2$ 的 $r_{,i}$ 组成）属于 $\mathbf{r^{(m,n)}}(I)$。

3. φ-(k,n)-ABSORBING HYPERIDEALS

在论文 [16]，中，Davvaz 等人提出了 Krasner (k,n)-超环中 n 元素素超理想的一种推广，并将其定义为弱 (k,n)-吸收超理想。本节将这一概念推广到 ϕ-(k,n)-吸收超理想的情形。

定义 3.1. 假设 $\mathcal{HI}(R)$ 是 R 和 ϕ 的超理想集合：$\mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。设 k 为正整数。若对于 $r_1^{kn-k+1} \in R$, $g(r_1^{kn-k+1}) \in Q - \phi(Q)$，有 Q 的真超理想 Q 满足.....（原文符号占位内容）

例 3.2。考虑 Krasner (2, 2)-超环 $R = \{0, 1, x\}$，其超加法和乘法定义如下:

$+$	0	1	x
0	0	1	x
1	1	R	1
x	x	1	$\{0, x\}$

$\cdot$	0	1	x
0	0	0	0
1	0	1	x
x	0	x	0

假设 ϕ 是从 $\mathcal{HI}(R)$ 到 $\mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 的函数，定义为 $\phi(I) = g(I^{(2)})$，其中 $I \in \mathcal{HI}(R)$。那么超理想 $Q = \{0, x\}$ 是 R 的 ϕ-(2, 2)- 吸收超理想。

定理 3.3。设 $\phi_1, \phi_2 : \mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是两个函数，使得对所有 $I \in \mathcal{HI}(R)$，$\phi_1(I) \subseteq \phi_2(I)$。若 Q 是 R 的一个 ϕ_1-(k, n)-吸收超理想，则 Q 是一个 ϕ_2-(k, n)-吸收超理想。

证明。设对 $r_1^{kn-k+1} \in R$ 有 $g(r_1^{kn-k+1}) \in Q - \phi_2(Q)$。由 $\phi_1(Q) \subseteq \phi_2(Q)$，可得 $g(r_1^{kn-k+1}) \in Q - \phi_1(Q)$。由于 Q 是 R 的一个 ϕ_1-(k, n)-吸收超理想，我们得出存在 $r, {}_i$ 个 $n - k + 2$，其g-乘积属于 Q，这正是所需。□

定理 3.4. 设 $\phi : \mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。若 Q 是 R 的 ϕ-(k, n)-吸收超理想，则对于所有 $s \geq k$， Q 都是 ϕ-(s, n)-吸收超理想。

证明. 用归纳法证明 k : 若 Q 是 R 的 ϕ-(k, n)-吸收超理想，则 Q 是 ϕ-$(k + 1, n)$-吸收的。假设 Q 是 ϕ-$(2, n)$-吸收的，且对于某个 $r_1^{3n-2} \in R$，$g(r_1^{2n-2}, g(r_{2n-1}^{3n-2})) \in Q - \phi(Q)$。由于 Q 是 ϕ-$(2, n)$- 吸收的，因此存在 n 个 $r,_i$ 中除 $g(r_{2n-1}^{3n-2})$ 以外的元素，其 g-乘积属于 Q，故存在 $2n - 1$ 个 $r,_i$，其 g-乘积属于 Q。这表明 Q 是 ϕ-$(3, n)$-吸收的。假设 Q 是 ϕ-(k, n)-吸收的，且对于某个 $r_1^{(k+1)n-(k+1)+1} \in R$， $g(g(r_1^{2n-2}) \; r_{2n-1}^{(k+1)n-(k+1)+1}) \in Q - \phi(Q)$。由于 Q 是 ϕ-(k, n)-吸收的，我们得出，对于某个 $2(n - 1)$，$g(g(r_1^{2(n-1)}) \; r_{2n-1}, \cdots, \widehat{r_i}, \cdots, r_{(k+1)n-(k+1)+1}) \in Q$ $\leq i \leq (k+1)n - (k + 1) + 1$ 或 $g(r_{2n-1}^{(k+1)n-(k+1)+1}) \in Q$。前一种情形表明 Q 是 ϕ-$(k + 1, n)$-吸收的。后一种情形下，由于 $g(r_1^{2(n-1)}) \in Q$，可得 $g(r_1^{n-1}, r_{2n-1}^{(k+1)n-(k+1)+1}) \in Q$。因此， Q 是 ϕ-$(k + 1, n)$-吸收的。□

回顾 [15]，如果 (R_1, f_1, g_1) 和 (R_2, f_2, g_2) 是两个 Krasner (m, n)-超环，且 1_{R_1} 和 1_{R_2} 分别是 R_1 和 R_2 的标量幺元，那么 $(R_1 \times R_2, f_1 \times f_2, g_1 \times g_2)$ 是一个 Krasner (m, n)-超环，其中

<escape>$f = f_1 \times f_2((a_1, b_1) \cdots, (a_m, b_m)) = \{(a, b) \mid a \in f_1(a_1^m) \; b \in f_2(b_1^m)\}$
$g = g_1 \times g_2((x_1, y_1) \cdots, (x_n, y_n)) = (g_1(x_1^n) \; g_2(y_1^n))$,</escape>
对所有 a_1^m、 $x_1^n \in R_1$ 以及 b_1^m、 $y_1^n \in R_2$

定理 3.5. 设对于每个$1 \leq i \leq kn - k + 1$，(R_i, f_i, g_i)都是一个交换 Krasner (m, n)-超环，且 $\mathcal{HI}(R_i) \longrightarrow \mathcal{HI}(R_i) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。设对于每个 $1 \leq i \leq kn - k + 1$和 $\phi = \phi_1 \times \cdots \times \phi_{kn-k+1}$， Q_i 是 R_i的一个超理想。若$Q = Q_1 \times \cdots \times Q_{kn-k+1}$是 $R = R_1 \times \cdots \times R_{kn-k+1}$的一个 ϕ-$(k + 1, n)$-吸收超理想，则对于所有 $1 \leq i \leq kn - k + 1$， Q_i 是 R_i 的一个 ϕ_i-(k, n)-吸收超理想，且 $Q_i \neq R_i$ 。

证明. 设 $r_1^{kn-k+1} \in R_i$ 使得 $g(r_1^{kn-k+1}) \in Q_i - \phi_i(Q_i)$。反设 Q_i 不是 R_i的 ϕ_i-(k,n)-吸收超理想。定义

$$
\begin{aligned}
&a_1 = (1_{R_1}, \cdots, 1_{R_{i-1}}, r_1, 1_{R_{i+1}}, \cdots, 1_{R_{kn-k+1}}),\\
&a_2 = (1_{R_1}, \cdots, 1_{R_{i-1}}, r_2, 1_{R_{i+1}}, \cdots, 1_{R_{kn-k+1}}),\\
&\vdots\\
&a_{kn-k+1} = (1_{R_1}, \cdots, 1_{R_{i-1}}, r_{kn-k+1}, 1_{R_{i+1}}, \cdots, 1_{R_{kn-k+1}}),\\
&a_{kn-k} = (1_{R_1}, \cdots, 1_{R_{i-1}}, 1_{R_i}, 1_{R_{i+1}}, \cdots, 1_{R_{kn-k+1}}),\\
&a_{(k+1)n-(k+1)+1} = (0, \cdots, 0, 1_{R_i}, 0, \cdots, 0).
\end{aligned}
$$

因此 $g(a_1^{(k+1)n-(k+1)+1}) \in Q-\phi(Q)$，但 $g(a_1^{kn-k+1}) \notin Q$。由于 Q 是 R的 ϕ-($k+1,n$)-吸收超理想，我们得出，$kn-k+1$ 的 g 个乘积中，除了 $g(a_1^{(k+1)n-(k+1)+1})$ 之外，至少有一个属于 Q。这意味着存在 r 的 $(k-1)n-k+2$，其 g-重积属于 Q_i，这与假设矛盾。因此，Q_i 是 R_i 的 ϕ_i-(k,n)-吸收超理想。□

设 (R_1, f_1, g_1) 和 (R_2, f_2, g_2) 是两个 Krasner (m,n)-超环。回顾 [27] 中的定义，映射 $h: R_1 \longrightarrow R_2$ 称为同态，若对所有 $a_1^m \in R_1$ 和 $b_1^n \in R_1$，有 (1)$h(f_1(a_1, ..., a_m)) = f_2(h(a_1) ..., h(a_m))$，(2)$h(g_1(b_1, ..., b_n)) = g_2(h(b_1) ..., h(b_n))$。此外，回顾 [19] 中的定义，函数$\phi: \mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 称为 $\mathcal{HI}(R)$ 的约化函数，若 $\phi(P) \subseteq P$，且 $P \subseteq Q$ 意味着对所有 $P, Q \in \mathcal{HI}(R)$，都有 $\phi(P) \subseteq \phi(Q)$。现在，设 R_1 和 R_2 是两个 Krasner (m,n)-超环，且 $h: R_1 \longrightarrow R_2$ 是同态。设 ϕ_1 和 ϕ_2 分别是 $\mathcal{HI}(R_1)$ 和 $\mathcal{HI}(R_2)$ 的两个约化函数。若对所有 $I_2 \in \mathcal{HI}(R_2)$，都有 $\phi_1(h^{-1}(I_2)) = h^{-1}(\phi_2(I_2))$，则称 h 为 ϕ_1-ϕ_2-同态。设 h 是从 R_1 到 R_2 的 ϕ_1-ϕ_2-满同态，并设 I_1 是 R_1 的一个超理想，满足 $Ker(h) \subseteq I_1$。容易看出，$\phi_2(h(I_1)) = h(\phi_1(I_1))$。

例 3.6. 设 R_1 和 R_2 是两个 Krasner (m,n)-超环，ϕ_1 和 ϕ_2 分别是 $\mathcal{HI}(R_1)$ 和 $\mathcal{HI}(R_2)$ 的两个空约化函数。则每个从 R_1 到 R_2 的同态 h 都是一个 ϕ_1-ϕ_2-同态。

定理 3.7. 设 $h: R_1 \longrightarrow R_2$ 是一个 ϕ_1-ϕ_2-同态，其中 ϕ_1 和 ϕ_2 分别是 $\mathcal{HI}(R_1)$ 和 $\mathcal{HI}(R_2)$ 的两个约化函数。则：

(1) 若 Q_2 是 R_2的一个 ϕ_2-(k,n)-吸收超理想，则 $h^{-1}(Q_2)$ 是 R_1的一个 ϕ_1-(k,n)-吸收超理想。(2) 若 h 是满射，且 Q_1 是 R_1 的一个 ϕ_1-(k,n)-吸收超理想，并且$Ker(h) \subseteq Q_1$，则 $h(Q_1)$ 是 R_2的一个 ϕ_2-(k,n)-吸收超理想。

证明。（1）设 Q_2 是 R_2 的 ϕ_2-(k,n)-吸收超理想，且对于某个 $r_1^{kn-k+1} \in R_1$，$g(r_1^{kn-k+1}) \in h^{-1}(Q_2) - \phi_1(h^{-1}(Q_2))$。于是我们得到 $h(g(r_1^{kn-k+1})) = g(h(r_1) \cdots, h(r_{kn-k+1})) \in Q_2 - \phi_2(Q_2)$。由于 Q_2 是 R_2的 ϕ_2-(k,n)-吸收超理想，我们得出：$(k-1)n-k+2$ 的 h 的像是 $r_{,i}$ 的像，其中它们的 g-乘积属于 Q_2。因此，存在 $(k-1)n-k+2$ 属于 $r_{,i}$，其 g-乘积属于 $h^{-1}(Q_2)$。于是 $h^{-1}(Q_2)$ 是 R_1的 ϕ_1-(k,n)-吸收超理想。

(2) 假设 Q_1 是 ϕ_1-(k,n)-吸收超理想，且 R_1 满足 $Ker(h) \subseteq Q_1$，h 是满射。设对于某个 $s_1^{kn-k+1} \in R_2$，$g(s_1^{kn-k+1}) \in h(Q_1) - \phi_2(h(Q_1))$。那么，对每个 $1 \leq i \leq kn-k+1$，存在 $r_i \in R_1$ 使得 $h(r_i) = s_i$。因此，我们得到 $h(g(r_1^{kn-k+1}) = g(h(r_1) \cdots, h(r_{kn-k+1})) = g(s_1^{kn-k+1}) \in h(Q_1)$。由于$Ker(h) \subseteq Q_1$，且 h 是 ϕ_1-ϕ_2-满同态，因此有 $g(r_1^{kn-k+1}) \in Q_1 - \phi_1(Q_1)$。由于 Q_1是 R_1的 ϕ_1-(k,n)-吸收超理想，存在 r的 $(k-1)n-k+2$ 个 $_i$，其 g元乘积属于 Q_1。现在，由于 h 是同态，结论得证。□

设 P是 R的一个超理想。集合 $R/P = \{f(a_1^{i-1}, P, a_{i+1}^m) \mid a_1^{i-1}, a_{i+1}^m \in R\}$ 配备 m元超运算 f 和 n运算 g 后，构成 R 关于 P的商 Krasner (m,n)-超环。[1] 中的定理 3.2 表明，从 R 到R/P的投影映射 π 定义为 $\pi(r) = f(r, P, 0^{(m-2)})$，是一个同态。设 P是 R 的一个超理想，且 ϕ 是 $\mathcal{HI}(R)$的一个约化函数。则从 $\mathcal{HI}(R/P)$ 到 $\mathcal{HI}(R/P)$ 的函数 ϕ_q 定义为 $\phi_q(I/P) = \phi(I)/P$，是一个约化函数。现在，根据定理 3.7 可得以下定理，其结论易于验证，因此省略证明。

定理 3.8. 设 Q 和 P 是 R 的两个超理想，且 ϕ 是 $\mathcal{HI}$（R）的一个约化函数，使得 $P \subseteq \phi$（Q）$\subseteq Q$。若 Q 是 R的一个 ϕ-（k，n）-吸收超理想，则 Q/P是 R/P的一个 ϕ_q-（k，n）-吸收超理想。

4. ϕ-(k,n)-ABSORBING PRIMARY HYPERIDEALS

定义 4.1. 假设 $\mathcal{HI}(R)$ 是 R 的超理想集合，且 ϕ :$\mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。设 k 为一个正整数。若 $g(r_1^{kn-k+1}) \in Q - \phi(Q)$ 对 $r_1^{kn-k+1} \in R$ 成立时，必有 $g(r_1^{(k-1)n-k+2}) \in Q$，或者 $(k-1)n-k+2$ 个 $r,_i$s 的一个 ϕ-(k,n)-吸收主超理想 Q（其中 $g(r_1^{(k-1)n-k+2})$ 除外）属于 $\mathrm{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$，则称 R 的真超理想 Q 为 ϕ-(k,n)- 吸收主超理想。

例 4.2. Krasner (m,n)-超环的每个 ϕ-(k,n)-吸收超理想都是 ϕ-(k,n)-吸收初等超理想。

如下例所示，反过来则不一定总是成立。

例 4.3. 考虑 Krasner (2, 2)-超环 $R = [0,1]$，其二元超运算定义为：若 $a \neq b$，则为 $a \oplus b = \{max\{a,b\}\}$；若 $a = b$，则为 $a \oplus b = [0,a]$；乘法为实数上的通常乘法。设 ϕ 是一个从 $\mathcal{HI}(R)$ 到 $\mathcal{HI}(R)$ 的函数，$\cup\{\varnothing\}$ 定义为 $\phi(I) = \cap_{i=1}^{\infty} g(I^{(i)})$，其中 $I \in \mathcal{HI}(R)$。那么，超理想 $Q = [0, 0.5]$ 是 R 的一个 ϕ-(2, 2)-初等超理想，但它不是 ϕ-(2, 2)-吸收超理想。

下一个定理给出了如何判定 ϕ-(k,n)-吸收主超理想为 (k,n)-吸收主超理想。

定理 4.4. 设 Q 是 R 和 ϕ 的一个超理想：$\mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个约化函数，使得 $\phi(Q)$ 是 R 的一个 (k,n)-吸收主超理想。若 Q 是 R 的一个 ϕ-(k,n)-吸收主超理想，则 Q 是 R 的一个 (k,n)-吸收主超理想。

证明. 设 $r_1^{kn-k+1} \in R$ 使得 $g(r_1^{kn-k+1}) \in Q$ 使得 $g(r_1^{(k-1)n-k+2}) \notin Q$。假设 $g(r_1^{kn-k+1}) \in \phi(Q)$。由于 $\phi(Q)$ 是 R 的一个 (k,n)-吸收主超理想，且 $g(r_1^{(k-1)n-k+2}) \notin \phi(Q)$，因此可得，除 $g(r_1^{(k-1)n-k+2})$ 外，$r,_i$ 的一个 g-重积 $(k-1)n-k+2$ 属于 $\mathrm{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(\phi(Q)) \subseteq \mathrm{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$，证毕。假设 $g(r_1^{kn-k+1}) \notin \phi(Q)$。由于 Q 是 R 的一个 ϕ-(k,n)-吸收主超理想，故得证。□

下文将讨论 R 的 ϕ-(k,n)-吸收初等超理想与其根之间的关系。

定理 4.5. 设 Q 是 R 和 ϕ 的一个超理想：$\mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数，满足 $\mathrm{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(\phi(Q)) = \phi(\mathrm{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q))$。若 Q 是 R 的一个 ϕ-(k,n)-吸收主超理想，则 $\mathrm{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$ 是 R 的一个 ϕ-(k,n)- 吸收超理想。

证明. 设 $r_1^{kn-k+1} \in R$ 满足 $g(r_1^{kn-k+1}) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q) - \phi(\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q))$。假设 $r,_i$ 的 $k-1n-k+2$ 的所有乘积中，除 $g(r_1^{(k-1)n-k+2})$ 外，其余都不属于 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$。由于 $g(r_1^{kn-k+1}) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$，因此存在 $s \in \mathbb{Z}^+$，使得对于 $s \leq n$，有 $g(g(r_1^{kn-k+1})^{(s)}, 1^{(n-s)}) \in Q$；或者对于 $s > n$，有 $g_{(l)}(g(r_1^{kn-k+1})^{(s)}) \in Q$，$s = l(n-1)+1$。在前一种情况下，我们得到 $g(g(r_1)^{(s)}, g(r_2)^{(s)}, \cdots, g(r_{kn-k+1})^{(s)}, 1^{(n-s)}) \in Q$。若 $g(g(r_1)^{(s)}, g(r_2)^{(s)}, \cdots, g(r_{kn-k+1})^{(s)}, 1^{(n-s)}) \in \phi(Q)$，则得到 $g(r_1^{kn-k+1}) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(\phi(Q)) = \phi(\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q))$，这与假设矛盾。由于 Q 是 R 的一个 ϕ-(k,n)-吸收初等超理想，因此 $g(g(r_1)^{(s)}, g(r_2)^{(s)}, \cdots, g(r_{(k-1)n-k+2})^{(s)}) 1^{(n-s)}) = g(g(r_1^{(k-1)n-k+2})^{(s)}, 1^{(n-s)}) \in Q$，这意味着 $g(r_1^{(k-1)n-k+2}) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$。对于另一种情况，论证类似。因此，$\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$ 是 R 的一个 ϕ-(k,n)-吸收超理想。□

定理4.6. 假设 $\phi: \mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。若 Q 是 R的一个ϕ-(k,n)-吸收主超理想，则对所有 $s \geq k$，Q 都是 ϕ-(s,n)-吸收主超理想。

证明. 设 Q 是 R的一个 ϕ-(k,n)-吸收主超理想。假设对某个 $r_1^{(k+1)n-(k+1)+1} \in R$，有$g(g(r_1^{n+2}) r_{n+3}^{(k+1)n-(k+1)+1}) \in Q-\phi(Q)$。令 $g(r_1^{n+2}) = a_1$。于是我们得出，$g(a_1, \cdots, r_{(k+1)n-(k+1)+1}) \in Q$，或者$kn-k+1$的 $r,_i$s中的 g-乘积（除 $g(a_1, \cdots, r_{(k+1)n-(k+1)+1})$外）属于$\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$，因为 Q 是 R的一个 ϕ-(k,n)-吸收主超理想。由于$\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$是 R的超理想，且$r_1^{n+2} \in R$，我们得出 $g(r_1, r_{n+3}, \cdots, r_{(k+1)n-(k+1)+1}) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$ 或 $\cdots$，或者 $g(r_{n+2}, r_{n+3}, \cdots, r_{(k+1)n-(k+1)+1}) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$，因此 Q 是$(k+1,n)$-吸收的。□

定理 4.7. 设 $\phi_1, \phi_2: \mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是两个函数，且对所有 $I \in \mathcal{HI}(R)$，都有 $\phi_1(I) \subseteq \phi_2(I)$。若 Q 是 ϕ_1-(k,n)-吸收主超理想，且它属于 R，则 Q 是 ϕ_2-(k,n)-吸收主超理想。

证明. 其证明方法与定理 3.3 类似。□

定理 4.8. 设 $\phi: \mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。若 Q 是 ϕ- $(1,n)$-吸收主超理想，且它属于 R，则 Q 是 ϕ-$(2,n)$-吸收主超理想。

证明. 设 Q 是一个 ϕ-$(1,n)$-吸收主超理想，并且对于某个 $r_1^{2n-1} \in R$，有 $g(g(r_1^n) \cdots, r_{2n-1}) \in Q - \phi(Q)$。于是我们得到 $g(r_1^n) \in Q$ 或 $g(r_{n+1}^{2n-1}) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$。根据超理想的定义，我们得出 $g(r_1, r_{n+1}, \cdots, r_{2n-1}) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$ 或 $\cdots$，或者 $g(r_1, r_{n+1}, \cdots, r_{2n-1}) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$，因为 $r_1^n \in R$。因此，Q 是 ϕ-$(2,n)$-吸收主超理想。□

设 Q 是 R 和 ϕ 的真超理想；$\mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。若对于 R 的某个强 ϕ-(k,n)-吸收主超理想，$g(Q_1^{kn-k+1}) \subseteq Q - \phi(Q)$ 对于 R 的某些超理想 Q_1^{kn-k+1} 成立时，蕴含 $g(Q_1^{(k-1)n-k+2}) \subseteq Q$ 或者 Q 的一个 g-积（由 $(k-1)n-k+2$ 个 Q 构成），除 $g(Q_1^{(k-1)n-k+2})$ 外，是 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$ 的子集，则称其为强 ϕ-(k,n)-吸收主超理想。下文中，我们假设 R 的所有 ϕ-(k,n)-吸收主超理想都是强 ϕ-(k,n)-吸收主超理想。回顾 [16] 中的定义，若 R 的真超理想 Q 满足：对于 $r_1^{kn-k+1} \in R$，$0 \neq g(r_1^{kn-k+1}) \in Q$ 蕴含 $g(r_1^{(k-1)n-k+2}) \in Q$ 或者一个 g-积（由 $(k-1)n-k+2$ 个 r 构成），除 $g(r_1^{(k-1)n-k+2})$ 外，属于 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$，则称其为弱 (k,n)-吸收主超理想。

定理 4.9. 设 Q 是交换 Krasner $(m,2)$-超环 R 的真超理想，且 $\phi: \mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。那么以下命题等价：

(1) Q 是 R的 ϕ-(2, 2)-吸收初等超理想。(2) $Q/\phi(Q)$是 $R/\phi(Q)$的弱 (2, 2)-吸收主超理想。

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2) Let Q be ϕ-$(2,2)$-absorbing primary and for $a_{11}^{1m}, a_{21}^{2m}, a_{31}^{3m} \in R$,

$$\begin{aligned}\phi(Q) &\neq g(f(a_{11}^{1(i-1)}, \phi(Q), a_{1(i+1)}^{1m}), f(a_{21}^{2(i-1)}, \phi(Q), a_{2(i+1)}^{2m}),\\ &\qquad f(a_{31}^{3(i-1)}, \phi(Q), a_{3(i+1)}^{3m}))\\ &= f(g(a_{11}^{31}), \cdots, g(a_{1(i-1)}^{3(i-1)}), \phi(Q), g(a_{1(i+1)}^{3(i+1)}), \cdots, g(a_{1m}^{3m}))\\ &\in Q/\phi(Q).\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}&f(g(a_{11}^{31}), \cdots, g(a_{1(i-1)}^{3(i-1)}), 0, g(a_{1(i+1)}^{3(i+1)}), \cdots, g(a_{1m}^{3m}))\\ &= g(f(a_{11}^{1(i-1)}, 0, a_{1(i+1)}^{1m}), f(a_{21}^{2(i-1)}, 0, a_{2(i+1)}^{2m}), f(a_{31}^{3(i-1)}, 0, a_{3(i+1)}^{3m}))\\ &\in Q - \phi(Q).\end{aligned}$$

由于 Q 是 R的 ϕ-(2, 2)-吸收初等超理想，我们得到

$$\begin{aligned}&g(f(a_{11}^{1(i-1)}, 0, a_{1(i+1)}^{1m}), f(a_{21}^{2(i-1)}, 0, a_{2(i+1)}^{2m}))\\ &\quad = f(g(a_{11}^{21}), \cdots, g(a_{1(i-1)}^{2(i-1)}), 0, g(a_{1(i+1)}^{2(i+1)}), \cdots, g(a_{1m}^{2m})) \subseteq Q\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}&g(f(a_{21}^{2(i-1)}, 0, a_{2(i+1)}^{2m}), f(a_{31}^{3(i-1)}, 0, a_{3(i+1)}^{3m}))\\ &\quad = f(g(a_{21}^{31}), \cdots, g(a_{2(i-1)}^{3(i-1)}), 0, g(a_{2(i+1)}^{3(i+1)}), \cdots, g(a_{2m}^{3m})) \subseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}&g(f(a_{11}^{1(i-1)}, 0, a_{1(i+1)}^{1m}), f(a_{31}^{3(i-1)}, 0, a_{3(i+1)}^{3m}))\\ &\quad = f(g(a_{11}^{31}), \cdots, g(a_{1(i-1)}^{3(i-1)}), 0, g(a_{1(i+1)}^{3(i+1)}), \cdots, g(a_{1m}^{3m})) \subseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q).\end{aligned}$$

这意味着$\neg$t价 t

$$\begin{aligned}&f(g(a_{11}^{21}), \cdots, g(a_{1(i-1)}^{2(i-1)}), \phi(Q), g(a_{1(i+1)}^{2(i+1)}), \cdots, g(a_{1m}^{2m}))\\ &\quad = g(f(a_{11}^{1(i-1)}, \phi(Q), a_{1(i+1)}^{1m}), f(a_{21}^{2(i-1)}, \phi(Q), a_{2(i+1)}^{2m})) \in Q/\phi(Q)\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}&f(g(a_{21}^{31}), \cdots, g(a_{2(i-1)}^{3(i-1)}), \phi(Q), g(a_{2(i+1)}^{3(i+1)}), \cdots, g(a_{2m}^{3m}))\\ &\quad = g(f(a_{21}^{2(i-1)}, \phi(Q), a_{2(i+1)}^{2m}), f(a_{31}^{3(i-1)}, \phi(Q), a_{3(i+1)}^{3m}))\\ &\quad \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)/\phi(Q) = \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q/\phi(Q))\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}&f(g(a_{11}^{31}), \cdots, g(a_{1(i-1)}^{3(i-1)}), \phi(Q), g(a_{1(i+1)}^{3(i+1)}), \cdots, g(a_{1m}^{3m}))\\ &\quad = g(f(a_{11}^{1(i-1)}, \phi(Q), a_{1(i+1)}^{1m}), f(a_{31}^{3(i-1)}, \phi(Q), a_{3(i+1)}^{3m}))\\ &\quad \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)/\phi(Q) = \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q/\phi(Q)).\end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$( )1 令 $g(r_1^3) \in Q - \phi$ 其中某个 $r_1 \in R$。因此我们得到$f(g(r_1^3)\ \phi(Q)$ $0^{(m-2)}) \neq \phi(Q)$。由此可知

$$\phi(Q) \neq g(f(r_1, \phi(Q), 0^{(m-2)}), f(r_2, \phi(Q), 0^{(m-2)}), f(r_3, \phi(Q), 0^{(m-2)})) \in Q/\phi(Q).$$

By the hypothesis, we get

$$g(f(r_1, \phi(Q), 0^{(m-2)}), f(r_2, \phi(Q), 0^{(m-2)})) = f(g(r_1^2), \phi(Q), 0^{(m-2)}) \in Q/\phi(Q).$$

or

$$\begin{aligned}g(f(r_2, \phi(Q), 0^{(m-2)}), f(r_3, \phi(Q), 0^{(m-2)})) &= f(g(r_2^3), \phi(Q), 0^{(m-2)})\\ &\in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)/\phi(Q).\end{aligned}$$

or

$$g(f(r_1,\phi(Q),0^{(m-2)}),f(r_3,\phi(Q),0^{(m-2)})) = f(g(r_1^3),\phi(Q),0^{(m-2)}) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)/\phi(Q).$$

这表明 $g(r_1^2) \in Q$ 或 $g(r_2^3) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$ 或 $g(r_1^3) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$。因此，$Q$ 是 ϕ-(2,2)-吸收主超理想 R。□

设 I 是交换 Krasner $(m,2)$-超环 R 的弱 (2, 2)-吸收主超理想。回顾 [16]，对于 $x,y,z \in R$，若 $g(x,y,z) = 0$, $g(x,y) \notin I$, $g(y,z) \notin \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(I)$ 且 $g(x,z) \notin \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(I)$，则称 (x,y,z) 是 I 的 (2, 2)-零主。现在，设 Q 是交换 Krasner $(m,2)$-超环 R 的 ϕ-(2, 2)-吸收主超理想。那么，若对于某些 $x,y,z \in R$，有 $g(x,y,z) \in \phi(Q)$，$g(x,y) \notin Q$，$g(y,z) \notin \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$ 且 $g(x,z) \notin \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$，则称 (x,y,z) 是 Q 的 ϕ-(2, 2) 主对象。容易看出，真超理想 Q （属于 R ）是 ϕ-(2, 2)-吸收主超理想但不是 (2, 2)-吸收主超理想，当且仅当对于某些 $x,y,z \in R$，Q 具有一个 ϕ-(2, 2) (x,y,z)。

定理 4.10. 设 R 是一个交换 Krasner $(m,2)$-超环，且 $\phi : \mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。设 Q 是 ϕ-(2, 2)-吸收初等超理想，且 R和 $x,y,z \in R$。则下列命题等价:

(1) (x,y,z) 是 Q的一个 ϕ-(2, 2) 主理想。(2) $(f(x,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})\ f(y,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})\ f(z,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})$ 是 $Q/\phi(Q)$的一个 (2, 2)-零主理想。

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2) 设 (x,y,z) 是 Q的一个 ϕ-(2, 2) 主理想。这意味着 $g(x,y,z) \in \phi(Q)$, $g(x,y) \notin Q$, $g(y,z) \notin \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$，且 $g(x,z) \notin \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$。这意味着 $f(g(x,y)\ Q, 0^{(m-2)}) \notin Q/\phi(Q)$, $f(g(y,z)\ \phi(Q)\ 0^{(m-2)}) \notin \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)/\phi(Q)$，且 $f(g(x,z)\ \phi(Q)\ 0^{(m-2)}) \notin \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)/\phi(Q)$。由定理 4.9 可得，$(f(x,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})\ f(y,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})\ f(z,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})$ 是$Q/\phi(Q)$的一个 (2, 2)-零主理想。

(2) $\Longrightarrow$ (1) 假设 $(f(x,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})\ f(y,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})\ f(z,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})$ 是 $Q/\phi(Q)$ 的一个 (2, 2)-零主。因此，$g(x,y,z) \in \phi(Q)$，但 $f(g(x,y)\ Q, 0^{(m-2)}) \notin Q/\phi(Q)$，$f(g(y,z)\ \phi(Q)\ 0^{(m-2)}) \notin \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)/\phi(Q)$，并且 $f(g(x,z)\ \phi(Q)\ 0^{(m-2)}) \notin \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)/\phi(Q)$。由此，$g(x,y,z) \in \phi(Q)$，$g(x,y) \notin Q$，$g(y,z) \notin \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$，且 $g(x,z) \notin \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$。这意味着 (x,y,z) 是 Q 的一个 ϕ-(2, 2) 主。□

定理4.11. 设 R 是一个交换 Krasner $(m,2)$-超环，且 $\phi : \mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。设 Q 是 R的一个 ϕ-(2, 2)-吸收主超理想。若对于某些 $x,y,z \in R$，(x,y,z) 是 Q 的一个 ϕ-(2, 2) 初等超理想，则

(1) $g(x,y,Q)\ g(y,z,Q)\ g(x,z,Q) \subseteq \phi(Q)$. (2) $g(x,Q^{(2)})\ g(y,Q^{(2)})\ g(z,Q^{(2)}) \subseteq \phi(Q)$. (3) $g(Q^{(3)}) \subseteq \phi(Q)$.

证明. (1) 设 (x,y,z) 是一个 ϕ-(2, 2)-吸收主超理想 Q 的 ϕ-(2, 2) 初等超理想。根据定理 4.10，$(f(x,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})\ f(y,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})\ f(z,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})$ 是一个 (2, 2)-零初等超理想，因为 x ）z 是 Q 的一个 -2-$Q/\phi(Q)$ 初等超理想。因此，ϕ (,) p

$$f(g(x,y,Q),\phi(Q),0^{(m-2)}) = f(g(y,z,Q),\phi(Q),0^{(m-2)}) = f(g(x,z,Q),\phi(Q),0^{(m-2)}) = \phi(Q)$$

根据 [16], 中的定理 4.9，可得 $g(x,y,Q)$、$g(y,z,Q)$ 和 $g(x,z,Q)$ 均为 $\phi(Q)$ 的子集。

(2) 定理 4.10 表明，$(f(x,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})\ f(y,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})\ f(z,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})$ 是 $Q/\phi(Q)$ 的一个 (2, 2)-零主。此外，定理 4.9 表明 $Q/\phi(Q)$ 是

$R/\phi(Q)$ 的一个弱 (2, 2)-吸收初等理想。由此，根据 [16] 的定理 4.9，$f(g(x,Q^{(2)})\ \phi(Q)\ 0^{(m-2)})$ $=f(g(y,Q^{(2)})\ \phi(Q)\ 0^{(m-2)}) = f(g(z,Q^{(2)})\ \phi(Q)\ 0^{(m-2)}) = \phi(Q)$。因此，$g(x,Q^{(2)})\ g(y,Q^{(2)})\ g(z,Q^{(2)})$ 是 $\phi(Q)$ 的子集。

（3）同样，根据定理 4.10 和定理 4.9，$f(x,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})\ f(y,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})\ f(z,\phi(Q)\ 0^{(m-2)})$ 是 $Q/\phi(Q)$ 的一个（2, 2）- 零初等理想，而 $Q/\phi(Q)$ 是 $R/\phi(Q)$ 的一个弱 (2, 2)- 吸收初等理想，因此由 [16] 中的定理 4.10，$f(g(Q^{(3)})\ \phi(Q)\ 0^{(m-2)}) =\phi(Q)$。因此，$g(Q^{(3)})$ 是 $\phi(Q)$ 的一个子集。□

定理 4.12。设 Q 是交换 Krasner (m,n)-超环 R 的一个真超理想，且 $\phi: \mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。则以下命题等价：

(1) Q 是 R的 ϕ-(k,n)-吸收主超理想。(2) $Q/\phi(Q)$是 $R/\phi(Q)$的弱(k,n)-吸收主超理想。

证明。采用与定理 4.9 的证明类似的方法即可轻松证明。 □

假设 Q 是 R的 ϕ-(k,n)-吸收主超理想。那么，对于某个 $r_1^{k(n-1)+1} \in R$，如果 $g(r_1^{k(n-1)+1}) \in\phi(Q)$，$g(r_1^{(k-1)n-k+2}) \notin Q$，且$(k-1)n-k+2$ 的一个 g-乘积，$_i$ s（除$g(r_1^{(k-1)n-k+2}$)外）不属于 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$，则称$(r_1^{k(n-1)+1}$)是 Q 的 ϕ-(k,n)初等超理想。

定理 4.13. 设 R 是一个交换 Krasner $(m,2)$-超环，且 $\phi: \mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。设 Q 是 ϕ-(k,n)-吸收主超理想，属于 R 和 $r_1^{k(n-1)+1} \in R$。则以下命题等价：

(1) $(r_1^{k(n-1)+1}$) 是 Q的一个 ϕ-(k,n)-初等超理想。(2) $(f(r_1,\phi(Q)\ 0^{(m-2)}) \cdots, f(r_{k(n-1)+1},\phi(Q)\ 0^{(m-2)})$ 是 $Q/\phi(Q)$的一个 (k,n)-零初等超理想。

证明. 类似于定理 4.10 可证。 □

定理 4.14. 设 R 是一个交换 Krasner (m,n)-超环，且 $\phi: \mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。设 Q 是 ϕ-(k,n)-吸收主超理想，属于 R。若对于某个 $r_1^{k(n-1)+1} \in R$，$(r_1^{k(n-1)+1}$) 是 Q 的一个 ϕ-(k,n)-初等超理想，则对于每个 $i_1,\cdots,i_s \in\{1,\cdots,k(n-1)+1\}$ 以及 $1 \le s \le (k-1)n-k+2$，$g(r_1,\cdots,\widehat{r_{i_1}},\cdots,\widehat{r_{i_2}},\cdots,\widehat{r_{i_s}},\cdots,r_{k(n-1)+1},Q^{(s)}) \subseteq \phi(Q)$。

证明。根据定理 4.13，$(f(r_1,\phi(Q)\ 0^{(m-2)}) \cdots, f(r_{k(n-1)+1},\phi(Q)\ 0^{(m-2)})$ 是 $Q/\phi(Q)$ 的 (k,n)-零主超理想；根据定理 4.12，$Q/\phi(Q)$ 是 $R/\phi(Q)$ 的弱 (k,n)-吸收主超理想。由此我们得出

$f(g(f(r_1,\phi(Q)\ 0^{(m-2)}) \cdots, f(\widehat{r_{i_1}},\phi(Q)\ 0^{(m-2)}) \cdots, f(\widehat{r_{i_2}},\phi(Q)\ 0^{(m-2)}) \cdots,$
$f(\widehat{r_{i_s}},\phi(Q)\ 0^{(m-2)}) \cdots, f(r_{k(n-1)+1},\phi(Q)\ 0^{(m-2)})\ Q^{(s)})\ \phi(Q)\ 0^{(m-2)}) = \phi(Q)$ 对任意 $i_1,\cdots,i_s \in \{1,\cdots,k(n-1)+1\}$ 和 $1 \le s \le (k-1)n-k+2$ 均成立，这是由 [16] 的定理 4.9 得出的。因此，$g(r_1,\cdots,\widehat{r_{i_1}},\cdots,\widehat{r_{i_2}},\cdots,\widehat{r_{i_s}},\cdots,r_{k(n-1)+1},Q^{(s)})$ 是 Q)。□

定理 4.15. 设 R 是一个交换 Krasner (m,n)-超环，且 $\phi: \mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。设 Q 是 R 的一个 ϕ-(k,n)-吸收主超理想，但不是 (k,n)-吸收主超理想。则 $g(Q^{k(n-1)+1}) \subseteq \phi(Q)$。

证明。利用定理 4.14，可以用与证明 4.11 非常相似的方法证明这一点。□

现在，给出一些相关推论。

推论 4.16。设 $\phi:\ \mathcal{HI}(R)\ \longrightarrow \mathcal{HI}(R)\cup\{\varnothing\}$ 是一个函数。若 Q 是 R 的 ϕ-（k, n）-吸收主超理想，且 $g(Q^{k(n-1)+1})\ \nsubseteq \phi(Q)$，则 Q 是 R 的（k, n）-吸收主超理想。

推论 4.17. 设 $\phi:\ \mathcal{HI}(R)\ \longrightarrow \mathcal{HI}(R)\cup\{\varnothing\}$ 是一个函数，并设 Q 是 ϕ-(k,n)-吸收主超理想，且它不是 R 的 (k,n)-吸收主超理想。那么 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)\ =\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(\phi(Q))$。

证明。由定理 4.15，得 $g(Q^{k(n-1)+1})\ \subseteq\ \phi(Q)$，因为 Q 不是 (k,n)-吸收主超理想。这意味着 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)\ \subseteq\ \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(\phi(Q))$。另一方面，由 $\phi(Q)\ \subseteq\ Q$ 可知，$\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(\phi(Q))\ \subseteq\ \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$。因此，$\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)\ =\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(\phi(Q))$。□

推论 4.18. 设 $\phi:\ \mathcal{HI}(R)\ \longrightarrow \mathcal{HI}(R)\cup\{\varnothing\}$ 是一个函数，并设 Q 是 R 的真超理想，使得 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(\phi(Q))$ 是 R 的一个 (k,n)-吸收超理想。那么， Q 是 R 的一个 ϕ-$(k+1,n)$-吸收主超理想，当且仅当 Q 是 R 的一个 $(k+1,n)$-吸收主超理想。

证明. ($\Longrightarrow$) 设 Q 是 R 的一个 ϕ-$(k+1,n)$-吸收主超理想。若 Q 不是 R 的一个 $(k+1,n)$-吸收主超理想，则由推论 4.17 可得 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)\ =\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(\phi(Q))$。于是，$\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q)$ 是 R 的一个 (k,n)-吸收超理想，这意味着根据 [18] 中的定理 4.9， Q 是 R 的一个 $(k+1,n)$- 吸收主超理想。($\Longleftarrow$) 显然。□

定理 4.19. 设 $h:\ R_1\ \longrightarrow R_2$ 是一个 ϕ_1-ϕ_2-同态，其中 ϕ_1 和 ϕ_2 分别是 $\mathcal{HI}(R_1)$ 和 $\mathcal{HI}(R_2)$ 的两个约化函数。则：

(1) 若 Q_2 是 R_2 的一个 ϕ_2-(k,n)-吸收主超理想，则 $h^{-1}(Q_2)$ 是 R_1 的一个 ϕ_1-(k,n)-吸收主超理想。(2) 若 h 是满射，且 Q_1 是 R_1 的一个 ϕ_1-(k,n)-吸收主超理想，并且 $Ker(h)\ \subseteq Q_1$，则 $h(Q_1)$ 是 R_2 的一个 ϕ_2-(k,n)-吸收主超理想。

证明. (1) 设 Q_2 是 R_2 的一个 ϕ_2-(k,n)-吸收主超理想。假设 $r_1^{kn-k+1}\in R_1$，使得 $g(r_1^{kn-k+1})\ \in h^{-1}(Q_2)-\phi_1(h^{-1}(Q_2))$。于是我们得到 $h(g(r_1^{kn-k+1}))\ =g(h(r_1)\ \cdots,h(r_{kn-k+1}))\ \in Q_2-\phi_2(Q_2)$。由于 Q_2 是 R_2 的一个 ϕ_2-(k,n)-吸收主超理想，我们可得 $g(h(r_1)\ \cdots,h(r_{(k-1)n-k+2}))\ =h(g(r_1^{(k-1)n-k+2}))\in Q_2$，这意味着 $g(r_1^{(k-1)n-k+2})\ \in h^{-1}(Q_2)$，或者

$$g(h(r_1)\ \cdots,\widehat{h(r_i)},\cdots,h(r_{kn-k+1}))\ =h(g(r_1,\cdots,\widehat{r_i},\cdots,r_{kn-k+1}))\ \in\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q_2),$$

这意味着 $g(r_1,\cdots,\widehat{r_i},\cdots,r_{kn-k+1})\ \in h^{-1}(\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q_2))\ =\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(h^{-1}(Q_2))$ 对某个 $1\leq i\leq n$ 成立。因此， $h^{-1}(Q_2)$ 是 R_1 的 ϕ_1-(k,n)-吸收主超理想。

(2) 假设 h 是满射，且 Q_1 是 R_1 的一个 ϕ_1-(k,n)-吸收主超理想，其中 $Ker(h)\ \subseteq Q_1$。设 $s_1^{kn-k+1}\in R_2$ 满足 $g(s_1^{kn-k+1})\ \in h(Q_1)-\phi_2(h(Q_1))$。因此，存在 $r_1^{kn-k+1}\in R_1$ 使得 $h(r_1)\ =s_1,\cdots,h(r_{kn-k+1})\ =s_{kn-k+1}$。于是我们得到 $h(g(r_1^{kn-k+1})\ =\ g(h(r_1)\ \cdots,h(r_{kn-k+1}))\ =\ g(s_1^{kn-k+1})\ \in h(Q_1)$。由于 h 是一个 ϕ_1-ϕ_2-满同态，且 $Ker(h)\ \subseteq Q_1$，我们有 $g(r_1^{kn-k+1})\ \in Q_1-\phi_1(Q_1)$。由于 Q_1 是 R_1 的一个 ϕ_1-(k,n)-吸收主超理想，我们得出 $g(r_1^{(k-1)n-k+2})\ \in Q_1$，这意味着

$$\begin{aligned}h(g(r_1^{(k-1)n-k+2})&=g(h(r_1),\cdots,h(r_{(k-1)n-k+2}))\\&=g(s_1^{(k-1)n-k+2})\in h(Q_1),\end{aligned}$$

或 $g(r_1,\cdots,\widehat{r_i},\cdots,r_{kn-k+1})\ \in\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q_1)$ 蕴含 $h(g(r_1,\cdots,\widehat{r_i},\cdots,r_{kn-k+1})\ =$

$g(h(r_1)\ \cdots, \widehat{h\ \ }(r_i)\ \cdots, h(r_{kn-k+1}))\ = g(s_1, \cdots, \widehat{s_i}, \cdots, s_{kn-k+1})\ \in h(\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q_1))\ \subseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(h($ $Q_1))$ 对某个 $1 \leq i \leq (k-1)n-k+2$ 成立。因此， $h(Q_1)$ 是 R_2 的 ϕ_2-(k,n)-吸收主超理想。 □

作为前一个定理的直接推论，我们得到以下明确结果。

定理 4.20. 设 Q和 P是 R 的两个超理想， ϕ 是 $\mathcal{HI}(R)$的一个约化函数，且 $P \subseteq \phi(Q)$ $\subseteq Q$。如果 Q 是 R的一个 ϕ-(k,n)-吸收主超理想，那么 Q/P是 R/P的一个 ϕ_q-(k,n)-吸收主超理想。

定理 4.21. 设 (R_i, f_i, g_i) 是一个交换 Krasner (m,n)-超环，对每个 $1 \leq i \leq kn-k+1$ 和 $\phi_i:\ \mathcal{HI}(R_i) \longrightarrow \mathcal{HI}(R_i) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。设Q_i 是 R_i 的一个超理想，对每个 $1 \leq i \leq kn-k+1$ 和 $\phi = \phi_1 \times \cdots \times \phi_{kn-k+1}$。如果 $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_{kn-k+1}$ 是 $R = R_1 \times \cdots \times R_{kn-k+1}$的一个 ϕ-$(k+1,n)$-吸收主超理想，那么对所有 $1 \leq i \leq kn-k+1$， Q_i是 R_i和$Q_i \neq R_i$ 的一个 ϕ_i-(k,n)-吸收主超理想。

证明。通过采用与定理 3.5 证明中类似的论证，可以轻松完成证明。□

5. 结论 Conclusion

本文受交换环中 ϕ-2-吸收（主）理想相关研究的启发，提出并研究了 Krasner (m,n)-超环中的 ϕ-(k,n)-吸收超理想和 ϕ-(k,n)-吸收主超理想的概念，并分析了它们的一些基本性质。此外，我们还考察了这些概念在某些超环理论构造中的稳定性。作为一个新的研究课题，我们提出了 ϕ-(k,n)-吸收 δ-主超理想的概念，其中 δ 是 $\mathcal{HI}(R)$ 的扩张函数。

References

[1] R. Ameri, M. Norouzi, 《Krasner (m n *European* ,)-超 *Journal of Combinatorics* 2013 379 390 环中的素超理想与主超理想》， ， ( ) - 。[2] R. Ameri, A. Kordi, S. Sarka-Mayerova, 《分式乘法超环与互素超理想》， *An. Stiint. Univ. Ovidius Constanta Ser. Mat.*, 25 (1) (2017) 5-23。[3] M. Anbarloei, n元Krasner (m,n)-超环中的2-吸收超理想与2-吸收主超理想， *Matematicki Vesnik*, 71 (3) (2019) 250-262。[4] M. Anbarloei, 《在Krasner (m,n)-超环中统一素超理想与主超理想》， *Comm. Algebra*, 49 (2021) 3432-3446。[5] M. Anbarloei, 《Krasner (m,n)-超环中n元素素超理想的一种推广研究》， *Afrika Matematika*, 33 (2021) 1021-1032。[6] M. Anbarloei, Krasner (m, n)-分式超环, *Jordan Journal of Mathematics and Statistic* ，即将出版。[7] D. D. Anderson, M. Bataineh, 素理想的推广， *Communications in Algebra*, 36 2008 686 696 ( ) - 。[8] A. Asadi, R. Ameri, Krasner (m,n)-超环的直接极限， *Journal of Sciences*, 31 (1) (2020) 75-83。[9] A. Badawi, U. Tekir, E. A. Ugurlu, G, Ulucak, E. Y. Celikel, 交换环中2-吸收主理想的推广， *Turkish Journal of Mathematics*, doi:10.3906/mat-1505- 43。[10] S. Corsini, 超群理论导论， *Second edition, Aviani editor, Italy*, (1993)。[11] S. Corsini, V. Leoreanu, 超结构理论的应用， *Advances in Mathematics*, 第5卷, Kluwer Academic Publishers, (2003)。

[12] A. Y. Darani，交换环中主理想的推广， *Novi Sad J. Math.*，42 1 2012 27 35 ( ) ( ) - 。[13] B. Davvaz, V. Leoreanu-Fotea，《超环理论与应用》，*International Academic Press Palm Harbor USA* 2007 ，，，( )。[14] B. Davvaz, T. Vougiouklis，n元超群， *Iran. J. Sci. Technol.*，30 (A2) (2006) 165-174。[15] B. Davvaz，模糊Krasner (m n *Computers and Mathematics with Applications*，)-超环，**59** 2010 3879 3891 ( ) - 。[16] B. Davvaz, G. Ulucak, U. Tekir，Krasner (m,n)-超环的弱(k,n)-吸收（主）超理想，*Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*，发表于2023年期刊期次，提前在线发表，1-10。[17] W. Dorente，《关于广义群概念的研究》 ¨， *Math. Z.*，29 (1928) 1-19。[18] K. Hila, K. Naka, B. Davvaz，关于Krasner (m,n)-超环中的(k,n)-吸收超理想，*Quarterly Journal of Mathematics*，69 (2018) 1035-1046。[19] A. Jaber，交换环中 ϕ-δ-主理想和2-吸收 δ-主理想的性质，*Asian-European Journal of Mathematics* **13** (01) (2020) 2050026。[20] A. Khaksari， ϕ-2-素理想， *International Journal of Pure and Applied Mathematics*，99 1 2015 1 10 ( )( ) - 。[21] E. Kasner，群概念的扩展（由L.G. Weld报告），*Bull. Amer. Math.*，( ) - *Soc.* **10** 1904 290 291 。[22] V. Leoreanu，典范 n 元超群， *Ital. J. Pure Appl. Math.*，24(2008)。[23] V. Leoreanu-Fotea, B. Davvaz，n超群与二元关系， *European J. Combin.*，29 2008 1027 1218 ( ) - 。[24] V. Leoreanu-Fotea, B. Davvaz，n元超群中的粗糙性， *Inform. Sci.*，178 (2008) 4114-4124。[25] X. Ma, J. Zhan, B. Davvaz，将粗糙软集应用于Krasner (m,n)-超环及相应的决策方法， *Filomat*，32 (2018) 6599-6614。[26] F. Marty，关于群概念的一种推广， 8th *Congress Math. Scandenaves*，*Stockholm* 1934 45 49 ，( ) - 。[27] S. Mirvakili, B. Davvaz，Krasner (m,n)- 超环上的关系， *European J. Combin.*，31 2010 790 802 ( ) - 。[28] S. Mirvakili, B. Davvaz，(m,n)-超环的构造， *Matematicki Vesnik*，67 (1) (2015) 1-16。[29] M. Norouzi, R.Ameri, V. Leoreanu-Fotea，Krasner (m,n)-超环中的正规超理想，*An. St. Univ. Ovidius Constanta* **26** (3) (2018) 197-211。[30] S. Omidi, B. Davvaz，对有序半超环中特殊类型超理想研究的贡献， *J. Taibah Univ. Sci.*，11 (2017) 1083-1094。[31] S. Ostadhadi-Dehkordi, B. Davvaz，关于Krasner (m,n)-超环同构定理的注记，*Arabian Journal of Mathematics*，5 (2016) 103-115。[32] T. Vougiouklis，《超结构及其表示》，*Hadronic Press Inc.*，*Florida*，(1994)。[33] M.M. Zahedi, R. Ameri，关于素、主及极大子超模，*Ital. J. Pure*，( ) - *Appl. Math.* **5** 1999 61 80 。[34] J. Zhan, B. Davvaz, K.P. Shum，超环的广义模糊超理想，*Computers and Mathematics with Applications* **56** 2008 1732 1740 ，( ) - 。

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.

Email address: m.anbarloei@sci.ikiu.ac.ir