arXiv:2305.00372v1 [math.GN] 30 Apr 2023

核心紧生成拓扑 *

李庆国，苗华林*

School of Mathematics, Hunan University, Changsha, Hunan, 410082, *China*

摘要

M. Escard´o 等人提出了这样的问题：sober 空间的核心紧生成拓扑是否仍为 sober，以及核心紧生成空间的 sobrification 是否仍为核心紧生成空间。在本文中，我们通过给出一个反例回答了这一问题，该反例表明核心紧生成空间在 sobrification 运算下并不封闭。同时，我们证明核心紧生成空间在 ω-良滤化和 D-完备化下是封闭的。此外，我们发现良滤空间的 Smyth 幂空间的核心紧生成拓扑与 Scott 拓扑一致。最后，我们给出了核心紧生成空间具有核心紧性的一个刻画。

关键词：核心紧生成拓扑；sobriety（sobriety性质）； ω-良滤性；单调收敛；乘积拓扑 2000 MSC：18A05；18B30；06A06，06B35

1. 引言

sobriety（sobriety性质）、良滤性和单调收敛一直受到广泛关注，并且是非豪斯多夫拓扑中最重要、最有用的性质。此外，它们还在 [5],[7],[8],[11],[14],[15],[16],[17],[20],[21],[22],[27],[28] 等领域得到了广泛研究。

在 [2], ，Day考虑了一个拓扑空间的扩张范畴，该范畴是笛卡尔闭的，并证明该范畴可以反射到 $\mathcal{C}$生成空间范畴上。基于这一事实和一般的范畴反射定理，他推导出 $\mathcal{C}$ 生成空间范畴是笛卡尔闭的。

之后，M. Escard´o等人对 $\mathcal{C}$生成空间范畴的笛卡尔闭性给出了一个简洁且统一的证明，其中包括紧生成空间范畴和核心紧生成空间范畴（[4]）。

在 [1], O. Battenfeld 等人提出，紧生成空间的 D-完备化仍然是紧生成的。此外，G. Gruenhage 和 T. Streicher 得出结论：紧生成空间的 sobrification（sobrification化）未必是紧生成的 [9]。其他学者也研究了紧生成空间的范畴（[6], [19]）。

*本研究得到国家自然科学基金（编号：12231007）和湖南省研究生创新基金（CX20200419）的资助。

*通讯作者。*Email addresses:* liqingguoli@aliyun.com（李庆国），miaohualinmiao@163.com（苗华林）

关于核紧生成空间，M. Escard´o 等人提出了以下问题[4]:

问题 1.1. 谱空间的核心紧生成拓扑是否仍然是谱的？对偶地，核心紧生成空间的 sobrification 是否仍然是核心紧生成的?

本文给出一个反例，以说明谱空间的核心紧生成拓扑可能不是谱的，而核心紧生成空间的 sobrification 可能不是核心紧生成的。然而，我们发现，ω-良滤空间（分别地，单调收敛空间）的核心紧生成拓扑仍然是 ω-良滤的（分别地，单调收敛的），而核心紧生成空间的 ω-良滤化（分别地，D-完备化）也仍然是核心紧生成的。此外，我们发现，单调收敛空间的核心紧生成拓扑包含于 Scott 拓扑中。自然地，我们想知道，对于哪一类拓扑空间，其核心紧生成拓扑恰好是由这些空间上的特化序所确定的 Scott 拓扑。在第5节中，我们证实，每个良滤空间的 Smyth 幂空间都满足其核心紧生成拓扑与 Scott 拓扑一致。

在 [4], M. Escard´o 等人得出结论：若拓扑空间 X 是核紧的，则对于任意核心紧生成空间 Y，X与Y的拓扑积也是核心紧生成的。本文最后证明，核心紧生成空间 X 是核紧的，当且仅当对于任意核心紧生成空间 Y，X与Y的拓扑积也是核心紧生成的。

2. 预备知识

设 P是一个偏序集。若子集 D 非空，且其每个有限子集在 D中都有上界，则称 D 是 P的有向子集。若偏序集 P的每个有向子集 D 都有上确界，则称 P为有向完备偏序集。偏序集 P的子集 U 称为 Scott 开集，若满足：(i) 它是一个上集（$U = \uparrow U = \{x \in P:$ 对于某个 $u \in U\}$，$u \leq x$ ）；(ii) 对于 P中的每个有向子集 D，若其上确界 sup D存在且 sup $D \in U$，则有$D \cap U \neq \emptyset$。Scott 开集的补集称为 Scott闭集。令 $\sigma(P)$ 表示所有 Scott 开集组成的集合，$\Gamma(P)$ 表示所有 Scott 闭集组成的集合。空间（$P, \sigma(P)$）称为 P 的 Scott空间，记作 ΣP。除非另有说明，本文提及的偏序集均赋予 Scott 拓扑。

给定一个 T_0空间 (X, τ)，对于任意子集 $A \subseteq X$，我们用 $cl_\tau(A)$ 表示 A的闭包。我们定义 $x \leq y$ 当且仅当 $x \in cl(y)$。因此，X 及其特化序构成一个偏序集。我们用 $\mathcal{O}(X)$ 表示所有开集构成的集合。若对于 A 的任意有向子集 D，$D \subseteq A$ 蕴含 sup $D \in A$，则称集合 A 为 d-闭的。令 $cl_d(A)$ 表示 A 在 d-拓扑中的闭包。若 d-闭包 A 为 X，即 $cl_d(A) = X$，则称集合 A 为 X 的 d-稠密子集。X 的所有不可约闭子集构成的集合记为 IRR(X)。拓扑空间的子集 K 称为饱和集，若它等于所有包含 K （在其特化序下为 $K = \uparrow K$ ）的开集之交。对于拓扑空间 X，X 的所有非空紧饱和子集构成的集合记为 $Q(X)$。

3. 谱空间的核心紧生成拓扑

由 [4], 可知，T_0 空间 X 的核心紧生成拓扑与 X 具有相同的特化序；而赋予 Scott 拓扑的有向完备偏序集是核紧生成的。

本节旨在对 M. Escard´o 等人 [4] 在引言中提出的问题给出否定答案。

注 3.1. 设 L 是一个有向完备偏序集。若 L 的上集 U 具有如下性质：$\sup C \in U$ 表明 $C \cap U \neq \emptyset$; 对于 L 的任意良序链 C，则 U 是 Scott 开集。

证明。设 U 是一个上集，并具有如下性质：对于 L 的任意良序链 C，$\sup C \in U$ 表明 $C \cap U \neq \emptyset$。我们对有向集 D 的基数使用超限归纳。

若 D 是有限的，且 $\sup D \in U$，则 $\sup D \in D \cap U$。

现在假设 D 是无限的，并且对于任意基数小于 $|D|$ 且满足 $\sup E \in U$ 的有向集 E，都有 $E \cap U \neq \emptyset$。由 Iwomura定理， [13], $\sup D = \sup^{\alpha<|D|} \sup D_\alpha$ 和 $\{\sup D_\alpha \mid \alpha < |D|\}$ 是一条满足 $D_\alpha \subseteq D$ 的良序链，由此可得存在 $\alpha < |D|$ 使得 $\sup D_\alpha \in U$。根据归纳假设， $D_\alpha \cap U \neq \emptyset$，因此 $D \cap U \neq \emptyset$。

□

回顾一下，当且仅当 T_0 空间中每个有向集（相对于特化序）的闭包都是某个唯一点的闭包时， T_0 空间才是单调收敛空间。拓扑空间 (X, τ) 的子集 V 在 X 上的核心紧生成拓扑中是开集，当且仅当对于每个核紧空间 C 和连续函数 $\rho: C \to X$，原像 $p^{-1}(V)$ 在 C 中是开集。我们用 $\mathcal{C}X$ 表示 X 的核心紧生成拓扑，并称 X 是核紧生成的，如果 $\tau = \mathcal{C}X$。注意，根据上述概念，显然有 $\tau \subseteq \mathcal{C}X$。

引理 3.2. 设 (X, τ) 是一个单调收敛空间。那么，在 X 的特化序下， X 的核心紧生成拓扑 $\mathcal{C}X$ 包含于 X 的 Scott 拓扑。

证明. 根据 [4, 引理 4.6], ，我们知道对于任意 $U \in \mathcal{C}X$， U 都是一个上集。现在设 C 是 X 中一个上确界为 $C \in U$ 的良序链。定义 $C' = \{\sup E \mid E \subseteq C\}$。显然， C' 是 X 的子有向完备偏序集，且 C' 是一条完备链。这表明，鉴于 X 的单调收敛性，包含映射 $i: \Sigma C' \to (X, \tau)$ 是连续的。注意， $\Sigma C'$ 是核紧的。由于 U 是核紧生成的，我们得出 $i^{-1}(U)$ 在 C' 中是 Scott 开的。$\sup C \in i^{-1}(U)$ 这一事实推出了 $C \cap U \neq \emptyset$，这借助于 $C \subseteq C'$ 得出。应用备注 3.1，集合 U 是 Scott 开的。 □

我们称一个 T_0 空间 X 为良过滤的，若对于每个由紧饱和集组成的滤子基 $\mathcal{C}$ 以及每个满足 $\bigcap \mathcal{C} \subseteq U$的开集 U，都存在一个 $K \in \mathcal{C}$满足 $K \subseteq U$。 T_0 空间 X 的任意非空子集 A 称为不可约的，若对于闭子集 B 和 C， $A \subseteq B \cup C$ 蕴含 $A \subseteq B$或 $A \subseteq C$。若拓扑空间 X 是 T_0，且 X 的每个不可约闭子集都是某个（唯一）点的闭包，则称该空间为谱空间。 T_0 空间 X 的一个 sobrification（sobrification化）由一个谱空间 Y 和一个连续映射 $\eta: X \to Y$ 构成，并满足以下泛性质：对于任意从 X 到谱空间 Z的连续映射 f，都存在唯一的连续映射 $\overline{f}: Y \to Z$，使得 $f = \overline{f} \circ \eta$。

T_0 空间 X 的 sobrification（sobrification化）的一种标准构造是令

$$X^s := \{A \subseteq X : A \in \mathbf{IRR}(X)\}$$

由开集 $U^s := \{A \in X^s : A \cap U \neq \emptyset\}$ 为 X的每个开子集 U生成拓扑。若定义$\eta^s_X: X \to X^s$ 为 $\eta^s_X(x) = cl(\{x\})$，则得到一个 sobrification（sobrification化） [7, 练习 V-4.9], ，称为标准不可约化。

命题 3.3. 设 ΣP 是一个非谱的良过滤有向完备偏序集，且 IRR(P) $=\{\downarrow x \mid x \in P\} \cup \{P\}$。那么，$\Sigma P$的标准不可约化 P^s 上的核心紧生成拓扑是 (IRR(P) $\subseteq$) 的 Scott 拓扑。

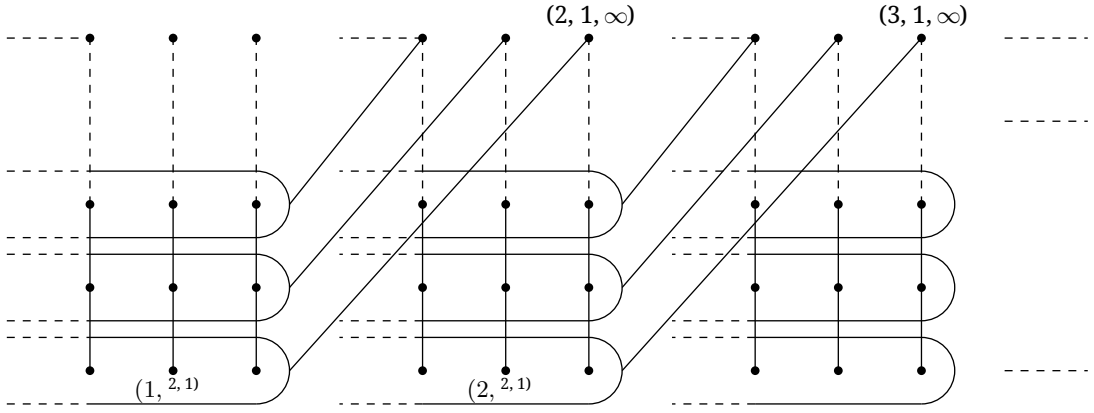
证明。根据引理 3.2，只需证明 IRR(P) 的 Scott 拓扑包含于核心紧生成拓扑。显然，我们看到 σ(IRR(P)) $=\{U^s \mid U \in \sigma(P)\} \cup \{\{P\}\}$。因此，只需证明 $\{P\}$ 是核紧生成开集。根据 [4, 引理 8.2], ，我们只需检查 $\{P\}$ 是局部紧健全生成开集。

为此，令 $\rho: C \to P^s$ 为从局部紧健全空间 C出发的连续函数。对于任意 $x \in \rho^{-1}(\{P\})$。C是局部紧的这一事实意味着 $\uparrow x = \bigcap_{x \in int(K)\ K \in Q(C)} K$。根据 [4, 引理 8.1], , 我们推出 $\bigcap_{x \in int(K)\ K \in Q(C)} \uparrow \rho(K) = \uparrow \rho(\uparrow x) = \{P\}$。由于 ρ的连续性，我们证明 $\{\uparrow \rho(K) \mid x \in int(K)\ K \in Q(C)\}$ 是$Q(P^s)$的一个滤族。

假设 $\{P\}$ 是 IRR(P) 的最大元，可保证 $\{\uparrow \rho(K) \backslash \{P\} \mid x \in int(K)\ K \in Q(C)\}$ 是 $Q(P^s \backslash \{P\})$ 和 $\bigcap_{x \in int(K)\ K \in Q(C)} (\uparrow \rho(K) \backslash \{P\}) = \emptyset$ 的一个滤族。值得注意的是，ΣP 与 P^s 的子空间 $P^s \backslash \{P\}$ 同胚。这意味着，由于假设 ΣP 是良过滤的，$P^s \backslash \{P\}$ 也是良过滤的。因此，存在 $K \in Q(C)$，满足 $x \in int(K)$，使得 $\uparrow \rho(K) \backslash \{P\} = \emptyset$。换言之，$x \in int(K) \subseteq K \subseteq \rho^{-1}(\{P\})$。由此，我们得到了所需的结果。 □

考虑良过滤有向完备偏序集 $P = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$。序关系 $(i_1, j_1, m_1) \sqsubseteq (i_2, j_2, m_2)$ 定义如下：

- $i_1 = i_2, j_1 = j_2, m_1 \leqslant m_2 \leqslant \infty$;
- $i_2 = i_1 + 1, m_1 \leqslant j_2,\ m_2 = \infty$.



上面的例子由 Jia [10], 构造。我们可以看到，有向完备偏序集 P 不是谱空间。

定理 3.4. 设 P 为上文提到的有向完备偏序集。则 P^s 是一个sober空间。但是，P^s 的核紧生成拓扑不是谱的。此外，ΣP 是核紧生成的，但P^s 不是核紧生成的。

证明。根据命题 3.3，我们可以得出，标准不可约化 P^s of ΣP 的核心紧生成拓扑是 (IRR(P) $\subseteq$) 的 Scott 拓扑。显然，ΣP^s 不是谱空间。注意，ΣP 是核紧生成的。再次应用命题 3.3，可知 P^s 不是核紧生成的。 □

4. ω-良滤空间的核心紧生成拓扑

根据上述结果，我们得出结论：所有核紧生成谱空间构成的范畴，并不是所有核紧生成空间及其连续函数构成的范畴的反射子范畴。

现在我们转向本文的下一个目标，关注 ω-良滤空间的核心紧生成拓扑。在本节中，我们证明，ω-良滤空间的核心紧生成拓扑仍是 ω-良滤的，而核心紧生成空间的 ω-良滤化仍是核心紧生成的。这说明，所有核心紧生成的 ω-良滤空间所成的范畴，是所有核心紧生成空间连同连续函数所成范畴的反射子范畴。

回顾一下，若一个 T_0 空间 X 满足如下条件，则称其为 ω-良滤的：对于任意可数滤族 $\{K_i : i<\omega\} \subseteq Q(X)$ 和 $U \in \mathcal{O}(X)$，

$$\bigcap_{i<\omega} K_i \subseteq U \Rightarrow \exists i_0 < \omega, K_{i_0} \subseteq U$$

设 X 为一个 T_0 空间。若 X 的非空子集 A 具有可数紧滤性质（KF_ω 性质），则称其具有此性质；这意味着存在一个由 $Q(X)$ 构成的滤族 $\mathcal{K}$，使得 $cl(A)$ 是与 $\mathcal{K}$ 的所有成员均相交的极小闭集，其中 $\mathcal{K}$ 是 $Q(X)$ 的可数子集。我们称这样的集合为 KF_ω，或称为 KF_ω-集。用 $\mathbf{KF}_\omega(X)$ 表示 X 的所有闭 KF_ω 子集所成的集合。在 [23] 中，可数紧滤性质称为 ω-Rudin 性质。

引理 4.1. 设 (X,τ) 是一个 ω-良滤空间。那么，X 的核心紧生成拓扑$\mathcal{C}X$ 仍然是 ω-良滤空间。

证明. 为了导出矛盾，假设 X 的核心紧生成拓扑 $\mathcal{C}X$ 不是 ω-良滤的。根据 [23, 推论 6.11], ，在核心紧生成拓扑中存在一个闭 KF_ω-集 A，使得 $A \notin \{\downarrow x \mid x \in X\}$。因此，存在 $\mathcal{C}X$ 的一个由紧饱和子集组成的可数下降链 $K_0 \supseteq K_1 \supseteq \cdots \supseteq K_n \supseteq \cdots$，使得 A 是 $\mathcal{C}X$ 中与 $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 的所有成员都相交的极小闭集。对任意 $n \in \mathbb{N}$，取 $x_n \in A \cap K_n$。定义 $H = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$。那么，根据$A$的极小性，我们有 $cl_{\mathcal{C}X}(H) = A$。

考虑由 $i(x) = x$ for any $x \in X$ 定义的函数 $i : (X, \mathcal{C}X) \to (X,\tau)$。那么函数 i 是连续的，这意味着 A 是 (X,τ) 的一个 KF_ω-集。再次应用 [23], 中的推论 6.11，我们得出结论：sup $A \in cl_\tau(A)$，因为 (X,τ) 是 ω-良过滤的。

断言 1：sup $A \in cl_\tau(H)$。

对于任意满足 sup $A \in U$ 的 $U \in \tau$，由于 sup $A \in cl_\tau(A)$，我们可以推出 $U \cap A \neq \emptyset$。取 $a \in U \cap A$。注意，$U \in \mathcal{C}X$ 且 $cl_{\mathcal{C}X}(H) = A$。于是 $U \cap H \neq \emptyset$。

断言 2：如果 $U \cap H \neq \emptyset$, 那么对于任意 $U \in \tau$, $H \backslash U$ 都是有限的。

现在令 $U \in \tau$ 且 $U \cap H \neq \emptyset$。假设 $H \backslash U$ 是无限的。那么对任意 $n \in \mathbb{N}$，都有 $A \backslash U \cap K_n \neq \emptyset$。事实 $U \in \tau \subseteq \mathcal{C}X$ 表明 $A \backslash U$ 在 $\mathcal{C}X$中是闭的。由 A的极小性，我们得出 $A = A \backslash U$。假设 $H \subseteq A$ 表明 $H \cap U = \emptyset$，这与$H \cap U \neq \emptyset$矛盾。将可数离散空间 $\mathbb{N}$ 的一点紧化记为 $\mathbb{N}^\infty$。考虑函数 $\rho : N^\infty \to (X,\tau)$，定义如下：

$$\rho(x) = \begin{cases} \sup A, & x = \infty \\ x_n, & x = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

断言 1 和 2 表明 ρ 是连续的。由于 $X\backslash A$ 所生成的开性以及 $\mathbb{N}^\infty$的核紧性， $\rho^{-1}(X\backslash A)$是 N^∞ 中的开集。显然， $N^\infty \in \rho^{-1}(X\backslash A)$。这意味着存在 $n \in \mathbb{N}$ ，使得 $n \in \rho^{-1}(X\backslash A)$，这等价于说$x_n \in X\backslash A$。但是 $x_n \in A$，矛盾。

□

我们回顾关于 ω良滤化 T_0 空间的一些已知事实。 ω空间 T_0 的 X ω良滤化由一个 Y 良滤空间η 和一个连续映射 $X \to Y$: f 组成，并满足以下泛性质：对于从 X ω到一个 Z良滤空间 $\overline{f}$ 的每个连续映射 $Y \to Z$ ，都存在唯一的连续映射 $f = \overline{f} \circ \eta$: A ，使得 T_0 。若 X 是 ω空间 WD_ω的一个子集，并且对于任意从 f $X \to Y$ 到一个 ω良滤空间 Y的连续映射 $y_A \in Y$，都存在唯一的 cl，使得 $f(A(= cl))\ \{y_A\}(\ \omega)$，则称该子集为 X 良滤决定集，简称 ω集。X的所有闭 良滤决定子集构成的集合记为 WD()。

一种构造 T_0 空间 X 的 ω良滤化的标准方法是令

$$X^{\omega-w} := \{A \subseteq X : A \in \mathbf{WD}_\omega(X)\}$$

由开集 $U^{\omega-w} := \{A \in X^{\omega-w} : A \cap U \neq \emptyset\}$ 为 X 的每个开子集 U 赋予拓扑。若定义 $\eta_X^{\omega-w}$: $X \to X^{\omega-w}$ ，使得 $\eta_X^{\omega-w}(x) = cl(\{x\})$，则由定理 6.8]，可得一个 ω-良滤化 [23,，我们称之为标准的 ω-良滤化。

命题 4.2. 设 X, Y 是两个 ω-良滤空间。若 f: $X \to Y$ 是连续映射，则对于任意 $A \in WD_\omega(X)$，有 $f(\sup\ A) = \sup\ f(A)$。

证明. 将 X 的拓扑记为 τ。对于任意 $A \in WD_\omega(X)$，由于 X 是 ω-良滤空间，根据推论 6.11 在 [23] 中再次可知 $cl_\tau(A) = \downarrow \sup\ A$。注意到 f 因为连续而单调。于是 $f(\sup\ A)$ 是 $f(A)$ 的一个上界。设 t 是 $f(A)$ 的任意其他上界。这意味着 $A \subseteq f^{-1}(\downarrow t)$。由 f 连续可知，$f^{-1}(\downarrow t)$ 是闭集。由此推出 $\sup\ A \in cl_\tau(A) \subseteq f^{-1}(\downarrow t)$。因此 $f(\sup\ A) \leq t$。所以，$f(\sup\ A) = \sup\ f(A)$。

□

定理 4.3. 设 X 是一个核心紧生成空间。那么， X的 ω-良滤化仍是一个核心紧生成空间。

证明. 设$(X^{\omega-w}, \eta_X^{\omega-w})$是 X的标准 ω-良滤化。我们要证明$\eta_X^{\omega-w}$： $X \to (X^{\omega-w}, \mathcal{C}X^{\omega-w})$也是连续的。为此，取 $U \in \mathcal{C}X^{\omega-w}$。由于 X 是核心紧生成的，只需证明$(\eta_X^{\omega-w})^{-1}(U) \in \mathcal{C}X$。

假设 ρ: $C \to X$ 是从核紧空间 C出发的连续函数。这意味着$\eta_X^{\omega-w} \circ \rho$ 也连续，这表明 $(\eta_X^{\omega-w} \circ \rho)^{-1}(U)$ 在 C 中是开集。现在我们可以得到所需结论：$(\eta_X^{\omega-w})^{-1}(U) \in \mathcal{C}X$。根据引理 4.1，我们知道 $(X^{\omega-w}, \mathcal{C}X^{\omega-w})$ 是一个 ω-良滤空间。因此，存在唯一的连续函数 $\overline{f}$： $X^{\omega-w} \to (X^{\omega-w}, \mathcal{C}X^{\omega-w})$，满足 $\overline{f} \circ \eta_X^{\omega-w} = \eta_X^{\omega-w}$。

显然，对于任意 $A \in \mathrm{WD}\omega(X)$，都有 $A = \sup_{a\in A} \downarrow a$。根据 ω-良过滤确定子集的定义以及 $\eta_X^{\omega-w}$ 的连续性，我们有 $\{\downarrow a \mid a \in A\} = \eta_X^{\omega-w}(A)$ 是 $X^{\omega-w}$ 的一个 ω-良过滤确定子集。根据命题 4.2，我们证明了$\overline{f}(A) = \overline{f}(\sup_{a\in A} \downarrow a) = \sup_{a\in A} \overline{f}(\downarrow a) = \sup_{a\in A} \overline{f} \circ \eta_X^{\omega-w}(a) = \sup_{a\in A} \eta_X^{\omega-w}(a) = A$。因此，$\overline{f}$ 是恒等映射。这表明 $X^{\omega-w}$ 的核心紧生成拓扑包含于 $\mathcal{O}(X^{\omega-w})$。因此，$X^{\omega-w}$ 是核紧生成的。 □

根据良滤化和 ω-良滤化的定义，我们不禁会问：良滤空间的核心紧生成拓扑是否仍为良滤拓扑，以及核心紧生成空间的良滤化是否仍为核心紧生成空间。本节最后将上述问题留待解决。

5. 单调收敛空间的核心紧生成拓扑

本节讨论单调收敛空间的核心紧生成拓扑。我们证明，单调收敛空间的核心紧生成拓扑仍是单调收敛空间，而核心紧生成空间的 D-完备化仍是核心紧生成空间。

设单调收敛空间 Y 与拓扑嵌入 $j: X \to Y$，且 $j(X)$ 是 Y 的 d-稠密子集，则称其为 T_0 空间 X 的 D-完备化。若子集 A 属于 T_0 空间 X，并且对于任意连续函数 $f: X \to Y$（其映入单调收敛空间 Y），$\sup f(A)$ 总是在 Y 中存在，则称该子集为渐缩的。

构造 D-完备 T_0 空间 X 的一种标准方法是令

$$X^d := \{A \subseteq X : A \text{ is closed and tarped}\}$$

其拓扑由开集 $U^d := \{A \in X^d : A \cap U \neq \emptyset\}$ 对 X的每个开子集 U 生成。若定义$\eta_X^d : X \to X^d$ 使得 $\eta_X^d(x) = cl(\{x\})$，则得到一个 D-完备化 [27, 定理 3.10]，，我们称之为标准 D-完备化。

下面的定理是引理 3.2 的直接推论。

定理 5.1. 设 X 是一个单调收敛空间。那么，X 的核心紧生成拓扑也是单调收敛的。

借助定理 5.1，仿照定理 4.3 的证明，下面的定理可直接得出。

定理 5.2. 设 X 是一个核心紧生成空间。那么，X 的 D-完备化仍是一个核心紧生成空间。

下述引 理是 [4, 引理 8.1]的推广。我们提及以下 :

引理 5.3. 设 $f: X \to Y$ 连续，其中 X 是一个良滤空间。若 Q 是 X的紧饱和子集的滤族 $\mathcal{K}$ 的交集，则 $\bigcap_{K\in\mathcal{K}} \uparrow f(K) = \uparrow f(Q)$。
证明。很容易看出，$\uparrow f(Q) \subseteq \bigcap_{K\in\mathcal{K}} \uparrow f(K)$。注意，$\uparrow f(Q) = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U$，其中 $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{O}(X) \mid f(Q) \subseteq U\}$。因此，只需证明对于任意 $U \in \mathcal{U}$，$\bigcap_{K\in\mathcal{K}} \uparrow f(K) \subseteq U$。令

$U \in \mathcal{U}$。于是 $Q = \bigcap_{K\in\mathcal{K}} K \subseteq f^{-1}(U)$。由 f 的连续性可知，$f^{-1}(U)$ 是开集。假设 X 是良过滤的，这意味着存在 $K \in \mathcal{K}$ 使得 $K \subseteq f^{-1}(U)$。换言之，$\uparrow f(K) \subseteq U$。

□

由引理 3.2 可知，单调收敛空间的核心紧生成拓扑包含于 Scott 拓扑。自然地，我们会想知道，对于哪一类拓扑空间，其核心紧生成拓扑恰好是由这些空间上的特化序确定的 Scott 拓扑。现在我们证明，良滤空间的 Smyth 幂空间满足上述性质。

引理 5.4. 设 X 是一个良滤空间。由局部紧 sober 空间到该空间的连续函数所确定的拓扑，与核心紧生成拓扑一致。

证明. 根据 [12, 定理 3.1], ，我们知道核紧良过滤空间是局部紧健全空间。借助良滤化，通过与 [4, 引理 8.2]类似的证明，可以推出该引理。

□

定理 5.5. 设 X 是一个良滤空间。那么，Smyth 幂空间 $P_S(X)$ 的核心紧生成拓扑，关于其特化序等于 Scott 拓扑。

证明。应用 [25, 定理 5], 可知，$P_S(X)$是良过滤的。因此，$P_S(X)$是单调收敛空间。由此可得，$P_S(X)$的核心紧生成拓扑包含于 Scott 拓扑。反过来，为此，设 $\mathcal{U} \in \sigma(P_S(X))$。根据引理 5.4，我们只需证明 $\mathcal{U}$ 包含于由来自局部紧健全空间的连续函数所确定的拓扑中。

设 $\rho\colon\ C \to X$ 是一个连续函数，其中 C 是一个局部紧健全空间。接下来要证明 $\rho^{-1}(\mathcal{U})$是开集。现在设 $c \in \rho^{-1}(\mathcal{U})$。由于 C是局部紧的，我们有 $\uparrow c = \bigcap_{K\in\mathcal{R}} K$，其中 $\mathcal{R} = \{K \in Q(X) \mid c \in int(K)\}$。由 [4, 引理 8.1], 可得，$\uparrow\rho(c) = \bigcap_{K\in\mathcal{R}} \uparrow\rho(K) \subseteq \mathcal{U}$。

注意到 $\rho(K)$ 在 $P_S(X)$ 中是紧的。因此，$\bigcup \rho(K)$ 是 X 的紧子集 .
我们断言，$\rho(c) = \bigcap_{K\in\mathcal{R}}(\bigcup \rho(K))$。

对于任意 $x \in \rho(c)$，可知 $\uparrow x \in \uparrow\rho(c) = \bigcap_{K\in\mathcal{R}} \uparrow\rho(K)$。这意味着存在$k \in K$，使得对于任意 $K \in \mathcal{R}$，都有 $\uparrow x \subseteq \rho(k)$。因此，对于任意 $K \in \mathcal{R}$，都有 $x \in \rho(k) \subseteq \bigcup \rho(K)$，这等价于说 $x \in \bigcap_{K\in\mathcal{R}}(\bigcup \rho(K))$。

反过来，设 $x \in \bigcap_{K\in\mathcal{R}}(\bigcup \rho(K))$。这意味着对于任意 $K \in \mathcal{R}$，都有 $x \in \bigcup \rho(K)$，从而保证存在 $k \in K$，使得对于任意 $K \in \mathcal{R}$，都有 $x \in \rho(k)$。由此可得 $\uparrow x \in \bigcap_{K\in\mathcal{R}} \uparrow\rho(K) = \uparrow\rho(c)$。因此我们有 $x \in \rho(c)$。

正如我们将看到的，$\rho(c) = \bigcap_{K\in\mathcal{R}}(\bigcup \rho(K)) \in \mathcal{U}$ 和 $\mathcal{R}$ 是 $P_S(X)$在其特化序下的有向子集，这意味着存在 $K \in \mathcal{R}$ 使得 $\bigcup \rho(K) \in \mathcal{U}$。$\mathcal{U}$是一个上集这一事实表明 $\rho(K) \subseteq \mathcal{U}$。由此我们得出 $c \in int(K) \subseteq K \subseteq \rho^{-1}(\mathcal{U})$。现在我们可以得到所需的结果。

□

应用上述引理，我们可以得到以下推论，这些推论分别已在 [18] 和 [26], 中得到证明。

定理 5.6。（*[18]*）如果 X 是局部紧健全空间，那么 $Q(X)$ 上的上 Vietoris 拓扑与 Scott 拓扑一致。

定理 5.7。（*[26]*）如果 X 是良滤空间，且其 Smyth 幂空间 $P_S(X)$ 满足第一可数性，那么 $Q(X)$ 上的上 Vietoris 拓扑与 Scott 拓扑一致。

6. 两个核紧生成空间的拓扑积

一般而言，若 X、Y 是两个核紧生成空间，则它们的拓扑积 $X \times Y$ 未必是核紧生成拓扑。总有 $\mathcal{O}(X \times Y) \subseteq \mathcal{C}(X \times Y)$，但这一包含关系可能是严格的，见 $[4, 例\ 5.1]$。本节将给出 $\mathcal{O}(X \times Y) = \mathcal{C}(X \times Y)$ 成立的充要条件。

定理 6.1. 设 X 是一个核紧生成空间。则以下命题等价。

(1) X 是核紧的。(2) 对每个核紧生成空间 Y，都有 $\mathcal{O}(X \times Y) = \mathcal{C}(X \times Y)$。

证明. (1) $\Rightarrow$(2) 由 $[4, 定理\ 5.4]$ 得出。

(2) $\Rightarrow$ (1)：设 $Y = \Sigma(\mathcal{O}(X))$。由 $[4, 引理\ 4.6]$，Y 是一个核紧生成空间。因此，由于 (2) 成立，有 $\mathcal{O}(X \times Y) = \mathcal{C}(X \times Y)$。根据 $[8, 练习\ 5.2.7]$，，我们知道 X 是核紧的，当且仅当 $G = \{(x, U) \in X \times \mathcal{O}(X) \mid x \in U\}$ 在 $X \times \Sigma\mathcal{O}(X)$ 中是开集。因此，只需证明 G 是核紧生成开集。

假设 $\rho : C \to X$ 连续，其中 C 是一个核紧空间。接下来需要证明 $\rho^{-1}(G)$ 在 C 中是开集。对于任意 $c \in \rho^{-1}(G)$，有 $\rho(c) \in G$。记 $\rho(c) = (x_c, U_c)$。于是 $x_c \in U_c$。注意，$x_c = P_X \circ \rho(c)$，其中 $P_X : X \times \Sigma\mathcal{O}(X) \to X$ 是投影映射。这表明 $c \in (P_X \circ \rho)^{-1}(U_c)$，$(P_X \circ \rho)^{-1}(U_c)$ 是开集。根据 C 的核紧性，我们归纳构造一个递减的开子集族，使得

$$x \in V \ll \cdots \ll V_{n+1} \ll V_n \ll \cdots \ll V_1 = (P_X \circ \rho)^{-1}(U_c).$$

对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$，我们定义 $A_n = \{U \in \mathcal{O}(X) \mid P_X \circ \rho(V_n) \subseteq U\}$。

我们断言 R 是 Scott 开集。

显然，R 是一个上集。设 $(U_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{O}(X)$ 的一个有向子集，且满足 $\bigcup_{i\in I} U_i \in R$。那么存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\bigcup_{i\in I} U_i \in A_n$，换言之，$P_X \circ \rho(V_n) \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$。由 $V_{n+1} \ll V_n$ 可知，存在 $i \in I$ 使得 $P_X \circ \rho(V_{n+1}) \subseteq U_i$，即 $U_i \in A_{n+1} \subseteq R$。

此外，$P_{\mathcal{O}(X)} \circ \rho(c) = U_c \in R$，其中 $P_{\mathcal{O}(X)} : X \times \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$ 是投影映射。因此，存在 X 的一个开集 U，使得 $c \in W \subseteq (P_{\mathcal{O}(X)} \circ \rho)^{-1}(R)$。

只需证明 $c \in W \cap V \subseteq \rho^{-1}(G)$。

为此，令 $a \in W \cap V$。于是 $P_{\mathcal{O}(X)} \circ \rho(a) \in R$。$R$ 的构造保证存在具有 $P_X \circ \rho(V_n) \subseteq P_{\mathcal{O}(X)} \circ \rho(a)$ 性质的 $n \in \mathbb{N}$。正如我们将看到的 $a \in V \subseteq V_n$，这意味着 $P_X \circ \rho(a) \subseteq P_X \circ \rho(V_n) \subseteq P_{\mathcal{O}(X)} \circ \rho(a)$。因此，$\rho(a) \in G$。 □

7. 参考文献

参考文献

[1] O.Battenbeld, M. Schr¨oder, A. Simpson, 《紧生成域理论》, Mathematical Structures in Computer Science. 16 (2006) 141-161.

[2] B. Day, 《闭范畴的一个反射定理》, 《纯粹与应用代数杂志》. 2 (1972) 1-11.[3] R. Engelking, 《一般拓扑学》, 波兰科学出版社, 1989年。[4] M. Escard´o, J. Lawson, A. Simpson, 《比较（core）紧生成空间的笛卡尔闭范畴》, Toplogy and its applications. 143 (2004) 105-145.[5] Y. Ershov, 拓扑空间的 d-秩, 《代数与逻辑》. 56 (2017年) 98-107.[6] M. Escardo, 《紧豪斯多夫局部》, 《纯粹与应用逻辑年刊》. 137 (2006) 147-163.[7] G. Gierz, K. Hofmann, K. Keimel, J. Lawson, M. Mislove, D. Scott, 《连续格与域》, 剑桥大学出版社, 2003年。[8]J. Goubault-Larrecq, 《非豪斯多夫拓扑与域论》, 新数学专著丛书, 剑桥大学出版社, 2013年。[9] G. Gruenhage, T. Streicher, 可数基空间的商在sobrification（sobrification化）下不封闭, Mathematical Structures in Computer Science. 16 (2006) 223-229.[10] X. Jia, 交连续性与局部紧朴素有向完备偏序集, 伯明翰大学博士论文, 2018年。[11] K. Keimel, J. Lawson, D-完备化与 d-拓扑, 《纯粹与应用逻辑年刊》. 159 (2007) 292-306.[12] J. Lawson, G. Wu, X. Xi, 良滤空间、紧致性与下拓扑, 休斯敦数学杂志. 46 (2020年) 283-294.[13] G. Markowsky, 链完备偏序集及其应用中的有向集, Algebra Universalis. 6 (1976) 53-68.[14] H. Miao, Z. Yuan, Q. Li, 关于良滤性与sobriety（sobriety性质）的讨论, 《拓扑学及其应用》. 291 (2020年) 107450.[15] H. Miao, Q. Li, D. Zhao, 关于拓扑空间朴素性的两个问题, 《拓扑学及其应用》. 295 (2021年) 107667.[16]H. Miao, L. Wang, Q. Li, D-完备化、良滤化与sobrification（sobrification化）, arXiv: 2101.04894.[17] C. Shen, X. Xi, X. Xu, D. Zhao, 关于 T_0 空间的良滤反射, 《拓扑学及其应用》. 267 (2019年) 106869.[18]A. Schalk, 《广义幂构造的代数》, 博士论文, 达姆施塔特工业大学, 1993年。[19] R. Vogt, 适用于同伦论的拓扑空间便利范畴, Archiv der Mathematik (Basel). 22 (1971) 545-555.

[20] O. Wyler，Dedekind完备偏序集与Scott拓扑，载于：B. Banaschewsk，R.-E. Hoffmann（编），《连续格会议论文集》，不来梅，1979年，第871卷，Springer，柏林、海德堡，1981年，第384–389页。[21] G. Wu、X. Xi、X. Xu、D. Zhao，拓扑空间良滤化的存在性，《拓扑学及其应用》270（2019年）107044。[22] X. Xu、C. Shen、X. Xi、D. Zhao，关于由良滤空间确定的 T_0 空间，《拓扑学及其应用》282（2020年）107323。[23] X. Xu、C. Shen、X. Xi、D. Zhao，第一可数性、 ω良滤空间与反射，《拓扑学及其应用》279（2020年）107255。[24] X. Xi、J. Lawson，关于良滤空间与有序集，《拓扑学及其应用》228（2017年）139–144。[25] X. Xu、X. Xi、D. Zhao，一个Scott空间非谱的完备海廷代数，《Fundamenta Mathematicae》252（2021年）315–323。[26] X. Xu、Z. Yang，上 Vietoris 拓扑与 Scott 拓扑的重合，《拓扑学及其应用》288（2021年）107480。[27] Z. Zhang、Q. Li，单调收敛空间完备化的直接刻画，《Topol- ogy and its Applications》230（2017年）99–104。[28] D. Zhao、T. Fan，偏序集的dcpo完备化，《理论计算机科学》411（2010年）2167–2173。