arXiv:2305.00457v2 [math.SP] 6 May 2023

局域化区域中积分态密度的绝对连续性

JING WANG、XU XU、JIANGONG YOU 和 QI ZHOU

摘要。我们证明了在具有大三角多项式势和丢番图频率的拟周期薛定谔算子中，积分态密度（IDS）的绝对连续性。这部分解决了 Eliasson 于 2002 年提出的公开问题。此外，该结果还可推广到定义在 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上的一类拟周期长程算子。我们的证明基于对偶余循环的分层定量几乎约化结果。具体而言，我们证明，除去一个豪斯多夫维数为零的参数集，任意充分接近常系数的解析单参数族余循环均可约。该结果验证了 Eliasson 于 2017 年提出的猜想。

1. 引言

1.1. 定义在 $\ell^2(\mathbb{Z})$上的准周期薛定谔算子。

考虑一维准周期薛定谔算子

$$(H_{\varepsilon^{-1}V,\alpha,x}u)_n = u_{n+1} + u_{n-1} + \varepsilon^{-1}V(x+n\alpha)u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

定义在 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上，其中相位为 $x \in \mathbb{T}$，频率 $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 是无理数，势为 $V \in C^\omega(\mathbb{T},\mathbb{R})$。几乎 Mathieu 算子（AMO）是一个典型例子，其表达式为：

$$(H_{2\varepsilon^{-1}\cos,\alpha,x}u)_n = u_{n+1} + u_{n-1} + 2\varepsilon^{-1}\cos 2\pi(x+n\alpha)u_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

它是上述算子类中最著名的例子，其中 $V(x) = 2\cos(2\pi x)$。Peierls [56] 最初将其引入，作为描述二维晶格上受均匀磁场 [43, 59]作用的电子的模型。这些算子不仅因其在物理学中的重要性 [1, 13, 54], 而受到广泛关注，也因其作为数学对象所具有的迷人性质 [4, 8, 11, 12, 45, 47]而备受瞩目。

我们重点研究积分态密度（IDS）的正则性。积分态密度可视为遍历自伴算子族 $\{L_x\}_{x\in X}$ 在 x 上的平均谱测度：

$$\mathcal{N}(E) = \int_{x\in X} \mu_x(-\infty, E]dx,$$

其中，μ_x 是与 L_x相关联的谱测度。对积分态密度的正则性，包括绝对连续性 [5, 7, 36, 41] 和赫尔德连续性 [2, 9, 10, 40, 41], 的研究，是拟周期薛定谔算子谱理论中的一个重要领域。它与其他重要主题密切相关，例如齐性谱 [25, 26, 51]、Parreau–Widom 条件 [10],和 Deift 猜想 [14, 51]。

本文将专门讨论积分态密度的绝对连续性。众所周知，纯绝对连续谱 [4, 5, 9, 27, 28] 会直接导致积分态密度的绝对连续性。在李雅普诺夫指数为零的情形下，Kotani[48] 证明了一个更深入的结果：积分态密度的绝对连续性等价于

对几乎每个相位而言，谱测度的绝对连续性。然而，在李雅普诺夫指数为正的情形下，谱测度通常是奇异的[17, 18, 29, 41, 45]。例如，Eliasson [29] 证明，当 ε 较小且 α 为丢番图时，$H_{\varepsilon^{-1}V,\alpha,x}$ 对几乎所有 x 都具有纯点谱。回想一下，如果存在 $\gamma>0$、$\tau>d-1$以及

$$\inf_{j\in\mathbb{Z}}|\langle k,\alpha\rangle-j|\geq\frac{\gamma}{|k|^{\tau}},\quad\forall k\in\mathbb{Z}^d\backslash\{0\}.$$

在这些情况下，判定积分态密度是否绝对连续是一项极具挑战性的难题，正如 Eliasson 在其著名的公开问题中所指出的：

问题 1.1 ([52], 问题 4.2.1，Eliasson)。当 $|\varepsilon|$ 较小时，映射 $E\mapsto\mathcal{N}(E)$ 有何性质？它是奇异连续的吗？是绝对连续的吗？

本文针对三角多项式势回答了他的问题：

定理 1.1。设 $\alpha\in DC_1$ 且 $V(x)$ 是定义在 $\mathbb{T}$上的三角多项式。则存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\alpha,\ V)>0$使得 $\mathcal{N}(E)$ 当且仅当 *1.1*成立时，$(\ |\varepsilon|<\varepsilon_0$。

让我们简要回顾一下此前关于局域化区域中积分态密度绝对连续性的研究。现有结果分为两类。第一类针对 固定的 解析势。在李雅普诺夫指数为正的区域，Bourgain 和 Goldstein [18] 证明了 $H_{\varepsilon^{-1}V,\ \alpha,\ x}$ 对几乎所有丢番图 α 在任意 x处均具有安德森局域化。设 $V(x)$ 是三角多项式的小扰动；Goldstein 和 Schlag [41] 进一步证明了 $\mathcal{N}(E)$ 当且仅当 1.1对几乎处处的 α成立。

另一个类别涉及固定的 $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$。对于几乎 Mathieu 算子，Jitomirskaya [45] 证明，若 $|\varepsilon|<1$，则 $H_{2\varepsilon^{-1}\text{余弦}\ \alpha,\ x}$ 对几乎所有 x 都表现出安德森局域化，当$\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$。此外，Avila 和 Damanik [7] 证明，$\mathcal{N}(E)$呈现绝对连续性当且仅当 $\varepsilon\neq\pm1$。Ge、Jitomirskaya 和 Zhao [36] 确立了：当强丢番图 α 固定时，只要扰动在非扰动意义下足够小，解析扰动的非临界几乎 Mathieu 算子的积分态密度就是绝对连续的。

总之，对于固定的丢番图频率，先前研究均局限于正李雅普诺夫指数区域内的余弦势或类余弦势。然而，对于一般解析势，关于 α的结果都是测度论意义上的，并且以非常隐式的方式依赖于势。相比之下，我们的研究适用于任意固定的丢番图频率，以及固定的三角多项式。

1.2. **上的拟周期长程算子** $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$。值得注意的是，我们的结果适用于定义在 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$上的拟周期算子，而不仅仅适用于定义在 $\ell^2(\mathbb{Z})$上的一维薛定谔算子。具体而言，我们研究以下拟周期算子：

$$(L^W_{\varepsilon^{-1}V,\alpha,x}u)_n=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\hat{W}_ku_{n-k}+\varepsilon^{-1}V(x+\langle n,\alpha\rangle)u_n,\quad n\in\mathbb{Z}^d,\tag{1.2}$$

其中 $V\in C^{\omega}(\mathbb{T},\mathbb{R})$，且 $W(\theta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\hat{W}_ke^{2\pi\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}$ 在 $\mathbb{T}^d=\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ 上是实解析的，并且 $(1,\alpha)\in\mathbb{R}^{1+d}$ 有理无关。受 Fröhlich、Spencer、Wittwer[35] 和 Sinai [60] 的开创性工作启发，人们对 (1.2) 的局域化问题进行了广泛研究。若干研究聚焦于 C^2-余弦型势 [22, 24] ，或仅研究$V(x)=2\cos(2\pi x)$ [19, 21, 37, 39, 46]。

尽管 Bourgain [17] 提供了相关证据，但当 V 是一般的解析势时，进展甚微。对于一个固定的相位 $x \in \mathbb{T}$，Bourgain [17] 证明了当 α 充分小时，算子 (1.2) 在一个正测度集上具有安德森局域化。尽管人们普遍认为答案是肯定的，但当 $x \in \mathbb{T}$几乎处处取值，且 $\alpha \in DC_d$ 固定时，算子 (1.2) 是否发生安德森局域化仍未解决。

此时，一个自然的问题是： $\mathcal{N}$（E）在局域化区域中是否具有绝对连续性，类似于问题1.2中针对问题1.1的讨论。本文将在 V 为三角多项式的情形下探讨这一问题。

定理 *1.2*。固定 $\alpha \in DC_d$**。假设** $W(\theta)$ **在** $\mathbb{T}^d$ **上解析，且** $V(x)$ **是** $\mathbb{T}^1$ **上的三角多项式。那么存在** $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha, d, V, W) > 0$，**使得在** $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ **条件下，*(1.2)* 的** $\mathcal{N}(E)$ **具有绝对连续性。**

注 1.1。据作者所知，这是关于 $d > 1$ 的拟周期长程算子在 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上具有积分态密度绝对连续性的首个结果。

现在简要概述证明的主要思路。此前已有两种方法用于研究局域化区域中积分态密度的绝对连续性。第一种由 Goldstein-Schlag [41], 提出，利用大偏差定理和算子截断行列式的雪崩原理。然而，由于“双重共振”问题，必须去除一个未知的零测度频率集合 [17, 18, 41]。Ge-Jitomirskaya-Zhao [36]提出了另一种方法，该方法建立在 Sodin-Yuditskii [61, 62] 的一个基本观察之上：如果测度的博雷尔变换在法向边界上的实部可积，且其拓扑支撑是齐次的，那么该谱测度就是绝对连续的。不过，上述方法仅适用于加速度为 1 的薛定谔余循环。本文提出一种新方法，其基础是可约性理论和 Aubry 对偶。正如本文所证明的，要证明积分态密度具有绝对连续性，需要证明其对偶拟周期余循环在除去一个豪斯多夫维数为零的能量集合后均可约。我们还指出，所有先前研究 [7, 36, 41]都针对单频情形，且属于非微扰结果（ ε 的小量性不依赖于 α），而我们的研究则涵盖多频情形。尽管如此，在这种情形下不应期待非微扰结果 [16]。

1.3. **分层定量几乎约化**。 下面说明可约性的概念以及我们的精确结果。记 $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ 为所有 $m \times m$ 可逆矩阵的集合。对于任意有理无关的 $\alpha \in \mathbb{R}^d$和 $A \in C^\omega(\mathbb{T}^d, \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}))$，解析拟周期 解析拟周期 $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$-余循环 (α, A) : $\mathbb{T}^d \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{T}^d \times \mathbb{C}^m$ 定义为斜积

$$(x, u) \mapsto (x + \alpha, A(x)u).$$

若存在 $B \in C^\omega(\mathbb{T}^d, \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}))$,$A \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$，使得……，则称一个 $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$-余循环 (α, A) 为 C^ω 可约。

$$B^{-1}(x + \alpha)A(x)B(x) = \tilde{A}.$$

从现在起，我们总是假设 α 是丢番图的。

最早关于局部可约性的结果归功于 Dinaburg 和 Sinai [27]。他们证明，如果势满足解析且足够小的假设，那么对于能量的一个正测度集 E，薛定谔余循环是可约的。Eliasson [28],

在与 Dinaburg 和 Sinai 相同的假设下，证明了对于能量的一个全测度集 E，薛定谔余循环是可约的。该证明基于所谓的“共振消去”技术，这一技术源于 Moser 和 Pöschel 的 [53] 研究。在此之后，Eliasson 提出了一个著名的猜想 [30, 32]：一个充分接近常系数的解析余循环单参数族，对于参数的 几乎处处 都是可约的。Krikorian 证明了这一猜想：在线性系统中，其系数取值于 $so(3)$ 以及一般的紧致半单李群的李代数[49, 50], ；随后在线性系统中也得到了进一步验证，其取值于 $gl(m,\mathbb{C})$ [44]。

Eliasson [33] 最近在纪念 Jean-Christophe Yoccoz 的会议上提出了一个新的猜想：

猜想 1.1 ([33]). 可约余循环的参数补集的豪斯多夫维数为零。

本文旨在证明这一猜想。我们首先给出必要的记号，以阐明我们的方法。设 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 为一个有界区间，且 $A: \Lambda \to \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ 在 $\lambda \in \Lambda$ 上解析。记 $W_\delta(\Lambda) := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z,\Lambda) < \delta\}$。对于任意解析的 $*$ 值函数$f: \Lambda \to *$，其中 $*$ 可以是 $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、$\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$、$\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$，我们令

$$|f|_\delta := \sup_{z\in W_\delta(\Lambda)} \|f(z)\|,$$

其中 $\|\cdot\|$ 分别表示绝对值或矩阵范数，并且若 $|f|_\delta < \infty$，则称 $f \in C^\omega_\delta(\Lambda,*)$。对于可积的 $*$ 值函数 $f: \mathbb{T}^d \times \Lambda \to *$，令

$$|f|_{h,\delta} := \sup_{z\in W_\delta(\Lambda)} |f(z)|_h,$$

其中 h、$\delta > 0$，对于任意可积函数 $g: \mathbb{T}^d \to *$，我们定义

$$|g|_h := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \|\hat{g}(k)\| e^{2\pi|k|h},$$

其中 $\hat{g}(k) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\phi) e^{-2\pi \mathrm{i}\langle k,\ \phi\rangle} d\phi$，而 $\|\cdot\|$ 分别表示绝对值或矩阵范数。若 $|f|_{h,\ \delta} < \infty$，则称 $f \in C^\omega_{h,\ \delta}(\mathbb{T}^d \times \Lambda, *)$。

记 $\Sigma(A(\lambda)) =: \Sigma(\lambda)$ 为 $A(\lambda) \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ 的特征值集合，对于任意$u \in \mathbb{T}$，令

$$g(\lambda,u) = \prod_{\substack{\sigma_i,\sigma_j\in\Sigma(\lambda),\\ i\neq j}} (\sigma_i - e^{2\pi \mathrm{i} u}\sigma_j). \tag{1.3}$$

定义 1.1. 若存在 $r \in \mathbb{N}^+$, $c > 0$，使得对于 $\forall u \in \mathbb{T}$，以下不等式对所有$\lambda \in \Lambda$均成立，则称 $A(\lambda)$ 在区间Λ上满足 *non-degeneracy* 条件，

$$\max_{0\le l\le r} \left|\frac{\partial^l g(\lambda,u)}{\partial \lambda^l}\right| \ge c, \tag{1.4}$$

其中 g 的定义见 *(1.3)*。

现在我们可以陈述可约性结果。

定理 1.3。设 $h > 0$，$\alpha \in \mathrm{DC}_d$，且 $\Lambda \subset \mathbb{R}$为一个区间。假设 $A \in C^\omega(\Lambda, \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}))$ 在 Λ 上按（*1.4*）的意义是非退化的，其中某个 $r \in \mathbb{N}^+$，$c > 0$。

那么，存在 $\delta>0$, $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\alpha,d,m,\delta,h,r,c,|A|_\delta,|A^{-1}|_\delta)>0$，以及具有零的 *Hausdorff* 维数的 $\mathcal{S}\subseteq\Lambda$，使得若 $F\in C^\omega_{h,\delta}(\mathbb{T}^d\times\Lambda,gl(m,\mathbb{C}))$ 满足 $|F|_{h,\delta}\le\varepsilon_0$ 和 $\lambda\in\Lambda\backslash\mathcal{S}$，则余循环 $(\alpha,A(\lambda)+F(\cdot,\lambda))$ 是可约的，即存在 $B_\lambda\in C^\omega_{\underline{h}}(\mathbb{T}^d,GL(m,\mathbb{C}))$ 使得

$$B_\lambda^{-1}(\cdot+\alpha)(A(\lambda)+F(\cdot,\lambda))B_\lambda(\cdot)=\tilde{A}(\lambda)\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}).$$

此外，$\tilde{A}(\lambda)$ 具有单特征值。

注 1.2. 非退化条件 *(1.4)* 在 $C^\omega(\Lambda,\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$ [44], 中是泛型的，因此定理 *1.3* 解决了 *Eliasson* 的猜想（猜想 *1.1*）。

我们希望对我们的结果及其证明提供一些见解。具体而言，我们实际上证明了更强的结论，即不可约余循环以及具有重特征值的可约余循环构成一个豪斯多夫维数为零的集合，而这对我们的谱应用至关重要。此外，我们证明中的一个关键环节是在条带 $|\Im z|<\frac{h}{2}$ 中证明对任意 $\lambda\in\Lambda$ 都具有强几乎约化性，从而建立余循环 $(\alpha,A(\lambda)+F(\lambda,\cdot))$ 在条带 $|\Im z|<\frac{h}{4}$ 中对任意 $\lambda\in\Lambda\backslash\mathcal{S}$ 都具有解析可约性。

回顾一下，如果存在 $B_j\in C^\omega_{h_j}(\mathbb{T}^d,\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$、$A_j\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ 和 $F_j\in C^\omega_{h_j}(\mathbb{T}^d,gl(m,\mathbb{C}))$，使得以下条件成立，则 $(\alpha,A)\in C^\omega(\mathbb{T}^d,\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$ 是几乎可约的：

$$B_j^{-1}(x+\alpha)A(x)B_j(x)=A_j+F_j(x),$$

其中 $|F_j|_{h_j}\to0$ 且 $A_j\to A_\infty\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$。若 $h_j\to0$，则称 (α,A) 为（弱）几乎可约，或称 C^∞ 几乎可约；若 $h_j\to h_*>0$，则称 (α,A) 为（强）几乎可约。事实上，我们有以下结论：

定理 *1.4.* 假设定理 *1.3* 的所有假设均成立。若 $F\in C^\omega_{h,\delta}(\mathbb{T}^d\times\Lambda,gl(m,\mathbb{C}))$ 满足 $|F|_{h,\delta}\le\varepsilon_0$，其中 ε_0 取决于 $\alpha,d,h,\delta,m,c,r,A$，则对每个 $\varsigma>0,\epsilon>0$，存在 Λ 的一个划分，记为 Π，以及 $\eta=\eta(\epsilon,\varsigma,\alpha,h,\delta,m,c,r,A)>0$，使得对每个 $\tilde{\Lambda}\in\Pi$，都存在 $B\in C^\omega_{h/2,\eta}(\mathbb{T}^d\times\tilde{\Lambda},GL(m,\mathbb{C}))$，满足

$$B^{-1}(\cdot+\alpha,\lambda)(A(\lambda)+F(\cdot,\lambda))B(\cdot,\lambda)=\tilde{A}(\lambda)+\tilde{F}(\cdot,\lambda),$$

其中 $|\tilde{F}|_{h/2,\ \eta}<\epsilon$、$|B|_{h/2,\ \eta}|\tilde{F}|^\varsigma_{h/2,\ \eta}<1$ 和 $|B^{-1}|_{h/2,\ \eta}|\tilde{F}|^\varsigma_{h/2,\ \eta}<1$。

注 1.3. 我们将证明一个分层定量几乎约化结果，具体表述见命题 *5.1*。

注 1.4. 经过细微修改，共轭变换可以定义在宽度为 $h_*<h$ 的任意条带中，而不一定是 $\frac{h}{2}$。

我们将概述关于几乎可约性的已有结果。Eliasson[28] 证明，若一个 SL(2,$\mathbb{R}$) 余循环接近常数，则它是（弱）几乎可约的。Leguil、You、Zhao 和 Zhou [51] 后来证明了（强）几乎可约版本（另见 [20]）。这些结果均为微扰性结果（依赖于 α），而非微扰性版本，例如单频情形，则由 Avila 和 Jitomirskaya[9]证明。我们还须指出，Avila 的几乎约化猜想(ARC)是几乎可约性的全局版本。该猜想指出，对任意次临界余循环，（强）几乎可约性均成立。ARC 的证明已于 [3] 宣布，并定于在 [5,6]发表。若要了解其在谱方面的各种应用，可参阅综述 [63]。此外，Eliasson 还证明了准周期余循环的（弱）几乎可约性

取值于高维群 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ 且接近常数。最近，这一背景下的（强）几乎可约性也已得到证明 [23, 38]。

总之，我们想讨论该证明。尽管文中没有明确提及，但 Avila 已证明猜想 1.1 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 群情形下成立 [4]。他的证明高度依赖纤维旋转数的存在性。然而，在更高维中，纤维旋转数这一概念并不存在。虽然可以在辛群的背景下定义 Maslov 指标 [34, 55], ，但由于它涉及常数部分的所有特征值 $\{\sigma_i(\lambda)\}_i$ ，它不足以保证可约性。在更高维中，需要更深入地理解不可约集或例外集 $\mathcal{S}$。这种分层的几乎可约性由 Krikorian 开创 [50]。与[50], 不同，我们能够对 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$余循环给出定量的（强）几乎可约性，而 [50] 中的几乎可约性结果则是弱版本，且仅限于半单情形。正如[63], 所强调的，定量估计对于谱应用至关重要。借助本文所发展的方案，我们期待能够进一步探索其应用。

2. 预备知识

2.1. 线性余循环。 我们考虑线性余循环 (α, A): $\mathbb{T}^d\times\mathbb{C}^m\to\mathbb{T}^d\times\mathbb{C}^m$ 定义为

$$(\theta,u)\mapsto(\theta+\alpha,A(\theta)u).$$

余循环迭代由 $(\alpha,A)^n=(n\alpha,A(\cdot;n))$ 给出，其中

$$\begin{cases} A(\theta;n)=A(\theta+(n-1)\alpha)\cdots A(\theta) & n>0,\\ A(\theta;n)=Id & n=0,\\ A(\theta;n)=A^{-1}(\theta+n\alpha)\cdots A^{-1}(\theta-\alpha) & n<0. \end{cases}$$

设 $\gamma_1(\alpha,A)\geq\cdots\geq\gamma_m(\alpha,A)$ 为 (α,A) 的李雅普诺夫指数，并按其重数重复，即，

$$\gamma_k(\alpha,A)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}^d}\ln(\sigma_k(A(\theta;n)))d\theta,$$

其中，$\sigma_1(B)\geq\cdots\geq\sigma_m(B)$ 是矩阵 $singular\ values$ $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ 的 $singular\ values$。对于矩阵 $B\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$，$\prod_{j=1}^k\sigma_j(B)=\|\Lambda^kB\|$，其中 Λ^kB 是B的第 k 阶外积。因此，我们有

$$\Sigma_{j=1}^k\gamma_j=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}^d}\ln\|\Lambda^kA(\theta;n)\|d\theta.$$

2.2. Aubry 对偶。 设 $V(x)=\sum_{k=-\ell}^{\ell}\hat{}V_ke^{2\pi ikx}$。设准周期长程算子

$$(L^W_{\varepsilon^{-1}V,\alpha,x}u)_n=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\hat{W}_ku_{n-k}+\varepsilon^{-1}V(x+\langle n,\alpha\rangle)u_n,\quad n\in\mathbb{Z}^d, \tag{2.1}$$

存在一个 C^k 准周期 Bloch 波 $u_n=e^{2\pi i\langle n,\ \theta\rangle}\overline{\psi}(x+\langle n,\alpha\rangle)$，其中某个 $\overline{\psi}\in C^k(\mathbb{T},\mathbb{C})$ 满足 $\theta\in\mathbb{T}^d$。容易看出，$\overline{\psi}$ 的傅里叶系数满足以下长程算子:

$$(L^V_{\varepsilon W,\alpha,\theta}u)_n=\Sigma_{k=-\ell}^{\ell}\hat{V}_ku_{n-k}+\varepsilon W(\theta+n\alpha)u_n,\quad n\in\mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

我们称$L^V_{\varepsilon W,\ \alpha,\ \theta}$为$L^W_{\varepsilon^{-1}V,\ \alpha,\ x}$的对偶算子。记$\hat{\mathcal{N}}(E)$为$L^V_{\varepsilon W,\ \alpha,\ \theta}$的积分态密度，这是众所周知的 [58]:

$$\mathcal{N}(E) = \hat{\mathcal{N}}(E). \tag{2.3}$$

(2.2) 的特征值方程为

$$\Sigma_{k=-\ell}^{\ell}\hat{V}_k u_{n-k} + \varepsilon W(\theta + n\alpha)u_n = Eu_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

不失一般性，我们假设 $V_\ell \neq 0$。因此，特征值方程可视为一个 GL$(2\ell,\mathbb{C})$-余循环 (α, A_ε) : $\mathbb{T}^d \times \mathbb{C}^{2\ell} \to \mathbb{T}^d \times \mathbb{C}^{2\ell}$，其中

$$A_\varepsilon(E,\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\hat{V}_{\ell-1}}{\hat{V}_\ell} & \cdots & -\frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_\ell} & \frac{E-\hat{V}_0-\varepsilon W(\theta)}{\hat{V}_\ell} & -\frac{\hat{V}_{-1}}{\hat{V}_\ell} & \cdots & -\frac{\hat{V}_{\ell+1}}{\hat{V}_\ell} & -\frac{\hat{V}_{-\ell}}{\hat{V}_\ell} \\ 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $\hat{\gamma}$ 表示相应余循环 (α, A_ε) 的纤维熵（即正李雅普诺夫指数之和）。那么它通过 Thouless公式 [42] 与积分态密度相关联:

$$\hat{\gamma}(E) = \int_{\mathbb{R}} \ln|E - E'| d\hat{\mathcal{N}}(E') - \ln|\hat{V}_\ell|. \tag{2.4}$$

2.3. **豪斯多夫测度与豪斯多夫维数。** 设 $(\mathcal{X}, \rho)$ 是一个度量空间。对于任意子集 (Ω)，我们用 diam 表示 Ω 的直径，其中 $\Omega \subseteq \mathcal{X}$。

定义 2.1。 对于任意 $\Omega \subseteq \mathcal{X}$、任意 $\eta \in (0,\infty]$ 以及任意 $\varrho \in [0,\infty)$，令

$$H^\varrho_\eta(\Omega) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}\Omega_i)^\varrho \ : \ \Omega \subseteq \cup_i \Omega_i, \text{ and } \mathrm{diam}(\Omega_i) < \eta\}.$$

那么 $H^\varrho(\Omega) := \lim_{\eta\downarrow 0} H^\varrho_\eta(\Omega)$ 称为Ω的豪斯多夫 ϱ 维测度，而$\dim_H(\Omega) := \inf\{\varrho : \ H^\varrho(\Omega) = 0\}$ 称为豪斯多夫维数。

3. 准备引理

本节首先介绍一些有用的概念和准备引理:

3.1.**代数方程的根。** 下面我们考虑如下形式的多项式$C_N[X]$ of the form

$$\chi(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n, \quad n \le N.$$

设 $|\chi| := \sup_i |a_i|$。如果其系数满足 $\chi(\lambda)(X) \in C^\omega_\delta(\Lambda, C_N[X])$，则称为 $a_i \in C^\omega_\delta(\Lambda)$。给定$\chi(\lambda)(X) \in C^\omega_\delta(\Lambda, C_N[X])$，令

$$|\chi|_\delta = \sup_i(|a_i|_\delta).$$

记 χ 的零点多重集（按重数计）为 Σ_χ。反过来，对于给定的有限多重集 Σ，其元素 $z \in \mathbb{C}$ 可以重复，我们称 $\chi_\Sigma(X)$ 为 $= \prod_{z\in\Sigma}(X - z)$

Σ 的特征多项式。假设 χ_1、$\chi_2 \in C_N[X]$ 的次数分别为 m_1、$m_2 \le N$，我们将它们的结果式 定义为

$$\mathrm{Res}(\chi_1,\chi_2) := \mathrm{Res}(\Sigma_{\chi_1},\Sigma_{\chi_2}) = \prod_{\sigma_i\in\Sigma_{\chi_1},\tau_j\in\Sigma_{\chi_2}} (\sigma_i-\tau_j).$$

更一般地，我们记

$$\mathrm{Res}(\chi_1,\chi_2;u) := \mathrm{Res}(\Sigma_{\chi_1}, e^{2\pi \mathrm{i} u}\Sigma_{\chi_2}) = \mathrm{Res}(\chi_1, e^{2\pi \mathrm{i} m_2 u}\chi_2(e^{-2\pi \mathrm{i} u}\cdot)).$$

设 Σ 存在一个分解，即 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_l$。令 $\chi := \chi_\Sigma$ 和 $\chi_i := \chi_{\Sigma_i}$。对于 $u \in \mathbb{T}$，我们有

$$\mathrm{Res}(\chi,\chi;u) = \prod_{1\le i,j\le l} \mathrm{Res}(\chi_i,\chi_j;u).$$

通过直接计算，我们可以得到以下估计。

引理 3.1 ([50])。设 χ、χ_1、$\chi_2 \in C_N[X]$ 的次数分别为 n、m_1、$m_2 \le N$。它们对应的零点多重集为 Σ、Σ_1、Σ_2。对于 $u \in \mathbb{T}$，我们有如下结论：

$$\begin{aligned}
&|\chi_{e^{2\pi \mathrm{i} u}\Sigma}| = |\chi|,\\
&|\mathrm{Res}(\chi_1,\chi_2)| \le (m_1+m_2)!(1+|\chi_1|)^{m_2}(1+|\chi_2|)^{m_1},\\
&|\mathrm{Res}(\chi_1,\chi_2;u)| \le (m_1+m_2)!(1+|\chi_1|)^{m_2}(1+|\chi_2|)^{m_1}.
\end{aligned}$$

如果 χ_1'、χ_2' 的次数也分别为 m_1、m_2，那么我们有：

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{Res}(\chi_1',\chi_2';u) - \mathrm{Res}(\chi_1,\chi_2;u)|\\
\le&(m_1+m_2+1)!(1+|\chi_1|)^{m_2}(1+|\chi_2|)^{m_1}\max\{|\eta_1|,|\eta_2|\},
\end{aligned}$$

其中 $\eta_1 = \chi_1' - \chi_1$，$\eta_2 = \chi_2' - \chi_2$，且 $|\eta_1|$，$|\eta_1| \le 1$。

本文始终考虑 $A \in C^\omega_\delta(\Lambda, \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$ 的情形。记其谱为$\Sigma(\lambda) := \Sigma(A(\lambda))$，显然不包含零点。因此存在 $R > 0$，使得$\Sigma(\lambda) \subseteq D(R)$ 对于 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$ 成立，其中

$$D(R) := \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R} \le |z| \le R\}.$$

于是我们得到以下基本估计：

引理 3.2。设 $\Sigma(\lambda) \subseteq D(R)$ 对 $A \in C^\omega_\delta(\Lambda, \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$成立，其中 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$ 和$\Sigma(\lambda) := \Sigma(A(\lambda))$。则

$$|\chi_\Sigma|_\delta \le m!R^m, \qquad \left|\frac{\partial \chi_\Sigma}{\partial X}\right|_\delta \le m|\chi_\Sigma|_\delta. \tag{3.1}$$

此外，我们有

$$|\chi_\Sigma - \chi_{\Sigma'}|_\delta \le m!M^{m-1}|A-A'|_\delta, \tag{3.2}$$

其中 $\Sigma'(\lambda) := \Sigma(A'(\lambda))$ 且 $M =$最大值$\{1, |A|_\delta, |A'|_\delta\}$。

证明。假设 $A(\lambda)$ 和 $A'(\lambda)$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned}
\chi_{\Sigma(\lambda)}(X) &= X^m + a_1(\lambda)X^{m-1} + \cdots + a_m(\lambda),\\
\chi_{\Sigma'(\lambda)}(X) &= X^m + b_1(\lambda)X^{m-1} + \cdots + b_m(\lambda).
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\frac{\partial \chi_{\Sigma(\lambda)}}{\partial X} = mX^{m-1} + (m-1)a_1(\lambda)X^{m-2} + \cdots + a_{m-1}(\lambda).$$

由于对于 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$, $\Sigma(\lambda) \subseteq D(R)$, 由韦达定理可得, 对于任意$1 \le j \le m$,

$$|a_j(\lambda)| \le C_m^j R^j \le m! R^j,$$

于是（3.1）成立。为证明（3.2）, 我们回顾以下结果:

引理 3.3 ([15], 命题 20.3). 分别记 A 和 B 在$\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ 中的特征多项式的第 k 个系数为 a_k和 $b_k\,(k = 1, \cdots, m)$。则有

$$|a_k - b_k| \le kC_m^k M^{k-1}\|B - A\|,$$

其中 $M =$ 最大$\{\|A\|, \|B\|\}$。

因此, 对于任意 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$ 和 $1 \le j \le m$,

$$|a_j(\lambda) - b_j(\lambda)| \le jC_m^j M^{j-1}\|A(\lambda) - A'(\lambda)\| \le m! M^{j-1}\|A(\lambda) - A'(\lambda)\|.$$

于是可直接得到（3.2）。 □

现在我们分析 $g(\lambda, u)$ 在（1.3）中定义的函数。在 $u \in \mathbb{Z}$的情况下, 有

$$\begin{aligned} g(\lambda,u) &= \prod_{\substack{\sigma_i,\sigma_j\in\Sigma(\lambda),\\ i\neq j}} (\sigma_i - \sigma_j) = \prod_{\sigma_i\in\Sigma(\lambda)} \Big(\prod_{\substack{\sigma_j\in\Sigma(\lambda),\\ i\neq j}} (\sigma_i - \sigma_j)\Big) \\ &= \prod_{\sigma_i\in\Sigma(\lambda)} \frac{\partial \chi_{\Sigma(\lambda)}}{\partial X}(\sigma_i) = \mathrm{Res}(\chi_{\Sigma(\lambda)}, \frac{\partial \chi_{\Sigma(\lambda)}}{\partial X}), \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中, $\chi_{\Sigma(\lambda)}$、 $\frac{\partial \chi_{\Sigma(\lambda)}}{\partial X}$的系数关于 λ均为解析函数, 因此 $g(\lambda, u)$。

在 $u \in \mathbb{T}\backslash\mathbb{Z}$的情况下, 显然函数 $g(\lambda, u)$可以表示为

$$g(\lambda,u) = \frac{\mathrm{Res}(\chi_{\Sigma(\lambda)}, \chi_{\Sigma(\lambda)}; u)}{(\prod_{z\in\Sigma(\lambda)} z)(1 - e^{2\pi \mathrm{i} u})^m} = \frac{\mathrm{Res}(\chi_{\Sigma(\lambda)}, \chi_{\Sigma(\lambda)}; u)}{\det A(\lambda)(1 - e^{2\pi \mathrm{i} u})^m}, \tag{3.4}$$

其中 $\#\Sigma = m$。此外, 由于 $\mathrm{Res}(\chi_\Sigma(\lambda)\ \chi_\Sigma(\lambda);\ u)$ 和 $\det A(\lambda)$ 关于 λ 解析, 且 $\det A(\lambda) \neq 0$, 因此 $g(\lambda, u)$ 关于 λ 也解析。在这种情况下, 我们有如下观察:

引理 3.4。 假设 $\chi(X) = X^m + a_1(\lambda)X^{m-1} + \cdots + a_m(\lambda)$。对于 $u \in \mathbb{T}\backslash\mathbb{Z}$, 有

$$\mathrm{Res}(\chi, \chi; u) = (e^{2\pi \mathrm{i} u} - 1)^m \mathrm{Res}(\chi, \tilde{\chi}_u).$$

其中

$$\tilde{\chi}_u(X) = a_1(\lambda)X^{m-1} + \frac{e^{4\pi \mathrm{i} u} - 1}{e^{2\pi \mathrm{i} u} - 1} a_2(\lambda)X^{m-2} + \cdots + \frac{e^{2m\pi \mathrm{i} u} - 1}{e^{2\pi \mathrm{i} u} - 1} a_m(\lambda).$$

证明。 由于

$$\begin{aligned} e^{2\pi \mathrm{i} m u}\chi(e^{-2\pi \mathrm{i} u}X) &= X^m + a_1(\lambda)e^{2\pi \mathrm{i} u}X^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(\lambda)e^{2\pi \mathrm{i}(m-1)u}X + e^{2\pi \mathrm{i} m u}a_m(\lambda) \\ &=: \acute{\chi}_u(X), \end{aligned}$$

根据结果式 $\mathrm{Res}(\chi, \chi;\ u)$ 的定义, 我们有

$$\mathrm{Res}(\chi, \chi; u) = \mathrm{Res}(\chi, \acute{\chi}_u).$$

现在根据以下事实：对于任意两个多项式 $f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$、 $g(X) = b_0X^m + b_1X^{m-1} + \cdots + b_m$，它们的结式

$$\mathrm{Res}(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m \end{vmatrix},$$

我们可以得到 that

结果式$(\chi, \acute{\chi}_u)$

$$= (e^{2\pi iu} - 1)^m \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{m-1} & a_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m \\ 0 & a_1 & \frac{e^{4\pi iu}-1}{e^{2\pi iu}-1}a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{e^{2(m-1)\pi iu}-1}{e^{2\pi iu}-1}a_{m-1} & \frac{e^{2m\pi iu}-1}{e^{2\pi iu}-1}a_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{e^{2(m-2)\pi iu}-1}{e^{2\pi iu}-1}a_{m-2} & \frac{e^{2(m-1)\pi iu}-1}{e^{2\pi iu}-1}a_{m-1} & \frac{e^{2m\pi iu}-1}{e^{2\pi iu}-1}a_m \end{vmatrix}$$

$= (e^{2\pi iu} - 1)^m$结果式$(\chi, \tilde{\chi}_u)$,

where $\tilde{\chi}_u(X) = a_1(\lambda)X^{m-1} + \frac{e^{4\pi iu}-1}{e^{2\pi iu}-1}a_2(\lambda)X^{m-2} + \cdots + \frac{e^{2m\pi iu}-1}{e^{2\pi iu}-1}a_m(\lambda)$. □

3.2. **横截性**。 正如我们将在证明中看到的，函数 $g(\lambda, u)$的横截性对我们至关重要。这里我们首先推广 [29, 31,49, 50]Pyartii 提出的横截性概念 [57]。

定义 3.1。 函数 $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ 称为(C,c,r)-*Pyartli* 函数，如果 $f \in C^{r+1}$ 且对于任意 $x \in (a,b)$，我们有

$$\sup_{0\le j\le r+1} |\partial^j f(x)| \le C,$$
$$\sup_{0\le j\le r} |\partial^j f(x)| \ge c > 0.$$

Pyartli 函数将给出关于原像的一些良好估计：

引理 3.5. 设 f 是 (C,c,r)-*Pyartli* 函数，定义在 (a,b)上。那么对于 $0<\varsigma\leq\frac{c}{2}$，存在由区间构成的不交并 $\cup_{i\in J}I_i$，使得

$$\begin{aligned}\#J&\leq 2^r(\frac{2C(b-a)}{c}+1),\\ \max_{i\in J}|I_i|&\leq 2(\frac{2\varsigma}{c})^{\frac{1}{r}},\\ |f(x)|&\geq\varsigma,\quad \forall x\in(a,b)\backslash\cup_{i\in J}I_i.\end{aligned}$$

证明。类似的估计见 [31, 50], 我们在此给出证明仅为完整起见。若 $r=0$，则结论显然成立。对于 $r\geq 1$，我们假设存在 $x_0\in(a,\ b)$ 满足$|x_0-a|\leq\frac{c}{2C}$，且 $1\leq r_0\leq r$ 使得

$$|\partial^{r_0}f(x_0)|\geq c.$$

否则，对于所有 $x\in(a,b)\cap(a,a+\frac{c}{2C}]$，都有 $|f(x)|\geq c$，因此我们只需考虑区间 $(a+\frac{c}{2C},b)$，而非 (a,b)。这里，不失一般性，假设$b-a>\frac{c}{2C}$。

现在，令

$$\tilde{f}(x):=\Re(e^{-\mathrm{iarg}\partial^{r_0}f(x_0)}f(x)).$$

于是，对于 $x\in I=(a,x_0+\frac{c}{2C}]\cap(a,b)$，有 $\partial^{r_0}\tilde{f}(x)\geq\frac{c}{2}$。现在我们考虑 $\partial^{r_0-1}\tilde{f}$在 I中。由于$\partial^{r_0-1}\tilde{f}$ 关于 I是单调的，因此至多存在一个具有最小长度的区间 $I_{1,\ 1}\subseteq I$，使得

$$|\partial^{r_0-1}\tilde{f}(x)|\geq\frac{c}{2}(\frac{2\varsigma}{c})^{\frac{1}{r_0}},\quad\forall x\in I\backslash I_{1,1}.$$

˜由 $\partial^{r_0}f(x)\geq\frac{c}{2}$对 $x\in I$成立这一事实可得

$$|I_{1,1}|\leq 2(\frac{2\varsigma}{c})^{\frac{1}{r_0}}.$$

我们继续考虑 $\partial^{r_0-2}\tilde{f}$。它在 $I\backslash I_{1,1}$ 的每个连通分支上都是单调的。因此，至多存在两个区间 $I_{2,1}$,$I_{2,2}\subseteq I\backslash I_{1,1}$ 使得

$$\begin{aligned}|\partial^{r_0-2}\tilde{f}(x)|&\geq\frac{c}{2}(\frac{2\varsigma}{c})^{\frac{2}{r_0}},\quad\forall x\in I\backslash I_{1,1}\cup I_{2,1}\cup I_{2,2},\\ |I_{2,1}|,|I_{2,1}|&\leq 2(\frac{2\varsigma}{c})^{\frac{1}{r_0}}.\end{aligned}$$

将这一过程迭代 r_0 次，我们至多得到 $2^{r_0}-1$ 个区间 $I_{i,j}$ 使得

$$\begin{aligned}|\tilde{f}(x)|&\geq\varsigma,\quad\forall x\in I\backslash\cup_{1\leq i\leq r_0,1\leq j\leq 2^{i-1}}I_{i,j},\\ |I_{i,j}|&\leq 2(\frac{2\varsigma}{c})^{\frac{1}{r_0}}.\end{aligned}$$

显然

$$|f(x)|=|e^{-\mathrm{iarg}\partial^{r_0}f(x_0)}f(x)|\geq|\Re(e^{-\mathrm{iarg}\partial^{r_0}f(x_0)}f(x))|=|\tilde{f}(x)|.$$

现在我们考虑区间 $(a+\frac{c}{2C},b)$ 上的 $f(x)$，并按照对 I 所采用的方式重复上述过程。最后，所考虑区间的长度不超过 $\frac{c}{2C}$，然后我们再进行最后一次上述操作。于是结论成立。□

继[49, 50], 之后，我们还引入一个稍强的横截性定义，以便更好地控制函数的导数（以及其乘积的导数）。

定义 3.2。 设 f: $(a,\ b)\ \to \mathbb{C}$ 是一个解析函数。我们称 f 是（$M,\ \delta,\ c,\ r$）横截的，当且仅当：

(1) f 是 $(M,\ \delta)$-有界的，即 $f \in C^{\omega}_{\delta}((a,\ b)\ \mathbb{C})$ 且 $|f|_{\delta} \le M$；

(2) 对任意 $x \in (a-\frac{\delta}{2},\ b+\frac{\delta}{2})$，$\sup_{0\le j\le r}|\partial^j f(x)| \ge c > 0$。

注 3.1。 根据柯西估计，如果 f 是 $(M,\ \delta,\ c,\ r)$-横截的，那么自动地，f 是 $(\frac{(r+1)!\ M}{\min\{1,\delta^{r+1}\},\ c},\ r)$-*Pyartli* 的。

下面的引理对我们来说非常重要：引理 3.6 说明，横截函数的乘积仍然是横截的；引理 3.7 表明，如果若干个“不是太大”的函数的乘积是横截的，那么其中每个函数也都是横截的。

引理 3.6 ([49, 50])。 假设 $f_1,\cdots,f_l$ 是 (M_i,δ_i,c_i,r_i)-横截的。令 $M=$上确界 M_i、$\delta=$下确界 δ_i、 $c=$下确界 c_i 和 $r=r_1+\cdots+r_l$。那么 $f=f_1\cdots f_l$ 是 (M',δ,c',r)-横截的，其中

$$M'=M^l,\qquad c'=((\frac{\delta}{4r^2M})^{rl}c)^{l^{r+1}}.$$

引理 3.7 ([49, 50]). 假设 $f_1,\cdots,f_l$ 是属于 $C^{\omega}_{\delta}(\Lambda)$ 且满足 $|f_i|_{\delta}\le M$ 的函数。如果 $f=f_1\cdots f_l$ 是 (M,δ,c,r)-横截的，那么每个 f_i 都是 (M,δ,c',r)-横截的，其中 $c'=(\frac{2lM}{\delta})^{-rl}c$。

如果我们将该函数限制在 $g(\lambda,u)$ 上，那么我们将横截性的记号扩展到多重集 $\Sigma(\lambda)$。

定义 3.3. 我们称有限多重集 $\Sigma(\lambda)$ 在 Λ 上是(M,δ,c,r)-横截的，如果对于任意 $u\in\mathbb{T}$, $\lambda\mapsto g(\lambda,u)$ 在 Λ 上是(M,δ,c,r)-横截的。

假设 $\Sigma(\lambda)$ 可以分解为 $\Sigma(\lambda)=\Sigma_1(\lambda)\cup\cdots\cup\Sigma_l(\lambda)$。令 $g_i(\lambda,u)\,(i=1,\cdots,l)$ 为根据（1.3）相对于 $\Sigma_i(\lambda)$定义的函数。于是有

$$g(\lambda,u)=\left(\prod_{i=1}^{l}g_i(\lambda,u)\right)\left(\prod_{i,j=1,i\neq j}^{l}\mathrm{Res}(\chi_{\Sigma_i(\lambda)},\chi_{\Sigma_j(\lambda)};u)\right). \tag{3.5}$$

这引出了下面的定义：

定义 3.4. 我们称 $\Sigma(\lambda)=\Sigma_1(\lambda)\cup\cdots\cup\Sigma_l(\lambda)$ 在 Λ 上的分解是(M,δ,c,r)-横截的，当且仅当

(1) 对所有 $1\le i\le l$，多重集 $\Sigma_i(\lambda)$ 在 Λ 上是(M,δ,c,r)-横截的；*(2)* 对所有 $i\neq j$ 及所有 $u\in\mathbb{T}$, $\lambda\mapsto$结果式$(\chi_{\Sigma_i(\lambda)}\ \chi_{\Sigma_j(\lambda)};u)$ 在 Λ 上是(M,δ,c,r)-横截的。

现在，借助引理 3.6 和引理 3.7，分解的横截性将推出多重集 $\Sigma(\lambda)$的横截性，反之亦然。

引理 *3.8*。设 $A\in C^{\omega}_{\delta}(\Lambda, GL(m,\mathbb{C}))$ 满足 $A=diag\{A_{11},\cdots,A_{ll}\}$，且 $\Sigma(A(\lambda))=:\Sigma(\lambda)\subseteq D(R)$ 对于 $\lambda\in W_{\delta}(\Lambda)$ 成立，其中 $A_{ii}(1\le i\le l)$ 是分块矩阵，并且 $\Sigma_i(\lambda):=\Sigma(A_{ii}(\lambda))$ 对于 $1\le i\le l$ 成立。

(1) 若分解 $\Sigma=\Sigma_1\cup\cdots\cup\Sigma_l$ 在 Λ 上是 (M,δ,c,r)-横截的，则 Σ 在 Λ 上是 $((2R)^{m^2},\delta,c',l^2r)$-横截的，且 $c'=(\frac{(4l^4r^2(2R)^{m^2})^{-rl^4}c)^{l^{2l^2r+2}}}{\delta}$。*(2)* 若有限多重集 Σ 在 Λ 上是 (M,δ,c,r)-横截的，则分解 $\Sigma=\Sigma_1\cup\cdots\cup\Sigma_l$ 在 Λ 上是 $((2R)^{m^2},\delta,c'',r)$-横截的，且 $c''=(\frac{2l^2(2R)^{m^2})^{-rl^2}c}{\delta}$。

证明。 注意到 $\Sigma(\lambda) \subseteq D(R)$ 蕴含

$$|g(\cdot,u)|_\delta, |g_i(\cdot,u)|_\delta, |\mathrm{Res}(\chi_\Sigma,\chi_\Sigma;u)|_\delta, |\mathrm{Res}(\chi_{\Sigma_i},\chi_{\Sigma_j};u)|_\delta \le (2R)^{m^2}. \tag{3.6}$$

若 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_l$ 在 Λ 上是 (M,δ,c,r)-横截的，根据 (3.6)，它在 Λ 上也是 $((2R)^{m^2},\delta,c,r)$-横截的。于是，根据 (3.5) 和引理 3.6，我们得到 $g(\lambda,u)$ 在 Λ 上是 $((2R)^{m^2l^2},\delta,c',l^2r)$-横截的；根据 (3.6)，它也是 $((2R)^{m^2},\delta,c',l^2r)$-横截的。用类似的推理可由引理 3.7 得出 (2)。

□

3.3. 谱与标准形的分离。

定义 3.5. 给定 $\nu > 0$，若称一个划分 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_l$ 为 ν-分离的，若$|\sigma-\tau| > \nu$对于 $\forall(\sigma,\tau) \in \Sigma_i \times \Sigma_j$满足 $i \neq j$。此外，若存在 $\zeta > 0$使得$\mathrm{diam}(\Sigma_i) \le \zeta$ 对于 $1 \le i \le l$，[1] 则称 Σ 的分解为 (ν,ζ)-分离的。

对于任意具有 $\#\Sigma \le m$ 和 $\mu > 0$ 的多重集 Σ，总存在一个满足 $\zeta \le m\mu$ 的 (μ,ζ)-分离分解。我们称其为极大(μ,ζ)-分离分解。

众所周知，若 $A(\lambda)$ 的特征值彼此分离，则它可以被分块对角化：

引理 *3.9* ([31, 44])。设 $A \in C^\omega_\delta(\Lambda, GL(m,\mathbb{C}))$，且分解 $\Sigma(A(\lambda)) =: \Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda)$ 对于 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$ 是 ν-分离的。若 $\nu < const \cdot |A|_\delta$，其中 *const* 是仅依赖于 m 的常数，则存在 $S \in C^\omega_\delta(\Lambda, GL(m,\mathbb{C}))$，使得对于任意 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$，

$$S^{-1}(\lambda)A(\lambda)S(\lambda) = \mathrm{diag}\{A_{11}(\lambda),\cdots,A_{ll}(\lambda)\},$$

满足 $\Sigma_i(\lambda) = \Sigma(A_{ii}(\lambda))$。此外，我们有以下估计

$$|A_{ii}|_\delta,\ |S|_\delta,\ |S^{-1}|_\delta \le \acute{b}\left(\frac{|A|_\delta}{\nu}\right)^{m^2(m+2)},$$

其中，常数 $\acute{b} > (120m)^{m^2+4m}$ 仅取决于 m。

在本文后续部分，我们将固定 $\acute{b} > (120m)^{m^2+4m}$ 为仅取决于 m 的常数。因此，我们有以下结论：

~命题 *3.1.* 设 $A \in C^\omega_\delta(\Lambda, GL(m,\mathbb{C}))$ 满足 $|A|_\delta \le M$，其中 $M \ge 1$。假设$\Sigma(\lambda) := \Sigma(A(\lambda))$ 在 Λ 上是 (M,δ,c,r)-横截的，且对 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$ 有 $\Sigma(\lambda) \subseteq D(R)$。对任意 $0 < \nu' \le 1$，令

$$\begin{aligned} M' &= (2R)^{m^2}, & \delta' &= \acute{b}^{-1}((R^2\tilde{M})^{-1}\nu')^{3m}\delta,\\ c' &= (\acute{b}R\nu'^{-1}\delta^{-1}\tilde{M})^{-rm^3(m+6)}c, & r' &= r,\\ \zeta' &= 10m\nu', & \tilde{M}' &= \acute{b}(\nu'^{-1}\tilde{M})^{m^2(m+2)}, \end{aligned}$$

其中 $\acute{b} > (120m)^{m^2+4m}$ 是引理 *3.9* 中仅取决于 m 的常数。若 $\nu' <$~常数 $\cdot M$，其中常数 仅取决于 m，则存在一个划分$\Pi = \{\Lambda\}$，其属于 Λ 并满足

$$\#\Pi \le \frac{|\Lambda|}{\delta'} + 1,$$

~使得对于任意 $\lambda \in W_{\delta'}(\Lambda)$，$\Sigma(\lambda)$ 具有分解

$$\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda),$$

[1]回顾一下，对于集合 $\Sigma \subseteq \mathbb{C}$，我们将 diam(Σ) 记为 Σ 的直径。

˜其中 l 仅依赖于 Λ，并满足以下性质：

˜*(1)* 分解 $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda)$ 对所有 $\lambda \in W_{\delta'}(\Lambda)$˜ 均为 (ν', ζ')-分离，且在 Λ 中为 (M', δ', c', r')- 横截。˜*(2)* 存在 $\lambda_0 \in \Lambda$，使得分解 $\Sigma(\lambda_0) = \Sigma_1(\lambda_0) \cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda_0)$ 为˜$(8\nu', \zeta')$-分离。此外，对于任意 $\lambda \in W_{\delta'}(\Lambda)$，$\#\Sigma_i(\lambda) = \#\Sigma_i(\lambda_0)$ 且

$$d_H(\Sigma_i(\lambda), \Sigma_i(\lambda_0)) < \nu'.$$[2]

˜*(3)* 存在 $S \in C^{\omega}_{\delta'}(\Lambda, \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}))$ 使得

$$S^{-1}(\lambda)A(\lambda)S(\lambda) = \mathrm{diag}\{A_{11}(\lambda), \cdots, A_{ll}(\lambda)\},$$

其中 $\Sigma_i(\lambda) = \Sigma(A_{ii}(\lambda))$，且 $|A_{ii}|_{\delta'}, |S|_{\delta'}, |S^{-1}|_{\delta'} \le \tilde{M}'$。

证明。由于 $\Sigma(\lambda) \subseteq D(R)$，对于任意 $u \in \mathbb{T}$，我们有

$$|g(\lambda, u)|_{\delta} \le (2R)^{m^2},$$

并且由引理 3.2，我们还得到 $|\chi_{\Sigma(\lambda)}|_{\delta} \le m!\ R^m$。我们将区间 Λ 划分为 $1 + [\frac{|\Lambda|}{\delta'}]$个长度相等且不超过 δ'的区间。于是有

$$\#\Pi \le 1 + \frac{|\Lambda|}{\delta'} = 1 + \acute{b}(R^2\tilde{M}\nu'^{-1})^{3m}\frac{|\Lambda|}{\delta}.$$

˜现在，对于每个子区间 Λ，我们给出多重集 $\Sigma(\lambda)$ 在 $W_{\delta'}(\Lambda)$ 上的分解。˜固定某个 $\lambda_0 \in \Lambda$，取最大的 $(8\nu', 8m\nu')$-分离分解 $\Sigma(\lambda_0) = \Sigma_1(\lambda_0) \cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda_0)$，并定义

$$\Sigma_i(\lambda) := W_{\nu'}(\Sigma_i(\lambda_0)) \cap \Sigma(\lambda) \subseteq \Sigma(\lambda). \tag{3.7}$$

˜现在，对于任意 $\lambda \in W_{\delta'}(\Lambda)$ 以及 $\zeta \in \Sigma(\lambda)$，由柯西估计和（3.1），我们有

$$\begin{aligned}
\prod_{\sigma \in \Sigma(\lambda_0)} |\sigma - \zeta| &= |\chi_{\Sigma(\lambda_0)}(\zeta) - \chi_{\Sigma(\lambda)}(\zeta)| \\
&\le m \max\{1, |\zeta|^{m-1}\} \cdot |\chi_{\Sigma(\lambda)} - \chi_{\Sigma(\lambda_0)}|_{\delta'} \\
&\le mR^{m-1}|\frac{d}{d\lambda}\chi_{\Sigma(\lambda)}|_{\delta'}|\lambda - \lambda_0| \\
&\le \frac{2mR^{m-1}}{\delta}|\chi_{\Sigma(\lambda)}|_{\delta}|\lambda - \lambda_0| \\
&\le \frac{4m \cdot m!R^{2m-1}\delta'}{\delta} < \nu'^m.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

这说明，对于任意 $\zeta \in \Sigma(\lambda)$，存在 $\sigma \in \Sigma(\lambda_0) = \Sigma_1(\lambda_0) \cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda_0)$，使得 $|\zeta - \sigma| < \nu'$；这意味着，对于某些 $i = 1, \cdots, l$，有 $\zeta \in W_{\nu'}(\Sigma_i(\lambda_0))$，即 $\Sigma(\lambda) \subseteq \Sigma_1(\lambda) \cup \cdots \Sigma_l(\lambda)$。另一方面，$\Sigma(\lambda_0) = \Sigma_1(\lambda_0) \cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda_0)$ 是 $8\nu'$-分离的，这意味着对于 $i \ne j$，有 $\Sigma_i(\lambda) \cap \Sigma_j(\lambda) = \emptyset$。因此，我们得到

$$\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda),$$

˜是任意 $\lambda \in W_{\delta'}(\Lambda)$ 的分解。

[2]我们将 Ω_1,Ω_2 与 Ω_1 Ω_2 之间的豪斯多夫距离记为 d_H。

通过类似的论证，对于任意 $1 \le i \le l$, $\tilde{\sigma} \in \Sigma_i(\lambda_0) \subseteq \Sigma(\lambda_0)$，至少存在一个 $\sigma \in \Sigma(\lambda)$，使得 $|\sigma - \tilde{\sigma}| < \nu'$。根据定义，这仅意味着 $\sigma \in \Sigma_i(\lambda)$，因此$\Sigma_i(\lambda_0) \subseteq W_{\nu'}(\Sigma_i(\lambda))$。结合以下事实： $\Sigma_i(\lambda) \subseteq W_{\nu'}(\Sigma_i(\lambda_0))$，我们得到

$$d_H(\Sigma_i(\lambda), \Sigma_i(\lambda_0)) < \nu'.$$

接下来我们证明，这个分解确实是 $(6\nu', (8m+2)\nu')$-分离的。对于任意 $\lambda_1, \lambda_2 \in W_{\delta'}(\Lambda)$, $\zeta \in \Sigma_i(\lambda_1)$ 和 $\zeta' \in \Sigma_j(\lambda_2)$，存在 $\sigma \in \Sigma_i(\lambda_0)$ 和 $\sigma' \in \Sigma_j(\lambda_0)$，使得$|\zeta - \sigma| < \nu'$, $|\zeta' - \sigma'(\lambda_0)| < \nu'$。那么对于 $i \neq j$，有

$$|\zeta - \zeta'| \ge |\sigma - \sigma'| - |\zeta - \sigma| - |\sigma' - \zeta'| > 6\nu', \tag{3.9}$$

对于 $i = j$，有

$$|\zeta - \zeta'| \le |\sigma - \sigma'| + |\zeta - \sigma| + |\sigma' - \zeta'| < (8m+2)\nu',$$

而且当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时它们也成立。此外，由于 (3.9) 以及 $\Sigma(\lambda)$的连续性，有~$\#\Sigma_i(\lambda) = \#\Sigma_i(\lambda_0)$ 对于任意 $\lambda \in W_{\delta'}(\Lambda)$ 和 $i = 1, \cdots, l$。

有了这些结论，(3) 可直接由引理 3.9 得出，而分解的横截性可由引理 3.8 得出。整个证明至此完成。□

接下来，我们将证明分解的可分性和横截性在具有良好估计的情况下是稳定的：

引理 3.10. 假设

$$A = \mathrm{diag}\{A_{11}, \cdots, A_{ll}\} \in C^\omega_\delta(\Lambda, \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})),$$

$$A' = \mathrm{diag}\{A'_{11}, \cdots, A'_{ll}\} \in C^\omega_\delta(\Lambda, \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})),$$

~其中 A_{ii}, A'_{ii} 是阶数相同的分块矩阵，适用于 $1 \le i \le l$。令 $R, M > 1$。若~$|A|_\delta \le M$, $|A_{ii} - A'_{ii}|_\delta \le \epsilon < 1$, $\Sigma(A(\lambda)) =: \Sigma(\lambda) \subseteq D(R)$ 对于 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$成立，并且

$$64m^2\tilde{M}^2 R\epsilon^{\frac{1}{m}} < 1, \tag{3.10}$$

则有以下结论：

(1) 对任意 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$,

$$d_H(\Sigma_i(\lambda), \Sigma'_i(\lambda)) \le 4m^2\tilde{M}^2\epsilon^{\frac{1}{m}}, \ (\forall 1 \le i \le l), \tag{3.11}$$

where $\Sigma_i(\lambda) := \Sigma(A_{ii}(\lambda))$, *and* $\Sigma'_i(\lambda) := \Sigma(A'_{ii}(\lambda))$. *Consequently,*

$$\Sigma'(\lambda) := \Sigma(A'(\lambda)) \subseteq D(R') \tag{3.12}$$

其中 $R' = R + 8m^2\tilde{M}^2R^2\epsilon^{\frac{1}{m}}$。

(2) 如果 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_l$ 在(ν, ζ)中是-分离的，则 $\Sigma' = \Sigma'_1 \cup \cdots \cup \Sigma'_l$ 在(ν', ζ')中是-分离的，其中

$$\nu' = \nu - 8m^2\tilde{M}^2\epsilon^{\frac{1}{m}}, \quad \zeta' = \zeta + 8m^2\tilde{M}^2\epsilon^{\frac{1}{m}}.$$

(3) 如果分解 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_l$ 在 Λ 上是(M, δ, c, r)-横截的，那么 $\Sigma' = \Sigma'_1 \cup \cdots \cup \Sigma'_l$ 在 Λ 上是(M', δ, c', r)-横截的，其中

$$M' = (2R')^{m^2}, \quad c' = c - 2^{8m}m^{10m^2}R^{3m^2}\tilde{M}^m(\frac{2r}{\delta})^r\epsilon.$$

(4) 对任意 $1 \le i \le l$、 $u \in \mathbb{T}$，有

$$|g_i(\cdot,u) - g_i'(\cdot,u)|_\delta \le 2^{8m} m^{10m^2} R^{3m^2} \tilde{M}^m \epsilon,$$

其中我们记

$$g_i(\lambda,u) = \prod_{\substack{\sigma_{\ell_1},\sigma_{\ell_2} \in \Sigma_i(\lambda) \\ \ell_1 \neq \ell_2}} (\sigma_{\ell_1} - e^{2\pi \mathrm{i} u}\sigma_{\ell_2}), \quad g_i'(\lambda,u) = \prod_{\substack{\sigma_{\ell_1},\sigma_{\ell_2} \in \Sigma_i'(\lambda) \\ \ell_1 \neq \ell_2}} (\sigma_{\ell_1} - e^{2\pi \mathrm{i} u}\sigma_{\ell_2}).$$

˜证明。 由于 $|A_{ii} - A_{ii}'|_\delta \le \epsilon$ 且 $|A_{ii}|_\delta \le M$，由（3.2），可得

$$|\chi_{\Sigma_i'} - \chi_{\Sigma_i}|_\delta \le m!(\tilde{M}+\epsilon)^{m-1}\epsilon. \tag{3.13}$$

为证明（3.11），由对称性，只需证明对于任意 $\sigma' \in \Sigma_i'(\lambda)$，存在$\sigma \in \Sigma_i(\lambda)$ 使得

$$|\sigma - \sigma'| \le 4m^2\tilde{M}^2\epsilon^{\frac{1}{m}}. \tag{3.14}$$

事实上，这可直接由以下估计得出

$$\begin{aligned} |\prod_{\sigma\in\Sigma_i(\lambda)} (\sigma' - \sigma)| &= |\chi_{\Sigma_i(\lambda)}(\sigma') - \chi_{\Sigma_i'(\lambda)}(\sigma')| \\ &\le m \cdot m!(\tilde{M}+\epsilon)^{m-1}\epsilon \max\{1, |\sigma'|^{m-1}\} \\ &\le (4m^2\tilde{M}^2\epsilon^{\frac{1}{m}})^m, \end{aligned}$$

其中第一个不等式由（3.13）成立，第二个不等式成立是因为 $|\sigma'| \le |A'|_\delta \le M + \epsilon$。因此，由（3.10）和（3.14），对于任意 $\sigma' \in \Sigma'(\lambda)$，可得

$$\begin{aligned} |\sigma'| &\le R + 4m^2\tilde{M}^2\epsilon^{\frac{1}{m}} < R' \\ |\sigma'| &\ge \frac{1}{R} - 4m^2\tilde{M}^2\epsilon^{\frac{1}{m}} > \frac{1}{R(1+8m^2\tilde{M}^2R\epsilon^{\frac{1}{m}})} = \frac{1}{R'}, \end{aligned}$$

这只意味着 $\Sigma'(\lambda) \subseteq D(R')$。由此完成了 **(1)** 的证明，而 **(2)** 由 (3.11) 直接推出。

现在我们将证明 **(3)** 和 **(4)**。为方便起见，记 $\chi_i = \chi_{\Sigma_i}$ 和 $\chi_i' = \chi_{\Sigma_i'}$。由于对于 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$ 以及任意 $1 \le i \le l$, $\Sigma_i(\lambda) \subseteq D(R)$，由引理 3.2，可得

$$|\chi_i|_\delta \le m! R^m. \tag{3.15}$$

对于任意 $i,j \in \{1,2,\dots,l\}$ 以及任意 $u \in \mathbb{T}$，由 (3.12) 可得

$$|\mathrm{Res}(\chi_i',\chi_j';u)|_\delta = \sup_{\lambda\in W_\delta(\Lambda)} \prod_{\sigma_{k_1}\in\Sigma_i'(\lambda),\sigma_{k_2}\in\Sigma_j'(\lambda)} |\sigma_{k_1} - e^{2\pi \mathrm{i} u}\sigma_{k_2}| \le (2R')^{m^2}. \tag{3.16}$$

此外，由引理 3.1和（3.13）、（3.15），我们有

$$\begin{aligned} &|\mathrm{Res}(\chi_i',\chi_j';u) - \mathrm{Res}(\chi_i,\chi_j;u)|_\delta \\ &\le (2m+1)!(1+|\chi_i|_\delta)^m(1+|\chi_j|_\delta)^m \max\{|\chi_i - \chi_i'|_\delta, |\chi_j - \chi_j'|_\delta\} \\ &\le (2m+1)!(1+m!R^m)^{2m} m!(\tilde{M}+\epsilon)^{m-1}\epsilon \\ &\le 2^{8m} m^{6m^2} R^{2m^2} \tilde{M}^m \epsilon. \end{aligned} \tag{3.17}$$

于是，对于任意的 $\lambda\in W_{\frac{\delta}{2}}(\Lambda)$ 和任意的 $\ell\in\{0,1,\dots,r\}$，这意味着

$$\begin{aligned}|\partial_\lambda^\ell \mathrm{Res}(\chi_i',\chi_j';u)| &\geq |\partial_\lambda^\ell \mathrm{Res}(\chi_i,\chi_j;u)| - |\partial_\lambda^\ell(\mathrm{Res}(\chi_i',\chi_j';u)-\mathrm{Res}(\chi_i,\chi_j;u))|\\ &\geq |\partial_\lambda^\ell \mathrm{Res}(\chi_i,\chi_j;u)| - r!(\frac{2}{\delta})^r\cdot 2^{8m}m^{6m^2}R^{2m^2}\tilde{M}^m\epsilon.\end{aligned}$$

根据假设，对于 $i\neq j$，结果式$(\chi_i,\chi_j;\,u)$ 在 Λ 上是(M,δ,c,r)-横截的，因此对于 $\lambda\in W_{\frac{\delta}{2}}(\Lambda)\cap\mathbb{R}$,

$$\sup_{0\leq\ell\leq r}|\partial_\lambda^\ell \mathrm{Res}(\chi_i',\chi_j';u)|\geq c - r!(\frac{2}{\delta})^r\cdot 2^{8m}m^{6m^2}R^{2m^2}\tilde{M}^m\epsilon\geq c'.$$

结合(3.16)，我们得到结果式$(\chi_i',\chi_j';\,u)$ 对于 $i\neq j$ 在 Λ 上是(M',δ,c',r)-横截的。接下来只需证明 $\Sigma_i(\lambda)$和(4)的横截性。首先，由(3.12)，我们有$|g_i'(\lambda,u)|_\delta\leq(2R')^{m^2}$. 现在记 $m_i:=\#\Sigma_i=\#\Sigma_i'$。

Case a: $u\in\mathbb{Z}$。根据(3.3)，引理3.1 和引理3.2，对于任意 $\lambda\in W_\delta(\Lambda)$,

$$\begin{aligned}|g_i(\lambda,u)-g_i'(\lambda,u)| &= |\mathrm{Res}(\chi_i,\frac{\partial\chi_i}{\partial X})-\mathrm{Res}(\chi_i',\frac{\partial\chi_i'}{\partial X})|\\ &\leq (2m_i)!(1+|\chi_i|_\delta)^{m_i-1}(1+|\frac{\partial\chi_i}{\partial X}|_\delta)^{m_i}m_i|\chi_i-\chi_i'|_\delta\\ &\leq (2m)!(1+m\cdot m!R^m)^{2m-1}m\cdot m!(\tilde{M}+\epsilon)^{m-1}\epsilon\\ &< 2^{8m}m^{10m^2}R^{2m^2}\tilde{M}^m\epsilon.\end{aligned}$$

情形 b: $u\in\mathbb{T}\backslash\mathbb{Z}$。记

$$f_i(\lambda,u):=\frac{\mathrm{Res}(\chi_i(\lambda),\chi_i(\lambda);u)}{(1-e^{2\pi iu})^{m_i}},\quad f_i'(\lambda,u):=\frac{\mathrm{Res}(\chi_i'(\lambda),\chi_i'(\lambda);u)}{(1-e^{2\pi iu})^{m_i}}.$$

由引理 3.4、引理 3.1和引理 3.2，对于任意 $\lambda\in W_\delta(\Lambda)$，有

$$\begin{aligned}|f_i(\lambda,u)-f_i'(\lambda,u)| &= |\mathrm{Res}(\chi_i(\lambda),\tilde{\chi}_{i,u}(\lambda))-\mathrm{Res}(\chi_i'(\lambda),\tilde{\chi}_{i,u}'(\lambda))|\\ &\leq (2m)!(1+|\chi_i|_\delta)^m(1+|\tilde{\chi}_{i,u}|_\delta)^m\max\{|\chi_i-\chi_i'|_\delta,|\tilde{\chi}_i-\tilde{\chi}_{i,u}'|_\delta\}\\ &\leq (2m)!(1+(m+1)!R^m)^{2m}(m+1)!(\tilde{M}+\epsilon)^{m-1}\epsilon\\ &< 2^{7m}m^{2m^2+6m}R^{2m^2}\tilde{M}^{m-1}\epsilon.\end{aligned}$$

根据（3.4），可得对于任意 $\lambda\in W_\delta(\Lambda)$

$$\begin{aligned}|g_i(\lambda,u)-g_i'(\lambda,u)| &\leq \frac{1}{|\det A_{ii}|}|f_i(\lambda,z)-f_i'(\lambda,z)|+\left|\frac{\det A_{ii}'-\det A_{ii}}{\det A_{ii}}\right||g_i'(\lambda,u)|\\ &\leq R^m|f_i(\lambda,z)-f_i'(\lambda,z)|+R^m|\chi_i-\chi_i'|_\delta(2R')^{m^2}\\ &\leq 2^{8m}m^{8m^2}R^{3m^2}\tilde{M}^m\epsilon.\end{aligned}$$

于是，在两种情形下（4）均成立。此外，在两种情形下，对于任意$\lambda\in W_{\frac{\delta}{2}}(\Lambda)\cap\mathbb{R}$ 以及任意 $\ell\in\{0,1,\dots,r\}$，我们可以得到

$$\begin{aligned}|\partial_\lambda^\ell g_i'(\lambda,u)| &\geq |\partial_\lambda^\ell g_i(\lambda,u)|-|\partial_\lambda^\ell(g_i'(\lambda,u)-g_i(\lambda,u))|\\ &\geq |\partial_\lambda^\ell g_i(\lambda,u)|-r!(\frac{2}{\delta})^r\cdot 2^{8m}m^{10m^2}R^{3m^2}\tilde{M}^m\epsilon,\end{aligned}$$

这意味着 $\sup_{0\leq\ell\leq r}|\partial_\lambda^\ell g_i'(\lambda,u)|\geq c'$. 因此，$\Sigma'=\Sigma_1'\cup\cdots\cup\Sigma_l'$在 Λ 上是 (M',δ,c',r)-横截的，从而完成了证明。

□

4. 关键迭代步骤

本节将证明分层定量几乎约化的关键 KAM迭代步骤。

4.1. **共振的结构。** 在本小节中，我们始终假设 $l \le m$，其中l 是多重集 $\{\Sigma_i\}$的数量。现在我们给出两个集合之间共振和非共振的定义。

定义 4.1。 固定 N，$\varsigma > 0$。如果存在 $\sigma_1 \in \Sigma_1$ 和 $\sigma_2 \in \Sigma_2$，使得对于某个 $|k| \le N$，则称两个不同的多重集 Σ_1 和 Σ_2 是（N，ς）-共振的：

$$|\sigma_1 - e^{2\pi \mathrm{i}\langle k,\alpha\rangle}\sigma_2| < \varsigma. \tag{4.1}$$

如果这样的 k 是唯一的，则称 Σ_1 和 Σ_2 是具有唯一 k 的（N，ς）-共振的，并将 k 称为 Σ_1 和 Σ_2 之间的共振整数。如果不存在这样的 k，则称 Σ_1 和 Σ_2 是（N，ς）-非共振的。此外，如果对于任意 σ_1、$\sigma_2 \in \Sigma$ 和 $0 < |k| \le N$，式（*4.1*）均不成立，则称多重集 Σ 是（N，ς）-非共振的。

显然，如果 k 是 Σ_1 和 Σ_2之间的共振整数，那么 $-k$ 就是 Σ_2 和 Σ_1之间的共振整数。

在介绍共振的结构之前，我们先引入以下记号以便使用。

定义 4.2. 设 $0 < N \le N'$, $K > 0$。我们称分解

$$\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda)$$

在 $W_\delta(\Lambda)$ 上满足 $\mathcal{H}(N, N', K)$，如果 $\{1, \cdots, l\}$ 可以分解为不交并：

$$\{1, \cdots, l\} = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{\tilde{l}},$$

并且满足以下条件：
(a) 对任意 $i \in \{1, 2, \cdots, l\}$，$\Sigma_i(\lambda)$ 都是 $(N', (2K)^{-1})$-非共振的。*(b)* 对所有 λ，$\Sigma_i(\lambda)$、$\Sigma_j(\lambda)$ 都是 $(mN', 2mK^{-1})$-共振的，且具有相同的唯一 k_{ij}，其中$|k_{ij}| \le mN$，如果 i、$j \in S_{l_1}$ 满足 $i \ne j$。*(c)* 如果 i、j、$s \in S_{l_1}$ 各不相同，则 $k_{ij} + k_{js} = k_{is}$。*(d)* 如果 $i \in S_{l_1}$、$j \in S_{l_2}$ 满足 $l_1 \ne l_2$，则 $\Sigma_i(\lambda)$、$\Sigma_j(\lambda)$ 都是 $(N', (2K)^{-1})$-非共振的。

对于 $N \in \mathbb{N}$、$j \in \mathbb{N}_0$ 和 $a > 1$，令 $N_j = a^j N$。基本观察是，如果分解是分离的，那么该分解本质上将满足某个 $\mathcal{H}(N, N', K)$ 条件。精确结果如下：

引理 4.1. 设 $\alpha \in \mathrm{DC}_d(\gamma, \tau)$. 假设分解 $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda)$是$(\nu, \zeta)$-分离的，且 $\Sigma(\lambda) \subseteq D(R)$ 对于 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$成立，并且可以找到 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使得

$$d_H(\Sigma_i(\lambda), \Sigma_i(\lambda_0)) < \nu', \tag{4.2}$$

$\#\Sigma_i(\lambda) = \#\Sigma_i(\lambda_0)$ 对于 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$成立。则该分解满足 $\mathcal{H}(N_p, N_{p+1}, K)$ 属于$W_\delta(\Lambda)$，其中 $p \in [0, m]$ 为某个整数，若

$$8m\nu' < 8m\zeta < mK^{-1} < \frac{\gamma}{10R(3mN_{m+1})^\tau}. \tag{4.3}$$

证明。我们首先检查 (a)。对于任意 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$、$i \in \{1,\cdots,l\}$、$\sigma_1$、$\sigma_2 \in \Sigma_i(\lambda)$，由于 $\alpha \in DC_d(\gamma,\tau)$，$\Sigma(\lambda) \subseteq D(R)$，且该分解是 (ν,ζ)-分离的，因此对于 $0<|k|\leq mN_{m+1}$，我们有

$$\begin{aligned}|\sigma_1 - e^{2\pi \mathrm{i}\langle k,\alpha\rangle}\sigma_2| &\geq |\sigma_2||1-e^{2\pi \mathrm{i}\langle k,\alpha\rangle}| - |\sigma_1-\sigma_2| \\ &\geq \frac{\gamma}{2R(mN_{m+1})^\tau} - \zeta > K^{-1}.\end{aligned}$$

这仅表示，对于任意 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$，$\Sigma_i(\lambda)$ 与自身是 (mN_{m+1},K^{-1})-非共振的。

要验证 (b)-(d)，我们首先需要以下观察：

命题 1. 对于任意 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$，若 $i \neq j$ *and* $\Sigma_i(\lambda)$，$\Sigma_j(\lambda)$ 是$(mN_{m+1},2mK^{-1})$-共振的，那么它们与唯一的 $|k|\leq mN_{m+1}$ 共振。

证明. 若存在 $\sigma_1,\sigma_1' \in \Sigma_i(\lambda)$，$\sigma_2,\sigma_2' \in \Sigma_j(\lambda)$ 以及互不相同的 $|k_1|,|k_2| \leq mN_{m+1}$，使得

$$|\sigma_1 - e^{2\pi \mathrm{i}\langle k_1,\alpha\rangle}\sigma_2|, |\sigma_1' - e^{2\pi \mathrm{i}\langle k_2,\alpha\rangle}\sigma_2'| < 2mK^{-1},$$

那么我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{2R|k_1-k_2|^\tau} &< |\sigma_2 e^{2\pi \mathrm{i}\langle k_1-k_2,\alpha\rangle} - \sigma_2| \leq |\sigma_1 - e^{2\pi \mathrm{i}\langle k_1,\alpha\rangle}\sigma_2| \\ &\quad + |\sigma_1-\sigma_1'| + |\sigma_1' - e^{2\pi \mathrm{i}\langle k_2,\alpha\rangle}\sigma_2'| + |\sigma_2'-\sigma_2| < 4mK^{-1} + 2\zeta.\end{aligned}$$

这与（4.3）矛盾。 □

现在，为方便起见，我们用 Σ_i 表示 $\Sigma_i(\lambda_0)$，并根据 λ_0 对集合 $\{1,\cdots,l\}$ 进行划分。首先，我们需要引入两个概念：(L,η)-连通和极大(L,η)-连通分支。对于 L，$\eta>0$，如果存在一条长度为 t 的(L,η)-共振路径，则称 Σ_i,Σ_j 是(L,η)-连通的：

$$\Sigma_{i_0},\Sigma_{i_1},\cdots,\Sigma_{i_t}, \quad \text{with } i_0=i, i_t=j,$$

使得$(\Sigma_{i_0},\Sigma_{i_1})$、$(\Sigma_{i_1},\Sigma_{i_2})$、$\cdots$、$(\Sigma_{i_{t-1}},\Sigma_{i_t})$ 均为(L,η)-共振。注意，如果 Σ_i，Σ_j 是长度为 t 的(L,η)-连通的，那么它们就是$(tL,t\eta+(t-1)\zeta)$-共振的。此外，如果 Σ_i,Σ_j 和 Σ_j,Σ_s 均为(L,η)-连通的，那么 Σ_i,Σ_s 也(L,η)-连通。设 $S:=\{1,\cdots,l\}$。如果集合 $S'\subset S$ 满足以下条件，则称其为 S 的极大(L,η)-连通分支：

1) 对于所有满足 $i\neq j$ 的 $i,j\in S'$，我们有 Σ_i,Σ_j 是(L,η)-连通的。2) 对于所有 $i\in S'$ 和 $j\notin S'$，Σ_i,Σ_j 都不是(L,η)-连通的。

让我们完成证明。我们将 S 划分为 ℓ_i 个极大(N_i,K^{-1})-连通分支，其中 $0\leq i\leq l$。注意，如果 S' 是一个极大(N_i,K^{-1})-连通分支，那么存在某个极大(N_{i+1},K^{-1})-连通分支 $\tilde{S}$，使得 $S'\subset\tilde{S}$。因此我们有$\ell_{i+1}\leq\ell_i$。结合 $1\leq\ell_i\leq l$，存在 p，满足 $0\leq p\leq l$，使得 $\ell_p=\ell_{p+1}$。我们令$\{S_i\}_{i=1}^l$ 为极大(N_p,K^{-1})-连通分支。于是得到如下结果：

(1) 若 i，j且 $i\neq j$属于同一个子集 S_{l_1}，则 Σ_i，Σ_j彼此(N_p,K^{-1})-连通，因此$(mN_p,mK^{-1}+(m-1)\zeta)$-共振，且对应唯一的 k_{ij}，其唯一性由断言 1得出。于是存在 $\sigma_1\in\Sigma_i$，$\sigma_2\in\Sigma_j$ 使得

$$|\sigma_1 - e^{2\pi \mathrm{i}\langle k_{ij},\alpha\rangle}\sigma_2| < mK^{-1}+(m-1)\zeta.$$

显然 $k_{ji}=-k_{ij}$。对于任意 $\lambda\in W_\delta(\Lambda)$，根据（4.2），存在 $\tilde\sigma_1\in\Sigma_i(\lambda)$ $\tilde\sigma_2\in\Sigma_j(\lambda)$，使得 $|\sigma_1-\tilde\sigma_1|$，$|\sigma_2-\tilde\sigma_2|<\nu'$，因此

$$|\tilde\sigma_1-e^{2\pi\mathrm{i}\langle k_{ij},\alpha\rangle}\tilde\sigma_2|<mK^{-1}+(m+1)\zeta<2mK^{-1}.$$

因此，再次根据命题 1，我们有 $\Sigma_i(\lambda)$ 和 $\Sigma_j(\lambda)$ 对于所有 $(mN_{m+1},2mK^{-1})$，均共振，且对应相同的唯一 k_{ij}，其中 $\lambda\in W_\delta(\Lambda)$，且 $|k_{ij}|\le mN_p$。我们已在 b中验证了（$\mathcal{H}(N_p,\ N_{p+1},\ K)$。

(2) 若互不相同的 i、j、s 属于同一子集 S_{l_1}，则 Σ_i、Σ_j 和 Σ_s 两两共振，参数为（mN_p，$mK^{-1}+(m-1)\zeta$），相应的共振项分别为 k_{ij}、k_{js}、k_{si}。这意味着存在 σ_i、$\sigma_i'\in\Sigma_i$、σ_j、$\sigma_j'\in\Sigma_j$ 以及 σ_s、$\sigma_s'\in\Sigma_s$，使得

$$\begin{aligned}|\sigma_i-e^{2\pi\mathrm{i}\langle k_{ij},\alpha\rangle}\sigma_j'|&<mK^{-1}+(m-1)\zeta,\\|\sigma_j-e^{2\pi\mathrm{i}\langle k_{js},\alpha\rangle}\sigma_s'|&<mK^{-1}+(m-1)\zeta,\\|\sigma_s-e^{2\pi\mathrm{i}\langle k_{si},\alpha\rangle}\sigma_i'|&<mK^{-1}+(m-1)\zeta,\end{aligned}$$

对于 $|k_{ij}|,|k_{js}|,|k_{si}|\le mN_p$。因此，如果 $k_{ij}+k_{js}+k_{si}\neq0$，则有

$$\frac{\gamma}{2R|k_{ij}+k_{js}+k_{si}|^\tau}\le|\sigma_i(1-e^{2\pi\mathrm{i}\langle k_{ij}+k_{js}+k_{si},\alpha\rangle})|\le3m(K^{-1}+\zeta).$$

这与我们的假设（4.3）相矛盾，并且我们验证了（c）在 $\mathcal{H}$（N_p，N_{p+1}，K）。

(3) 若 $i\in S_{l_1}$，$j\in S_{l_2}$，即 i,j 属于不同子集，则 Σ_i,Σ_j 不 (N_{p+1},K^{-1})-连通。特别地，它们是 (N_{p+1},K^{-1})-非共振的。对于任意 $\lambda\in W_\delta(\Lambda)$，$\tilde\sigma_i\in\Sigma_i(\lambda)$，$\tilde\sigma_j\in\Sigma_j(\lambda)$，由 (4.2) 可知，存在 $\sigma_i\in\Sigma_i$，$\sigma_j\in\Sigma_j$，使得 $|\sigma_i-\tilde\sigma_i|,|\sigma_j-\tilde\sigma_j|<\nu'$。那么对于 $|k|\le N_{p+1}$，有

$$|\tilde\sigma_i-e^{2\pi\mathrm{i}\langle k,\alpha\rangle}\tilde\sigma_j|\ge K^{-1}-2\nu'>(2K)^{-1}.$$

这意味着，对于任意 $\lambda\in W_\delta(\Lambda)$，$\Sigma_i(\lambda)$ $\Sigma_j(\lambda)$ 都是 $(N_{p+1},(2K)^{-1})$-非共振的，并验证了 $\mathcal{H}(N_p,N_{p+1},K)$ 中的 (d)。证明至此完成。□

4.2. **消除非共振项。** 给定 h、δ、$\eta>0$、$\alpha\in\mathbb{R}^d$，以及 $A\in C^\omega_\delta(\Lambda,\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$，我们将 $C^\omega_{h,\delta}(\mathbb{T}^d\times\Lambda,gl(m,\mathbb{C}))=:\mathcal{B}_{h,\delta}=\mathcal{B}^{(nre)}_{h,\delta}(\eta)\oplus\mathcal{B}^{(re)}_{h,\delta}(\eta)$（依赖于 A、α、η）分解为如下形式，使得对于任意 $Y\in\mathcal{B}^{(nre)}_{h,\delta}(\eta)$，我们有

$$AY,Y^+A\in\mathcal{B}^{(nre)}_{h,\delta},\quad|AY-Y^+A|_{h,\delta}\ge\eta|Y|_{h,\delta},\tag{4.4}$$

这里及下文中，我们用 Y^+ 表示函数 $Y(\cdot+\alpha)$。此外，我们将 $\mathbb{P}_{nre}$ 和 $\mathbb{P}_{re}$ 分别记为从 $\mathcal{B}_{h,\delta}$ 到 $\mathcal{B}^{(nre)}_{h,\delta}(\eta)$ 和 $\mathcal{B}^{(re)}_{h,\delta}(\eta)$ 的标准投影算子。对于任意 $N>0$，我们定义作用在 $C^\omega_{h,\delta}(\mathbb{T}^d\times\Lambda,gl(m,\mathbb{C}))$ 上的截断算子 $\mathcal{T}_N$，如下：

$$(\mathcal{T}_Nf)(\theta,\lambda)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d,|k|\le N}\hat F(k,\lambda)e^{2\pi\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle},$$

以及 $\mathcal{R}_N$在 $C^\omega_{h,\ \delta}(\mathbb{T}^d\times\Lambda,gl(m,\mathbb{C}))$ 作为

$$(\mathcal{R}_Nf)(\theta,\lambda)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d,|k|>N}\hat F(k,\lambda)e^{2\pi\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}.$$

此外，我们在后文中假设 $a \geq m$ 。

使用上述记号，我们可以应用定量隐函数定理[20] 得到以下结果：

引理 4.2 ([20])。 假设 $\epsilon < (4\max\{1,|A|_\delta\})^{-4}$ 且 $\eta \geq 48\max\{1,|A|_\delta\}\epsilon^{1/2}$。那么，对任意 $F \in \mathcal{B}_{h,\delta}$，若满足 $|F|_{h,\delta} \leq \epsilon$，则存在 $Y \in \mathcal{B}_{h,\delta}$ 以及 $F^{(re)} \in \mathcal{B}^{(re)}_{h\,\delta}{}_{,}(\eta)$ 使得

$$e^{-Y^+}(A+F)e^{Y} = A + F^{(re)},$$

其中 $|Y|_{h,\delta} \leq \epsilon^{1/2}$ 以及 $|F^{(re)}|_{h,\delta} \leq 3\epsilon\max\{1,|A|_\delta\}$。

于是可以证明如下结论：

˜命题 *4.1.* 给定 $N, K, M > 1, a \geq 1, h > h' > 0$，假设 $\alpha \in DC_d(\gamma,\tau)$、$A \in C^\omega_\delta(\Lambda, GL(m,\mathbb{C}))$、$A(\lambda) = diag\{A_{11}(\lambda)\cdots、A_{ll}(\lambda)\}$ 以及 $|A|_\delta < M$。令 $\Sigma(\lambda) := \Sigma(A(\lambda))$、$\Sigma_i(\lambda) := \Sigma(A_{ii}(\lambda))$。设分解

$$\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda)$$

$_S$满足 $\mathcal{H}(N, aN, K)$ 于 $W_\delta(\Lambda)$。那么对于任意满足以下条件的 $F \in C^\omega_{h,\delta}(\mathbb{T}^d \times \Lambda, gl(m,\mathbb{C}))$

$$|F|_{h,\delta} \leq \epsilon < (12m^5\tilde{M}^2K)^{-2m^2},$$

存在 $Y, f^{(re)}, F' \in C^\omega_{h,\delta}(\mathbb{T}^d \times \Lambda, gl(m,\mathbb{C}))$，使得

$$\begin{aligned} e^{-Y(\cdot+\alpha)}(A+F(\cdot))e^{Y(\cdot)} &= A' + f^{(re)}(\cdot) + F'(\cdot) \\ &= \mathrm{diag}\{A'_{11},\cdots,A'_{ll}\} + f^{(re)}(\cdot) + F'(\cdot) \end{aligned} \tag{4.5}$$

并满足以下估计：

$$\begin{aligned} &|A_{ii} - A'_{ii}|_\delta \leq 3\tilde{M}\epsilon, \qquad &&|F'|_{h',\delta} \leq 3\tilde{M}e^{-2\pi(h-h')aN}\epsilon, \\ &|Y|_{h,\delta} \leq \epsilon^{1/2}, &&|f^{(re)}|_{h,\delta} \leq 3\tilde{M}\epsilon. \end{aligned}$$

此外，将 $f^{(re)}$ 视为与 A具有相同划分的分块矩阵，我们有 $f^{(re)\,ij}(\theta) = \hat{f}^{(re)\,ij}(k_{ij})e^{2\pi\mathrm{i}\langle k_{ij},\theta\rangle}$，其中 k_{ij} 是由 $\mathcal{H}(N, aN, K)$ 定义的、介于 $\Sigma_i(\lambda)$ 和 $\Sigma_j(\lambda)$ 之间的共振整数，且满足 $|k_{ij}| \leq mN$；若 Σ_i和 Σ_j是非共振的，或者 $i = j$，则 $f^{(re)\,ij}(\theta) \equiv 0$。

证明。 下文中，我们将这些矩阵视为具有与A相同划分的分块矩阵。由于 $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda)$ 满足 $\mathcal{H}(N, aN, K)$ 对于 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$成立，因此集合$\{1,\cdots,l\}$ 可以划分为以下不交并：

$$\{1,\cdots,l\} = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{\tilde{l}},$$

其中性质 (a) –(d) 成立。令

$$\mathcal{B}^1_{h,\delta} = \left\{ G \in C^\omega_{h,\delta}(\mathbb{T}^d \times \Lambda, gl(m,\mathbb{C})) : \begin{array}{l} G = (G_{ij})_{1\leq i,j\leq l},\ \mathcal{R}_{aN}G = 0; \hat{G}_{ii}(0) = 0; \hat{G}_{ij}(k_{ij}) = 0 \\ \text{if } i \neq j \text{ belong to the same } S_{l_1} \text{for some } 1 \leq l_1 \leq \tilde{l} \end{array} \right\}.$$

断言 2。 我们有 $\mathcal{B}^1_{h,\ \delta} \subseteq \mathcal{B}^{(nre)}_{h\,\delta}$ ，(η) ，其中 $\eta = 48\tilde{M}\epsilon^{1/2}$。

证明。 对于任意 $G \in \mathcal{B}^1_{h,\ \delta}$，可以验证 $AG = (A_{ii}G_{ij})_{1\le i,\ j\le l} \in \mathcal{B}^1_{h,\ \delta}$，$G^+A = (G^+_{ij}A_{jj})_{1\le i,\ j\le l} \in \mathcal{B}^1_{h,\ \delta}$。假设

$$AG - G^+A = H \in \mathcal{B}^1_{h,\delta}.$$

根据 (i,j) 阶矩阵块的傅里叶展开，对于任意 $\lambda \in W_\delta(\Lambda), 1 \le i,j \le l, |k| \le aN$,

$$A_{ii}(\lambda)\hat{G}_{ij}(k,\lambda) - \hat{G}_{ij}(k,\lambda)\cdot e^{2\pi \mathrm{i}\langle k,\alpha\rangle}A_{jj}(\lambda) = \hat{H}_{ij}(k,\lambda).$$

Let

$$L_{ij}(k;\lambda) = \mathrm{Id}\otimes A_{ii}(\lambda) - e^{2\pi \mathrm{i}\langle k,\alpha\rangle}(A_{jj}(\lambda))^T \otimes \mathrm{Id},$$

ˆˆ 其中 $\otimes$ 表示矩阵之间的克罗内克积。若将 $G_{ij}(k,\lambda)$ 和 $H_{ij}(k,\lambda)$ 视为向量，则

$$\hat{G}_{ij}(k,\lambda) = L^{-1}_{ij}(k;\lambda)\hat{H}_{ij}(k,\lambda).$$

˜若对于某个 $1 \le l_1 \le l$，$i \ne j$ 属于同一子集 S_{l_1}，则对于 $k \ne k_{ij}, |k| \le aN$，有

$$\begin{aligned} \|L^{-1}_{ij}(k;\lambda)\| &\le \frac{(m^2\|L_{ij}(k;\lambda)\|)^{m^2}}{\inf_{\lambda\in W_\delta(\Lambda)}|\det L_{ij}(k;\lambda)|} \\ &= \frac{(m^2\|L_{ij}(k;\lambda)\|)^{m^2}}{\inf_{\lambda\in W_\delta(\Lambda)}|\mathrm{Res}(\chi_{\Sigma_i}(\lambda),\chi_{\Sigma_j}(\lambda);\langle k,\alpha\rangle)|} \\ &\le \frac{(2m^4\tilde{M})^{m^2}}{K^{-m^2}} = (2m^4\tilde{M}K)^{m^2}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

其中，该不等式由 $\mathcal{H}(N,aN,K)$ 的性质 (b) 得出，即 $\Sigma_i(\lambda)$ 和 $\Sigma_j(\lambda)$ 与同一共振项 k_{ij} 是 $(maN, 2mK^{-1})$-共振的。

若 $i \ne j$ 属于不同子集 S_{l_1}, S_{l_2}，类似地，根据 $\mathcal{H}(N,aN,K)$ 的性质 (d)，对于任意 $|k| \le aN$，可得

$$\|L^{-1}_{ij}(k;\lambda)\| \le (4m^4\tilde{M}K)^{m^2}.$$

若 $i = j$，根据 $\mathcal{H}(N,aN,K)$ 的性质（a），则对于 $0 < |k| \le aN$，我们也可以得到

$$\|L^{-1}_{ij}(k;\lambda)\| \le (4m^4\tilde{M}K)^{m^2}.$$

由于 $G, H \in \mathcal{B}^1_{h,\ \delta}$，因此对于任意 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$，我们有

$$|G_{ij}(\lambda)|_h = \sum_{|k|\le aN}\|\hat{G}_{ij}(k,\lambda)\|e^{2\pi|k|h} \le (4m^4\tilde{M}K)^{m^2}|H_{ij}(\lambda)|_h,$$

因此

$$|G|_{h,\delta} \le m(4m^4\tilde{M}K)^{m^2}|H|_{h,\delta} < \frac{1}{48\tilde{M}\epsilon^{1/2}}|H|_{h,\delta},$$

这意味着

$$|AG - G^+A|_{h,\delta} \ge 48\tilde{M}\epsilon^{1/2}|G|_{h,\delta}.$$

因此，我们有 $\mathcal{B}^1_{h,\ \delta} \subseteq \mathcal{B}^{(nre)}_{h\ \delta}$，$(\eta)$，其中 $\eta = 48\tilde{M}\epsilon^{1/2}$。 □

应用引理 4.2，存在 $Y \in C^{\omega}_{h,\ \delta}(\mathbb{T}^d \times \Lambda, gl(m,\mathbb{C}))$ 和 $F^{(re)} \in \mathcal{B}^{(re)}_{h\ \delta}$，$(\eta)$，使得

$$e^{-Y^+}(A+F)e^{Y} = A + F^{(re)},$$

其中 $|Y|_{h,\ \delta} \le \epsilon^{1/2}$，$|F_{(re)}|_{h,\ \delta} \le 3\tilde{M}\epsilon$。然后根据命题 2，对于 $1 \le i \le l$，

$$\mathcal{T}_{aN} F^{(re)}_{ii}(\theta) = \hat{F}^{(re)}_{ii}(0),$$

且如果 $i \ne j$ 属于同一个 S_{l_1}，那么

$$\mathcal{T}_{aN} F^{(re)}_{ij}(\theta) = \hat{F}^{(re)}_{ij}(k_{ij}) e^{2\pi \mathrm{i}\langle k_{ij},\theta\rangle};$$

否则，$\mathcal{T}_{aN} F_{(re)\,ij}(\theta) \equiv 0$。

最后令 $F' := \mathcal{R}_{aN} F_{(re)}$，并且

$$\begin{aligned} A' &:= A + \mathrm{diag}\{\hat{F}^{(re)}_{11}(0), \cdots, \hat{F}^{(re)}_{ll}(0)\}, \\ f^{(re)} &:= \mathcal{T}_{aN} F^{(re)} - \mathrm{diag}\{\hat{F}^{(re)}_{11}(0), \cdots, \hat{F}^{(re)}_{ll}(0)\}. \end{aligned}$$

然后可以计算

$$\begin{aligned} |F'|_{h',\delta} &= \sup_{\lambda \in W_\delta(\Lambda)} \sum_{|k|>aN} \|\hat{F}^{(re)}(k,\lambda)\| e^{2\pi|k|h'} \\ &\le \sup_{\lambda \in W_\delta(\Lambda)} e^{-2\pi aN(h-h')} \sum_{|k|>aN} \|\hat{F}^{(re)}(k,\lambda)\| e^{2\pi|k|h} \\ &\le 3\tilde{M} e^{-2\pi aN(h-h')}\epsilon. \end{aligned}$$

我们完成整个证明。 □

4.3. 消除共振。

引理 4.3. 设 $A' \in C^{\omega}_{\delta}(\Lambda, \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$, $f^{(re)} \in C^{\omega}_{h,\delta}(\mathbb{T}^d \times \Lambda, gl(m,\mathbb{C}))$，其中 e

$$A'(\lambda) = \mathrm{diag}\{A'_{11}(\lambda), \cdots, A'_{ll}(\lambda)\}$$

对于 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$，，将 $f^{(re)}$ 视为具有与 A' 相同分块划分的分块矩阵。假设存在 $\{1,\cdots,l\}$ 的一个不交划分

$$\{1,\cdots,l\} = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{\tilde{l}},$$

使得以下条件成立：

a) 若 $i,j \in S_{l_1}$ 且满足 $i \ne j$，则存在唯一的 k_{ij}，使得 $\hat{f}^{(re)}_{ij}(k) = 0$ 对于 $k \ne k_{ij}$，并且我们有 $k_{ij} + k_{ji} = 0$。*b)* 如果 i、j 和 t 互不相同且属于同一子集 S_{l_1}，则有 $k_{ij} + k_{jt} = k_{it}$。*c)* 如果 $i = j$，那么对于任意 k，$\hat{f}^{(re)}_{ij}(k) = 0$，并记作 $k_{ii} = 0$。*d)* 如果 $i \in S_{l_1}$、$j \in S_{l_2}$ 满足 $l_1 \ne l_2$，那么对于任意 k，$\hat{f}_{(re)\,ij}(k) = 0$，并记作 $k_{ij} = 0$。于是存在 $H \in C^{\omega}_{h}(\mathbb{T}^d, GL(m,\mathbb{C}))$，且与 λ 无关，使得

$$H^{-1}(\cdot+\alpha)(A' + f^{(re)})H(\cdot) = A''.$$

其中 $|H|_h, |H^{-1}|_h \le \max_{1\le i,j\le l}\{e^{2\pi|k_{ij}|h}\}$，$A'' \in C^{\omega}_{\delta}(\Lambda, \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$，$|A''_{ij}|_\delta = |\hat{f}_{(re)\,ij}(k_{ij})|_\delta$对于 $i \ne j$，并且对于 $1 \le i \le l$，$A''_{ii} = e^{-2\pi \mathrm{i}\langle k_{ij},\alpha\rangle} A'_{ii}$ 存在某个 j，它与 i属于同一个子集S_{l_1}。

证明。 对于每个 $1 \le i \le l$ 我们都可以找到 $S_{m(i)}$ 使得 $i \in S_{m(i)}$。令

$$n(i) = \min_{j \in S_{m(i)}} \{j\}.$$

我们将 H 视为与 A'具有相同分块划分的分块矩阵，并令 $H_{ii} = e^{2\pi \mathrm{i}\langle k_{in(i)}, \theta\rangle}\mathrm{Id}$,$H_{ij} := 0$ 对 $i \neq j$成立。则 $H \in C_h^\omega(\mathbb{T}^d, \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$ 不依赖于 λ。此外，我们有

$$H^{-1}(\theta+\alpha)A'H(\theta) = \mathrm{diag}\{e^{-2\pi \mathrm{i}\langle k_{1n(1)},\alpha\rangle}A'_{11}, \cdots, e^{-2\pi \mathrm{i}\langle k_{ln(l)},\alpha\rangle}A'_{ll}\}.$$

此外，当 $i=j$或 i,j属于不同子集 S_{l_1}, S_{l_2}时， $H^{-1}(\theta+\alpha)f^{(re)}(\theta)H(\theta)$的$(i,j)$块为$0$；否则，对于某个$1 \le l_1 \le l$，我们有 $i \neq j$属于同一子集 S_{l_1}，这意味着 $n(i) = n(j)$，于是(i,j)块为

$$e^{-2\pi \mathrm{i}\langle k_{in(i)},\alpha\rangle}\hat{f}_{ij}^{(re)}(k_{ij})e^{2\pi \mathrm{i}\langle k_{ij}+k_{jn(j)}-k_{in(i)},\theta\rangle},$$

其中

$$k_{ij}+k_{jn(j)}-k_{in(i)} = \begin{cases} k_{ij}+k_{ji}=0, & \text{if } n(j)=n(i)=i, \\ k_{ij}-k_{ij}=0, & \text{if } n(j)=n(i)=j, \\ k_{ij}+k_{jn(j)}-k_{in(j)}=0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

因此等于 $e^{-2\pi \mathrm{i}\langle k_{in(i)},\ \alpha\rangle}\hat{}f_{(re)ij}(k_{ij})$。令

$$A'' := H^{-1}(\theta+\alpha)(A'+f^{(re)}(\theta))H(\theta).$$

并且我们完成了证明。

□

4.4. **分块对角化。** 下面的引理保证：如果新常矩阵的对角分块元素的谱再次分离，那么新常矩阵可以通过一个接近恒等映射的矩阵对角化。

~引理 *4.4*。设 $R, M' > 1$。给定 A, G 其中 $A \in C_\delta^\omega(\Lambda, GL(m,\mathbb{C}))$ $G \in C_\delta^\omega(\Lambda, gl(m,\mathbb{C}))$，且 $A(\lambda) = diag\{A_{11}(\lambda) \cdots, A_{ll}(\lambda)\}$ 对于 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$，而 $A_{ii}(1 \le i \le l)$ 为分块矩阵，假设 $|A|_\delta \le M'$, $|G|_\delta \le \epsilon$, 分解 $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda)$ 在 $W_\delta(\Lambda)$ 中是 (ν,ζ)-分离的，具有 $0 < \nu \le 1$，在 Λ 上是 (M,δ,c,r)-横截的，并且 $\Sigma(\lambda) \subseteq D(R)$ 对于 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$，其中 $\Sigma(\lambda) := \Sigma(A(\lambda))$ 且 $\Sigma_i(\lambda) := \Sigma(A_{ii}(\lambda))$ 对于 $1 \le i \le l$。如果

$$(6m^4\tilde{M}'\nu^{-1})^{m^2+1}\epsilon^{\frac{1}{2}} \le 1, \tag{4.7}$$

且 $2^7 m^2 \tilde{M}'^3 R\epsilon^{1/m} < 1$，则存在 $S \in C_\delta^\omega(\Lambda, \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$，使得

$$S^{-1}(A+G)S = \tilde{A}, \tag{4.8}$$

~ ~ ~ ~其中 $A \in C_\delta^\omega(\Lambda, \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$， $A = \mathrm{diag}\{A_{11}, \cdots, A_{ll}\}$ 属于 $W_\delta(\Lambda)$,

$$|A_{ii} - \tilde{A}_{ii}|_\delta \le 3\tilde{M}'\epsilon,$$

$$|S - \mathrm{Id}|_\delta \le 2\epsilon^{\frac{1}{2}},$$

~ ~ ~且分解 $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda)$ 在 $W_\delta(\Lambda)$ 中是 (ν',ζ')-分离的，其中 ~$\Sigma(\lambda) := \Sigma(A(\lambda))$ 和 $\Sigma_i(\lambda) := \Sigma(A_{ii}(\lambda))$, 适用于 $1 \le i \le l$。此外，对于 $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$，我们有 $\Sigma(\lambda) =$~ ~ ~$\Sigma_1(\lambda)$ $\cup \cdots \cup \Sigma_l(\lambda)$ 在 Λ, $\Sigma(\lambda) \subseteq D(R')$ 上是 (M',δ,c',r)- 横截的；并且对于任意 $1 \le i \le l$, $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$,

$$d_H(\Sigma_i(\lambda), \tilde{\Sigma}_i(\lambda)) < 8m^2\tilde{M}'^3\epsilon^{\frac{1}{m}},$$

其中

$$R' = R + 16m^2R^2\tilde{M}'^3\epsilon^{\frac{1}{m}}, \qquad \nu' = \nu - 16m^2\tilde{M}'^3\epsilon^{\frac{1}{m}}$$
$$M' = (2R')^{m^2}, \qquad \zeta' = \zeta + 16m^2\tilde{M}'^3\epsilon^{\frac{1}{m}},$$
$$c' = c - 2^{8m+2}m^{10m^2}R^{3m^2}\tilde{M}'^{m+1}(\tfrac{2r}{\delta})^r\epsilon.$$

证明。 设 $\mathcal{B}_\delta := C^\omega_\delta(\Lambda, gl(m,\mathbb{C}))$，它可以视为第 $\mathcal{B}_{h\text{节}\,\delta}$ 4.2 中 的一个特例，其中函数关于变量 $\mathbb{T}^d$ 为常数，此处省略 h 。设

$$\mathcal{B}^1_\delta := \{Y \in C^\omega_\delta(\Lambda, gl(m,\mathbb{C})) \ : \ Y_{ii} = 0, \ \forall 1 \le i \le l\},$$

$$\mathcal{B}^2_\delta := \{Y \in C^\omega_\delta(\Lambda, gl(m,\mathbb{C})) \ : \ Y_{ij} = 0, \ \forall 1 \le i \ne j \le l\}.$$

那么 $B_\delta = \mathcal{B}^1_\delta \oplus \mathcal{B}^2_\delta$，且对任意 $Y \in \mathcal{B}^1_\delta$， AY 和 YA 的第（i,j）个分块矩阵分别为 $A_{ii}Y_{ij}$ 和 $Y_{ij}A_{jj}$。显然， $AY, YA \in \mathcal{B}^1_\delta$。此外，若令

$$AY - YA = H \in \mathcal{B}^1_\delta,$$

那么对于 $i \ne j$，第（i,j）个分块矩阵方程为

$$A_{ii}Y_{ij} - Y_{ij}A_{jj} = H_{ij}.$$

Let

$$L_{ij}(\lambda) = \mathrm{Id} \otimes A_{ii}(\lambda) - (A_{jj}(\lambda))^T \otimes \mathrm{Id}.$$

那么对于任意 $\lambda \in W_\delta$（Λ）和 $i \ne j$，若将 Y_{ij} 和 H_{ij} 视为向量，则有

$$Y_{ij}(\lambda) = L^{-1}_{ij}(\lambda)H_{ij}(\lambda).$$

根据 dist(Σ_i（λ） Σ_j（λ）) $> \nu$ 对于 $i \ne j$ 和 $\lambda \in W_\delta$（Λ）成立这一事实，我们有

$$|\det L_{ij}(\lambda)| = |\mathrm{Res}(\chi_{\Sigma_i(\lambda)}, \chi_{\Sigma_j(\lambda)})| \ge \nu^{m^2},$$

这意味着

$$|L^{-1}_{ij}|_\delta \le (2m^4\nu^{-1}\tilde{M}')^{m^2}.$$

因此，我们有

$$|Y|_\delta \le m(2m^4\nu^{-1}\tilde{M}')^{m^2}|H|_\delta \le \frac{|H|_\delta}{48\tilde{M}'\epsilon^{1/2}}.$$

这意味着 $|AY - YA|_\delta \ge 48\tilde{M}'\epsilon^{1/2}|Y|_\delta$，因此 $\mathcal{B}^1_\delta \subseteq \mathcal{B}^{(nre)}_\delta(\eta)$ 其中 $\eta = 48\tilde{M}'\epsilon^{1/2}$。然后由引理 4.2，存在 $Y \in C^\omega_\delta(\Lambda, gl(m,\mathbb{C}))$ 以及 $G^{(re)} \in \mathcal{B}^{(re)}_\delta(\eta) \subseteq \mathcal{B}^2_\delta$ 满足 $|Y|_\delta \le \epsilon^{1/2}$ 并且 $|G^{(re)}|_\delta \le 3\tilde{M}'\epsilon$，使得

$$e^{-Y}(A + G)e^Y = A + G^{(re)}.$$

记 $\tilde{A} = A + G^{(re)}$ 和 $S = e^Y$。则 $\tilde{A} = \mathrm{diag}\{\tilde{A}_{11}, \cdots, \tilde{A}_{ll}\}$，且

$$|A_{ii} - \tilde{A}_{ii}|_\delta = |G^{(re)}_{ii}|_\delta \le 3\tilde{M}'\epsilon,$$

$$|S - \mathrm{Id}|_\delta = |e^Y - \mathrm{Id}|_\delta < 2\epsilon^{1/2}.$$

~ ~既然 $|A_{ii} - \tilde{A}_{ii}|_\delta \le 3M'\epsilon$，那么根据引理 3.10，引理的其余部分成立，证明完成。 □

5. 分层定量几乎约化与可约性

我们将使用第 4节中构造的 KAM步骤，证明对所有参数都成立的分层定量几乎可约性，以及对全测度集中的参数成立的定量可约性。

设 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 为一个区间，$\alpha \in \mathrm{DC}_d(\gamma,\tau)$，其中 $\gamma > 0, \tau > d$, $\delta_1, c_1 > 0$, $r_1 \in \mathbb{N}^+$, $M_1, R_1 > 1$, $R = 2R_1$，且 Π_1 是 Λ 的一个划分。对每个 $\Lambda \in \Pi_1$ 和 $A_1 \in \tilde{\mathcal{C}}^{\omega}_{\delta_1}(\Lambda, \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$，我们假设对于 $\lambda \in \Lambda$，$\Sigma(A_1(\lambda)) \subseteq D(R_1)$，并且 $\Sigma(A_1(\lambda))$ 在 Λ 上是 $(M_1, \delta_1, c_1, r_1)$-$\tilde{}$横截的。

5.1. **分层定量几乎约化**。在本小节中，我们陈述分层定量几乎约化的迭代引理（命题 5.1）。我们首先给出迭代参数。设 $0 < \varepsilon < 1$，$\epsilon_1 = \varepsilon^{1/2}$，并且对于 $n \geq 1$,

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n^{4^n} = \epsilon_1^{2^{n^2+n}}, \quad h_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n})h_1. \tag{5.1}$$

现在定义

$$N_n = [2^{n+1}\frac{|\log \epsilon_n|}{2\pi h_1}] + 1, \quad a_n = 8^{n+1}m,$$

$$N_{n,p} = a_n^p N_n, \quad K_n = 144mR\gamma^{-1}(3mN_{n,m+1})^{\tau}.$$

设 $b_1(m,R,\tau,\gamma) = 160m^{(m+2)(\tau+1)}12^{\tau+2}R\gamma^{-1}$，$b_2(m,\tau) = (6m+7)\tau$ 且

$$u_n = b_1^{-1}(\frac{4\pi h_1}{|\log \varepsilon|})^{\tau} e^{-b_2 e^{4\sqrt{n}}}. \tag{5.2}$$

令 $s_1 = 1$，并递归定义 s_n：

$$s_{i+1} = \min\{n : K_n^{-1} < d_1 u_{s_i}\}, \tag{5.3}$$

其中 $d_1 = 160m^{m+1}$。记

$$\xi_n = \#\{i : s_i \leq n\}.$$

由（5.3）可得

$$u_{s_i}^{-1} < d_1 K_{s_{i+1}} \leq b_1(\frac{|\log \epsilon_1|}{2\pi h_1})^{\tau} 2^{b_2 s_{i+1}^2} = b_1(\frac{|\log \varepsilon|}{4\pi h_1})^{\tau} 2^{b_2 s_{i+1}^2}.$$

于是我们得到

$$\sqrt{s_{i+1}} > e^{\sqrt{s_i}}.$$

同样，根据事实 $d_1 K_{s_{i+1}-1} \leq u_{s_i}^{-1}$，我们得到

$$\sqrt{s_{i+1}} \leq d_2 e^{\sqrt{s_i}},$$

其中 $d_2 = d_2(m)$ 是一个常数。因此，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\xi_n < 2\ln^{(k)}(n) + k + 1,$$

其中 $\ln^{(k)}(n)$ 表示 $\ln \cdots \ln(n)$（k 个），并且若 $\xi_n \leq k$，我们将 $\ln^{(k)}(n)$ 记为 $= 1$。

假设 ϵ_1 足够小，使得

$$(\frac{1}{2\pi h_1}\ln\frac{1}{\epsilon_1})^{6m(m+2)\tau} < \frac{1}{\epsilon_1}, \quad 36(m+7)^3\tau < \ln\frac{1}{\epsilon_1}. \tag{5.4}$$

此外，显然，当 ϵ_1 足够小时，对于所有 $k\in\mathbb{N}$，都有

$$6m(m+2)b_2e^{4\sqrt{s_k}}<2^{s_k^2-3s_k+2}|\ln\epsilon_1|, \tag{5.5}$$

在下文中，我们假设 ϵ_1 足够小，使得 (5.4) 和 (5.5) 成立。

设 $\Pi_n(n\geq 1)$ 是 Λ的一个划分。记 b,κ 为仅依赖于m的常数，且 $b\geq\max\{(120m)^{8m^3},\acute{b}\}$ 以及 $\kappa\geq m^{2m^2+10}$，其中 $\acute{b}$是引理 3.9中仅依赖于 m 对于所有 $n\geq 2$，为方便起见，引入以下记号。

性质 $\mathcal{P}(n,\Pi_n,\Pi_{n-1})$：对于定义在 Λ 上的矩阵值函数 A_n,A_{n-1}，对每个 $\Lambda\in\Pi_n$，（其中 Π_n 是 Π_{n-1} 的一个子划分），对于根据 Λ 定义的数列 $R_n,r_n,\nu_n,\zeta_n,\delta_n,M_n,c_n$，以下结论成立：

$(\mathcal{P}1)_n$我们有 $A_n\in C^{\omega}_{\delta_n}(\Lambda,\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$、$|A_n|_{\delta_n}<M_n$，并且对于任意 $\lambda\in W_{\delta_n}(\Lambda)$,

$$A_n(\lambda)=\mathrm{diag}\{A_{n,11}(\lambda),\cdots,A_{n,l_nl_n}(\lambda)\},$$

其中 $\Sigma^{(n)}(\lambda):=\Sigma(A_n(\lambda))\subseteq D(R_n)$，且 $\Sigma_i^{(n)}(\lambda):=\Sigma(A_{n,\ ii}(\lambda))$。

$(\mathcal{P}2)_n$分解 $\Sigma^{(n)}(\lambda)=\Sigma_1^{(n)}(\lambda)\cup\cdots\cup\Sigma_{l_n}^{(n)}(\lambda)$ 在 $W_{\delta_n}(\tilde{\Lambda})$ 中是 (ν_n,ζ_n)-分离的，并且在 $\tilde{\Lambda}$ 上是 $((2R_n)^{m^2},\delta_n,c_n,r_n)$-横截的。

$(\mathcal{P}3)_n$ 对于 $n=s_k$，存在 $\lambda_0\in\tilde{\Lambda}$，使得 $\Sigma_1^{(n)}(\lambda_0)\cup\cdots\cup\Sigma_{l_n}^{(n)}(\lambda_0)$ 是 $(8\nu_n,\zeta_n)$- 分离的，并且

$$d_H(\Sigma_i^{(n)}(\lambda),\Sigma_i^{(n)}(\lambda_0))<\nu_n,\ \forall\lambda\in W_{\delta_n}(\tilde{\Lambda}),$$
$$\#\Pi_n\leq\#\Pi_{n-1}+\frac{bR_{n-1}^{6m}\tilde{M}_{n-1}^{3m}|\Lambda|}{\nu_n^{3m}\delta_{n-1}}\max_{\tilde{\Lambda}^-\in\Pi_{n-1}}\frac{1}{\delta_{n-1}(\tilde{\Lambda}^-)},$$

其中，δ_{n-1} 可能因不同的 $\Lambda^-\in\Pi_{n-1}$而异，并且

$$\begin{aligned}
&R_n=R_{n-1}+bR_{n-1}^2\tilde{M}_{n-1}^4\epsilon_{n-1}^{\frac{1}{m}},\\
&\nu_n=u_{s_k},\quad\zeta_n=10mu_{s_k},\quad r_n=m^2r_{n-1},\\
&\delta_n=b^{-1}R_{n-1}^{-6m}(\nu_n\tilde{M}_{n-1}^{-1})^{3m}\delta_{n-1},\quad\tilde{M}_n=b(\nu_n^{-1}\tilde{M}_{n-1})^{m^2(m+2)},\\
&c_n=(b^{-1}R_{n-1}^{-1}r_{n-1}^{-1}\delta_{n-1}\nu_n\tilde{M}_{n-1}^{-1}c_{n-1})^{\kappa^{r_{n-1}}}-r_{n-1}^{\kappa r_{n-1}}\epsilon_{n-1}.
\end{aligned}$$

$(\mathcal{P}4)_n$ 对于 $s_k<n<s_{k+1}$，任意给定的 $\Lambda^-\in\Pi_{n-1}$，我们都有 $\lambda\in W_{\delta_{n-1}}(\Lambda^-)$

$$A_{n-1}(\lambda)=\mathrm{diag}\{A_{n-1,11}(\lambda),\cdots,A_{n-1,l_{n-1}l_{n-1}}(\lambda)\},$$

以及以下内容：

$(\mathcal{P}4.1)_n$ 若 $l_n<l_{n-1}$，则存在 Λ^- 的一个划分 $\Pi_n(\Lambda^-)$，满足

$$\#\Pi_n(\tilde{\Lambda}^-)\leq 1+\frac{bR_{n-1}^{2m-1}|\tilde{\Lambda}^-|}{\nu_n^m\delta_{n-1}(\tilde{\Lambda}^-)},$$

其中，δ_{n-1} 可以随 $\Lambda^-\in\Pi_{n-1}$变化；对于任意 $\Lambda\in\Pi_n(\Lambda^-)$，存在 $\lambda_0\in\Lambda$，使得对于任意 $\lambda\in W_{\delta_n}(\Lambda)$

$$d_H(\Sigma_i^{(n)}(\lambda),\Sigma_i^{(n)}(\lambda_0))<\nu_n,$$

with

$$R_n = R_{n-1} + bR_{n-1}^2\tilde{M}_{n-1}^4\epsilon_{n-1}^{\frac{1}{m}},$$
$$\nu_n = \nu_{n-1} - b\tilde{M}_{n-1}^4\epsilon_{n-1}^{\frac{1}{m}},\quad \zeta_n = m(\zeta_{n-1} + 7\nu_{n-1}),$$
$$r_n = m^2 r_{n-1},\quad \delta_n = b^{-1}R_{n-1}^{-(2m-1)}\nu_n^m\delta_{n-1},\quad \tilde{M}_n = \tilde{M}_{n-1} + 20m\tilde{M}_{n-1}^2\epsilon_{n-1},$$
$$c_n = (b^{-1}R_{n-1}^{-1}r_{n-1}^{-1}\delta_{n-1}c_{n-1})^{\kappa^{r_{n-1}}} - (bR_{n-1}\tilde{M}_{n-1}\delta_{n-1}^{-1}r_{n-1})^{\kappa r_{n-1}}\epsilon_{n-1}.$$

$(\mathcal{P}4.2)_n$ 若 $l_n = l_{n-1}$，则 $\#\Pi_n(\tilde{\Lambda}^-) = 1$，并且存在 $k_i^{(n)} \in \mathbb{Z}^d (i = 1, 2, \cdots, l_n)$，使得˜对于任意 $\lambda \in W_{\delta_n}(\Lambda^-)$，我们有

$$d_H(\Sigma_i^{(n)}(\lambda), e^{2\pi\mathrm{i}\langle k_i^{(n)},\alpha\rangle}\Sigma_i^{(n-1)}(\lambda)) < \frac{\nu_{n-1} - \nu_n}{2},$$

with

$$R_n = R_{n-1} + bR_{n-1}^2\tilde{M}_{n-1}^4\epsilon_{n-1}^{\frac{1}{m}},$$
$$\nu_n = \nu_{n-1} - b\tilde{M}_{n-1}^4\epsilon_{n-1}^{\frac{1}{m}},\quad \zeta_n = \zeta_{n-1} + b\tilde{M}_{n-1}^4\epsilon_{n-1}^{\frac{1}{m}},$$
$$r_n = r_{n-1},\quad \delta_n = \delta_{n-1},\quad \tilde{M}_n = \tilde{M}_{n-1} + 20m\tilde{M}_{n-1}^2\epsilon_{n-1},$$
$$c_n = c_{n-1} - bR_{n-1}^{3m^2}\tilde{M}_{n-1}^{m+2}(2r_{n-1}\delta_{n-1}^{-1})^{r_{n-1}}\epsilon_{n-1}.$$

$(\mathcal{P}4.3)_n$ 我们有

$$\#\Pi_n \le \#\Pi_{n-1} + \frac{bR_{n-1}^{2m-1}|\Lambda|}{\nu_n^m}\max_{\tilde{\Lambda}\in\Pi_{n-1}}\frac{1}{\delta_{n-1}(\tilde{\Lambda})},$$

where $\Pi_n = \cup_{\tilde{\Lambda}^-\in\Pi_{n-1}}\Pi_n(\tilde{\Lambda}^-)$.

若存在 Λ的某个划分 Π_1，使得性质（$\mathcal{P}1$）$_1$-（$\mathcal{P}3$）$_1$ 对 A_1成立，则称 $\mathfrak{P}$成立。对于 $\tilde{m} \ge 2$，若 $\mathfrak{P}(1)$成立，且对任意 $2 \le n \le \tilde{m}$，都存在 Λ 的一个划分 Π_n，使得 $\mathcal{P}(n, \Pi_n, \Pi_{n-1})$对 A_n, A_{n-1}成立，则称 $\mathfrak{P}(\tilde{m})$成立。

现在我们可以陈述分层定量几乎约化的迭代引理。

命题 5.1 (迭代引理). 假设对任意 $\tilde{m} \ge 1$, $|F_{\tilde{m}}|_{h_{\tilde{m}},\delta_{\tilde{m}}} < \epsilon_{\tilde{m}}$, $\mathfrak{P}(\tilde{m})$ 成立，

$$K_{\tilde{m}}^{-1} < \tfrac{\gamma}{144mR_{\tilde{m}}(3mN_{\tilde{m},m+1})^\tau}, \tag{5.6}$$
$$\epsilon_{\tilde{m}}^{\frac{1}{2m}} < \tfrac{\gamma}{48R_{\tilde{m}}(2N_{\tilde{m},m+1})^\tau}, \tag{5.7}$$

and

$$C(d)(bR_n\tilde{M}_nK_n\nu_n^{-1})^{m^2+1}(\frac{3\cdot 2^nN_{n,m+2}}{h_1})^d(\frac{2m^2r_n}{\delta_n})^{m^2r_n/3}c_n^{-1/3} \le \epsilon_n^{-\frac{1}{6}}, \tag{5.8}$$

˜对于所有 $n \le \tilde{m}$，则存在 $\Pi_{\tilde{m}}$的一个子划分 $\Pi_{\tilde{m}+1}$，使得在每个 $\Lambda \in \Pi_{\tilde{m}+1}$上，都存在 $Z_{\tilde{m}} \in C^\omega_{h_{\tilde{m}+1},\delta_{\tilde{m}+1}}(\mathbb{T}^d \times \tilde{\Lambda}, \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}))$ 使得

$$Z_{\tilde{m}}^{-1}(\cdot + \alpha)(A_{\tilde{m}} + F_{\tilde{m}}(\cdot))Z_{\tilde{m}}(\cdot) = A_{\tilde{m}+1} + F_{\tilde{m}+1}(\cdot),$$

满足 $\mathfrak{P}(\tilde{m}+1)$。此外，我们有如下估计：

- $|F_{\tilde{m}+1}|_{h_{\tilde{m}+1},\delta_{\tilde{m}+1}} < \epsilon_{\tilde{m}+1}$, $|F_{\tilde{m}+1}|_{h_{\tilde{m}+1},\delta_{\tilde{m}+1}} \le |F_{\tilde{m}}|_{h_{\tilde{m}},\delta_{\tilde{m}}}$,

- $|Z_{\tilde m}|_{h_{\tilde m+1},\delta_{\tilde m+1}}$, $|Z_{\tilde m}^{-1}|_{h_{\tilde m+1},\delta_{\tilde m+1}} < \epsilon_{\tilde m+2m+2}^{-1}$,
- $|Z_{\tilde m}|^{\tilde m^2/2}_{h_{\tilde m+1},\delta_{\tilde m+1}}|F_{\tilde m+1}|_{h_{\tilde m+1},\delta_{\tilde m+1}}$, $|Z_{\tilde m}^{-1}|^{\tilde m^2/2}_{h_{\tilde m+1},\delta_{\tilde m+1}}|F_{\tilde m+1}|_{h_{\tilde m+1},\delta_{\tilde m+1}} < 1$.

证明留待第 5.3 节。

5.2. **分层定量可约性。** 现在我们陈述用于证明分层全测度可约性（定理 1.3）的关键命题（命题 5.2），实际上，除去一个豪斯多夫维数为零的集合即可得到可约性。我们先给出迭代参数。

令 $0 < \tilde\epsilon_1, \tilde h_1, \tilde\delta_1, \tilde c_1' < 1$, $\tilde M_1', \tilde R_1, \tilde C_1 > 1$, $\tilde r_1 \in \mathbb{N}^+$, $\tilde r_1' = m^2\tilde r_1$, 并对 $j \geq 1$ 归纳定义数列:

$$\tilde\epsilon_{j+1} = \tilde\epsilon_1^{(\frac{3}{2})^j}, \quad \tilde h_{j+1} = \tilde h_j - \frac{\tilde h_1}{2^{j+1}}, \quad \tilde N_j = 2^j\frac{|\ln\tilde\epsilon_j|}{\pi\tilde h_1}, \quad K_j = \tilde\epsilon_j^{-\frac{1}{10\tilde r_1'}},$$

$$\tilde M_{j+1}' = \tilde M_j' + 3\tilde M_j'\tilde\epsilon_j, \quad \tilde R_{j+1} = \tilde R_j + 16m^2\tilde M_j'^3\tilde R_j^2\tilde\epsilon_j^{\frac{1}{m}}, \quad \tilde\delta_{j+1} = \frac{\tilde\delta_j}{4(2\tilde R_j)^{m^2}K_j},$$

$$\tilde C_{j+1} = \tilde C_j + \frac{(\tilde r_1'+1)!}{\tilde\delta_{j+1}^{\tilde r_1'+1}}(8m^4\tilde R_j\tilde M_j')^{3m^2}\tilde\epsilon_j, \quad \tilde c_{j+1}' = \tilde c_j' - \frac{\tilde r_1'!}{(\tilde\delta_{j+1}/2)^{\tilde r_1'}}(8m^4\tilde R_j\tilde M_j')^{3m^2}\tilde\epsilon_j.$$

命题 *5.2*。设 $0 < \varrho, \gamma, \tilde\epsilon_1, \tilde h_1, \tilde\delta_1, \tilde c_1' < 1$, $\tau > d$, $\tilde M_1', \tilde R_1, \tilde C_1 > 1$, $\tilde r_1 \in \mathbb{N}^+$,$\tilde r_1' = m^2\tilde r_1$, $\tilde\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间，且 $\tilde\epsilon_j, \tilde h_j, \tilde N_j, K_j, \tilde M_j', \tilde R_j, \tilde\delta_j, \tilde C_j, \tilde c_j'$ 如上定义。若 $\tilde\epsilon_1$, $M_1', R_1, \delta_1, \tilde r_1, h_1, \delta_1$ 满足

$$\tilde\epsilon_1^{\frac{\varrho}{100\tilde r_1'^2}} < \min\{(9\tilde R_1)^{-(\tau+d)}, \tilde c_1', (2|\ln\tilde\epsilon_1|)^{-(\tau+d)}\}, \tag{5.9}$$

$$\tilde\epsilon_1 < (\gamma\tilde h_1^\tau)^{4m^2}(16m^2\tilde R_1\tilde M_1'\tilde r_1'\tilde\delta_1^{-1})^{-2^8m^2\tilde r_1'}, \tag{5.10}$$

那么，对 $j \geq 1$，以下结论成立：

假设存在一个区间的不交并 $\Lambda^{(j)} \subseteq \tilde\Lambda$，使得对于任意 $\bar\Lambda^{(j)} \in \mathcal{C}(\Lambda^{(j)})$，其中 $\mathcal{C}(\Lambda^{(j)})$ 表示 $\Lambda^{(j)}$ 的所有连通分支的集合，我们得到 $\tilde A_j \in C^\omega_{\tilde\delta_j}(\bar\Lambda^{(j)}, GL(m,\mathbb{C}))$, $\tilde F_j \in C^\omega_{\tilde h_j,\tilde\delta_j}(\mathbb{T}^d \times \bar\Lambda^{(j)}, gl(m,\mathbb{C}))$，且 $|\tilde A_j|_{\tilde\delta_j} \leq \tilde M_j'$,$|\tilde F_j|_{\tilde h_j,\tilde\delta_j} \leq \tilde\epsilon_j$, $\tilde\Sigma_j(\lambda) := \Sigma(\tilde A_j(\lambda))$ 在 $\bar\Lambda^{(j)}$ 上是 $((2\tilde R_j)^{m^2}, \tilde\delta_j, \tilde c_j', \tilde r_1')$-横截的，并且对于 $\lambda \in W_{\tilde\delta_j}(\bar\Lambda^{(j)})$, $\tilde\Sigma_j(\lambda) \subseteq D(\tilde R_j)$。

此外，我们假设对于任意 $\lambda \in \bar\Lambda^{(j)}$、$u \in \mathbb{T}$，都有

$$\sup_{0\leq l\leq\tilde r_1'+1}|\frac{\partial^l g_j(\lambda,u)}{\partial\lambda^l}| \leq \tilde C_j,$$

其中 $g_j(\lambda,u) = \prod_{\sigma_{\ell_1},\sigma_{\ell_2}\in\tilde\Sigma_j(\lambda)}(\sigma_{\ell_1} - e^{2\pi iu}\sigma_{\ell_2})$。那么存在 $\Lambda^{(j+1)} \subseteq \Lambda^{(j)}$，使得$\ell_1\neq\ell_2$对于任意 $\bar\Lambda^{(j+1)} \in \mathcal{C}(\Lambda^{(j+1)})$，存在 $\tilde A_{j+1} \in C^\omega_{\tilde\delta_{j+1}}(\bar\Lambda^{(j+1)}, GL(m,\mathbb{C}))$、$Y_j$、$\tilde F_{j+1} \in C^\omega_{\tilde h_j,\tilde\delta_{j+1}}(\mathbb{T}^d \times \bar\Lambda^{(j+1)}, gl(m,\mathbb{C}))$，满足$|Y_j|_{\tilde h_j,\tilde\delta_{j+1}} \leq \tilde\epsilon_j^{\frac{1}{2}}$，使得

$$e^{-Y_j(\cdot+\alpha)}(\tilde A_j + \tilde F_j(\cdot))e^{Y_j(\cdot)} = \tilde A_{j+1} + \tilde F_{j+1}(\cdot),$$

且 $\tilde A_{j+1}$, $\tilde F_{j+1}$满足与 $\tilde A_j$, $\tilde F_j$相同的假设，只需将 j替换为 $j+1$，其中 $|\tilde A_{j+1} - \tilde A_j|_{\tilde\delta_{j+1}} \leq 3M_j'\tilde\epsilon_j$,

$$\Lambda^{(j+1)} = \Lambda^{(j)}\backslash\mathcal{R}_j(\tilde\Lambda), \quad \mathcal{R}_j(\tilde\Lambda) = \cup_{i\in J_j(\tilde\Lambda)}I_i^{(j)},$$

其中 $\{I_i^{(j)}\}_i \subseteq \Lambda^{(j)}$ 为互不相交的区间，$|I_i^{(j)}| < \tilde{\epsilon}_j^{\frac{2}{25\tilde{r}'_1}}$，且

$$\#J_j(\tilde{\Lambda}) \le 2^{\tilde{r}'_1+d}\tilde{N}_j^d\left(\frac{8\tilde{C}_1}{\tilde{c}'_1}|\Lambda^{(j)}| + \#\mathcal{C}(\Lambda^{(j)})\right),$$
$$\#\mathcal{C}(\Lambda^{(j+1)}) \le 2\#\mathcal{C}(\mathcal{R}^{(j)}(\tilde{\Lambda})).$$

5.3. **命题 5.1 的证明。** 根据假设，我们已经得到 $\Pi_{\tilde{m}}$、$A_{\tilde{m}}$、$F_{\tilde{m}}$、$\tilde{\ }$，其中对于任意 $\Lambda \in \Pi_{\tilde{m}}$，我们有 $A_{\tilde{m}} = \mathrm{diag}\{A_{\tilde{m},11}, \cdots, A_{\tilde{m},l_{\tilde{m}}l_{\tilde{m}}}\}$ 属于 $W_{\delta_{\tilde{m}}}(\Lambda)$。接下来，$\tilde{\ }$我们固定 $\Lambda \in \Pi_{\tilde{m}}$。不失一般性，假设 $|F_{\tilde{m}}|_{h_{\tilde{m}},\ \delta_{\tilde{m}}} \ge \epsilon_{\tilde{m}+1}$；否则，令 $A_{\tilde{m}+1} = A_{\tilde{m}}$、$F_{\tilde{m}+1} = F_{\tilde{m}}$，并在必要时将 $\tilde{\Lambda}$ 划分为 $1 + \left[\frac{\tilde{\Lambda}}{\delta_{\tilde{m}+1}}\right]$ 个等长区间，长度小于 $\delta_{\tilde{m}+1}$，作为 Λ的划分 $\Pi_{\tilde{m}+1}(\Lambda)$。于是结论成立。

不失一般性，我们假设 $s_k \le \tilde{m} < s_{k+1}$。

5.3.1. *步骤 1*：消去非共振项。

断言 3. 存在 $p \in \{0, 1, \cdots, m\}$，使得分解 $\Sigma^{(\tilde{m})}{}_1 \cup \cdots \cup \Sigma^{(\tilde{m})l_{\tilde{m}}}\tilde{\ }$满足 $\mathcal{H}(N_{\tilde{m},p}, N_{\tilde{m},p+1}, K_{\tilde{m}})$ 在 $W_{\delta_{\tilde{m}}}(\Lambda)$中。

证明。 令

$$m_1 = \max\{n \in \mathbb{N} \cap [s_k, \tilde{m}) \ :\ l_n > l_{\tilde{m}}\},$$

若不存在这样的 n，则令 $m_1 = s_k$。于是根据性质 $(\mathcal{P}3)_{s_k}$ 和 $(\mathcal{P}4)_n$，结合 $m_1 + 1 \le n \le \tilde{m}$，可得

$$d_H(\Sigma_i^{(\tilde{m})}(\lambda), \Sigma_i^{(\tilde{m})}(\lambda_0)) < 2\nu_{m_1} - \nu_{\tilde{m}}, \tag{5.11}$$

对于某个 $\lambda_0 \in \Lambda$。根据 ν_n 和 ζ_n 对 $s_k \le n \le \tilde{m}$ 及 (5.8) 的定义，我们得到

$$\frac{u_{s_k}}{2} < \nu_n \le u_{s_k}, \quad 10mu_{s_k} \le \zeta_n < 20m^{m+1}u_{s_k}, \tag{5.12}$$

其中 u_{s_k} 定义如 (5.2) 所示。于是，由 (5.3) 和 (5.6)，可得

$$16m\nu_{m_1} < 8m\zeta_{\tilde{m}} < mK_{\tilde{m}}^{-1} < \frac{\gamma}{10R_{\tilde{m}}(3mN_{\tilde{m},m+1})^\tau}.$$

结合$(\mathcal{P}1)_{\tilde{m}}$-$(\mathcal{P}2)_{\tilde{m}}$，我们可以应用引理4.1，从而得到结论。 □

于是由 (5.8)，我们可以将命题 4.1 应用于 $A_{\tilde{m}} + F_{\tilde{m}}(\cdot)$，得到 $Y_{\tilde{m}}, f_{\tilde{m}}^{(re)}, F_{\tilde{m},\ 1} \in C^\omega_{h_{\tilde{m}},\delta_{\tilde{m}}}(\mathbb{T}^d \times \tilde{\Lambda}, gl(m, \mathbb{C}))$，使得

$$e^{-Y_{\tilde{m}}(\cdot+\alpha)}(A_{\tilde{m}} + F_{\tilde{m}}(\cdot))e^{Y_{\tilde{m}}(\cdot)} = A_{\tilde{m},1} + f_{\tilde{m}}^{(re)}(\cdot) + F_{\tilde{m},1}(\cdot),$$

其中 $A_{\tilde{m},\ 1} = \mathrm{diag}\{A_{\tilde{m},1,11}, \cdots, A_{\tilde{m},1,l_{\tilde{m}}l_{\tilde{m}}}\}$, $|Y_{\tilde{m}}|_{h_{\tilde{m}},\ \delta_{\tilde{m}}} \le \epsilon_{\tilde{m}}^{1/2}$, $|f_{(re)\tilde{m}}|_{h_{\tilde{m}},\ \delta_{\tilde{m}}} \le 3\tilde{M}_{\tilde{m}}\epsilon_{\tilde{m}}$,

$$|A_{\tilde{m},1,ii} - A_{\tilde{m},ii}|_{\delta_{\tilde{m}}} \le 3\tilde{M}_{\tilde{m}}\epsilon_{\tilde{m}},$$
$$|F_{\tilde{m},1}|_{h_{\tilde{m}+1},\delta_{\tilde{m}}} \le 3\tilde{M}_{\tilde{m}}\epsilon_{\tilde{m}}e^{-2\pi h_1 a_{\tilde{m}}N_{\tilde{m},p}/2^{\tilde{m}+1}},$$

且 $f_{(re)\tilde{m}}$ 满足命题 4.1 中 $f^{(re)}$的性质，其中 $N = N_{\tilde{m},p}, a = a_{\tilde{m}}, K = \tilde{\ }K_{\tilde{m}}$。此外，若记 $\Sigma(\lambda) := \Sigma(A_{\tilde{m},1}(\lambda))$，以及 $\Sigma_i(\lambda) := \Sigma(A_{\tilde{m},1,ii}(\lambda))$，其中 $1 \le i \le l_{\tilde{m}}$，则由 (5.8)，我们可以应用引理 3.10，得到

1) $|A_{\tilde{m},1}|_{\delta_{\tilde{m}}} \le M'$, 2) $d_H(\tilde{\Sigma}_i(\lambda), \Sigma^{(\tilde{m})}{}_i(\lambda)) < 8m^2\tilde{M}_{\tilde{m}}^3\epsilon_{\tilde{m}}^{1/m}$, $\tilde{\Sigma}(\lambda) \subseteq D$ (R') 对于 $\lambda \in W_{\delta_{\tilde{m}}}(\tilde{\Lambda})$,

3) $\Sigma = \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_{l_{\tilde{m}}}$ 在 $W_{\delta_{\tilde{m}}}(\Lambda)$ 中是 (ν', ζ')-分离的，

$\tilde{\quad}\quad\tilde{\quad}\qquad\qquad\tilde{\quad}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\tilde{}4)$

$\Sigma=\Sigma_1\cup\cdots\cup\Sigma_{l_{\tilde m}}$ 在 Λ 上是 $(M',\delta_{\tilde m},c',r_{\tilde m})$-横截的，其中

$$\begin{aligned}
&R'=R_{\tilde m}+16m^2R_{\tilde m}^2\tilde M_{\tilde m}^3\epsilon_{\tilde m}^{\frac{1}{m}}, && \tilde M'=\tilde M_{\tilde m}+3\tilde M_{\tilde m}\epsilon_{\tilde m},\\
&\nu'=\nu_{\tilde m}-16m^2\tilde M_{\tilde m}^3\epsilon_{\tilde m}^{\frac{1}{m}}, && \zeta'=\zeta_{\tilde m}+16m^2\tilde M_{\tilde m}^3\epsilon_{\tilde m}^{\frac{1}{m}},\\
&c'=c_{\tilde m}-2^{8m+2}m^{10m^2}R_{\tilde m}^{3m^2}\tilde M_{\tilde m}^{m+1}(\tfrac{2r_{\tilde m}}{\delta_{\tilde m}})^{r_{\tilde m}}\epsilon_{\tilde m}, && M'=(2R')^{m^2}.
\end{aligned}$$

5.3.2. 步骤 2：消去共振。 现在应用引理 4.3 到 $A_{\tilde m,\ 1}$ 和 $f_{\tilde m}^{(re)}$，存在 $H_{\tilde m}\in C^\omega_{h_{\tilde m}}(\mathbb{T}^d,\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$，它与 λ 无关，使得

$$H_{\tilde m}^{-1}(\cdot+\alpha)(A_{\tilde m,1}+f_{\tilde m}^{(re)}(\cdot))H_{\tilde m}(\cdot)=A_{\tilde m,2},$$

其中 $A_{\tilde m,\ 2,\ ii}=e^{2\pi\mathrm{i}\langle k_i',\ \alpha\rangle}A_{\tilde m,\ 1,\ ii}$，对某个 $k_i'\in\mathbb{Z}^d$，其中 k_i' 对所有 λ、$i=1$、$\cdots$、$l_{\tilde m}$ 均无关，并且

$$\begin{aligned}
&|H_{\tilde m}|_{h_{\tilde m+1}}\le e^{2\pi mN_{\tilde m,p}h_{\tilde m+1}},\\
&|A_{\tilde m,2}-\mathrm{diag}\{A_{\tilde m,2,11},\cdots,A_{\tilde m,2,l_{\tilde m}l_{\tilde m}}\}|_{\delta_{\tilde m}}\le 3(m-1)\tilde M_{\tilde m}\epsilon_{\tilde m}.
\end{aligned}$$

令 $F_{\tilde m,\ 2}(\cdot)=H_{\tilde m}^{-1}(\cdot+\alpha)F_{\tilde m,\ 1}(\cdot)H_{\tilde m}(\cdot)$。则有

$$|F_{\tilde m,2}|_{h_{\tilde m+1},\delta_{\tilde m}}\le|H_{\tilde m}|^2_{h_{\tilde m+1}}|F_{\tilde m,1}|_{h_{\tilde m+1},\delta_{\tilde m}}\le 3\tilde M_{\tilde m}\epsilon_{\tilde m}^{1+(\frac{a_{\tilde m}}{2^{\tilde m+1}}-2m)2^{\tilde m+1}a_{\tilde m}^p}\le 3\tilde M_{\tilde m}\epsilon_{\tilde m}^{1+4ma_{\tilde m}^p\cdot 8^{\tilde m}}.$$

此外，若记 $A'_{\tilde m,\ 2}:=\mathrm{diag}\{A_{\tilde m,2,11},\cdots,A_{\tilde m,2,l_{\tilde m}l_{\tilde m}}\}$，$\hat\Sigma(\lambda):=\Sigma(A'_{\tilde m,\ 2}(\lambda))$，以及 $\hat\Sigma_i(\lambda):=\Sigma(A_{\tilde m,\ 2,\ ii}(\lambda))$，其中 $1\le i\le l_{\tilde m}$，则有以下结论：

引理 5.1. 分解 $\hat\Sigma(\lambda)=\hat\Sigma_1(\lambda)\cup\cdots\cup\hat\Sigma_{l_{\tilde m}}(\lambda)$ 在 $\tilde\Lambda$ 上是 $(M',\delta_{\tilde m},c',r_{\tilde m})$-横截的，其中 $\lambda\in W_{\delta_{\tilde m}}(\tilde\Lambda)$，$\hat\Sigma(\lambda)\subseteq D(R')$，$\mathrm{diam}(\hat\Sigma_i(\lambda))\le\zeta'$，且

$$|A'_{\tilde m,2}|_{\delta_{\tilde m}}\le\tilde M',\quad \hat\Sigma_i(\lambda)=e^{2\pi\mathrm{i}\langle k_i',\alpha\rangle}\tilde\Sigma_i(\lambda).\tag{5.13}$$

证明. 由于 $A_{\tilde m,2,ii}=e^{2\pi\mathrm{i}\langle k_i',\alpha\rangle}A_{\tilde m,1,ii}$，我们可以得到 (5.13)，进而根据 $\tilde\Sigma_i(\lambda)$ 的性质，对于 $\lambda\in W_{\delta_{\tilde m}}(\tilde\Lambda)$，$\hat\Sigma(\lambda)\subseteq D(R')$，$\mathrm{diam}(\hat\Sigma_i(\lambda))\le\zeta'$。此外，可以检查，对于任意 $u\in\mathbb{T}$ 和 $\lambda\in W_{\delta_{\tilde m}}(\Lambda)$，

$$\begin{aligned}
\hat g_i(\lambda,u)&=e^{2\pi\mathrm{i}m_i(m_i-1)\langle k_i',\alpha\rangle}\tilde g_i(\lambda,u),\\
\mathrm{Res}(\chi_{\hat\Sigma_i(\lambda)},\chi_{\hat\Sigma_j(\lambda)};u)&=e^{2\pi\mathrm{i}m_im_j\langle k_i',\alpha\rangle}\mathrm{Res}(\chi_{\tilde\Sigma_i(\lambda)},\chi_{\tilde\Sigma_j(\lambda)};u+\langle k_j'-k_i',\alpha\rangle),
\end{aligned}$$

其中 $m_i=\#\hat\Sigma_i$ 与 λ 和 θ 无关，$\tilde g_i(\lambda,u)=\prod_{\sigma_{\ell_1},\sigma_{\ell_2}\in\tilde\Sigma_i(\lambda)}(\sigma_{\ell_1}-e^{2\pi\mathrm{i}u}\sigma_{\ell_2})$，且 $\prod_{\ell_1\neq\ell_2}\hat g_i(\lambda,u)=\prod_{\sigma_{\ell_1},\sigma_{\ell_2}\in\hat\Sigma_i(\lambda)}(\sigma_{\ell_1}-e^{2\pi\mathrm{i}u}\sigma_{\ell_2})$。那么分解 $\hat\Sigma(\lambda)=\hat\Sigma_1(\lambda)\cup\cdots\cup\hat\Sigma_{l_{\tilde m}}(\lambda)$ 在 $\tilde\Lambda$ 上是 $(M',\delta_{\tilde m},c',r_{\tilde m})$-横截的。

□

5.3.3. 步骤 3：分块对角化。 根据 $A'_{\tilde m,2}$ 的谱，我们将此步骤分为三种情况，可能出现以下其中一种情形：

情形 a：$\mathbf{s_k\le\tilde m<s_{k+1}-1}$ 和 $\hat\Sigma_1\cup\cdots\cup\hat\Sigma_{l_{\tilde m}}$ 在 (ν',ζ')-分离于 $W^{\delta_{\tilde m}}(\tilde\Lambda)$。 在此情形下，由于根据（5.8）

$$(6m^4\tilde M'\nu'^{-1})^{m^2+1}(3(m-1)\tilde M_{\tilde m}\epsilon_{\tilde m})^{\frac12}<1,\quad 2^7m^2\tilde M'^3R'(3(m-1)\tilde M_{\tilde m}\epsilon_{\tilde m})^{\frac{1}{m}}<1,$$

因此引理 4.4 适用，并且存在 $Z_{\tilde{m},1}\in C^{\omega}_{\delta_{\tilde{m}}}(\Lambda,\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$ 使得

$$Z_{\tilde{m},1}^{-1}A_{\tilde{m},2}Z_{\tilde{m},1}=\mathrm{diag}\{A_{\tilde{m},3,11},\cdots,A_{\tilde{m},3,l_{\tilde{m}}l_{\tilde{m}}}\},$$

其中 $|Z_{\tilde{m},\ 1}-$恒等映射$|_{\delta_{\tilde{m}}}\le 4m\tilde{M}_{\tilde{m}}^{\frac{1}{2}}\epsilon_{\tilde{m}}^{\frac{1}{2}}$ 和 $|A_{\tilde{m},\ 3,\ ii}-A_{\tilde{m},\ 2,\ ii}|_{\delta_{\tilde{m}}}<18m\tilde{M}_{\tilde{m}}^{2}\epsilon_{\tilde{m}}$。设 $l_{\tilde{m}+1}=l_{\tilde{m}}$，

$$\#\Pi_{\tilde{m}+1}(\tilde{\Lambda})=1,\quad A_{\tilde{m}+1}=\mathrm{diag}\{A_{\tilde{m},3,11},\cdots,A_{\tilde{m},3,l_{\tilde{m}}l_{\tilde{m}}}\},$$
$$F_{\tilde{m}+1}=Z_{\tilde{m},1}^{-1}F_{\tilde{m},2}Z_{\tilde{m},1},\quad Z_{\tilde{m}}=e^{Y_{\tilde{m}}}H_{\tilde{m}}Z_{\tilde{m},1}.$$

Then

$$\begin{aligned}
&|A_{\tilde{m}+1}|_{\delta_{\tilde{m}}}\le\tilde{M}_{\tilde{m}}+20m\tilde{M}_{\tilde{m}}^{2}\epsilon_{\tilde{m}}=\tilde{M}_{\tilde{m}+1},\\
&|F_{\tilde{m}+1}|_{h_{\tilde{m}+1},\delta_{\tilde{m}}}\le 6\tilde{M}_{\tilde{m}}\epsilon_{\tilde{m}}^{1+4m8^{\tilde{m}}a_{\tilde{m}}^{p}}<\epsilon_{\tilde{m}}^{4^{\tilde{m}}}=\epsilon_{\tilde{m}+1},\\
&|Z_{\tilde{m}}|_{h_{\tilde{m}+1},\delta_{\tilde{m}}}\le 2|H_{\tilde{m}}|_{h_{\tilde{m}+1}}\le 2\epsilon_{\tilde{m}}^{-m2^{\tilde{m}+2}a_{\tilde{m}}^{p}}<\epsilon_{\tilde{m}+2m+2}^{-1},\\
&|Z_{\tilde{m}}|_{h_{\tilde{m}+1},\delta_{\tilde{m}}}^{\tilde{m}^2/2}|F_{\tilde{m}+1}|_{h_{\tilde{m}+1},\delta_{\tilde{m}}}\le 3\tilde{M}_{\tilde{m}}\epsilon_{\tilde{m}}^{1+4ma_{\tilde{m}}^{p}(8^{\tilde{m}}-\tilde{m}^{2}2^{\tilde{m}})}<\epsilon_{\tilde{m}}^{4ma_{\tilde{m}}^{p}2^{\tilde{m}}}<1,
\end{aligned}$$

且对于 $Z_{\tilde{m}}^{-1}$，同样的估计也成立。

此外，$\Sigma^{(\tilde{m}+1)}(\lambda)\subseteq D(R_{\tilde{m}+1})$ 对于 $\lambda\in W_{\delta_{\tilde{m}+1}}(\tilde{\Lambda})$，$\Sigma^{(\tilde{m}+1)}=\Sigma^{(\tilde{m}+1)}_{1}\cup\cdots\cup\Sigma^{(\tilde{m}+1)}_{l_{\tilde{m}+1}}$ 在 $\tilde{\Lambda}$ 上是 $((2R_{\tilde{m}+1})^{m^2},\delta_{\tilde{m}+1},c_{\tilde{m}+1},r_{\tilde{m}+1})$-横截的，并且在 $W_{\delta_{\tilde{m}+1}}(\tilde{\Lambda})$ 中是 $(\nu_{\tilde{m}+1},\zeta_{\tilde{m}+1})$-分离的，其中 $R_{\tilde{m}+1}$、$r_{\tilde{m}+1}$、$\nu_{\tilde{m}+1}$、$\zeta_{\tilde{m}+1}$、$\delta_{\tilde{m}+1}$ 和 $c_{\tilde{m}+1}$ 的定义见 $(\mathcal{P}4.2)_{\tilde{m}+1}$。

此外，对于 $\lambda\in W_{\delta_{\tilde{m}+1}}(\Lambda)$，$1\le i\le l_{\tilde{m}+1}$，

$$d_H(\hat{\Sigma}_i(\lambda),\Sigma_i^{(\tilde{m}+1)}(\lambda))<40m^2\tilde{M}_{\tilde{m}}^{4}\epsilon_{\tilde{m}}^{\frac{1}{m}}<\frac{\nu_{\tilde{m}}-\nu_{\tilde{m}+1}}{4}.$$

根据 $\hat{\Sigma}_i=e^{2\pi\mathrm{i}\langle k_i',\alpha\rangle}\tilde{\Sigma}_i$ 以及 $d_H(\tilde{\Sigma}_i(\lambda),\Sigma^{(\tilde{m})}{}_i(\lambda))<8m^2\tilde{M}_{\tilde{m}}^{3}\epsilon_{\tilde{m}}^{1/m}$ 在 $W_{\delta_{\tilde{m}}}(\tilde{\Lambda})$ 中这一事实，我们得到，对于 $\lambda\in W_{\delta_{\tilde{m}+1}}(\Lambda)$

$$d_H(\Sigma_i^{(\tilde{m}+1)}(\lambda),e^{2\pi\mathrm{i}\langle k_i',\alpha\rangle}\Sigma_i^{(\tilde{m})}(\lambda))<\frac{\nu_{\tilde{m}}-\nu_{\tilde{m}+1}}{2}.$$

情形 b：$s_k\le\tilde{m}<s_{k+1}-1$ 且 $\hat{\Sigma}_1\cup\cdots\cup\hat{\Sigma}_{l_{\tilde{m}}}$ 不 (ν',ζ')-分离 于 $W_{\delta_{\tilde{m}}}(\tilde{\Lambda})$ 中。由 (5.8)、(5.11)、(5.12) 以及 $d_H(\tilde{\Sigma}_i(\lambda),\Sigma^{(\tilde{m})}{}_i(\lambda))<8m^2\tilde{M}_{\tilde{m}}^{3}\epsilon_{\tilde{m}}^{1/m}$ 和 $\hat{\Sigma}_i=e^{2\pi i\langle k_i',\alpha\rangle}\tilde{\Sigma}_i$ 结合 $i=1$、$\cdots$、$l_{\tilde{m}}$ 这一事实，我们对任意 $\lambda\in W_{\delta_{\tilde{m}}}(\tilde{\Lambda})$ 都有，

$$d_H(\hat{\Sigma}_i(\lambda),\hat{\Sigma}_i(\lambda_0))=d_H(\tilde{\Sigma}_i(\lambda),\tilde{\Sigma}_i(\lambda_0))<2\nu_{m_1},\tag{5.14}$$

对某个 $\lambda_0\in\Lambda$ 成立。然后，我们可以重新汇集子集 $\Sigma_1(\lambda)\cdots,\Sigma_{l_{\tilde{m}}}(\lambda)$，使得满足以下条件：

引理 5.2。集合 $\{1,2,\cdots,l_{\tilde{m}}\}$ 可以分解为不交并

$$\{1,2,\cdots,l_{\tilde{m}}\}=\tilde{S}_1\cup\cdots\cup\tilde{S}_{l_{\tilde{m}+1}},$$

使得分解 $\hat{\Sigma}(\lambda)=\acute{\Sigma}_1(\lambda)\cup\cdots\cup\acute{\Sigma}_{l_{\tilde{m}+1}}(\lambda)$ 在 $W_{\delta_{\tilde{m}}}(\tilde{\Lambda})$ 中是 $(\nu',\bar{\zeta})$-分离的，并且在 $\tilde{\Lambda}$ 上是 $(M',\delta_{\tilde{m}},c'',m^2r_{\tilde{m}})$-横截的，其中 $l_{\tilde{m}+1}<l_{\tilde{m}}$，$\bar{\zeta}=m(\zeta'+\nu'+4\nu_{m_1})$，以及

$$\acute{\Sigma}_j=\bigcup_{i\in\tilde{S}_j}\hat{\Sigma}_i,\quad c''=((\frac{\delta_{\tilde{m}}}{4m^4r_{\tilde{m}}^{2}(2R')^{m^2}})^{2m^4r_{\tilde{m}}}c')^{m^{2m^2r_{\tilde{m}}+2}}$$

证明。我们将集合 $\{1,\cdots,l_{\tilde{m}}\}$ 划分为子集 S_1、$\cdots$、S_k 使得

(1) 如果 $\ell \neq \ell'$ 属于同一个 S_i，那么存在 ℓ_1、ℓ_2、$\cdots$、ℓ_t，满足 $\ell_1 = \ell$、$\ell_t = \ell'$，使得对于某个 $\lambda_j \in W_{\delta_{\tilde{m}}}(\tilde{\Lambda})$，$\mathrm{dist}(\hat{\Sigma}_{\ell_j}(\lambda_j), \hat{\Sigma}_{\ell_{j+1}}(\lambda_j)) \leq \nu'$。[3]

(2) 如果 ℓ 和 ℓ' 属于不同子集 S_{i_1}, S_{i_2}，那么不存在这样的路径，这意味着对所有 $\lambda \in W_{\delta_{\tilde{m}}}(\tilde{\Lambda})$，$\mathrm{dist}(\hat{\Sigma}_\ell(\lambda), \hat{\Sigma}_{\ell'}(\lambda)) > \nu'$。

由于 $\hat{\Sigma}_1 \cup \cdots \cup \hat{\Sigma}_{l_{\tilde{m}}}$ 在 $W_{\delta_{\tilde{m}}}(\tilde{\Lambda})$ 和 $\forall \lambda \in W_{\delta_{\tilde{m}}}(\tilde{\Lambda})$ 中并非 (ν', ζ')-分离的，且 $\mathrm{diam}(\hat{\Sigma}_i(\lambda)) \leq \zeta'$，于是 $k < l_{\tilde{m}}$，我们记为 $l_{\tilde{m}+1} = k$。

Let $\acute{\Sigma}_j = \bigcup_{i \in \tilde{S}_j} \hat{\Sigma}_i$。于是 $\hat{\Sigma} = \acute{\Sigma}_1 \cup \cdots \cup \acute{\Sigma}_{l_{\tilde{m}+1}}$。由 (5.14) 以及 $\mathrm{diam}(\hat{\Sigma}_i(\lambda_0)) \leq \zeta'$ 对 $\lambda \in W_{\delta_{\tilde{m}}}(\tilde{\Lambda})$ (引理 5.1)，我们可以得到 $\hat{\Sigma} = \bigcup_{j=1}^{l_{\tilde{m}+1}} \acute{\Sigma}_j$ 是一个 $(\nu', \bar{\zeta})$-分离分解，在 $W_{\delta_{\tilde{m}}}(\Lambda)$ 中其中 $\zeta = m(\zeta' + \nu' + 4\nu_{m_1})$。

此外，由引理 5.1 和引理 3.8，我们可以得到 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_{l_{\tilde{m}+1}}$ 在 $\tilde{\Lambda}$ 上是 $(M', \delta_{\tilde{m}}, c'', m^2 r_{\tilde{m}})$-横截的，且具有 $c'' = (\frac{4m^4 r_{\tilde{m}}^2}{\delta_{\tilde{m}}}(2R')^{m^2})^{2m^4 r_{\tilde{m}} c'})^{m^{2m^2 r_{\tilde{m}}+2}}$。□

此外，存在 $L_{\tilde{m}} \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$，它是交换行的初等矩阵的乘积，且满足 $\|L_{\tilde{m}}\| = \|L_{\tilde{m}}^{-1}\| = 1$，使得共轭分块对角矩阵

$$L_{\tilde{m}}^{-1} A'_{\tilde{m},2} L_{\tilde{m}} =: \acute{A}_{\tilde{m},4} = \mathrm{diag}\{\acute{A}_{\tilde{m},4,11}, \cdots, \acute{A}_{\tilde{m},4,l_{\tilde{m}+1} l_{\tilde{m}+1}}\},$$

具有如下性质：$\acute{A}_{\tilde{m},4,jj} = \mathrm{diag}\{A_{\tilde{m},2,ii} : i \in \tilde{S}_j\}$。设

$$A_{\tilde{m},4} = L_{\tilde{m}}^{-1} A_{\tilde{m},2} L_{\tilde{m}}, \quad F_{\tilde{m},4} = L_{\tilde{m}}^{-1} F_{\tilde{m},2} L_{\tilde{m}}.$$

于是我们有 $|\acute{A}_{\tilde{m},4} - A_{\tilde{m},4}|_{\delta_{\tilde{m}}} \leq 3(m-1)\tilde{M}_{\tilde{m}} \epsilon_{\tilde{m}}$，并且

$$\Sigma(\acute{A}_{\tilde{m},4}(\lambda)) = \hat{\Sigma}(\lambda), \ \Sigma(\acute{A}_{\tilde{m},4,ii}(\lambda)) = \acute{\Sigma}_i(\lambda).$$

由于

$$|\acute{A}_{\tilde{m},4}|_{\delta_{\tilde{m}}} \leq |A'_{\tilde{m},2}|_{\delta_{\tilde{m}}} \leq \tilde{M}', \quad |\acute{A}_{\tilde{m},4} - A_{\tilde{m},4}|_{\delta_{\tilde{m}}} \leq 3(m-1)\tilde{M}_{\tilde{m}} \epsilon_{\tilde{m}},$$

and

$$(6m^4 \tilde{M}' \nu'^{-1})^{m^2+1} (3(m-1)\tilde{M}_{\tilde{m}} \epsilon_{\tilde{m}})^{\frac{1}{2}} < 1, \ 2^7 m^2 \tilde{M}'^3 R' (3(m-1)\tilde{M}_{\tilde{m}} \epsilon_{\tilde{m}})^{\frac{1}{m}} < 1,$$

由引理4.4，存在$Z_{\tilde{m},2} \in C^\omega_{\delta_{\tilde{m}}}(\Lambda, \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}))$，使得

$$Z_{\tilde{m},2}^{-1} A_{\tilde{m},4} Z_{\tilde{m},2} = A_{\tilde{m}+1} = \mathrm{diag}\{A_{\tilde{m}+1,11}, \cdots, A_{\tilde{m}+1,l_{\tilde{m}+1} l_{\tilde{m}+1}}\},$$

其中$|A_{\tilde{m}+1,ii} - \acute{A}_{\tilde{m},4,ii}|_{\delta_{\tilde{m}}} < 9m\tilde{M}'^2 \epsilon_{\tilde{m}}$, $|Z_{\tilde{m},2} - \text{恒等映射}|_{\delta_{\tilde{m}}} < 4m\tilde{M}^{\frac{1}{2}}_{\tilde{m}} \epsilon^{\frac{1}{2}}_{\tilde{m}}$。因此，我们有

$$|A_{\tilde{m}+1}|_{\delta_{\tilde{m}}} \leq \tilde{M}_{\tilde{m}} + 20m\tilde{M}^2_{\tilde{m}} \epsilon_{\tilde{m}} = \tilde{M}_{\tilde{m}+1}.$$

此外，分解 $\Sigma^{(\tilde{m}+1)}(\lambda) = \Sigma^{(\tilde{m}+1)}{}_1(\lambda) \cup \cdots \Sigma^{(\tilde{m}+1)}{}_{l_{\tilde{m}+1}}(\lambda)$在 $W_{\delta_{\tilde{m}}}(\tilde{\Lambda})$, $(2R_{\tilde{m}+1})^{m^2}, \delta_{\tilde{m}}$, $c_{\tilde{m}+1}, r_{\tilde{m}+1}$)-横截于 $\tilde{\Lambda}$，并且对于 $\lambda \in W_{\delta_{\tilde{m}}}(\tilde{\Lambda})$,$\Sigma^{(m+1)}(\lambda) \subseteq D(R_{\tilde{m}+1})$是$(\nu_{\tilde{m}+1}, \zeta_{\tilde{m}+1})$-分离的，其中 $\nu_{\tilde{m}+1}, \zeta_{\tilde{m}+1}, R_{\tilde{m}+1}, c_{\tilde{m}+1}, r_{\tilde{m}+1}$ 如$(\mathcal{P}4.1)_{\tilde{m}+1}$中所定义。

断言 4. 存在一个划分 $\Pi_{\tilde{m}+1}(\Lambda)$，使得对于任意 $\Lambda \in \Pi_{\tilde{m}+1}(\Lambda)$，存在 $\lambda_0 \in \Lambda$，使得

$$d_H(\Sigma_i^{(\tilde{m}+1)}(\lambda), \Sigma_i^{(\tilde{m}+1)}(\lambda_0)) < \nu_{\tilde{m}+1}, \ \forall \lambda \in W_{\delta_{\tilde{m}+1}}(\bar{\Lambda}),$$

其中 $\delta_{\tilde{m}+1} = b^{-1} R_{\tilde{m}}^{-(2m-1)} \nu_{\tilde{m}+1}^m \delta_{\tilde{m}}$。

[3]这里，对于任意 $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$，我们记 $\mathrm{dist}(\Omega_1, \Omega_2) = \inf_{x \in \Omega_1, \ y \in \Omega_2} |x - y|$。

证明。 将 $\tilde{\Lambda}$ 划分为 $1+[\frac{\Lambda}{\delta_{\tilde{m}+1}}]$ 长度相等且小于 $\delta_{\tilde{m}+1}$的区间，这就是 $\tilde{\Lambda}$ 的划分，记作 Λ，记为 $\Pi_{\tilde{m}+1}(\Lambda)$。对于任意 $\Lambda\in\Pi_{\tilde{m}+1}(\Lambda)$，固定某个 $\lambda_0\in\Lambda$，对于任意 $\lambda\in W_{\delta_{\tilde{m}+1}}(\bar{\Lambda})$，$|\lambda-\lambda_0|<2\delta_{\tilde{m}+1}$。由于 $\delta_{\tilde{m}+1}<\frac{\nu_{\tilde{m}+1}^m}{4m^{m+1}R_{\tilde{m}+1}^{2m-1}}\delta_{\tilde{m}}$，那么与（3.8）类似，我们可以得到所需结果。□

现在令 $F_{\tilde{m}+1}=Z_{\tilde{m}}^{-1}\,{}_2F_{\tilde{m}}\,{}_4Z_{\tilde{m}}\,{}_2$，以及 $Z_{\tilde{m}}=e^{Y_{\tilde{m}}}H_{\tilde{m}}L_{\tilde{m}}Z_{\tilde{m}}\,{}_2$。于是结论成立。

情形 c： $\tilde{\mathbf{m}}=\mathbf{s_{k+1}}-\mathbf{1}$。 由引理 5.1 和引理 3.8，$\hat{\Sigma}(\lambda)$ 在 $(M',\ \delta_{\tilde{m}},\ \tilde{c}',\ m^2r_{\tilde{m}})$-$\tilde{}$上横截 Λ，其中

$$\tilde{c}'=((\frac{\delta_{\tilde{m}}}{4m^4r_{\tilde{m}}^2(2R')^{m^2}})^{m^4r_{\tilde{m}}}c')^{m^{2m^2r_{\tilde{m}}+2}}.$$

记 $\Sigma'(\lambda):=\Sigma(A_{\tilde{m},\ 2}(\lambda))$，$R_{\tilde{m}+1}=R_{\tilde{m}}+bR_{\tilde{m}}^2\tilde{M}_{\tilde{m}}^4\epsilon_{\tilde{m}}^{\frac{1}{m}}$，和

$$\tilde{c}''=\tilde{c}'-2^{8m+2}m^{10m^2+1}R_{\tilde{m}}^{3m^2}\tilde{M}_{\tilde{m}}^{m+1}(\frac{2m^2r_{\tilde{m}}}{\delta_{\tilde{m}}})^{m^2r_{\tilde{m}}}\epsilon_{\tilde{m}}.$$

那么，由于

$$64m^2\tilde{M}'^2R'(3(m-1)\tilde{M}_{\tilde{m}}\epsilon_{\tilde{m}})^{\frac{1}{m}}<1,\quad |A_{\tilde{m},2}-A'_{\tilde{m},2}|_{\delta_{\tilde{m}}}\le 3(m-1)\tilde{M}_{\tilde{m}}\epsilon_{\tilde{m}},$$

根据引理 3.10 取 $l=1$，我们可以得到 $\Sigma'(\lambda)\subseteq D(R_{\tilde{m}+1})$ 对所有 $\lambda\in W_{\delta_{\tilde{m}}}(\Lambda)$ 成立，并且多重集 $\Sigma'(\lambda)$ 是 $((2R_{\tilde{m}+1})^2,\delta_{\tilde{m}},\tilde{c}'',m^2r_{\tilde{m}})$-横截于 $\tilde{\Lambda}$。

令$M_{\tilde{m}+1}$，和 $\epsilon_{\tilde{m}+1}$，按 $(\mathcal{P}3)_{\tilde{m}+1}$ 中的定义。根据 $\tilde{}$ 命题 3.1 取 $\nu_{\tilde{m}+1}$，存在一个划分 $\Pi_{\tilde{m}+1}(\Lambda)$，使得 Λ 满足

$$\#\Pi_{\tilde{m}+1}(\tilde{\Lambda})\le 1+\frac{|\tilde{\Lambda}|}{\delta_{\tilde{m}+1}},$$

$\tilde{}$ 使得对于每个 $\Lambda\in\Pi_{\tilde{m}+1}(\Lambda)$，都存在一个相似变换 $Z_{\tilde{m},\ 3}\in C^\omega_{\delta_{\tilde{m}+1}}(\Lambda,\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$，使得

$$Z_{\tilde{m},3}^{-1}A_{\tilde{m},2}Z_{\tilde{m},3}=A_{\tilde{m}+1}=\mathrm{diag}\{A_{\tilde{m}+1,11},\cdots,A_{\tilde{m}+1,l_{\tilde{m}+1}l_{\tilde{m}+1}}\},$$

其中 $|Z_{\tilde{m},\ 3}|_{\delta_{\tilde{m}+1}},|Z_{\tilde{m}}^{-1}\,{}_3|_{\delta_{\tilde{m}+1}},|A_{\tilde{m}+1,\ ii}|_{\delta_{\tilde{m}+1}}\le\tilde{M}_{\tilde{m}+1}$。于是可以验证，$A_{\tilde{m}+1}\in C^\omega_{\delta_{\tilde{m}+1}}(\Lambda,\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$ 满足 $(\mathcal{P}1)_{\tilde{m}+1}$ 和 $(\mathcal{P}2)_{\tilde{m}+1}$。

此外，存在 $\lambda_0\in\bar{\Lambda}$，使得分解 $\Sigma^{(\tilde{m}+1)}(\lambda_0)=\Sigma_1^{(\tilde{m}+1)}(\lambda_0)\cup\cdots\cup\Sigma_{(\tilde{m}+1)^{l_{\tilde{m}+1}}}(\lambda_0)$ 是 $(8\nu_{\tilde{m}+1},\zeta_{\tilde{m}+1})$-分离的，并且 $\forall\lambda\in W_{\delta_{\tilde{m}+1}}(\bar{\Lambda})$，我们有

$$d_H(\Sigma_i^{(\tilde{m}+1)}(\lambda),\Sigma_i^{(\tilde{m}+1)}(\lambda_0))<\nu_{\tilde{m}+1}.$$

$\tilde{}$设 $\Pi_{\tilde{m}+1}=\cup_{\tilde{\Lambda}\in\Pi_{\tilde{m}}}\Pi_{\tilde{m}+1}(\Lambda)$。则

$$\begin{aligned}\#\Pi_{\tilde{m}+1}&=\sum_{\tilde{\Lambda}\in\Pi_{\tilde{m}}}\#\Pi_{\tilde{m}+1}(\tilde{\Lambda})\le\sum_{\tilde{\Lambda}\in\Pi_{\tilde{m}}}(1+\frac{|\tilde{\Lambda}|}{\delta_{\tilde{m}+1}})\\&\le\#\Pi_{\tilde{m}}+\frac{bR_{\tilde{m}}^{6m}\tilde{M}_{\tilde{m}}^{3m}|\Lambda|}{\nu_{\tilde{m}+1}^{3m}}\max_{\tilde{\Lambda}\in\Pi_{\tilde{m}}}\frac{1}{\delta_{\tilde{m}}(\tilde{\Lambda})},\end{aligned}$$

$\tilde{}$由于 $\delta_{\tilde{m}}$ 可能随 $\Lambda\in\Pi_{\tilde{m}}$ 变化，。

Let

$$F_{\tilde{m}+1}=Z_{\tilde{m},3}^{-1}F_{\tilde{m},2}Z_{\tilde{m},3},\quad Z_{\tilde{m}}=e^{Y_{\tilde{m}}}H_{\tilde{m}}Z_{\tilde{m},3}.$$

˜根据（5.4）、（5.5）、（5.6）、（5.8）以及 $u_{s_{k+1}}$ 在（5.2）中的定义，我们可以验证 $2M_{\tilde{m}+1}<\epsilon_{\tilde{m}}^{-m}$，并且以下估计成立：

$$|F_{\tilde{m}+1}|_{h_{\tilde{m}+1},\delta_{\tilde{m}+1}}\le \tilde{M}_{\tilde{m}+1}^2|F_{\tilde{m},2}|_{h_{\tilde{m}+1},\delta_{\tilde{m}}}<\epsilon_{\tilde{m}}^{4m8^{\tilde{m}}-2m}<\epsilon_{\tilde{m}+1},$$

$$|Z_{\tilde{m}}|_{h_{\tilde{m}+1},\delta_{\tilde{m}+1}}^{\frac{\tilde{m}^2}{2}}|F_{\tilde{m}+1}|_{h_{\tilde{m}+1},\delta_{\tilde{m}+1}}<\epsilon_{\tilde{m}}^{1+m(4\cdot 8^{\tilde{m}}a_m^p-2^{\tilde{m}+1}\tilde{m}^2a_{\tilde{m}}^p-\frac{\tilde{m}^2}{2}-2)}<\epsilon_{\tilde{m}},$$

$$|Z_{\tilde{m}}|_{h_{\tilde{m}+1},\delta_{\tilde{m}+1}}<2\tilde{M}_{\tilde{m}+1}\epsilon_{\tilde{m}}^{-m2^{\tilde{m}+2}a_{\tilde{m}}^p}<\epsilon_{\tilde{m}}^{-m(2^{\tilde{m}+2}a_{\tilde{m}}^m+1)}<\epsilon_{\tilde{m}+2m+2}^{-1},$$

并且对于 $Z_{\tilde{m}}^{-1}$，同样的估计也成立。

为此 ，对于 $s_k\le\tilde{m}<s_{k+1}-1$，在两种情况下（情况 a 和 b），我们都可以得到

$$\#\Pi_{\tilde{m}+1}=\sum_{\tilde{\Lambda}\in\Pi_{\tilde{m}}}\#\Pi_{\tilde{m}+1}(\tilde{\Lambda})\le\sum_{\tilde{\Lambda}\in\Pi_{\tilde{m}}}(1+\frac{bR_{\tilde{m}}^{2m-1}|\tilde{\Lambda}|}{\nu_{\tilde{m}+1}^m\delta_{\tilde{m}}})\le\#\Pi_{\tilde{m}}+\frac{bR_{\tilde{m}}^{2m-1}|\Lambda|}{\nu_{\tilde{m}+1}^m}\max_{\tilde{\Lambda}\in\Pi_{\tilde{m}}}\frac{1}{\delta_{\tilde{m}}}.$$

证明完毕。 □

5.4. **命题 5.2的证明：**由（5.9）和（5.10），我们可以归纳验证，对于任意 $j\ge1$,

$$\tilde{M}_j'<2\tilde{M}_1',\quad \tilde{R}_j<2\tilde{R}_1,\quad \tilde{\delta}_j>\tilde{\epsilon}_j^{\frac{1}{4\tilde{r}_1'}},\quad (2^j|\ln\tilde{\epsilon}_j|)^{\tau+d}<\tilde{\epsilon}_j^{-\frac{\varrho}{100\tilde{r}_1'^2}}.\tag{5.15}$$

于是由（5.10），可得

$$\frac{(\tilde{r}_1'+1)!}{(\tilde{\delta}_{j+1}/2)^{\tilde{r}_1'+1}}(8m^4\tilde{R}_j\tilde{M}_j')^{3m^2}\tilde{\epsilon}_j<\tilde{\epsilon}_j^{-\frac{1}{32}}\tilde{\epsilon}_{j+1}^{-\frac{\tilde{r}_1'+1}{4\tilde{r}_1'}}\tilde{\epsilon}_j\le\tilde{\epsilon}_j^{\frac{1}{5}},$$

这意味着 $\tilde{C}_j<\tilde{C}_1+2\tilde{\epsilon}_1^{\frac{1}{5}}<2\tilde{C}_1$，并且 $\tilde{c}_j'>\tilde{c}_1'-2\tilde{\epsilon}_1^{\frac{1}{5}}>\frac{\tilde{c}_1'}{2}$根据（5.9）。此外，同样根据（5.9），我们可以验证

$$\tilde{c}_1'K_1>\tilde{\epsilon}_1^{\frac{1}{100\tilde{r}_1'^2}}\tilde{\epsilon}_1^{-\frac{1}{10\tilde{r}_1'}}>4,$$

因此，对于任意 $j\ge1$、$\tilde{c}_j'>2K_j^{-1}$。

5.4.1. 子集 $\Lambda^{(j+1)}\subseteq\Lambda^{(j)}$ 的选取。

引理 5.3。存在 $\Lambda^{(j+1)}\subseteq\Lambda^{(j)}$，使得对于任意 $\bar{\Lambda}^{(j+1)}\in\mathcal{C}(\Lambda^{(j+1)})$、$\lambda\in W_{\tilde{\delta}_{j+1}}(\bar{\Lambda}^{(j+1)})$、$0\le|k|\le\tilde{N}_j$，均有

$$|g_j(\lambda,\langle k,\alpha\rangle)|>\frac{1}{2K_j},$$

其中

$$\Lambda^{(j+1)}=\Lambda^{(j)}\backslash\mathcal{R}_j(\tilde{\Lambda}),\quad \mathcal{R}_j(\tilde{\Lambda})=\cup_{i\in J_j(\tilde{\Lambda})}I_i^{(j)},$$

[2]其中 $\{I_i^{(j)}\}_i\subseteq\Lambda^{(j)}$ 是不交区间，$|I_i^{(j)}|<\tilde{\epsilon}_j^{\frac{1}{25\tilde{r}_1'^2}}$，且

$$\#J_j(\tilde{\Lambda})\le2^{\tilde{r}_1'+d}\tilde{N}_j^d(\frac{8\tilde{C}_1}{\tilde{c}_1'}|\Lambda^{(j)}|+\#\mathcal{C}(\Lambda^{(j)})),$$

$$\#\mathcal{C}(\Lambda^{(j+1)})\le2\#\mathcal{C}(\mathcal{R}^{(j)}(\tilde{\Lambda})).$$

证明。 根据命题 5.2中的假设，对于任意 $\bar{\Lambda}^{(j)} \in \mathcal{C}(\Lambda^{(j)})$ 和 $u \in \mathbb{T}$，函数 $g_j(\lambda, u)$ 在 $\bar{\Lambda}^{(j)}$ 上是 $(\tilde{C}_j, \tilde{c}'_j, \tilde{r}'_1)$-Pyartli。由于 $\tilde{c}'_j > 2K_j^{-1}$，由引理 3.5 可知，对于任意 $0 \le |k| \le \tilde{N}_j$，存在一个区间的不交并 $\cup_{i\in J_{j,k}(\bar{\Lambda}^{(j)})} I_{k,i}(\bar{\Lambda}^{(j)}) \subseteq \bar{\Lambda}^{(j)}$，使得

$$\max_{i\in J_{j,k}(\bar{\Lambda}^{(j)})} |I_{k,i}(\bar{\Lambda}^{(j)})| \le 2(\frac{2K_j^{-1}}{\tilde{c}'_j})^{\frac{1}{\tilde{r}'_1}}, \tag{5.16}$$

$$\#J_{j,k}(\bar{\Lambda}^{(j)}) \le 2^{\tilde{r}'_1}(\frac{2\tilde{C}_j|\bar{\Lambda}^{(j)}|}{\tilde{c}'_j} + 1) < 2^{\tilde{r}'_1}(\frac{8\tilde{C}_1|\bar{\Lambda}^{(j)}|}{\tilde{c}'_1} + 1), \tag{5.17}$$

$$|g_j(\lambda, \langle k, \alpha\rangle)| \ge K_j^{-1}, \quad \forall \lambda \in \bar{\Lambda}^{(j)} \setminus \cup_{i\in J_{j,k}(\bar{\Lambda}^{(j)})} I_{k,i}(\bar{\Lambda}^{(j)}).$$

Let

$$\mathcal{R}_j(\tilde{\Lambda}) = \cup_{|k|=0}^{\tilde{N}_j} \cup_{\bar{\Lambda}^{(j)}\in\mathcal{C}(\Lambda^{(j)})} \cup_{i\in J_{j,k}(\bar{\Lambda}^{(j)})} I_{k,i}(\bar{\Lambda}^{(j)}) =: \cup_{i\in J_j(\tilde{\Lambda})} I_i^{(j)}, \quad \Lambda^{(j+1)} = \Lambda^{(j)} \setminus \mathcal{R}_j(\tilde{\Lambda}).$$

不失一般性，我们假设 $\#J_{j,k}(\bar{\Lambda}^{(j)}) \ge 1$；否则，我们可以取任意区间 $I_{k,1}(\bar{\Lambda}^{(j)}) \subseteq \bar{\Lambda}^{(j)}$ with $|I_{k,1}(\bar{\Lambda}^{(j)})| \le 2(\frac{2K_j^{-1}}{\tilde{c}'_j})^{\frac{1}{\tilde{r}'_1}}$。

那么对于任意 $\bar{\Lambda}^{(j+1)} \in \mathcal{C}(\Lambda^{(j+1)})$、$\lambda \in W_{\tilde{\delta}_{j+1}}(\bar{\Lambda}^{(j+1)})$，存在 $\lambda' \in \bar{\Lambda}^{(j+1)}$ 使得 $|\lambda - \lambda'| < \tilde{\delta}_{j+1}$。由于 $|g_j(\lambda, u)|_{\tilde{\delta}_j} \le (2\tilde{R}_j)^{m^2}$，由柯西估计可得

$$|g_j(\lambda, u) - g_j(\lambda', u)| \le |\frac{\partial}{\partial\lambda} g_j(\lambda, u)|_{\tilde{\delta}_{j+1}} |\lambda - \lambda'| < \frac{(2\tilde{R}_j)^{m^2}}{\tilde{\delta}_j/2}\tilde{\delta}_{j+1} = \frac{1}{2K_j},$$

这意味着对于任意 $0 \le |k| \le N_j$,

$$|g_j(\lambda, \langle k, \alpha\rangle)| \ge |g_j(\lambda', \langle k, \alpha\rangle)| - |g_j(\lambda, \langle k, \alpha\rangle) - g_j(\lambda', \langle k, \alpha\rangle)| > \frac{1}{2K_j}.$$

此外，根据（5.17），

$$\begin{aligned} \#J_i(\tilde{\Lambda}) &\le (2\tilde{N}_j)^d \sum_{\bar{\Lambda}^{(j)}\in\mathcal{C}(\Lambda^{(j)})} 2^{\tilde{r}'_1}(\frac{8\tilde{C}_1|\bar{\Lambda}^{(j)}|}{\tilde{c}'_1} + 1) \\ &\le 2^{\tilde{r}'_1+d}\tilde{N}_j^d \left(\frac{8\tilde{C}_1}{\tilde{c}'_1}|\Lambda^{(j)}| + \#\mathcal{C}(\Lambda^{(j)})\right). \end{aligned}$$

此外，根据 $\Lambda^{(j+1)}$ 的定义以及 $\#J_{j,\ k}(\bar{\Lambda}^{(j)}) \ge 1$，我们可以得到

$$\#\mathcal{C}(\Lambda^{(j+1)}) \le \sum_{\bar{\Lambda}^{(j)}\in\mathcal{C}(\Lambda^{(j)})} (1 + \#\mathcal{R}_j(\bar{\Lambda}^{(j)})) \le 2\#\mathcal{C}(\mathcal{R}^{(j)}(\tilde{\Lambda})),$$

其中 $\#\mathcal{R}_j(\bar{\Lambda}^{(j)}) = \cup_{|k|=0}^{N_j} \cup_{i\in J_{j,\ k}(\bar{\Lambda}^{(j)})} I_{k,\ i}(\bar{\Lambda}^{(j)})$。

为此，根据（5.16），对于任意区间 $I_i^{(j)} \in \mathcal{C}(\mathcal{R}_j(\tilde{\Lambda}))$，我们有

$$|I_i^{(j)}| \le 2(\frac{2K_j^{-1}}{\tilde{c}'_j})^{\frac{1}{\tilde{r}'_1}} \le 8\tilde{\epsilon}_j^{\frac{1}{10\tilde{r}'_1}}\tilde{c}_1'^{-1} < \tilde{\epsilon}_j^{\frac{2}{25\tilde{r}'_1}}.$$

□

5.4.2. 消去非共振项。

断言 5. 对于任意 $\bar{\Lambda}^{(j+1)} \in \mathcal{C}(\Lambda^{(j+1)})$, $\lambda \in \bar{\Lambda}^{(j+1)}$, 多重集 $\tilde{\Sigma}_j(\lambda)$ 为

$$(\tilde{N}_j, (2\gamma^{-1}K_j(2\tilde{R}_j)^{m^2}\tilde{N}_j^{\tau})^{-1})$$

-与自身非共振。

证明。 首先，对于任意 $0 < |k| \le \tilde{N}_j$, $\lambda \in W_{\tilde{\delta}_{j+1}}(\bar{\Lambda}^{(j+1)})$, σ_{ℓ_1}, $\sigma_{\ell_2} \in \tilde{\Sigma}_j(\lambda)$, 若 $\ell_1 \neq \ell_2$, 则

$$\begin{aligned} |g_j(\lambda, \langle k, \alpha\rangle)| &= |\sigma_{\ell_1} - e^{2\pi \mathrm{i}\langle k,\alpha\rangle}\sigma_{\ell_2}| \prod_{\substack{\sigma_{i_1},\sigma_{i_2}\in\tilde{\Sigma}_j(\lambda),\\ i_1\neq i_2,(i_1,i_2)\neq(\ell_1,\ell_2)}} |\sigma_{i_1} - e^{2\pi \mathrm{i}\langle k,\alpha\rangle}\sigma_{i_2}| \\ &\le (2\tilde{R}_j)^{m^2-m-1}|\sigma_{\ell_1} - e^{2\pi \mathrm{i}\langle k,\alpha\rangle}\sigma_{\ell_2}|, \end{aligned}$$

根据引理 5.3，可知

$$|\sigma_{\ell_1} - e^{2\pi \mathrm{i}\langle k,\alpha\rangle}\sigma_{\ell_2}| \ge \frac{1}{2K_j(2\tilde{R}_j)^{m^2-m-1}} > \frac{\gamma}{2K_j(2\tilde{R}_j)^{m^2}\tilde{N}_j^{\tau}}.$$

此外，对于任意 $0 < |k| \le \tilde{N}_j$, $\lambda \in W_{\tilde{\delta}_{j+1}}(\bar{\Lambda}^{(j+1)})$, $\sigma \in \tilde{\Sigma}_j(\lambda)$,

$$|\sigma - e^{2\pi \mathrm{i}\langle k,\alpha\rangle}\sigma| \ge \frac{1}{\tilde{R}_j} \cdot \frac{\gamma}{2|k|^{\tau}} \ge \frac{\gamma}{2\tilde{R}_j\tilde{N}_j^{\tau}} > \frac{\gamma}{2K_j(2\tilde{R}_j)^{m^2}\tilde{N}_j^{\tau}}.$$

结论得证。 □

根据定义 4.2，结合 $l = 1$，对于任意 $\bar{\Lambda}^{(j+1)} \in \mathcal{C}(\Lambda^{(j+1)})$，多重集 $\tilde{\Sigma}_j(\lambda)$ 满足$\mathcal{H}(\tilde{N}_j, \tilde{N}_j, 2\gamma^{-1}K_j(2\tilde{R}_j)^{m^2}\tilde{N}_j^{\tau})$在 $W_{\tilde{\delta}_{j+1}}(\bar{\Lambda}^{(j+1)})$上成立。此外，由（5.10）和（5.15），可以验证

$$\tilde{\epsilon}_j < (12m^5\tilde{M}_j'^2\gamma^{-1}K_j(2\tilde{R}_j)^{m^2}\tilde{N}_j^{\tau})^{-2m^2}.$$

应用命题 4.1于 $\tilde{A}_j + \tilde{F}_j$，得到 $Y_j, \tilde{F}_{(re)j}, \tilde{F}_{j+1} \in C^{\omega}_{\tilde{h}_j,\tilde{\delta}_{j+1}}(\mathbb{T}^d \times \bar{\Lambda}^{(j+1)}, gl(m,\mathbb{C}))$，使得

$$e^{-Y_j^+(\cdot)}(\tilde{A}_j + \tilde{F}_j(\cdot))e^{Y_j(\cdot)} = \tilde{A}_{j+1} + \tilde{F}_j^{(re)}(\cdot) + \tilde{F}_{j+1}(\cdot),$$

结合 $|Y_j|_{\tilde{h}_j,\ \tilde{\delta}_{j+1}} \le \tilde{\epsilon}_j^{\frac{1}{2}}$, $|\tilde{A}_{j+1} - \tilde{A}_j|_{\tilde{\delta}_{j+1}} \le 3\tilde{M}_j'\tilde{\epsilon}_j$, $\tilde{F}_{(re)j} \equiv 0$, 以及

$$|\tilde{F}_{j+1}|_{\tilde{h}_{j+1},\tilde{\delta}_{j+1}} \le 3\tilde{M}_j' e^{-2\pi\tilde{N}_j(\tilde{h}_j - \tilde{h}_{j+1})}\tilde{\epsilon}_j < \tilde{\epsilon}_j^{\frac{3}{2}} = \tilde{\epsilon}_{j+1},$$

其中 $Y_j^+(\cdot) = Y_j(\cdot + \alpha)$。

5.4.3. 验证 $\tilde{A}_{j+1}$。 根据引理 3.10和 $l = 1$，由于 $64m^2\tilde{M}_j'^2\tilde{R}_j(3\tilde{M}_j'\tilde{\epsilon}_j)^{\frac{1}{m}} < 1$，因此 $\tilde{\Sigma}_{j+1}(\lambda) \subseteq D(\tilde{R}_{j+1})$对于 $\lambda \in W_{\tilde{\delta}_{j+1}}(\bar{\Lambda}^{(j+1)})$，且对于任意 $u \in \mathbb{T}$

$$|g_{j+1}(\cdot, u) - g_j(\cdot, u)|_{\tilde{\delta}_{j+1}} < 2^{8m+2}(m^{10}\tilde{R}_j^3)^{m^2}\tilde{M}_j'^{m+1}\tilde{\epsilon}_j,$$

其中 $\tilde{\Sigma}_{j+1}(\lambda) = \Sigma(\tilde{A}_{j+1}(\lambda))$, 且 $g_{j+1}(\lambda,u)=\prod_{\sigma_{\ell_1},\ \sigma_{\ell_2}\in\tilde{\Sigma}_{j+1}(\lambda)}(\sigma_{\ell_1}-e^{2\pi iu}\sigma_{\ell_2})$。因此，对于 $_{\ell_1\neq\ell_2}$任意 $u\in\mathbb{T}$，可得 $|g_{j+1}|_{\tilde{\delta}_{j+1}}\leq(2\tilde{R}_{j+1})^{m^2}$，且对于任意 $\lambda\in W_{\frac{\tilde{\delta}_{j+1}}{2}}(\bar{\Lambda}^{(j+1)})\cap\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq l\leq\tilde{r}'_1}|\frac{\partial^l}{\partial\lambda^l}g_{j+1}(\lambda,u)|\\ &\geq\ \sup_{0\leq l\leq\tilde{r}'_1}|\frac{\partial^l}{\partial\lambda^l}g_j(\lambda,u)|-\frac{\tilde{r}'_1!}{(\tilde{\delta}_{j+1}/2)^{\tilde{r}'_1}}2^{8m+2}(m^{10}\tilde{R}_j^3)^{m^2}\tilde{M}_j'^{m+1}\tilde{\epsilon}_j>\tilde{c}'_{j+1}.\end{aligned}$$

因此，$\tilde{\Sigma}_{j+1}$ 是 $\bar{\Lambda}^{(j+1)}\in\mathcal{C}(\Lambda^{(j+1)})$ 上的 $((2\tilde{R}_{j+1})^{m^2},\tilde{\delta}_{j+1},\tilde{c}'_{j+1},\tilde{r}'_1)$-横截的。此外，对于任意 $\lambda\in\bar{\Lambda}^{(j+1)}$，我们也有

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq l\leq\tilde{r}'_1+1}|\frac{\partial^l}{\partial\lambda^l}g_{j+1}(\lambda,u)|\ &\leq\ \sup_{0\leq l\leq\tilde{r}'_1+1}|\frac{\partial^l}{\partial\lambda^l}g_j(\lambda,u)|+\frac{(\tilde{r}'_1+1)!}{\tilde{\delta}_{j+1}^{\tilde{r}'_1+1}}2^{8m+2}(m^{10}\tilde{R}_j^3)^{m^2}\tilde{M}_j'^{m+1}\tilde{\epsilon}_j\\ &<\ \tilde{C}_{j+1}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

6. Proof of main results

本节给出主要结果的证明。在给出详细证明之前，我们先陈述一个辅助引理，该引理将用于给出 KAM 步中的有用估计。回顾一下，$b\geq(120m)^{8m^3}$, $\kappa\geq m^{2m^2+10}$ 是仅依赖于 m 的常数。

˜**引理 6.1**。假设 $M_1>5$、$0<\epsilon_1<1$ 和 $\Theta\subseteq\mathbb{N}$ 满足 $\#(\Theta\cap[s_k,s_{k+1}))\leq m$。˜那么对于 $n\geq2$，我们归纳定义 R_n、M_n、δ_n 和 c_n：

$$R_{n+1}=R_n+bR_n^2\tilde{M}_n^4\epsilon_n^{\frac{1}{m}};$$

a) 对于 $n=s_k-1$，我们令

$$\begin{aligned}r_{n+1}&=m^2r_n,\quad \nu_{n+1}=u_{s_k},\\ \delta_{n+1}&=b^{-1}R_n^{-6m}(\nu_{n+1}\tilde{M}_n^{-1})^{\kappa}\delta_n,\\ \tilde{M}_{n+1}&=b(\nu_{n+1}^{-1}\tilde{M}_n)^{\kappa},\\ c_{n+1}&=(b^{-1}R_n^{-1}r_n^{-1}\delta_n\nu_{n+1}\tilde{M}_n^{-1}c_n)^{\kappa^{r_n}}-r_n^{\kappa r_n}\epsilon_n.\end{aligned}$$

b) 对于 $s_k\leq n<s_{k+1}-1$ 和 $n\notin\Theta$，我们有：

$$\begin{aligned}r_{n+1}&=r_n,\quad \nu_{n+1}=\nu_n-b\tilde{M}_n^4\epsilon_n^{\frac{1}{m}},\\ \delta_{n+1}&=\delta_n,\quad \tilde{M}_{n+1}=\tilde{M}_n+20m\tilde{M}_n^2\epsilon_n,\\ c_{n+1}&=c_n-bR_n^{3m^2}\tilde{M}_n^{m+2}(2\delta_n^{-1}r_n)^{r_n}\epsilon_n.\end{aligned}$$

c) 对于 $s_k\leq n<s_{k+1}-1$ 和 $n\in\Theta$，有：

$$\begin{aligned}&r_{n+1}=m^2r_n,\quad \nu_{n+1}=\nu_n-b\tilde{M}_n^4\epsilon_n^{\frac{1}{m}},\\ &\delta_{n+1}=b^{-1}R_n^{-(2m-1)}\nu_n^m\delta_n,\quad \tilde{M}_{n+1}=\tilde{M}_n+20m\tilde{M}_n^2\epsilon_n,\\ &c_{n+1}=(b^{-1}R_n^{-1}r_n^{-1}\delta_nc_n)^{\kappa^{r_n}}-(bR_n\tilde{M}_n\delta_n^{-1}r_n)^{\kappa r_n}\epsilon_n,\end{aligned}$$

其中 b, κ 是仅依赖于 m的常数。于是存在一个依赖于m, R_1, M_1, δ_1, r_1, c_1, γ, τ的 $\epsilon_* > 0$, 使得若 $\epsilon_1 \le \epsilon_*$, 则以下估计成立:

$$R_n < 2R_1 =: R, \tag{6.1}$$

$$\tilde{M}_n \le (\tilde{M}_1 \frac{|\ln \epsilon_1|}{2\pi h_1})^{b_3 \ln n} e^{b_3 e^{4\sqrt{n}}}, \tag{6.2}$$

$$\delta_n > \delta_1 (\tilde{M}_1 \frac{|\ln \epsilon_1|}{2\pi h_1})^{-b_4 \ln n} e^{-b_4 e^{4\sqrt{n}}}, \tag{6.3}$$

$$c_n > (c_1 \frac{2\pi h_1}{|\log \epsilon_1|})^{n^{b_5}} e^{-b_6 e^{5\sqrt{n}}}, \tag{6.4}$$

˜其中 $b_3 = b_3(R, m, \tau, \gamma)$、 $b_4 = b_4(R, m, \tau, \gamma)$、 $b_5 = b_5(m, R, \gamma, \tau, \delta_1, r_1, M_1)$ 以及 $b_6 = b_6(m, R, \gamma, \tau, \delta_1, r_1, M_1)$。

证明。 首先，我们注意到

$$r_n \le m^{2(m+1)\xi_n} r_1 \le m^{36m} e^{8m(\ln m) \ln^{(8)}(n)} r_1 \le d_3(m) r_1 \ln^{(6)}(n). \tag{6.5}$$

此外，根据第 u_n 和 ϵ_n 节开头对它们的定义 5，存在 $\epsilon_{*,\ 0} = \epsilon_{*,\ 0}(m, R_1, h_1, \gamma, \tau,)$，使得若 $\epsilon_1 < \epsilon_{*,\ 0}$，则对任意 $n \ge 1$

$$\epsilon_n^{\frac{1}{4m}} < u_{n+1}. \tag{6.6}$$

此外，存在 $n_* = n_*(m) \in \mathbb{N}$，使得对任意 $n \ge n_*$，都有 $4^n > \kappa + 2$.˜因此，存在 $\epsilon_{*,\ 1} = \epsilon_{*,\ 1}(m, M_1, R_1, h_1, \gamma, \tau)$，使得若 $\epsilon_1 < \epsilon_{*,\ 1}$，则对任意$n \le n_*$，都有 $b\tilde{M}_n^4 \epsilon_n^{\frac{1}{2m}} < 1$ 和 $\epsilon_n^{\frac{1}{4m}} < \nu_{n+1}$。于是，若 $\epsilon_1 < \min\{\epsilon_{*,0}, \epsilon_{*,1}\}$，我们可以验证，对任意 $n \ge 1$,

$$b\tilde{M}_n^4 \epsilon_n^{\frac{1}{2m}} < 1. \tag{6.7}$$

原因如下：根据 $\epsilon_{*,\ 1}$ 的选取，我们只需证明 (6.7) 对 $n \ge n_* + 1$ 成立。假设 (6.7) 对 $n = j \ge n_*$ 成立。那么对于 $n = j + 1$，若$s_k \le j < s_{k+1} - 1$ 对某个 s_k 成立，则可得

$$b\tilde{M}_{j+1}^4 \epsilon_{j+1}^{\frac{1}{2m}} = b(\tilde{M}_j + 20m\tilde{M}_j^2 \epsilon_j)^4 \epsilon_j^{\frac{4^j}{2m}} < b\tilde{M}_j^4 \epsilon_j^{\frac{1}{2m}} \cdot 2^4 \epsilon_j^{\frac{4^j - 1}{2m}} < 1.$$

否则，若 $j = s_{k+1} - 1$，则由 (6.6) 以及 n_* 的选取，可得

$$b\tilde{M}_{j+1}^4 \epsilon_{j+1}^{\frac{1}{2m}} = b^5 \nu_{s_{k+1}}^{-4\kappa} \tilde{M}_j^{4\kappa} \epsilon_j^{\frac{4^j}{2m}} < \epsilon_j^{-\frac{\kappa}{m}} (b\tilde{M}_j^4 \epsilon_j^{\frac{1}{2m}})^\kappa \epsilon_j^{\frac{4^j - \kappa}{2m}} < 1.$$

现在，对于任意 $n \ge 1$，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $s_k \le n < s_{k+1}$。然后通过直接计算可得:

$$\begin{aligned}
\ln \tilde{M}_n &\le \kappa \ln \tilde{M}_{s_k - 1} + \kappa \ln u_{s_k}^{-1} + \ln(2b) \\
&\le d_4(m, \tau, R, \gamma) \ln(\frac{|\ln \epsilon_1|}{2\pi h_1}) + d_5(m, \tau) e^{4\sqrt{s_k}} + \kappa \ln \tilde{M}_{s_k - 1} \\
&\le \kappa^k \ln \tilde{M}_1 + \frac{\kappa^k - 1}{\kappa - 1} d_4 \ln(\frac{|\ln \epsilon_1|}{2\pi h_1}) + d_5(\kappa^{k-1} e^{4\sqrt{s_1}} + \kappa^{k-2} e^{4\sqrt{s_2}} + \cdots + e^{4\sqrt{s_k}}).
\end{aligned}$$

由 $\sqrt{s_{k+1}} > e^{\sqrt{s_k}}$ 这一事实，我们得到

$$\kappa^{k-1} e^{4\sqrt{s_1}} + \kappa^{k-2} e^{4\sqrt{s_2}} + \cdots + e^{4\sqrt{s_k}} \le k_* e^{4\sqrt{k}_*} \kappa^k + 2e^{4\sqrt{s_k}},$$

其中， k_* 是一个仅取决于 m 的常数。此外，由于 $\kappa^{\xi_n} \le \kappa^{9+2\ln d_7}\ln^{(6)}(n)$，其中 $d_7 = d_7(m)$ 是一个仅取决于 m 的常数，我们可以得到

$$\begin{aligned}\ln \tilde{M}_n &\le b_3(R,m,\tau,\gamma)(\ln^{(6)}(n)\cdot \ln(\tilde{M}_1\frac{|\ln\epsilon_1|}{2\pi h_1}) + e^{4\sqrt{s}_k}) \\ &\le b_3(\ln^{(6)}(n)\cdot \ln(\tilde{M}_1\frac{|\ln\epsilon_1|}{2\pi h_1}) + e^{4\sqrt{n}})\end{aligned} \tag{6.8}$$

这意味着

$$\tilde{M}_n \le (\tilde{M}_1\frac{|\ln\epsilon_1|}{2\pi h_1})^{b_3\ln^{(6)}(n)}e^{b_3e^{4\sqrt{n}}}.$$

由（6.6）和（6.7），我们可以得到：对于任意 $n \ge 1$，当 $s_k \le n < s_{k+1}$ 时，

$$u_{s_k} \ge \nu_n \ge \nu_{s_k} - 2\epsilon_{s_k}^{\frac{1}{2m}} = u_{s_k} - 2\epsilon_{s_k}^{\frac{1}{2m}} > \frac{u_{s_k}}{2}. \tag{6.9}$$

此外，令 $\epsilon_1 < \epsilon_{*,\ 3} = R^{-4m}$。然后通过归纳法，我们可以得到：对于任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n \le R_1\prod_{j=1}^{n-1}(1+\epsilon_j^{\frac{1}{4m}}) < R.$$

现在记 $\tilde{b} = b(2R)^{6m}$，根据 δ_n的定义， $\tilde{M}_n$ 以及（6.8）和（6.9），我们得到：对于 $s_k \le n < s_{k+1}$,

$$\begin{aligned}\delta_n &> \tilde{b}^{-m}\tilde{M}_{s_k}^{-2}\delta_{s_k-1} > \tilde{b}^{-2m}\tilde{M}_{s_k}^{-2}\tilde{M}_{s_{k-1}}^{-2}\delta_{s_{k-1}-1} > \cdots \\ &> \tilde{b}^{-\xi_n m}(\tilde{M}_{s_k}\tilde{M}_{s_{k-1}}\cdots\tilde{M}_{s_2})^{-2}u_1^{m^2}\delta_1 \\ &\ge b_1^{-m^2}\tilde{b}^{-\xi_n m}(\tilde{M}_1\frac{|\ln\epsilon_1|}{2\pi h_1})^{-2b_3\xi_n\ln^{(6)}(n)}e^{-2b_3(e^{4\sqrt{s_k}}+e^{4\sqrt{s_{k-1}}}+\cdots+e^{4\sqrt{s_1}})}\delta_1 \\ &\ge (\tilde{M}_1\frac{|\ln\epsilon_1|}{2\pi h_1})^{-b_4\ln^{(5)}(n)}e^{-b_4e^{4\sqrt{s}_k}}\delta_1 \\ &\ge (\tilde{M}_1\frac{|\ln\epsilon_1|}{2\pi h_1})^{-b_4\ln^{(5)}(n)}e^{-b_4e^{4\sqrt{n}}}\delta_1.\end{aligned} \tag{6.10}$$

˜根据上述计算，我们可以找到 $\epsilon_*' = \epsilon_*'(R,m,\tau,\gamma,M_1,\delta_1,r_1,h_1)$，使得如果 $\epsilon_1 < \epsilon_*'$，那么对于任意 $n \ge 1$，有 $4e^{4\sqrt{n}} < |\ln\ \epsilon_n|$ 和

$$(\tilde{b}\tilde{M}_n\nu_{n+1}^{-1}\delta_n^{-1}r_n)^{\kappa r_n}\epsilon_n < \epsilon_n^{\frac{1}{2}}. \tag{6.11}$$

现在我们将证明 c_n 的估计。我们先证明一个粗略估计。令 $\tilde{c}_n = (\tilde{b}^{-1}r_n^{-1}\delta_n\nu_{n+1}\tilde{M}_n^{-1}c_n)^{\kappa^{r_n}}$，若 $n = s_k - 1$ 或 $s_k \le n < s_{k+1} - 1$，则 $n \in \Theta$；否则，令$_1\tilde{c}_n = c_n$。假设 $\tilde{c}_n > 4\epsilon_n^{\frac{1}{4}}$。于是我们有

$$c_{n+1} \ge \tilde{c}_n - (\tilde{b}\tilde{M}_n\delta_n^{-1}r_n)^{\kappa r_n}\epsilon_n > \tilde{c}_n - \epsilon_n^{\frac{1}{2}} > \frac{\tilde{c}_n}{2}.$$

此外，我们有

$$\tilde{c}_{n+1} \ge (\tilde{b}^{-1}r_{n+1}^{-1}\delta_{n+1}\tilde{M}_{n+1}^{-1}\nu_{n+2}c_{n+1})^{\kappa^{r_{n+1}}} > (2^{-1}\tilde{b}^{-1}r_{n+1}^{-1}\delta_{n+1}u_{n+2}\tilde{M}_{n+1}^{-1}\tilde{c}_n)^{\kappa^{r_{n+1}}}. \tag{6.12}$$

根据 u_n的定义，式（6.5）、式（6.8）和式（6.10），对于 $s_k \le n+1 < s_{k+1}-1$，我们可以得到

$$\begin{aligned} |\ln \tilde{c}_{n+1}| &\le \kappa^{r_{n+1}} \left(\ln(4\tilde{b}) + \ln r_{n+1} + \ln \delta_{n+1}^{-1} + \ln \tilde{M}_{n+1} + \ln u_{s_k}^{-1} + |\ln \tilde{c}_n| \right) \qquad (6.13) \\ &\le d_8(R,\gamma,\tau,r_1,\delta_1,\tilde{M}_1) \ln^{(2)}(n) \left(\ln \frac{|\ln \epsilon_1|}{2\pi h_1} + e^{4\sqrt{s_k}} + |\ln \tilde{c}_n| \right), \end{aligned}$$

并且对于 $n = s_{k+1}-2$，我们有

$$|\ln \tilde{c}_{n+1}| \le d_8 \ln^{(2)}(n) \left(\ln \frac{|\ln \epsilon_1|}{2\pi h_1} + e^{4\sqrt{n}} + |\ln \tilde{c}_n| \right).$$

于是存在 $N_* = N_*(R,\gamma,\tau,r_1,\delta_1,\tilde{M}_1)$，使得对于 $n \ge N_*$，我们有 $d_8 \ln^{(2)}(n) < \frac{4^n}{8}$，这意味着

$$\tilde{c}_{n+1} > 4\epsilon_{n+1}^{\frac{1}{4}},$$

[1]对于 $n \ge N_*$，假设 $\tilde{c}_n > 4\epsilon_n^{\frac{1}{4}}$ 成立。对于 $n \le N_*$，根据 $\tilde{c}_n$ 的定义，存在 $\epsilon_*'' = \epsilon_*''(R,\gamma,\tau,r_1,\delta_1,M_1,c_1)$，使得若 $\epsilon_1 < \epsilon_*''$，则有 $\tilde{c}_n > 4\epsilon_n^4$（对 $n \le N_*$）。因此，若[1]$\epsilon_1 < \min\{\epsilon_{*,1}, \epsilon_{*,2}, \epsilon_{*,3}, \epsilon_*', \epsilon_*''\}$，则对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\tilde{c}_n > 4\epsilon_n^{\frac{1}{4}}$。

接下来我们将更精确地估计 c_n。假设 $s_k - 1 =: m_0 < m_1 < \cdots < m_l < s_{k+1} - 1 =: m_{l+1}$，其中 $l \le m$，且 $\Theta \cap [s_k, s_{k+1}-1) = \{m_1, m_2, \cdots, m_l\}$。那么，对于任意[1] $m_i < n < m_{i+1}$，由（6.11）以及 $\tilde{c}_n > 4\epsilon_n^{\frac{1}{4}}$这一事实可得

$$\tilde{c}_n = c_n \ge c_{n-1} - \epsilon_{n-1}^{\frac{1}{2}} \ge \cdots \ge c_{m_i+1} - 2\epsilon_{m_i+1}^{\frac{1}{2}} \ge \tilde{c}_{m_i} - \epsilon_{m_i}^{\frac{1}{2}} - 2\epsilon_{m_i+1}^{\frac{1}{2}} > \frac{\tilde{c}_{m_i}}{2}.$$

由此，根据（6.13），可得

$$\begin{aligned} |\ln \tilde{c}_{s_{k+1}-2}| &\le 2|\ln \tilde{c}_{m_l}| \le 2d_8 \ln^{(2)}(m_l)(\ln \frac{|\ln \epsilon_1|}{2\pi h_1} + e^{4\sqrt{s_k}} + |\ln \tilde{c}_{m_l-1}|) \\ &\le 2d_8 \ln^{(2)}(s_{k+1})(\ln \frac{|\ln \epsilon_1|}{2\pi h_1} + e^{4\sqrt{s_k}} + 2|\ln \tilde{c}_{m_{l-1}}|) \le \cdots \\ &\le (2d_8 \ln s_{k+1})^{m+2}(\ln \frac{|\ln \epsilon_1|}{2\pi h_1} + e^{4\sqrt{s_k}} + |\ln \tilde{c}_{s_k-2}|) \le \cdots \\ &\le \Big((2d_8 \ln s_{k+1})^{m+2} + (2d_8 \ln s_{k+1} \cdot 2d_8 \ln s_k)^{m+2} + \cdots \\ &\quad + (2d_8 \ln s_{k+1} \cdots 2d_8 \ln s_2)^{m+2}\Big)(\ln \frac{|\ln \epsilon_1|}{2\pi h_1} + e^{4\sqrt{s_k}}) \\ &\quad + (2d_8 \ln s_{k+1} \cdots 2d_8 \ln s_2)^{m+2}|\ln \tilde{c}_{s_1}| \\ &\le k(2d_8)^{m+2}(4^k \ln s_{k+1})^{2(m+2)}(\ln \frac{|\ln \epsilon_1|}{2\pi h_1 c_1} + e^{4\sqrt{s_k}}) \\ &\le k(8d_8)^{2(m+2)k}(2d_2\sqrt{s_k})^{2(m+2)}(\ln \frac{|\ln \epsilon_1|}{2\pi h_1 c_1} + e^{4\sqrt{s_k}}). \end{aligned}$$

于是，对于任意 $s_k \le n < s_{k+1}$，可得

$$\begin{aligned}|\ln c_n| &\le 2|\ln \tilde{c}_{n-1}| \le 2|\ln \tilde{c}_{s_{k+1}-2}| \\ &\le \xi_n(8d_8)^{2(m+2)\xi_n}(2d_2\sqrt{s_k})^{2(m+2)}(\ln\frac{|\ln\epsilon_1|}{2\pi h_1 c_1}+e^{4\sqrt{s_k}}) \\ &\le d_9\ln^{(6)}(n)s_k^{m+2}(\ln\frac{|\ln\epsilon_1|}{2\pi h_1 c_1}+e^{4\sqrt{s_k}}) \\ &\le n^{b_5}\ln\frac{|\ln\epsilon_1|}{2\pi h_1 c_1}+b_6 e^{5\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

我们完成证明。 □

˜6.1. 定理 1.4 的证明。由于 A 在 $\lambda\in\Lambda$中解析，存在 $\delta>0$ 使得$A\in C^{\omega}_{\tilde{\delta}}$(Λ, GL(m, ℂ))。根据 (3.3) 和 (3.4)，对于任意 $u\in\mathbb{T}$，函数 $g(\lambda,u)$ 在˜ $W_{\tilde{\delta}}$(Λ)中解析。于是，由于 A 在 Λ上非退化，存在 $0<\delta\le\delta$ 使得 $A(\lambda)$ 在 $W_{\frac{\delta}{2}}(\Lambda)$ 上非退化， $\cap\mathbb{R}$ 且满足 $\frac{c}{2}$ 和 $r\in\mathbb{N}^+$。令

$$r_0=r,\quad c_0=c/2,\quad \delta_0=\delta,\quad h_0=h,$$
$$R_0=\max\{|A|_\delta,|A^{-1}|_\delta\},\quad M_0=(2R_0)^{m^2},\quad \tilde{M}_0=R_0,$$

且 $\varepsilon:=|F|_{h,\ \delta}$。根据 R_0 的定义可知，对于任意 $\lambda\in W_\delta(\Lambda)$， $u\in\mathbb{T}$,Σ($A(\lambda)$) $\subseteq D($ R_0)，且 $|g(\lambda,u)|\le(2R_0)^{m^2}$。结合 $A(\lambda)$ 在 $W_{\frac{\delta}{2}}(\Lambda)$ 上非退化这一事实，得到 Σ($A(\lambda)$) 在 Λ 上是 (M_0,δ_0,c_0,r_0)-横截的。

Let

$$h_1=h_0,\quad r_1=r_0,\quad R_1=R_0,\quad M_1=(2R_1)^{m^2},$$
$$\nu_1=u_1,\quad \zeta_1=10m\nu_1,\quad \delta_1=b^{-1}((R_0^2\tilde{M}_0)^{-1}\nu_1)^{3m}\delta_0,$$
$$\tilde{M}_1=b(\nu_1^{-1}\tilde{M}_0)^{m^2(m+2)},\ c_1=(bR_0\nu_1^{-1}\delta_0^{-1}\tilde{M}_0)^{-r_0m^3(m+6)}c_0.$$

根据5.2中的 u_1 定义，存在$\tilde{\epsilon}_{*,\ 1}=\tilde{\epsilon}_{*,\ 1}(m,R_0,\tau,\gamma,h_1)>0$，使得若˜$\varepsilon<\tilde{\epsilon}_{*,\ 1}$，则有 $\nu_1=u_1<$ 常数 $\cdot M_0$。

´回顾一下 $b\ge b$，其中 b 是引理3.9中的常数。然后由命题3.1˜及 $\nu'=\nu_1$，存在 Π_1 的一个划分 Λ，使得对任意 $\Lambda\in\Pi_1$，存在˜ ˜ $S_0\in C^{\omega}_{\delta_1}(\Lambda,\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$ 使得$\forall\lambda\in W_{\delta_1}(\Lambda)$

$$S_0^{-1}(\lambda)A(\lambda)S_0(\lambda)=\mathrm{diag}\{A_{1,11}(\lambda),\cdots,A_{1,l_1l_1}(\lambda)\}=:A_1(\lambda),$$

其中$|A_{1,\ ii}|_{\delta_1},|S_0|_{\delta_1},|S_0^{-1}|_{\delta_1}\le\tilde{M}_1$，分解 $\Sigma^{(1)}(\lambda)=\Sigma_1^{(1)}(\lambda)\cup\cdots\cup\Sigma_{l_1}^{(1)}(\lambda)$在 Λ 上是 ˜ ˜$(M_1,\delta_1,c_1,r_1)$-横截的，且对于$\lambda\in W_{\delta_1}(\Lambda)$，它是$(\nu_1,\zeta_1)$-分离的，其中

$$\Sigma^{(1)}(\lambda):=\Sigma(A_1(\lambda))\subseteq D(R_1),\quad \Sigma_i^{(1)}(\lambda):=\Sigma(A_{1,ii}(\lambda)).$$

此外，我们有

$$\#\Pi_1\le b(R_0^2\tilde{M}_0\nu_1^{-1})^{3m}\frac{|\Lambda|}{\delta_0}+1,$$

并且存在 $\lambda_0\in\tilde{\Lambda}$，使得 $\Sigma_1^{(1)}(\lambda_0)\cup\cdots\cup\Sigma_{l_1}^{(1)}(\lambda_0)$ 是 $(8\nu_1,\zeta_1)$-分离的；对于˜任意 $\lambda\in W_{\delta_1}(\Lambda)$，$\#\Sigma_i(\lambda)=\#\Sigma_i(\lambda)$，并且

$$d_H(\Sigma_i^{(1)}(\lambda),\Sigma_i^{(1)}(\lambda_0))<\nu_1,\ \forall 1\le i\le l_1.$$

因此，对于 A_1，我们有 $\mathfrak{P}(1)$成立。

设 $Z_0 = S_0$ 和 $F_1 = S_0^{-1} F S_0$。那么存在 $\tilde{\epsilon}_{*,\ 2} = \tilde{\epsilon}_{*,\ 2}(m, R_0, \tau, \gamma, h_1) > 0$，使得若 $\varepsilon < \tilde{\epsilon}_{*,\ 2}$，

$$|F_1|_{h_1,\delta_1} \le \tilde{M}_1^2 \varepsilon = b^2 ((b_1 \frac{|\ln \varepsilon|}{4\pi h_1})^{\tau} e^{b_2 e^4} R_0)^{2m^2(m+2)} \varepsilon < \varepsilon^{\frac{1}{2}} =: \epsilon_1.$$

此外，我们有

$$|Z_0|_{\delta_1}, |Z_0^{-1}|_{\delta_1} < \varepsilon^{-\frac{1}{2}} = \epsilon_1^{-1}, \quad |Z_0|_{\delta_1}^{\frac{1}{2}} |F_1|_{h_1,\delta_1}, |Z_0^{-1}|_{\delta_1}^{\frac{1}{2}} |F_1|_{h_1,\delta_1} < 1.$$

此外，存在 $\tilde{\epsilon}_{*,\ 3} = \tilde{\epsilon}_{*,\ 3}(d,\ R_0,\ m,\ \tau,\ \gamma,\ h_0,\ \delta_0,\ r_0,\ c_0) > 0$，使得若 $\varepsilon < \tilde{\epsilon}_{*,\ 3}$，则 5.6)-(5.8) 对 $\tilde{m} = n = 1$ 成立。

此外，由引理 6.1 和 K_n、$N_{n,\ p}$ 的定义可得，存在 $\tilde{\epsilon}_* = \tilde{\epsilon}_*(d,\ m,\ \gamma,\ \tau,\ R,\ \delta_1,\ h_1,\ r_1,\ c_1)$，使得若 $\varepsilon^{\frac{1}{2}} = \epsilon_1 < \tilde{\epsilon}_*$，则对任意 $n \ge 1$，不等式 5.6)-(5.8) 成立。

令 $\epsilon_* = \min\{\epsilon_{*,1}, \epsilon_{*,2}, \epsilon_{*,3}, \tilde{\epsilon}_*^2\}$，且 $\varepsilon < \epsilon_*$。于是可以归纳地应用命题 5.1。固定 $\epsilon > 0$、$\varsigma > 0$。存在 $N_1^* = N_1^*(\epsilon,\ d,\ R_0,\ m,\ \tau,\ \gamma,\ h_0,\ \delta_0,\ r_0)$ 和 $N_2^* = N_2^*(\varsigma)$，使得若 $n \ge N_1^*$，则 $\epsilon_n < \epsilon$；若 $n \ge N_2^*$，则

$$\sum_{j=N_2^*}^{\infty} \frac{2}{j^2} < \frac{\varsigma}{2}.$$

此外，对于上述 N_2^*，存在 $N_3^* = N_3^*(\varsigma) > N_2^*$，使得如果 $n \ge N_3^*$，则

$$\epsilon_n^{\frac{\varsigma}{2}} < \prod_{j=2m+2}^{2m+N_2^*+1} \epsilon_j.$$

现在令 $N = \max\{N_1^*, N_3^*\}$。那么存在 Λ 的一个划分 Π_{N-1}，使得对于任意 $\tilde{\Lambda} \in \Pi_{N-1}$，存在一个变换序列 $Z_j \in C^{\omega}_{h_{j+1},\ \delta_{j+1}}(\mathbb{T}^d \times \tilde{\Lambda}, \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}))$，满足 $0 \le j \le N-1$，使得

$$Z_j^{-1}(\cdot + \alpha, \lambda) \cdots Z_0^{-1}(\cdot + \alpha, \lambda)(A(\lambda) + F(\cdot, \lambda)) Z_0(\cdot, \lambda) \cdots Z_j(\cdot, \lambda) = A_{j+1}(\lambda) + F_{j+1}(\cdot, \lambda),$$

并且满足估计

$$\begin{aligned}
&|F_{j+1}|_{h_{j+1},\delta_{j+1}} < \epsilon_{j+1}, \quad |F_{j+1}|_{h_{j+1},\delta_{j+1}} \le |F_j|_{h_j,\delta_j}, \\
&|Z_j|_{h_{j+1},\delta_{j+1}}, |Z_j^{-1}|_{h_{j+1},\delta_{j+1}} < \epsilon_{j+2m+2}^{-1}, \\
&|Z_j|_{h_{j+1},\delta_{j+1}} |F_{j+1}|_{h_{j+1},\delta_{j+1}}^{\frac{2}{j^2}}, |Z_j^{-1}|_{h_{j+1},\delta_{j+1}} |F_{j+1}|_{h_{j+1},\delta_{j+1}}^{\frac{2}{j^2}} < 1.
\end{aligned}$$

Let

$$B = Z_0 \cdots Z_{N-1}, \quad \Pi = \Pi_{N-1}, \quad \eta = \delta_1 (\tilde{M}_1 \frac{|\ln \epsilon_1|}{2\pi h_1})^{-b_4 \ln N} e^{-b_4 e^{4\sqrt{N}}} > 0,$$

其中 $b_4 = b_4(R,\ m,\ \gamma,\ \tau)$ 的定义同引理 6.1。由引理 6.1，可得 $\delta_N \ge \eta$。此外，

$$B^{-1}(\cdot + \alpha, \lambda)(A(\lambda) + F(\cdot, \lambda)) B(\cdot, \lambda) = A_N(\lambda) + F_N(\cdot, \lambda) =: \tilde{A}(\lambda) + \tilde{F}(\cdot, \lambda),$$

˜其中$|F|_{h/2,\ \eta}\le\epsilon_N<\epsilon$，并且

$$\begin{aligned}|B|_{h/2,\eta}|\tilde F|^{\varsigma}_{h/2,\eta}&\le|Z_0|_{h_1,\delta_1}\cdots|Z_{N-1}|_{h_N,\delta_N}|F_N|^{\varsigma}_{h_N,\delta_N}\\&\le\Big(\prod_{j=2m+2}^{2m+N_2^*+1}\epsilon_j^{-1}\Big)\epsilon_N^{\frac{\varsigma}{2}}\Big(\prod_{j=N_2^*}^{N-1}|Z_j|_{h_{j+1},\delta_{j+1}}\Big)|F_N|^{\frac{\varsigma}{2}}_{h_N,\delta_N}\\&\le\prod_{j=N_2^*}^{N-1}\big(|Z_j|_{h_{j+1},\delta_{j+1}}|F_N|^{\frac{2}{j^2}}_{h_N,\delta_N}\big)\le\prod_{j=N_2^*}^{N-1}\big(|Z_j|_{h_{j+1},\delta_{j=1}}|F_{j+1}|^{\frac{2}{j^2}}_{h_{j+1},\delta_{j+1}}\big)<1.\end{aligned}$$

类似地，我们也可以得到$|B^{-1}|_{h/2,\ \eta}|\tilde F|^{\varsigma}_{h/2,\ \eta}<1$，从而完成证明。 □

6.2. **定理 1.3 的证明：**证明的主要思路如下：首先，我们将应用分层定量几乎约化（命题 5.1），按照给定的估计使扰动足够小；然后应用命题 5.2，得到满测度可约集；最后，我们估计不可约余循环参数集的豪斯多夫维数。

6.2.1. 对所有参数约化扰动。设$|F|_{h,\ \delta}<\epsilon_*$，其中$\epsilon_*$如定理 1.4 中所定义。根据命题 5.1，存在$\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$对$\Lambda$的一列划分，使得在每个$\tilde\Lambda\in\Pi_n$上，都存在$B_n\in C^{\omega}_{h_n,\ \delta_n}(\mathbb{T}^d\times\tilde\Lambda,\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$、$A_n\in C^{\omega}_{\delta_n}(\tilde\Lambda,\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$以及$F_n\in C^{\omega}_{h_n,\ \delta_n}(\mathbb{T}^d\times\tilde\Lambda,gl(m,\mathbb{C}))$，使得

$$B_n^{-1}(\cdot+\alpha)(A+F(\cdot))B_n(\cdot)=A_n+F_n(\cdot),$$

其中$|F_n|_{h_n,\ \delta_n}\le\epsilon_n$，且$|A_n|_{\delta_n}\le\tilde M_n$，$A_n=\mathrm{diag}\{A_{n,11},\cdots,A_{n,l_nl_n}\}$，$\Sigma^{(n)}(\lambda)=\Sigma_1^{(n)}(\lambda)\cup\cdots\cup\Sigma_{(n)l_n}(\lambda)$在$(2R_n)^{m^2},\delta_n,c_n,r_n)$上是横截的，且$\Sigma_{(n)}(\lambda)\subseteq D(R_n)$对于$\lambda\in W_{\delta_n}(\tilde\Lambda)$成立。此外，对于$n=s_k$，我们有

$$\#\Pi_n\le\#\Pi_{n-1}+\frac{bR_{n-1}^{6m}\tilde M_{n-1}^{3m}|\Lambda|}{\nu_n^{3m}}\max_{\tilde\Lambda\in\Pi_{n-1}}\frac{1}{\delta_{n-1}(\tilde\Lambda)},$$

且对于$s_k<n<s_{k+1}$，我们有

$$\#\Pi_n\le\#\Pi_{n-1}+\frac{bR_{n-1}^{2m-1}|\Lambda|}{\nu_n^{m}}\max_{\tilde\Lambda\in\Pi_{n-1}}\frac{1}{\delta_{n-1}(\tilde\Lambda)}.$$

由引理 6.1 以及ν_n的定义，我们可得，对于$s_k\le n<s_{k+1}$，

$$\#\Pi_n\le1+n\frac{bR^{6m}\tilde M_{s_k-1}^{3m}|\Lambda|}{(u_{s_k}/2)^{3m}}\cdot\max_{\tilde\Lambda\in\Pi_{n-1}}\frac{1}{\delta_{n-1}(\tilde\Lambda)}<\frac{\tilde b\tilde M_{n-1}^{3m}|\Lambda|n}{u_{s_k}^{3m}}\max_{\tilde\Lambda\in\Pi_{n-1}}\frac{1}{\delta_{n-1}(\tilde\Lambda)},\tag{6.14}$$

其中$\tilde b=b(2R)^{6m}$。

6.2.2. 去除可能发生共振的参数集合。现在，对任意$0<\varrho<1$，$\tilde\varepsilon>0$，令$\eta_{\tilde\varepsilon}=\tilde\varepsilon^{\frac{8}{3}}$.由于

$$\epsilon_{\tilde m}^{\frac{\varrho}{100m^4r_{\tilde m}^2}}\le\epsilon_1^{\frac{\varrho}{100m^4r_1^2d_3^2}2^{\tilde m^2-2\tilde m}},$$

由（6.5），存在$m_{*,\ 1}\in\mathbb{N}$，使得对任意$\tilde m\ge m_{*,\ 1}$，

$$\epsilon_{\tilde m}^{\frac{\varrho}{100m^4r_{\tilde m}^2}}<\min\{\frac{\tilde\varepsilon^{\frac13}}{2},\ (9R_{\tilde m})^{-(\tau+d)},\ (2|\ln\epsilon_{\tilde m}|)^{-(\tau+d)}\}.\tag{6.15}$$

此外，由（6.14）和引理 6.1，存在 $m_{*,\ 2}\in\mathbb{N}$，使得对任意 $\tilde{m}\geq m_{*,\ 2}$，

$$\frac{\#\Pi_{\tilde{m}}2^{m^2r_{\tilde{m}}+d+3}(|\Lambda|+1)}{\gamma(\pi h_{\tilde{m}})^{d+\tau}}\cdot\frac{(m^2r_{\tilde{m}}+1)!(2R_{\tilde{m}})^{m^2}}{\delta_{\tilde{m}}^{m^2r_{\tilde{m}}+1}c'_{\tilde{m}}}<\epsilon_{\tilde{m}}^{-\frac{\varrho}{100m^4r_{\tilde{m}}^2}},\tag{6.16}$$

其中 $c'_{\tilde{m}}=((\frac{\delta_{\tilde{m}}}{4m^4r_{\tilde{m}}^2(2R_{\tilde{m}})^{m^2}})^{m^4r_{\tilde{m}}}c_{\tilde{m}})^{m^{2m^2r_{\tilde{m}}+2}}$。

令 $m_*=\max\{m_{*,1},\ m_{*,2}\}$。对于任意 $\Lambda\in\Pi_{m_*}$，我们考察 $A_{m_*}\in C^{\omega}_{\delta_{m_*}}(\tilde{\Lambda},\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$、$F_{m_*}\in C^{\omega}_{h_{m_*},\delta_{m_*}}(\mathbb{T}^d\times\tilde{\Lambda},gl(m,\mathbb{C}))$ 的性质。根据引理 3.8，多重集 $\sum^{(m_*)}(\lambda)$ 在 $\tilde{\Lambda}$ 上是 $((2R_{m_*})^{m^2},\delta_{m_*},c'_{m_*},r'_{m_*})$-横截的，其中 $r'_{m_*}=m^2r_{m_*}$，且 $\Sigma^{(m_*)}(\lambda):=\Sigma(A_{m_*}(\lambda))$。此外，令

$$g_{m_*}(\lambda,u)=\prod_{\substack{\sigma_i,\sigma_j\in\Sigma^{(m_*)}(\lambda),\\ i\neq j}}(\sigma_i-e^{2\pi\mathrm{i}u}\sigma_j).$$

因为 $|g_{m_*}(\lambda,u)|_{\delta_{m_*}}\leq(2R_{m_*})^{m^2}$，那么对于任意 $\lambda\in\tilde{\Lambda}$、$u\in\mathbb{T}^1$，我们有

$$\sup_{0\leq l\leq r'_{m_*}+1}|\frac{\partial^l g_1(\lambda,u)}{\partial\lambda^l}|\leq\frac{(r'_{m_*}+1)!}{\delta_{m_*}^{r'_{m_*}+1}}(2R_{m_*})^{m^2}=:C_{m_*}.$$

因此，由（6.15）和（6.16），我们可以对 A_{m_*},F_{m_*} 归纳地应用命题 5.2，并得到集合 $\Lambda^{(j+1)}=\Lambda^{(j)}\backslash\mathcal{R}_j(\tilde{\Lambda})$，其中 $j\in\mathbb{N}$，其中 $\Lambda^{(1)}=\tilde{\Lambda}$, $\mathcal{R}_j(\tilde{\Lambda})=\cup_{i\in J_j(\tilde{\Lambda})}I_i^{(j)}$，且

$$|I_i^{(j)}|<\epsilon_{m_*}^{\frac{2}{25r'^2_{m_*}}\cdot(\frac{3}{2})^{j-1}},\tag{6.17}$$

$$\#J_j(\tilde{\Lambda})\leq 2^{r'_{m_*}+d}\tilde{N}_j^d(\frac{8C_{m_*}}{c'_{m_*}}|\Lambda^{(j)}|+\#\mathcal{C}(\Lambda^{(j)})),\tag{6.18}$$

$$\#\mathcal{C}(\Lambda^{(j+1)})\leq 2\#\mathcal{C}(\mathcal{R}^{(j)}(\tilde{\Lambda})).\tag{6.19}$$

Let

$$\mathcal{R}_j=\cup_{\tilde{\Lambda}\in\Pi_{m_*}}R_j(\tilde{\Lambda}),\quad\mathcal{R}=\cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{R}_j.$$

Then for any $\lambda\in\tilde{\Lambda}\backslash\mathcal{R}(\tilde{\Lambda})$, there exists $\tilde{B}_\lambda\in C^{\omega}_{\underline{h_{m_*}}}(\mathbb{T}^d,\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$ with $|\tilde{B}_\lambda|_{h_{m_*}/2}<2$, such that

$$\tilde{B}_\lambda^{-1}(\cdot+\alpha)(A_{m_*}(\lambda)+F_{m_*}(\cdot,\lambda))\tilde{B}_\lambda(\cdot)=\tilde{A}(\lambda),$$

其中，$\tilde{A}(\lambda)\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$，且 $\|\tilde{A}(\lambda)-A_{m_*}(\lambda)\|<6M_{m_*}\epsilon_{m_*}$。

令 $B_\lambda=B_{m_*}(\lambda)\tilde{B}_\lambda$。则有 $B_\lambda\in C^{\omega}_{h/4}(\mathbb{T}^d,\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}))$，且对于任意 $\lambda\in\Lambda\backslash\mathcal{R}$，

$$B_\lambda^{-1}(\cdot+\alpha)(A(\lambda)+F(\cdot,\lambda))B_\lambda(\cdot)=\tilde{A}(\lambda).$$

6.2.3. 估计移除集的豪斯多夫维数。记 $\mathcal{S}\subseteq\Lambda$ 为满足以下条件的 λ 的集合：对于任意 $\lambda\in\mathcal{S}$，余循环 $(\alpha,A(\lambda)+F(\cdot,\lambda)))$ 不能被约化为某个 $A(\lambda)\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$，其中 $A(\lambda)$ 具有单特征值。于是我们有如下观察：

断言 6. $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{R}=\cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{R}_j$,

证明。 事实上，由引理 3.10 可得，取定 $l=1$ 时，λ我们得到

$$d_H(\Sigma^{(m_*)}(\lambda),\tilde{\Sigma}(\lambda))\leq 12m^2\tilde{M}_{m_*}^2\epsilon_{m_*}^{\frac{1}{m}}<\epsilon_{m_*}^{\frac{1}{2m}},$$

˜ ˜其中 $\Sigma(\lambda):=\Sigma(A(\lambda))$。此外，由引理 5.3，对任意 $\lambda\in\Lambda\backslash\mathcal{R}$，有 $|g_{m_*}(\lambda,0)|\geq\epsilon_{m_*}^{\frac{1}{10r'_{m_*}}}/2$。于是，对任意 $\sigma_{\ell_1},\sigma_{\ell_2}\in\Sigma^{(m_*)}(\lambda)$，若 $\ell_1\neq\ell_2$，则有

$$\epsilon_{m_*}^{\frac{1}{10r'_{m_*}}}/2\leq|g_{m_*}(\lambda,0)|=\prod_{\substack{\sigma_i,\sigma_j\in\Sigma^{(m_*)}(\lambda),\\ i\neq j}}|\sigma_i-\sigma_j|\leq(2R_{m_*})^{m^2-m-1}|\sigma_{\ell_1}-\sigma_{\ell_2}|,$$

这意味着

$$|\sigma_{\ell_1}-\sigma_{\ell_2}|\geq\frac{\epsilon_{m_*}^{\frac{1}{10r'_{m_*}}}}{2(2R_{m_*})^{m^2-m-1}}>\epsilon_{m_*}^{\frac{1}{5m^2r_{m_*}}}.$$

˜因此，对于任意满足 $\ell_1\neq\ell_2$ 的 $\tilde{\sigma}_{\ell_1},\tilde{\sigma}_{\ell_2}\in\Sigma(A(\lambda))$，我们有

$$|\tilde{\sigma}_{\ell_1}-\tilde{\sigma}_{\ell_2}|\geq\epsilon_{m_*}^{\frac{1}{5m^2r_{m_*}}}-2\epsilon_{m_*}^{\frac{1}{2m}}>0,$$

˜这意味着 $A(\lambda)$ 具有单特征值，因此 $\Lambda\backslash\mathcal{R}\subseteq\Lambda\backslash\mathcal{S}$。 □

回顾一下，子集的豪斯多夫维数定义见定义 2.1。现在我们给出豪斯多夫 ϱ维测度估计 $\mathcal{S}$，其中任意 $0<\varrho<1$，并完成整个证明。我们首先估计被移除集合的数量。

断言 7. $\#\mathcal{C}(\mathcal{R}_j)\leq\#\Pi_{m_*}\cdot(2^{r'_{m_*}+d+3}C_{m_*}(|\Lambda|+1)c'^{-1}_{m_*})^j\prod_{l=1}^{j}\tilde{N}_l^d$.

证明。 回顾一下，$\mathcal{C}(\mathcal{R}_j)$表示集合 $\mathcal{R}_j$的连通分支。根据（6.18）和（6.19），我们可以验证

$$\begin{aligned}\#\mathcal{C}(\mathcal{R}_j)&\leq\sum_{\tilde{\Lambda}\in\Pi_{m_*}}\#\mathcal{C}(R_j(\tilde{\Lambda}))\\&\leq\sum_{\tilde{\Lambda}(\supseteq\Lambda^{(j)})\in\Pi_{m_*}}2^{r'_{m_*}+d}\tilde{N}_j^d\left(\frac{8C_{m_*}}{c'_{m_*}}|\Lambda^{(j)}|+\#\mathcal{C}(\Lambda^{(j)})\right)\\&\leq 2^{r'_{m_*}+d}\tilde{N}_j^d\left(\frac{8C_{m_*}}{c'_{m_*}}|\Lambda|+2\#\mathcal{C}(\mathcal{R}_{j-1})\right)\\&\leq 2^{r'_{m_*}+d+3}(|\Lambda|+1)C_{m_*}c'^{-1}_{m_*}\tilde{N}_j^d\#\mathcal{C}(\mathcal{R}_{j-1}).\end{aligned}$$

因此，我们可以估计：

$$\begin{aligned}\#\mathcal{C}(\mathcal{R}_j)&\leq(2^{r'_{m_*}+d+3}C_{m_*}(|\Lambda|+1)c'^{-1}_{m_*})^{j-1}\tilde{N}_j^d\cdots\tilde{N}_2^d\#\mathcal{C}(\mathcal{R}_1)\\&\leq\#\Pi_{m_*}\cdot(2^{r'_{m_*}+d+3}C_{m_*}(|\Lambda|+1)c'^{-1}_{m_*})^j\prod_{l=1}^{j}\tilde{N}_l^d.\end{aligned}$$

□

根据（6.15）和（6.17），对于任意区间 $I\in\mathcal{C}(\mathcal{R}_j)$ 满足 $j\geq1$ 的情形，我们有

$$|I|\leq\epsilon_{m_*}^{\frac{2}{25r'^2_{m_*}}\cdot(\frac{3}{2})^{j-1}}<\tilde{\varepsilon}^{\frac{8}{3}}=\eta_{\tilde{\varepsilon}}.$$

由命题 6 和命题 7，结合（6.15）、（6.16）和（5.15），可得

$$\begin{aligned} H^{\varrho}_{\eta_{\tilde{\varepsilon}}}(\mathcal{S}) &\le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{I\in\mathcal{C}(\mathcal{R}_j)}|I|^{\varrho} \le \sum_{j=1}^{\infty}\#\mathcal{C}(\mathcal{R}_j)\epsilon_{m_*}^{\frac{2\varrho}{25r'^2_{m_*}}\cdot(\frac{3}{2})^{j-1}} \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty}(\#\Pi_{m_*}2^{\tilde{r}'_1+d+2}C_{m_*}(|\Lambda|+1)c'^{-1}_{m_*})^j(\prod_{l=1}^{j}\tilde{N}_l^d)\epsilon_{m_*}^{\frac{2\varrho}{25r'^2_{m_*}}\cdot(\frac{3}{2})^{j-1}} \\ &< \sum_{j=1}^{\infty}\epsilon_{m_*}^{-\frac{\varrho}{100r'^2_{m_*}}j}\ \epsilon_{m_*}^{(2-3(\frac{3}{2})^{j-1})\frac{\varrho}{100r'^2_{m_*}}}\ \epsilon_{m_*}^{\frac{2\varrho}{25r'^2_{m_*}}\cdot(\frac{3}{2})^{j-1}} \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty}\epsilon_{m_*}^{\frac{3\varrho}{100r'^2_{m_*}}\cdot(\frac{3}{2})^{j-1}} < 2\epsilon_{m_*}^{\frac{3\varrho}{100r'^2_{m_*}}} < \tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

由于 $\tilde{\varepsilon}>0$ 是任意的，因此 $H^{\varrho}(\mathcal{S})=0$。此外，由于 $0<\varrho<1$ 的任意性，我们得到 $\dim_H(\mathcal{S})=0$。证明完成。□

6.3. **定理 1.1 和 1.2：** 我们的证明基于 Aubry 对偶。注意，积分态密度在 Aubry 对偶下保持不变（参见（2.3））。因此，为了证明定理 1.1 和定理 1.2，我们只需证明相应对偶算子的积分态密度绝对连续：

定理 6.1. 设 $\alpha\in DC_d(\gamma,\tau)$ 和 $W\in C^{\omega}(\mathbb{T}^d,\mathbb{R})$。存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(d,\gamma,\tau,\hat{V}_{\ell},W)$，使得若 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$，则对于任意 $E\in\mathbb{R}$，（2.2）的积分态密度都是绝对连续的。

基本观察是，如果 ε 很小，那么相应的余循环 $(\alpha,\ A_{\varepsilon})$（2.2）可以看作常余循环 $(\alpha,\ A(E))$ 的扰动，其中

$$A(E)=\begin{pmatrix} -\frac{\hat{V}_{\ell-1}}{\hat{V}_{\ell}} & \cdots & -\frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_{\ell}} & \frac{E-\hat{V}_0}{\hat{V}_{\ell}} & -\frac{\hat{V}_{-1}}{\hat{V}_{\ell}} & \cdots & -\frac{\hat{V}_{-\ell+1}}{\hat{V}_{\ell}} & -\frac{\hat{V}_{-\ell}}{\hat{V}_{\ell}} \\ 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.20}$$

并且它满足非退化条件：

引理 6.2。 设 $\Lambda=[a,b]$。那么 $A(E)$ 在（1.4）上满足非退化条件（$\tilde{\Lambda}$，其中某个 $c>0$，$r\in\mathbb{N}^+$。

证明。 我们首先证明，对任意 $u\in\mathbb{T}$，$g(E,\ u)=0$ 至多对有限多个$E\in\Lambda$成立。事实上，我们有

断言 8。 对于任意 $u\in\mathbb{T}$、σ_{ℓ_1}，$\sigma_{\ell_2}\in\Sigma(A(E))=:\Sigma(E)$ 满足 $\ell_1\neq\ell_2$ 时，只有有限多个 $E\in\Lambda$，使得

$$\sigma_{\ell_1}(E)=e^{2\pi\mathrm{i}u}\sigma_{\ell_2}(E).$$

证明。 记

$$f_E(z)=\det(zI-A(E))=\prod_{\sigma_i\in\Sigma(E)}(z-\sigma_i).$$

通过直接计算，我们可以得到

$$\hat{V}_\ell f_E(z)=\sum_{j=-\ell}^{\ell}\hat{V}_j z^{j+\ell}-Ez^\ell. \tag{6.21}$$

情形 a： $u\in\mathbb{T}\backslash\mathbb{Z}$。另一方面，如果 $\sigma_{\ell_1}(E)=e^{2\pi\mathrm{i}u}\sigma_{\ell_2}(E)$，那么我们有

$$\prod_{\substack{\sigma_i\in\Sigma(E)\\ i\neq\ell_2}}(\sigma_i-e^{2\pi\mathrm{i}u}\sigma_{\ell_2})=0, \tag{6.22}$$

这意味着 $f_E(e^{2\pi\mathrm{i}u}\sigma_{\ell_2})=0$。此外，我们有 $f_E(\sigma_{\ell_2})=0$。于是，$\sigma_{\ell_2}(E)$ 是方程的一个解

$$f_E(z)=f_E(e^{2\pi\mathrm{i}u}z)=0. \tag{6.23}$$

另一方面，由于 $\det A(E)\neq 0$，如果 z_0 是（6.23）的一个解，那么 $z_0\neq 0$，并且根据（6.21），它满足以下方程

$$\sum_{j=-\ell}^{\ell}(1-e^{2\pi\mathrm{i}ju})\hat{V}_j z^{j+\ell}=0.$$

由于上述方程关于 z 是次数为 2ℓ的多项式，因此它只有有限多个解，这意味着（6.23）只有有限多个解。由于根据（6.21），对于 $z\neq 0$和 $E\neq E'$，我们有 $f_E(z)\neq f_{E'}(z)$，那么（6.23）对于不同的 E具有不同的解。因此，只有有限多个 E 使得（6.23）有解。

因此，只有有限多个 $E\in\tilde{\Lambda}$ 满足 $\sigma_{\ell_1}(E)=e^{2\pi\mathrm{i}u}\sigma_{\ell_2}(E)$。

情形 b： $u\in\mathbb{Z}$。若 $\sigma_{\ell_1}(E)=e^{2\pi\mathrm{i}u}\sigma_{\ell_2}(E)$，则 $\sigma_{\ell_2}(E)$ 是 $f_E(z)$ 的一个重数至少为 2 的零点，也就是说，它是下列方程的一个解

$$f_E(z)=f_E'(z)=0. \tag{6.24}$$

另一方面，若 z_0 是方程 (6.24) 的一个解，则 $z_0\neq 0$ 并且它满足

$$\sum_{j=-\ell}^{\ell}\frac{j}{\ell}\hat{V}_j z^{j+\ell}=0,$$

该方程也只有有限多个解。这也意味着，只有有限多个$E\in\tilde{\Lambda}$ 满足 $\sigma_{\ell_1}(E)=e^{2\pi\mathrm{i}u}\sigma_{\ell_2}(E)$。证明完毕。□

因此，根据 $g(E,u)$ 的定义，对于任意 $u\in\mathbb{T}$，$g(E,u)=0$ 至多对˜有限多个 $E\in\Lambda$成立。这就得到了所需结论。原因如下：否则，对于$\forall n\in\mathbb{N}^+$，存在 $u_n\in\mathbb{T}, E_n\in\tilde{\Lambda}$ 使得

$$\max_{0\leq l\leq n}\left|\frac{\partial^l g(E_n,u_n)}{\partial E^l}\right|<\frac{1}{n}.$$

˜由于 $\Lambda\times\mathbb{T}$ 是紧致的，因此 $\{(E_n,u_n)\}_n$ 存在一个收敛的子序列ˆ，设其收敛到 $(E_0,u_0)\in\mathbb{T}\times\tilde{\Lambda}$。根据 (3.3)、(3.4)、引理 3.4，以及 $\det A(E)=\frac{V_{-\ell}}{}\cdot V_\ell$ 这一事实，我们

可以得到 $g(E,u)$ 是 E 和 $e^{2\pi iu}$的多项式。因此，$\partial^l g(E,u)\ \partial E^l$ 在 E和 u上连续，这意味着对任意 $l\geq 0$,

$$\frac{\partial^l g(E_0,u_0)}{\partial E^l}=0.$$

˜由于 $g(E,u_0)$ 是关于 E 的多项式，因此 $g(E,u_0)\equiv 0$ 对于 $E\in\Lambda$ 成立，这与假设矛盾。□

定理 6.1 的证明：设 $\Sigma_{\varepsilon,\alpha}\subseteq\Lambda$ 为算子 (2.2) 的谱，其中 $\Lambda\subseteq\mathbb{R}^1$ 是一个有界区间。令 $F(\theta)=(F_{ij}(\theta))_{1\leq i,j\leq 2\ell}$，其中 $F_{1\ell}(\theta)=-^{\varepsilon W}(\theta)\ \hat{}V_\ell$，其他元素为 $F_{ij}=0$。于是可以将 (α,A_ε) 改写为：$=(\alpha,A(E)+F(\cdot))$，并且根据引理 6.2，$A(E)$ 在 Λ 上满足非退化条件，其中 $r\in\mathbb{N}^+$, $c>0$ 为某些值。

根据定理 1.3，存在 $\tilde{\varepsilon}_1=\tilde{\varepsilon}_1(\alpha,\ d,\ V,\ W)>0$ 使得对于 $|\varepsilon|\leq\tilde{\varepsilon}_1$，存在$\mathcal{S}\subseteq\Lambda$ 使得对于任意 $E\in\Lambda\backslash\mathcal{S}$，存在 $B_E\in C^\omega(\mathbb{T}^d,\ \mathrm{GL}(2\ell,\ \mathbb{C}))$ 使得

$$B_E^{-1}(\cdot+\alpha)(A(E)+F(\cdot))B_E(\cdot)=D_E,$$

其中 $D_E=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_{2\ell}\}$ 满足 $\lambda_i\neq\lambda_j$，对于 $i\neq j$。当 $0<\epsilon<\max\{\|B_E\|_0^{-4},\|B_E^{-1}\|_0^{-4}\}$ 时，我们有

$$B_E^{-1}(\cdot+\alpha)(A(E+i\epsilon)+F(\cdot))B_E(\cdot)=D_E+\acute{F}_E(\cdot),$$

其中 $\|\acute{F}_E\|_0\leq\frac{\|B_E\|_0\|B_E^{-1}\|_0}{\hat{}V_\ell}\quad\epsilon=:C(E)\epsilon\ (<\hat{}V_\ell^{-1}\epsilon^{1/2})$。

对于任意 $E\in\mathbb{C}$，余循环 $(\alpha,A_\varepsilon(E,\cdot))$ 的第 ℓ 次迭代是一个辛余循环[42]。于是，余循环 $(\alpha,A_\varepsilon(E,\cdot))$ 的李雅普诺夫指数成对出现，即 $\pm\gamma_j(j=1,\cdots,\ell)$，这意味着 $\hat{}\gamma=\sum_{j=1}^{\ell}\gamma_j$，其中 $\hat{}\gamma$是相应余循环的纤维熵。因此，我们有

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(E+i\epsilon)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}^d}\ln\|\Lambda^\ell(D_E(I+D_E^{-1}\acute{F}_E))(\theta;n)\|d\theta\\&\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}^d}\ln\|\Lambda^\ell D_E\|^n d\theta+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}^d}\ln\|\Lambda^\ell(I+D_E^{-1}\acute{F}_E)\|^n d\theta\\&\leq\hat{\gamma}(E)+\ell\ln\|I+D_E^{-1}\acute{F}_E\|_0\\&\leq\hat{\gamma}(E)+\ell\tilde{C}(E)\epsilon.\end{aligned}$$

因此，由 Thouless公式（参见（2.4）），可得

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(E+i\epsilon)-\hat{\gamma}(E)&=\frac{1}{2}\int\ln(1+\frac{\epsilon^2}{(E-E')^2})d\hat{\mathcal{N}}(E')\\&>\frac{\ln 2}{2}(\hat{\mathcal{N}}(E+\epsilon)-\hat{\mathcal{N}}(E-\epsilon)).\end{aligned}$$

因此，对于任意 $E\in\Sigma\backslash\mathcal{S}$，$\hat{}\mathcal{N}(E)$ 是利普希茨连续的。所以，如果我们将 $\hat{}\mathcal{N}=\hat{}\mathcal{N}_{ac}+\hat{}\mathcal{N}_s$ 分解，就知道 $\mathcal{S}$ 是 $\hat{}\mathcal{N}_s$ 的一个支撑。为完成证明，我们回顾 $\hat{}\mathcal{N}(E)$ 的赫尔德连续性：

引理 6.3 ([38])。对于任意 $0<\eta<\frac{1}{2\ell}$，$\hat{}\mathcal{N}(E)$ 是$(\frac{1}{2\ell}-\eta)$-赫尔德连续的，其中 $|\varepsilon|\leq\varepsilon_*$ 满足

$$|\hat{\mathcal{N}}(E)-\hat{\mathcal{N}}(E')|\leq C_*|E-E'|^{\frac{1}{2\ell}-\eta},$$

对于任意 $E,\ E'\in\mathbb{R}$，其中 $\varepsilon_*=\varepsilon_*(\alpha,\ V,\ W,\ \eta)$ 以及 $C_*=C_*(\alpha,\ V,\ W)$。

现在，由于 $\mathcal{S}$ 是一个豪斯多夫维数为零的集合，因此对于 $\forall \zeta > 0$ ，我们可以找到 $\mathcal{S}$ 的一个覆盖，记作 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得

$$\Sigma_{i=1}^{\infty}\mathrm{diam}(U_i)^{\frac{1}{4\ell}} < C_*^{-1}\zeta.$$

令 $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0 =$ 最小值$\{\tilde{\varepsilon}_1, \varepsilon_*\}$，其中 ε_* 定义与引理 6.3中的定义相同。由引理 6.3以及 $\eta = \frac{1}{4\ell}$，可得

$$\hat{\mathcal{N}}(\mathcal{S}) \leq \Sigma_{i=1}^{\infty}\hat{\mathcal{N}}(U_i) \leq C_*\Sigma_{i=1}^{\infty}\mathrm{diam}(U_i)^{\frac{1}{4\ell}} < \zeta.$$

因此，由于 $\zeta > 0$ 的任意性，我们得到 $\hat{\mathcal{N}}_s(\mathcal{S}) = 0$ ，结论得证。

致谢

J. Wang 获得了中国国家重点研发计划（2021YFA100 1600）、国家自然科学基金项目（11971233）、江苏省杰出青年基金（编号：BK20200074）和江苏省青蓝工程的部分资助。J. You 和 Q. Zhou 获得了中国国家重点研发计划（2020YFA0713300）和南开致知基金会的部分资助。J. You 还获得了国家自然科学基金项目（11871286）的部分资助。Q. Zhou 获得了国家自然科学基金项目（12071232）和天津市杰出青年科学基金（编号：19JCJQJC61300）的资助。

参考文献

[1] *M. Aizenman; G. Graf*，电子气的局域化界。*J. Phys. A: Math. Gen. 31 (1998), 6783.*[2] *S. Hadj Amor*， $SL(2,\mathbb{R})$ 中拟周期余循环旋转数的赫尔德连续性。*Commun. Math. Phys. 287(2) (2009), 565-588.* [3] *A. Avila*，单频薛定谔算子的全局理论。*Acta Math. 215 (2015), 1-54.* [4] *A. Avila*，几乎 *Mathieu* 算子的绝对连续谱。*arXiv:0810.2965.* [5] *A. Avila*，几乎可约性与绝对连续性 *I*。*arXiv:1006.0704.* [6] *A. Avila*，*KAM*、李雅普诺夫指数与单频薛定谔算子的谱二分性。预印本。 [7] *A. Avila; D. Damanik*，非临界耦合下几乎 *Mathieu* 算子的积分态密度的绝对连续性。*Invent. Math. 172(2) (2008), 439-453.* [8] *A. Avila; S. Jitomirskaya*，十马提尼问题。《数学年刊》*170 (2009), 303-342.* [9] *A. Avila; S. Jitomirskaya*，几乎局域化与几乎可约性。*J. Eur. Math. Soc. 12 (2010), 93-131.*[10] *A. Avila; Y. Last; M. Shamis; Q. Zhou*，关于频率具有良好逼近性质时几乎 *Mathieu* 算子的反常性质，即将在 *Duke Math. J.* 发表。[11] *A. Avila; J. You; Q. Zhou*，几乎 *Mathieu* 算子的尖锐相变。*Duke Math. J. 166(14) (2017), 2697-2718.* [12] *A. Avila; J. You; Q. Zhou*，非临界情形下的干十马提尼问题。预印本。 [13] *J. E. Avron; D. Osadchy; R. Seiler*，从拓扑学角度看量子霍尔效应。*Physics today (2003), 38-42.*[14] *I. Binder; D. Damanik; M.Goldstein; M. Lukic*，*KdV* 方程解的时间几乎周期性，*Duke Math. J. 167(14) (2018), 2633-2678.* [15] *R. Bhatia*，矩阵特征值的扰动界。*Society for Industrial and Applied Mathematics (2007).* [16] *J. Bourgain*，确定性势格点薛定谔算子的谱。*II. J. Anal. Math.*，献给 *Tom Wolff* 的纪念专辑，*88 (2002), 221-254.* [17] *J. Bourgain*，格点薛定谔算子的格林函数估计及其应用。*Annals of Mathematics Studies*。*Princeton University Press, Princeton, NJ. 158 (2005).* [18] *J. Bourgain; M. Goldstein*，拟周期势下的非微扰局域化。*Ann. of Math. 152 (2000), 835-879.*

[19] *J. Bourgain; S. Jitomirskaya*，一维拟周期算子的绝对连续谱。*Invent. Math. 148 (2002), 453-463.* [20] *A. Cai; C. Chavaudret; J. You; Q. Zhou*，有限可微拟周期余循环李雅普诺夫指数的尖锐赫尔德连续性。*Math. Z. 291(3) (2019), 931-958.* [21] *H. Cao; Y. Shi; Z. Zhang*，格点拟周期薛定谔算子的定量格林函数估计。*arXiv:2209.03808.*[22] *H. Cao; Y. Shi; Z. Zhang*，$\mathbb{Z}^d$ 上具有 C^2-余弦型拟周期势的薛定谔算子的局域化与正则性。*arXiv:2303.01071*[23] *C. Chavaudret*，解析与 *Gevrey* 拟周期余循环的强几乎可约性。*Bull. Soc. Math. France 141 (2011), 47-106.* [24] *V. Chulaevsky; E. Dinaburg*，格点上长程拟周期算子的 *KAM* 理论方法。$\mathbb{Z}^{\mu}$。纯点谱。*Commun. Math. Phys. 153 (1993), 559-577.* [25] *D. Damanik; M. Goldstein; M. Lukic*，小拟周期势薛定谔算子的谱具有齐性，*J. Spec. Theory 6 (2016), 415-427.* [26] *D. Damanik; M. Goldstein; W. Schlag; M. Voda*，拟周期薛定谔算子的谱齐性，*J. Eur. Math. Soc. 20 (2018), 3073-3111.* [27] *E. Dinaburg; Ya. G. Sinai*，具有拟周期势的一维薛定谔方程。*Funct. Anal. Appl. 9 (1975), 279-289.* [28] *L. H. Eliasson*，一维拟周期薛定谔方程的弗洛凯解。*Commun. Math. Phys. 146 (1992), 447-482.* [29] *L. H. Eliasson*，具有纯点谱的离散一维拟周期薛定谔算子。*Acta Math. 179 (1997), 153-196.* [30] *L. H. Eliasson*，线性拟周期斜积的可约性与点谱。国际数学家大会论文集。第*2*卷，*(1998), 779-787.* [31] *L. H. Eliasson*，线性拟周期系统的扰动。载于《动力系统与小除数》*(pp. 1-60)*。*Springer*, 柏林, 海德堡 *(2002).* [32] *L. H. Eliasson*，拟周期微分方程的可约性。冬季学校，圣艾蒂安-德蒂内 *(2011).* [33] *L. H. Eliasson*，拟周期线性波动方程的几乎可约性。*2017* 年“纪念 *Jean-Christophe Yoccoz*”会议。*Viedo*[34] *R. Fabbri; R. Johnson; C. Nú¯nez*，非自治线性哈密顿系统的旋转数 *I*：基本性质。*Z. angew. Math. Phys. 54 (2003), 484-502.* [35] *J. Fröhlich; T. Spencer; P. Wittwer*，一类一维拟周期薛定谔算子的局域化。*Commun. Math. Phys. 132 (1990), 5-25.* [36] *L. Ge; S. Jitomirskaya; X. Zhao*，非临界谱性质的稳定性 *I*：积分态密度的算术绝对连续性。*Commun. Math. Phys. (2023). https://doi.org/*

10 1007 00220 023 04724 7 *./s - - - L. Ge; J. You.* 通过可约性实现安德森局域化的算术[37]
版本。*Geom. Funct. Anal. 30(5), 1370-1401 (2020).* [38] *L. Ge; J. You; X. Zhao*，$\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上拟周期长程算子的积分态密度的赫尔德正则性。*Commun. Math. Phys. 392(2) (2022), 347-376.* [39] *L. Ge; J. You; Q. Zhou*，指数动力学局域化：判据与应用。*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 56 (2023), 91-126.* [40] *M. Goldstein; W. Schlag*，拟周期薛定谔方程积分态密度的赫尔德连续性与次调和函数平移的平均。《数学年刊》*154(1) (2001), 155-203.*[41] *M. Goldstein; W. Schlag*，积分态密度的精细性质与狄利克雷特征值的定量分离性质。*Geom. Funtc. Anal. 18(3) (2008), 755-869.* [42] *A. Haro; J. Puig*，长程薛定谔斜积的 *Thouless* 公式与 *Aubry* 对偶。*Nonlinearity. 26 (2013)1163-1187.* [43] *P.G. Harper*，均匀磁场中导电电子的单能带运动。*Proc. Phys. Soc. London A., 68 (1955), 874-892.* [44] *H. Her; J. You*，拟周期线性系统一般单参数族的满测度约化性。*J. Dynam. Differential Equations 20(4) (2008), 831-866.*

[45] *S. Jitomirskaya*，几乎 *Mathieu* 算子的金属-绝缘体转变。《数学年刊》*150 (1999)，1159-1175*。[46] *S. Jitomirskaya*；*I. Kachkovskiy*，拟周期算子的 L^2-可约性与局域化。《数学研究快报》*23 (2016)，431-444*。[47] *S. Jitormiskya*；*W. Liu*，拟周期特征函数的普适层级结构。《数学年刊》*187 (3) (2018)，721-776*。[48] *S. Kotani*，一维平稳薛定谔算子的广义 *Floquet* 理论。《混沌、孤子与分形》*8 (1997)，1817–1854*。[49] *R. Krikorian*，取值于紧群的扭积系统的可约性（法文）/取值于紧群的扭积系统的可约性/。《*Astérisque*》*259 (1999)，1-216*。[50] *R. Krikorian*，取值于紧群的拟周期纤维流几乎处处可约。《法国高等科学研究所数学出版物》*(4) 32(2) (1999)，187-240*。[51] *M. Leguil*；*J. You*；*Z. Zhao*；*Q. Zhou*，拟周期薛定谔算子谱隙的渐近行为。*arXiv:1712.04700*。[52] *S. Marmi*；*J. C. Yoccoz*，与小除数相关的一些公开问题。《动力系统与小除数》。*Springer*，柏林，海德堡 *(2002)，175-191*。[53] *J. Moser*；*J. Pöschel*，*Dinaburg* 和 *Sinai* 关于拟周期势的一个结果的推广。《瑞士数学评论》*59 (1984)，39-85*。[54] *D. Osadchy*；*J. E. Avron*，作为量子相图的 *Hofstadter* 蝴蝶。《数学物理杂志》*42 (2001)，5665-5671*。[55] *Y. Pan*，辛拟周期余循环的重整化。准备中。[56] *R. Peierls*，传导电子抗磁性的理论。《物理学杂志》*80 (1933)，763-791*。[57] *A.S. Pyartli*，欧几里得空间子流形上的丢番图逼近。《功能分析及其应用》*3 (1969)，303-306*。[58] *J. Puig*，一个非微扰的 *Eliasson* 可约性定理。*Nonlinearity 19 (2006)，355-376*。[59] *A. Rauh*，晶体中朗道能级的简并。《固体物理学报 *B*》*65 (1974)，131-135*。[60] *Ya. G. Sinai*，拟周期势下一维差分薛定谔算子的安德森局域化。《统计物理学杂志》*46 (1987)，861-909*。[61] *M. Sodin*；*P. Yuditskii*，具有康托尔齐性谱的几乎周期斯图姆-刘维尔算子。《瑞士数学评论》*70(4) (1995)，639-658*。[62] *M. Sodin*；*P. Yuditskii*，具有齐性谱的几乎周期雅可比矩阵、无限维雅可比反演，以及特征自守函数的 *Hardy* 空间。《几何分析杂志》*7 (1997)，387-435*。[63] *J. You*，定量几乎可约性及其应用。载于《国际数学家大会论文集》第*3*卷，*(2018)，2113–2135*。数学与统计学院，南京理工大学，南京 *210094*，中国 电子邮箱：*jing.wang@njust.edu.cn* 数学系，南京大学，南京 *210093*，中国 电子邮箱：*377056722@qq.com* 陈省身数学研究所和 *LPMC*，南开大学，天津 *300071*，中国 电子邮箱：*jyou@nankai.edu.cn* 陈省身数学研究所和 *LPMC*，南开大学，天津 *300071*，中国 电子邮箱：*qizhou@nankai.edu.cn*