arXiv:2305.00501v1 [math.SG] 30 Apr 2023

D辛叶状结构的变形：代数方面

STEPHANE GEUDENS、ALFONSO G. TORTORELLA 和 MARCO ZAMBON

摘要。 在 [6], 中，我们探讨了辛叶状结构的变形理论，侧重于几何方面。本文将讨论由此自然引出的若干代数问题。我们证明，在 L_∞ 中构造的 -代数[6] 与所作选择无关，并证明 Maurer-Cartan 元素的规范等价对应于辛叶状结构在同伦意义下的等价。

目录

引言 1
1. 辛叶状结构及其变形的背景 22. 分裂的变更 63. 正则泊松结构的等价 14附录 A. $L_\infty[1]$-代数的背景 20附录 B. Courant 代数丛与 Dirac 结构 23附录 C. 狄拉克结构变形理论 24参考文献 25

引言

流形 M上的辛叶状结构 (F ω) 是指配备了叶向二形式$\omega \in \Omega^2$(F) 的叶状结构 F，其中该二形式是闭且非退化的。等价地，辛叶状结构可以视为正则泊松结构，即常秩双向量场 $\Pi \in \mathfrak{X}^2(M)$，其 Schouten-Nijenhuis 括号 $[\Pi,\Pi]_{SN}$ 为零。在一篇配套论文 [6], 中，我们从泊松几何的角度发展了辛叶状结构的变形理论。该文的主要结果利用适当的 $L_\infty[1]$-代数中的 Maurer-Cartan 元，描述了给定秩为 $2k$ 的辛叶状结构 (F ω) 的小变形。更准确地说，选取一个与 TF 互补的分布 G 后，可以构造一个 $L_\infty[1]$-代数 $(\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2],\{\mathfrak{l}_k^G\})$ 以及一个双射

$$\{(\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2],\{\mathfrak{l}_k^G\})\} \leftrightarrow \{(\text{eF}, \text{e}\omega) \in \text{辛叶状结构}\ ^{2k}(M): \quad T\text{eF} \pitchfork G\}\text{.的小 Maurer-Cartan 元} \tag{0.1}$$

本文是[6] 的后续研究，旨在回答 [6]中遗留的两个主要代数问题。我们在此考察的问题如下。

首先，尽管 $L_\infty[1]$-代数 $(\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2],\{\mathfrak{l}_k^G\})$的构造涉及对$G$叶状结构 $T\mathcal{F}$的补分布的选择，我们在推论 2.8 中证明，不同的补分布选择会产生 $L_\infty[1]$-代数，而且这些代数在规范意义下同构。因此，任意辛叶状结构 $(\mathcal{F}\ \omega)$都附带一个 $L_\infty[1]$-代数，用于控制其变形问题，并且该代数在本质上是规范确定的。

其次，我们讨论辛叶状结构变形的等价关系。一方面，存在一种几何 等价概念：如果两个辛叶状结构可由

2020 数学主题分类。 53D05, 53D17, 58H15, 58A50.关键词和短语。 辛几何、泊松几何、变形复形、 L_∞-代数、狄拉克结构几何。

与恒等映射同伦的微分同胚联系起来，则称它们等价。另一方面，对于 代数 概念而言， $L_\infty[1]$-代数 $(\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2],\{\mathrm{I}_k^G\})$中的 Maurer-Cartan 元存在规范等价关系。我们在定理 3.7中证明，在双射 (0.1) 下，这两种等价概念基本一致。利用这一结果，可以推导辛叶状结构模空间 $\mathcal{S}ympl\mathcal{F}ol^{2k}(M)/\mathrm{Diff}_0(M)$ 的性质，其中我们对同伦取商。特别是，它表明 $L_\infty[1]$-代数 $(\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2],\{\mathrm{I}_k^G\})$ 的上同调群 $H^2_{\mathcal{F}}(M,\Pi)$ 扮演着模空间形式切空间的角色，即。

$$T_{[(\mathcal{F},\omega)]}\left(\mathcal{S}ympl\mathcal{F}ol^{2k}(M)/\mathrm{Diff}_0(M)\right)\cong H^2_{\mathcal{F}}(M,\Pi).$$

我们在例 3.8 中表明，这个形式切空间会随点的不同而发生巨大变化，从而使模空间 $\mathcal{S}ympl\mathcal{F}ol^{2k}(M)/\mathrm{Diff}_0(M)$ 无法成为光滑空间。

致谢： S.G. 感谢伦敦大学学院数学与统计科学研究所（IMSS）提供的支持。在本文的准备期间，A.G.T. 获得了 FWO 在鲁汶大学提供的博士后奖学金 1204019N、FCT 在科英布拉大学数学中心（CMUC）提供的博士后奖学金 2021.04201.CEECIND 的资助，同时还获得了波尔图大学数学中心（CMUP）的支持。CMUP 的经费来自国家基金，由科学与技术基金会（FCT），公共机构通过项目编号 UIDB/00144/2020 提供。此外，他还是代数与几何结构及其应用国家研究组（GNSAGA – 意大利高等数学研究所（INdAM））的成员。M.Z. 感谢 FWO 和 FNRS 通过 EOS 项目 G0H4518N 和 G0I2222N、FWO 项目 G0B3523N，以及佛兰德政府（比利时）提供的长期结构性资助——Methusalem 资助所给予的部分支持。

1. 辛叶状结构及其变形的背景

我们回顾[6] 的定义和陈述，这些内容将在后文中用到。我们关注的对象是辛叶状结构，而 [6] 中的主要结果是：利用适当的 $L_\infty[1]$-代数中的 Maurer-Cartan 元素，对辛叶状结构空间进行局部参数化。关于A -代数所需的背景知识，请参阅附录 $L_\infty[1]$-代数；关于狄拉克几何，请参阅附录B 。

1.1. 辛叶状结构、正则泊松结构和良好多向量场。

我们介绍辛叶状结构，并回顾如何将其视为正则泊松结构。我们还回顾良好多向量场空间，如 [6]，中所介绍的，该空间支持我们旨在本节中描述的 $L_\infty[1]$-结构。本小节基于 [6, §1]。

定义 1.1. 流形 M 上的辛叶状结构 由 M 上的叶状结构 F 和一个叶向辛结构 ω组成，即叶向 de Rham 复形 $(\Omega^\bullet(\mathrm{F}),\mathrm{d}_{\mathcal{F}})$中的一个非退化二上循环 ω。

我们用$\mathcal{S}ympl\mathcal{F}ol^{2k}(M)$表示 M 上所有秩为 $2k$的辛叶状结构所构成的空间。我们在 [6] 中从略有不同的角度研究了这个空间。具体来说，我们利用了这样一个事实：辛叶状结构等同于正则泊松结构，下面将对此进行解释。

定义 1.2. 流形 M 上的泊松结构 是一个双向量场 $\Pi\in\mathfrak{X}^2(M)$，其 Schouten-Nijenhuis 括号 $[\Pi,\Pi]_{SN}$ 为零。若泊松结构 Π 所对应的向量丛态射 $\Pi^\sharp\colon T^*M\to TM,\ \eta\mapsto\iota_\eta\Pi$ 具有常秩，则称其为正则 的。此时，我们称 $\Pi^\sharp$的秩为 Π的秩 。分布 $T\mathrm{F}:=\mathrm{im}\ \Pi^\sharp$ 可积为 Π的特征叶状结构 F。

我们用正则泊松$^{2k}(M)$表示 M 上秩为 $2k$的所有正则泊松结构构成的空间。正则泊松$^{2k}(M)$与 $\mathcal{S}ympl\mathcal{F}ol^{2k}(M)$之间存在双射，原因如下。注意，像为 $\Pi^\sharp=T\mathrm{F}$ 的正则双向量场 Π 可视为 $\mathfrak{X}^2(\mathrm{F}):=\Gamma(\wedge^2T\mathrm{F})$中的非退化元素。因此，特征叶状结构为 F 的正则泊松结构，等同于分次李代数 $(\mathfrak{X}^\bullet(\mathrm{F})[1],[-,-]_{\mathrm{SN}})$中的非退化 Maurer-Cartan 元。此外，关系$\Pi=-\omega^{-1}$ 在非退化 Maurer-Cartan 元素 Π

与 $(\mathfrak{X}^\bullet(\mathrm{F}))$ [1], $[-,-]_{\mathrm{SN}}$）以及叶向 de Rham 复形（$\Omega^\bullet(\mathrm{F})$，$\mathrm{d}_{\mathcal{F}}$中的非退化 2-余循环 ω ）。这给出关系

$$\mathcal{SymplFol}^{2k}(M) \longrightarrow \mathcal{RegPoiss}^{2k}(M), \quad (\mathcal{F},\omega) \longmapsto -\omega^{-1}.$$

在 [6], 中，我们对空间正则泊松^{2k}（M）在给定正则泊松结构Π附近进行了参数化。它涉及 M上的多向量场的一个适当子空间，我们称之为良好多向量场。

定义 1.3。设（M, Π）是一个带有特征叶状结构 F 的正则泊松流形，并记 $T\mathrm{F}^0$为 $T\mathrm{F}$ 的湮灭子。良好多向量场的分次空间定义为

$$\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M) = \{W \in \mathfrak{X}^\bullet(M) : \iota_\alpha \iota_\beta W = 0 \text{ for all } \alpha,\beta \in \Gamma(T^\circ\mathcal{F})\}.$$

注意， $\mathfrak{X}^\bullet{}_{\mathcal{F}}$（$M$）是由 C^∞（M）$\oplus\mathfrak{X}$（M）生成的 $\mathfrak{X}^\bullet$（F ）-分次子模。我们将 $d_\Pi := [\Pi,-]_{SN}$ 记为泊松微分。事实证明， （$\mathfrak{X}^\bullet{}_{\mathcal{F}}$（$M$） d_Π）是 Lichnerowicz 复形（$\mathfrak{X}^\bullet$（M） d_Π）的子复形，其 2-余循环是 Π 作为正则泊松结构的无穷小变形:

$$T_\Pi\big(\mathcal{RegPoiss}^{2k}(M)\big) = \ker\big(\mathrm{d}_\Pi : \mathfrak{X}^2_{\mathcal{F}}(M) \to \mathfrak{X}^3_{\mathcal{F}}(M)\big).$$

1.2. 邻近正则双向量场的参数化。 本小节基于 [6, §2]。给定 M 上的一个秩为 $2k$ 的辛叶状结构 (F ω), 令 Π 为相应的秩为 $2k$ 的正则泊松结构，使得 $T\mathrm{F}$ $=\mathrm{im}\ \Pi^\sharp$。从现在起，我们固定以下数据:

- G 是一个与 $T\mathrm{F}$ 互补的分布，即 $TM = G \oplus T\mathrm{F}$。
- γ 是叶向辛形式 ω 在 G 上延拓为零所得的形式，即它满足
$$\gamma^\flat|_{T\mathcal{F}} = \omega^\flat \qquad \text{and} \qquad \gamma^\flat|_G = 0.$$
- 我们用 $\mathrm{pr}_{T\mathcal{F}}\colon TM \to T\mathrm{F}$ 和 $\mathrm{pr}_G\colon TM \to G$ 表示投影映射。

这里 $\gamma^\flat\colon TM \to T^*M$ 由 $\gamma^\flat(X) = \iota_X\gamma$ 定义。我们将使用与 G 和 Π 相关的所谓 狄拉克指数映射 , 对接近 Π 的双向量场进行参数化。事实证明，这种参数化非常适合筛选出接近 Π 且秩为 $2k$ 的正则双向量场。

给定一个双向量场 $Z \in \mathfrak{X}^2(M)$，二形式 $\gamma \in \Omega^2(M)$ 可用于生成一个新的双向量场 $Z^\gamma \in \mathfrak{X}^2(M)$, 前提是 Z 足够小。更确切地说，要求 Z 属于流形 M $\wedge^2 TM$ 中零截面的邻域 I$_\gamma$, 该邻域定义为

$$\mathcal{I}_\gamma := \sqcup_{x\in M}\{Z_x \in \wedge^2 T_xM \mid \mathrm{id}_{T_x^*M} + \gamma^\flat_x \circ Z^\sharp_x : T_x^*M \to T_x^*M \text{ is invertible}\}.$$

所讨论的双向量场 Z^γ , 称为 Z 经 γ 的规范变换，由下式确定

$$(Z^\gamma)^\sharp = Z^\sharp \circ (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ Z^\sharp)^{-1}. \tag{1.1}$$

现在我们可以定义狄拉克指数映射，它将靠近 Π 的双向量场参数化。

定义 1.4。与 G 和 Π 相关联的狄拉克指数映射$\exp_G$ 是映射

$$\exp_G\colon \mathcal{I}_\gamma \xrightarrow{\sim} \Pi + \mathcal{I}_{-\gamma}, \quad Z \mapsto \Pi + Z^\gamma.$$

其特征在于，对于所有 $Z \in \Gamma$(I$_\gamma$),

$$(\exp_G(Z))^\sharp = \Pi^\sharp + Z^\sharp \circ (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ Z^\sharp)^{-1}.$$

备注 1.5。 映射 $\exp_G$ 在狄拉克几何术语中有一种自然的描述。回顾一下，二形式 $\gamma \in \Omega^2(M)$ 和双向量场 $\Pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ 决定了广义切丛 $(\mathbb{T}M, \mathrm{hh}-, -\mathrm{ii})$ 上的正交变换 $\mathrm{R}_\gamma, \mathrm{R}_\Pi$，其定义如下：

$$\mathcal{R}_\gamma : \mathbb{T}M \to \mathbb{T}M : \ X + \alpha \mapsto X + \alpha + \iota_X \gamma,$$
$$\mathcal{R}_\Pi : \mathbb{T}M \to \mathbb{T}M : X + \alpha \mapsto X + \Pi^\sharp(\alpha) + \alpha.$$

$\exp_G$ 对截面 $Z \in \Gamma(\mathrm{I}_\gamma)$ 的作用由下式给出

$$\mathrm{Gr}(\exp_G(Z)) = \mathcal{R}_\Pi \mathcal{R}_\gamma \, \mathrm{Gr}(Z), \tag{1.2}$$

其中，Gr 表示图。

利用狄拉克指数映射对接近 Π 的双向量场进行参数化，其优点是可将常秩条件转化为线性条件。具体而言，参数必须属于良双向量场构成的线性子空间（见定义 1.3）。因此，将 $\exp_G$ 限制到 $\mathfrak{X}^2_{\mathcal{F}}(M)$ 后，我们得到流形 M 上正则秩为 $2k$ 的双向量场空间的一个子流形图。

定理 1.6. 狄拉克指数映射

$$\exp_G : \mathcal{I}_\gamma \xrightarrow{\sim} \Pi + \mathcal{I}_{-\gamma}, \quad Z \longmapsto \exp_G(Z) := \Pi + Z^\gamma$$

在截面层面上诱导出以下双射：

$$\Gamma(\mathcal{I}_\gamma) \cap \mathfrak{X}^2_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{\sim} \{W \in \mathfrak{X}^2_{reg\text{-}2k}(M) \mid \mathrm{im}\, W^\sharp \pitchfork G\}, \quad Z \longmapsto \exp_G(Z).$$

1.3. 参数化附近的正则泊松结构。根据定理 1.6，若能在 $\Gamma(\mathrm{I}_\gamma) \cap \mathfrak{X}^2_{\mathcal{F}}(M)$ 中找出经狄拉克指数映射作用后成为泊松结构的元素，就能得到秩为 $2k$ 的正则泊松结构空间的局部参数化。我们将看到，对于移位空间 $\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2]$ 上的某种适当的 $L_\infty[1]$-代数结构，这些元素恰好是 $\Gamma(\mathrm{I}_\gamma)$ 中的 Maurer–Cartan 元素。此小节基于 [6, § 3.1, § 3.2]。

回顾一下，双向量场是泊松的，当且仅当其图是 Dirac 结构。我们在评注 1.5 中看到，映射 $\exp_G$ 在狄拉克几何中有一种自然的描述。这促使我们研究 Dirac 结构 $\mathrm{Gr}\,\Pi \subset \mathbb{T}M$ 的变形，而不是直接研究 Π 的变形。正如附录 C 中所回顾的，选择一个互补几乎 Dirac 结构 B，可以方便地描述给定 Dirac 结构 $A \subset \mathbb{T}M$ 的变形。这样的选择会导出一个 L_∞- 代数 $(\Omega^\bullet(A)[1], \{\mathfrak{m}_k^B\})$，其 Maurer–Cartan (MC) 元素可参数化横截于 B 的 Dirac 结构。对于 Dirac 结构 $A := \mathrm{Gr}\ \Pi$，最直接的补分布选择是 $B := TM$，但这种方法不适合筛选出 Π 的正则变形。事实上，这样得到的正是通常的 Koszul 微分分次李代数 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[1], \mathrm{d}_\Pi, [-,-]_{SN})$（至同构），其 MC 元素 Z 通过以下关系参数化泊松结构 $P \in \mathfrak{X}^2(M)$：

$$P = \Pi + Z.$$

然而，使 $\Pi + Z$ 具有常秩 $2k$ 的双向量场 $Z \in \mathfrak{X}^2(M)$ 并不构成一个向量空间，因此补分布 TM 不适合我们的目的。更好的选择如下。

引理 1.7. 几乎*Dirac*结构 $G \oplus G^0 \subset \mathbb{T}M$ 与 $\mathrm{Gr}\,\Pi$ 互补。

自然的做法是将引理 C.1 和 C.3 分别应用于输入 $E = \mathbb{T}M$、$A = \mathrm{Gr}\,\Pi$ 和 $B = G \oplus G^0$，从而得到一个 $L_\infty[1]$-代数 $(\Omega^\bullet(\mathrm{Gr}\ \Pi)[2], \{\mu_k^{G \oplus G^0}\})$，它控制 Dirac 结构 $\mathrm{Gr}\,\Pi$ 的变形问题。然而，我们转而采用一种间接但更为便捷的方法。由于我们希望利用狄拉克指数映射对 Π 的变形进行参数化，其在截面上的作用由 $\mathrm{R}_\Pi \mathrm{R}_\gamma$ 给出（参见注释 1.5），因此我们首先沿着 $\mathrm{R}_\Pi \mathrm{R}_\gamma$ 传输标准 Courant 代数丛结构。这样做也简化了问题，因为它将分裂 $\mathbb{T}M = \mathrm{Gr}\ \Pi \oplus (G \oplus G^0)$ 转换为 $\mathbb{T}M = T^*M \oplus TM$。随后，我们再应用引理 C.1，从而在 $\mathfrak{X}^\bullet(M)[2]$ 上得到一个 $L_\infty[1]$-代数结构 $\{\mathrm{I}_k^G\}$。

引理 1　.8. 存在唯一的 *Courant*代数丛结构 $([[-,-]]_G, \rho_G)$ 定义在$(\mathbb{T}M, \langle\langle -,-\rangle\rangle)$上，使得正交变换是一个

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\Pi\mathcal{R}_\gamma : (\mathbb{T}M, \langle\langle -,-\rangle\rangle, [[-,-]]_G, \rho_G) &\xrightarrow{\sim} (\mathbb{T}M, \langle\langle -,-\rangle\rangle, [[-,-]], \mathrm{pr}_{TM}),\\ X+\alpha &\longmapsto (\mathrm{pr}_G X + \iota_\alpha \Pi) + (\alpha + \iota_X \gamma),\end{aligned}$$

*Courant*代数丛同构。特别地，后者诱导出：

- *Lie*代数丛同构

$$\mathcal{R}_\Pi|_{T^*M} : T^*M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}\,\Pi,\ \alpha \longmapsto \iota_\alpha \Pi + \alpha, \tag{1.3}$$

  其中 T^*M 配备与 Π 相关联的 *Lie*代数丛结构。

- 几乎*Lie*代数丛同构

$$(\mathcal{R}_\Pi\mathcal{R}_\gamma)|_{TM} : TM \xrightarrow{\sim} G \oplus G^0,\ X \longmapsto \mathrm{pr}_G X + \iota_X \gamma, \tag{1.4}$$

  其中，TM带有由以下定义的几乎*Lie*代数丛结构 $([-,-]_\gamma, \rho_\gamma)$

$$[X,Y]_\gamma = [\mathrm{pr}_G X, \mathrm{pr}_G Y] - \Pi^\sharp(\mathcal{L}_{\mathrm{pr}_G X}\iota_Y\gamma - \mathcal{L}_{\mathrm{pr}_G Y}\iota_X\gamma), \qquad \rho_\gamma(X) = \mathrm{pr}_G X. \tag{1.5}$$

注 1.9. 记 $\Upsilon^G_{TM} \in \Omega^3(M)$ 为几乎Dirac结构 TM在 $(\mathbb{T}M, \mathrm{hh}-, -\mathrm{ii}\ [[-,-]]_G, \rho_G)$ 中的 Courant张量，如注 B.4 所述。由引理 1.8 可知，Υ^G_{TM}是 $G \oplus G^0$的 Courant张量沿同构 (1.4) 的拉回。因此，对所有 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\Upsilon^G_{TM}(X,Y,Z) = \gamma(X, [\mathrm{pr}_G Y, \mathrm{pr}_G Z]) + \gamma(Y, [\mathrm{pr}_G Z, \mathrm{pr}_G X]) + \gamma(Z, [\mathrm{pr}_G X, \mathrm{pr}_G Y]).$$

特别注意，Υ^G_{TM} 恰好在 $G \subset TM$ 是对合的时消失。

现在，我们将引理 C.1 应用于以下情形：$E = (\mathbb{T}M, \langle\langle -, -\rangle\rangle\ [[-,-]]_G, \rho_G)$ 是引理 1.8中提到的 Courant代数丛，Dirac 结构为 $A = T^*M$，几乎Dirac结构为 $B = TM$。因此，分次空间 $\mathfrak{X}^\bullet(M)[2]$继承了一个 $L_\infty[1]$-代数结构 $\{\mathfrak{l}^G_k\}$，具体描述如下。

命题 1.10。 *Dirac* 结构 T^*M通过 *Courant*代数丛 $(\mathbb{T}M, \langle\langle -,-\rangle\rangle\ [[-,-]]_G, \rho_G)$ 中的互补几乎*Dirac*结构 TM所关联的 $L_\infty[1]$-代数为 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \{\mathfrak{l}^G_k\})$，其唯一非平凡的多重括号 $\mathfrak{l}^G_1, \mathfrak{l}^G_2, \mathfrak{l}^G_3$由下式给出。

- 一元括号 $\mathfrak{l}^G_1$ 是泊松微分 d_Π，即对所有 $P \in \mathfrak{X}^\bullet(M)$,

$$\mathfrak{l}^G_1(P) = [\Pi, P]_{\mathsf{SN}},$$

- 二元括号 $\mathfrak{l}^G_2$在齐次 $P, Q \in \mathfrak{X}^\bullet(M)$上的作用如下：

$$\mathfrak{l}^G_2(P,Q) = (-)^{|P|}[P,Q]_\gamma,$$

  其中 $[-,-]_\gamma$ 是将式 (1.5) 中的括号推广为几乎 *Gerstenhaber* 括号所得。

- 三元括号 $\mathfrak{l}^G_3$在齐次 $P, Q, R \in \mathfrak{X}^\bullet(M)$ 上的作用如下：定义见备注 1.9。

$$\mathfrak{l}^G_3(P,Q,R) = -(-1)^{|Q|}(P^\sharp \wedge Q^\sharp \wedge R^\sharp)\Upsilon^G_{TM},$$

根据备注 1.9，三元括号 $\mathfrak{l}^G_3$ 恰在 G 是对合的时消失；在这种情况下，上述$L_\infty[1]$-代数约化为 dgL[1]a。另请注意，作为引理 1.8 的推论，$L_\infty[1]$-代数 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \{\mathfrak{l}^G_k\})$ 与 $L_\infty[1]$-代数 $(\Omega^\bullet(\mathrm{Gr}\ \Pi)[2]$ 同构，后者由标准 Courant 代数丛的分裂 $\mathbb{T}M = \mathrm{Gr}\,\Pi \oplus (G \oplus G^0)$ 定义。

命题 1.11。 丛同构 (1.3) 诱导出一个 $L_\infty[1]$-代数的严格同构

$$\wedge^\bullet(\mathcal{R}_\Pi|_{T^*M})^* : (\Omega^\bullet(\mathrm{Gr}\,\Pi)[2], \{\mu_k^{G\oplus G^0}\}) \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \{\mathfrak{l}^G_k\}).$$

Maurer–Cartan 元素 Z 属于 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\{\mathrm{I}_k^G\})$ 通过关系 $L\subset\mathbb{T}M$ 横截于 $G\oplus G^0$ 的狄拉克结构 $L=\mathcal{R}_\Pi\mathcal{R}_\gamma\mathrm{Gr}(Z)$。若 $Z\in\Gamma(\mathcal{I}_\gamma)$，则可用（1.2）将此关系表示为

$$L=\mathrm{Gr}(\exp_G(Z)). \tag{1.6}$$

定理 1.6 表明，将这一对应关系限制在 MC 元素 $Z\in\Gamma(\mathrm{I}_\gamma)\cap\mathfrak{X}^2_\mathcal{F}(M)$ 上，可以得到 Π 附近正则泊松结构空间的参数化。因此，如果我们证明 $\mathfrak{X}^\bullet_\mathcal{F}(M)[2]$ 是 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\{\mathrm{I}_k^G\})$ 的一个 $L_\infty[1]$-子代数，那么我们就得到一个 $L_\infty[1]$-代数，使得小的 MC 元素能够参数化辛叶状结构（$\mathrm{F}\ \omega$）的变形。

命题 1.12。多重括号 I_k^G 将 $\mathfrak{X}^\bullet_\mathcal{F}(M)[2]\subset\mathfrak{X}^\bullet(M)[2]$ 映射到其自身。因此，$\mathfrak{X}^\bullet_\mathcal{F}(M)[2]$ 继承了一个 $L_\infty[1]$-代数结构，仍记作 $\{\mathrm{I}_k^G\}$。

定理 1.13。（[6]**的主定理**）设 $(\mathrm{F}\ \omega)$ 是 M 上秩为 $2k$ 的辛叶状结构，其对应的正则泊松结构为 Π。固定一个与 $T\mathcal{F}$ 互补的分布 G。该关系

$$-\widetilde{\omega}^{-1}=\exp_G(Z)$$

建立了典范一一对应关系娱乐主管

(1) $L_\infty[1]$代数 $(\mathfrak{X}^\bullet_\mathcal{F}(M)[2],\{\mathrm{I}_k^G\})$ 的 *Maurer–Cartan* 元 Z，满足 $Z\in\Gamma(\mathcal{I}_\gamma)$,~

~*(2)* M 上的秩为 $2k$ 的辛叶状结构 $(\mathcal{F},\widetilde{\ }\omega)$，满足 $T\mathcal{F}\pitchfork G$。

2. 分裂的变更

辛叶状结构 $L_\infty[1]$-代数 $(\mathfrak{X}^\bullet_\mathcal{F}(M)[2],\{\mathrm{I}_k^G\})$ 的构造 $(\mathcal{F}\ \omega)$ 涉及选择一个分布 G 作为 $T\mathcal{F}$ 的补分布。本节将说明，不同的补分布 G_0，G_1 所产生的 $L_\infty[1]$-代数在规范意义下同构，见推论 2.8。我们分两步进行。

首先，回顾 §1.3，$L_\infty[1]$-代数 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_0}\})$ 和 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_1}\})$ 本质上是利用 $G_0\oplus G_0^0$ 和 $G_1\oplus G_1^0$ 作为引理 C.1 中的几乎 Dirac 补，对 Dirac 结构 $\mathrm{Gr}\ \Pi$ 进行变形而得到的。[7] 中证明了，选择不同的几乎 Dirac 补会得到同构的 $L_\infty[1]$-代数。[16]，中则在更一般的 Dirac-Jacobi 结构背景下给出了这一事实的另一种证明。我们将后一种证明专门应用于 Dirac 情形，从而得到 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_0}\})$ 与 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_1}\})$ 之间一个显式的 $L_\infty[1]$-同构。其次，我们验证这个同构限制后，给出 $L_\infty[1]$-子代数 $(\mathfrak{X}^\bullet_\mathcal{F}(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_0}\})$ 与 $(\mathfrak{X}^\bullet_\mathcal{F}(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_1}\})$ 之间的同构。

2.1. 狄拉克情形。这里，我们针对任意狄拉克结构完成上述第一步。给定 Courant代数丛 E中的一个狄拉克结构 A，选取一个互补的几乎 Dirac 结构 B，即可得到一个 $L_\infty[1]$-代数（$\Omega^\bullet(A)[2],\{\mu_k^B\}$）（见引理 C.1）。本小节第一部分回顾如何在[16] 中证明，该 $L_\infty[1]$-代数与补分布 B的选择无关。证明利用了这样一个事实：如附录 C 所述，所讨论的 $L_\infty[1]$-代数源自 Voronov 导出括号构造 [17], 。因此，可以使用 [2] 中关于高阶导出括号等价的结果。更多细节请参见 [16, §5.2]。

设置如下。令 B_0、B_1 为狄拉克结构 $A\subset E$的几乎 Dirac 补。按照附录 C中的说明，通过 $E=A\oplus B_i\cong A\oplus A^*$可得到分次李代数 Θ_0、Θ_1 的 Maurer-Cartan 元素 $(C^\infty(T^*[2]A[1])[2],\{-,\ -\})$，其中 $\{-,\ -\}$ 表示分次流形 $T^*[2]A[1]$上的典范次数 -2 泊松结构。由此可得到两组 V-数据，分别对应 $i=0$、1：

$$\big(C^\infty(T^*[2]A[1])[2],\Omega^\bullet(A)[2],P,\Theta_i\big), \tag{2.1}$$

其中 $P\colon\ C^\infty(T^*[2]A[1])[2]\to\Omega^\bullet(A)[2]$ 是对零截面的限制。应用 Voronov 构造，我们在对称余代数 $\mathrm{S}(\Omega^\bullet(A)[2])$ 上得到两个余微分 $\mathrm{Q}_0,\mathrm{Q}_1$。改变所得二元括号的符号（参见注 C.2）后，我们得到两个 $L_\infty[1]$- 代数 $(\Omega^\bullet(A)[2],\{\mu_k^0\})$ 和 $(\Omega^\bullet(A)[2],\{\mu_k^1\})$，如引理 C.1 所述。

为了关联这两个 $L_\infty[1]$-代数，我们先将几乎Dirac结构 B_1 表示在直和 $E = A \oplus B_0$中。由于 B_1 与第一个直和项 A横截，因此它可以表示为某个向量丛映射 $B_0 \cong A^* \to A$的图，故存在 $\eta \in \Gamma(\wedge^2 A)$，使得

$$B_1 = \mathrm{Gr}(\eta) \equiv \{\iota_\alpha \eta + \alpha \mid \alpha \in A^*\} \subset A \oplus A^* \simeq A \oplus B_0 = E. \tag{2.2}$$

由于 η 是 $C^\infty(T^*[2]A[1])$ 中的一个 2 次函数，它确定了 $(C^\infty(T^*[2]A[1])[2], \{-,\ -\})$ 的一个零次分次李代数导子，即

$$\mathsf{m} := \{\eta, -\} : C^\infty(T^*[2]A[1])[2] \to C^\infty(T^*[2]A[1])[2].$$

为了应用 [2], 中的等价性结果，需要验证以下技术假设成立：(1) 等式 $P \circ \mathsf{m} \circ P = P \circ \mathsf{m}$ 成立。

(2) 零解 $\lambda_\epsilon = 0$ 是柯西问题的唯一解

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\lambda_\varepsilon = P\mathsf{m}\lambda_\varepsilon \\ \lambda_0 = 0 \end{cases}.$$

事实上，$P \circ \mathsf{m} = 0$，正如我们在下文引理 2.2 的证明中所示，因此这些要求显然都满足。由于导子 m 是幂零完备的，它有定义良好的流，由分次李代数自同构构成的单参数群给出 $e^{\varepsilon\mathsf{m}}$。

将流 $e^{\varepsilon\mathsf{m}}$ 作用于 $(C^\infty(T^*[2]A[1])[2], \{-,\ -\})$ 的 Maurer-Cartan 元 Θ_0，得到一族 Maurer-Cartan 元素 $\Theta(\varepsilon) := e^{\varepsilon\mathsf{m}}\Theta_0$，它始终属于 $\ker P$，因此我们得到一族 V-数据

$$\big(C^\infty(T^*[2]A[1])[2], \Omega^\bullet(A)[2], P, \Theta(\varepsilon)\big).$$

容易验证，这个族在我们最初给出的 V-数据 $\big(C^\infty(T^*[2]A[1])[2], \Omega^\bullet(A)[2], P, \Theta_0\big)$ 和 $\big(C^\infty(T^*[2]A[1])[2], \Omega^\bullet(A)[2], P, \Theta_1\big)$ 之间进行插值（参见 (2.1)）。因此，Voronov方法给出了 $\mathsf{S}(\Omega^\bullet(A)[2])$ 上余微分 $\mathsf{Q}(\varepsilon)$ 的一个族，该族在 Q_0 和 Q_1 之间进行插值。

继续采用 [2], 中的策略，我们将 M 定义为 $\mathsf{S}(\Omega^\bullet(A)[2])$ 上的次数为 0 的余导子，其泰勒系数 $\{\mathsf{M}_k\}$ 定义如下：

$$\mathsf{M}_k(\omega_1 \odot \ldots \odot \omega_k) = P\{\{\ldots\{\mathsf{m}\omega_1, \omega_2\}, \ldots\}, \omega_k\} \tag{2.3}$$

对所有 $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega^\bullet(A)[2]$ 均成立。回顾定义，M 的第 k 个泰勒系数由 $M_k = pr_{\Omega^\bullet(A)[2]} \circ M|_{S^k(\Omega^\bullet(A)[2])}$ 给出，参见命题 A.8。根据 [2, 命题 3.4],，余导子 M 可指数化为 $\mathsf{S}(\Omega^\bullet(A)[2])$ 上的一参数分次余代数自同构群 $e^{\varepsilon\mathsf{M}}$。此外，根据 [2, 定理 3.2],，余代数自同构 $e^{\varepsilon\mathsf{M}}$ 将余微分 Q_0 与 $\mathsf{Q}(\varepsilon)$ 相互交织。在时刻 $\varepsilon = 1$，我们得到以下结果；对于正合Courant代数丛，该结果复现了 [7, 推论 3.9]。

定理 2.1。 余代数自同构 e^{M} 对应一个 $L_\infty[1]$-代数同构

$$e^{\mathsf{M}} : (\Omega^\bullet(A)[2], \mu_1^0, -\mu_2^0, \mu_3^0) \longrightarrow (\Omega^\bullet(A)[2], \mu_1^1, -\mu_2^1, \mu_3^1).$$

通过与转置进行前合成和后合成

$$\tau : \Omega^\bullet(A)[2] \to \Omega^\bullet(A)[2] : \alpha \mapsto -\alpha,$$

我们得到一个典范的 $L_\infty[1]$-同构

$$\tau \circ e^{\mathsf{M}} \circ \tau : (\Omega^\bullet(A)[2], \mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0) \longrightarrow (\Omega^\bullet(A)[2], \mu_1^1, \mu_2^1, \mu_3^1).$$

现在，我们明确描述余导子流形 M。我们给出详细证明，因为该结果稍后将对命题2.7 很重要，而且在如此一般的情况下，它并未出现在 [16] 或 [7] 中。

引理 2.2。 设 $A \to M$是任意向量丛。考虑带有标准次数为 -2的泊松结构$\{-,-\}$的 $T^*[2]A[1]$，并记 $P\colon C^\infty(T^*[2]A[1]) \to \Omega^\bullet(A)$ 为其在零截面上的限制。任取 $\eta \in \Gamma(\wedge^2 A)$，并令 $\mathrm{m} := \{\eta, -\}$。我们将 M 定义为$\mathsf{S}(\Omega^\bullet(A))$ 上的余导子，其泰勒系数为

$$\mathsf{M}_k(\omega_1 \odot \cdots \odot \omega_k) = \mathsf{P}\{\{\ldots\{\mathrm{m}\omega_1, \omega_2\}, \ldots\}, \omega_k\}.$$

Then 除 流形 M_k 外，所有系数均为零；流形 M_2，对齐次 $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^\bullet(A)$ 的作用读作 s

$$\mathsf{M}_2(\omega_1 \odot \omega_2) = (-1)^{|\omega_1|}(\omega_1^\flat \wedge \omega_2^\flat)\eta. \tag{2.4}$$

注 2.3. 可以验证，公式 (2.4) 在二形式上的特例为:

$$(\mathsf{M}_2(\omega_1 \odot \omega_2))^\flat = -\omega_1^\flat \eta^\sharp \omega_2^\flat - \omega_2^\flat \eta^\sharp \omega_1^\flat \qquad \text{for } \omega_1, \omega_2 \in \Omega^2(A).$$

这个等式的内容即为 [7, 引理 4。1], 作者用它来描述$L_\infty[1]$-同构 $e^{-\mathsf{M}}$ 对 Maurer-Cartan 元素的作用。我们的引理 2.2 更为一般，因为它适用于 $\Omega^\bullet(A)$的任意齐次元素，并且是下文命题 2.7 证明中的关键步骤。

在证明引理之前，先回顾一下 $C^\infty(T^*[2]A[1])$ 上的双重分次，具体如下。在 M 上取坐标 $\{x_i\}$，并令 $\{\xi_a\}$ 为 A 上的纤维线性坐标。记 $\{p_i\}$ 和 $\{\vartheta_a\}$ 为相应的动量；它们分别是 T^*M 和 A^* 上的纤维线性坐标。我们得到 $T^*[2]A[1]$ 的坐标图 $\{x_i,\ \xi_a,\ p_i,\ \vartheta_a\}$，其中

$$\deg(x_i) = 0, \quad \deg(\xi_a) = 1, \quad \deg(p_i) = 2, \quad \deg(\vartheta_a) = 1. \tag{2.5}$$

事实上， $C^\infty(T^*[2]A[1])$上的这个分次是两个分次之和，这源于 T^*A是一个双向量丛这一事实。这又用到了一个典范辛同构 $T^*A \to T^*A^*$，称为勒让德变换[12, §3.4]；在上述坐标中，它的表达式就是

$$T^*A \to T^*A^* : (x_i, \xi_a, p_i, \vartheta_a) \mapsto (x_i, -\vartheta_a, p_i, \xi_a).$$

所讨论的双向量丛如下:

$$\begin{array}{ccc} T^*A & \xrightarrow{(p_i,\xi_a)} & A^* \\ {\scriptstyle (p_i,\vartheta_a)}\downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & M \end{array},$$

其中，(p_i, ξ_a)和 $T^*A \to A^*$的纤维坐标，以及(p_i, ϑ_a)，都是 $T^*A \to A$的坐标。将向量丛视为分次流形时，纤维坐标的次数为一；因此， T^*A 上的总次数确实由上面的式（2.5）给出。下文中，我们用 $(\bullet, \bullet)$表示 $C^\infty(T^*[2]A[1])$中元素的双次数，其中第一项是坐标(p_i, ϑ_a)的次数，第二项是(p_i, ξ_a)的次数。

引理的证明 *2.2*。 我们首先论证，流形 M_2 是唯一非零的泰勒系数。

- 为说明流形 M_1 消失，我们应检查 $P \circ \mathrm{m} = 0$。注意，对于所有的 $f \in C^\infty(T^*[2]A[1])$， $P(f)$ 恰好在 f没有双次数为 $(0, \bullet)$ 的分量时消失。回忆一下，典范泊松括号 $\{-,-\}$ 的双次数为 $(-1,-1)$（见 [12, 注 3.3.3]）。由于 $\eta \in \Gamma(\wedge^2 A)$ 的双次数为 $(2,0)$，因此 $\mathrm{m} = \{\eta, -\}$ 的双次数为 $(1,-1)$。所以，m 的像中的函数没有双次数为 $(0,\bullet)$ 的分量，从而 $P \circ \mathrm{m} = 0$。
- 根据双次数可知，M_k对 $k \geq 3$的消失成立。形式 $\omega_1 \in \Omega^k(A)$ $\omega_2 \in \Omega^l(A)$和$\omega_3 \in \Omega^p(A)$作为$C^\infty(T^*[2]A[1])$的元素时，其双次数分别为$(0,\ k)$，$(0,\ l)$和$(0,\ p)$。由于导子m的双次数为$(1,\ -1)$，而泊松括号$\{-,\ -\}$的双次数为$(-1,\ -1)$，因此$\{\mathrm{m}\omega_1,\ \omega_2\}$的双次数为$(0,\ k+l-2)$。所以，$\{\{\mathrm{m}\omega_1,\ \omega_2\}\ \omega_3\}$为零，因为它的第一次数为负。

为了证明公式（2.4），我们首先用归纳法证明

$$\{X,\alpha\} = \iota_X\alpha \qquad \text{for } X\in\Gamma(A),\ \alpha\in\Omega^\bullet(A). \tag{2.6}$$

显然，对于 $\alpha\in\Omega^1(A)$，此结论成立，因为此时 $\{X,\alpha\} = \langle\langle X,\alpha\rangle\rangle = \iota_X\alpha$，由 (C.2) 中的第一个等式可知。假设该公式对 k-形式成立，令 $\alpha\in\Omega^k(A)$和 $\beta\in\Omega^1(A)$。于是有

$$\begin{aligned}\{X,\alpha\wedge\beta\} &= \{X,\alpha\}\beta + (-1)^k\alpha\{X,\beta\}\\ &= (\iota_X\alpha)\beta + (-1)^k\alpha(\iota_X\beta)\\ &= \iota_X(\alpha\wedge\beta),\end{aligned}$$

从而证明了 (2.6)。现在，为了证明等式 (2.4) 成立，可以假设 η 是可分解的，即$\eta=\eta_1\wedge\eta_2$ 对于 $\eta_1,\eta_2\in\Gamma(A)$。注意，由于双次数的原因，有

$$\mathsf{M}_2(\omega_1\odot\omega_2) = P\{\{\eta,\omega_1\},\omega_2\} = \{\{\eta,\omega_1\},\omega_2\}.$$

由于

$$\begin{aligned}\{\eta_1\wedge\eta_2,\omega_1\} &= -\big(\{\omega_1,\eta_1\}\eta_2 + (-1)^{|\omega_1|}\eta_1\{\omega_1,\eta_2\}\big)\\ &= (-1)^{|\omega_1|}\{\eta_1,\omega_1\}\eta_2 + \eta_1\{\eta_2,\omega_1\}\\ &= (-1)^{|\omega_1|}(\iota_{\eta_1}\omega_1)\eta_2 + \eta_1(\iota_{\eta_2}\omega_1),\end{aligned}$$

再与 ω_2 取一次括号，我们得到

$$\begin{aligned}\{\{\eta_1\wedge\eta_2,\omega_1\},\omega_2\} &= (-1)^{|\omega_1|}\{(\iota_{\eta_1}\omega_1)\eta_2,\omega_2\} + \{\eta_1(\iota_{\eta_2}\omega_1),\omega_2\}\\ &= -(-1)^{|\omega_1|+|\omega_1||\omega_2|}\big(\{\omega_2,\iota_{\eta_1}\omega_1\}\eta_2 + (-1)^{|\omega_2|(|\omega_1|-1)}\iota_{\eta_1}\omega_1\{\omega_2,\eta_2\}\big)\\ &\quad - (-1)^{|\omega_1||\omega_2|}\big(\{\omega_2,\eta_1\}\iota_{\eta_2}\omega_1 + (-1)^{|\omega_2|}\eta_1\{\omega_2,\iota_{\eta_2}\omega_1\}\big)\\ &= -(-1)^{|\omega_1|+|\omega_2|}\iota_{\eta_1}\omega_1\{\omega_2,\eta_2\} - (-1)^{|\omega_1||\omega_2|}\{\omega_2,\eta_1\}\iota_{\eta_2}\omega_1,\end{aligned} \tag{2.7}$$

利用 $\{-,-\}$ 当两个参数都属于 $\Gamma(A^*)$时为零。根据 (2.6)，表达式 (2.7) 可写为

$$\begin{aligned}(-1)^{|\omega_1|}\iota_{\eta_1}\omega_1\iota_{\eta_2}\omega_2 + (-1)^{|\omega_1||\omega_2|+|\omega_2|}\iota_{\eta_1}\omega_2\iota_{\eta_2}\omega_1 &= (-1)^{|\omega_1|}\iota_{\eta_1}\omega_1\iota_{\eta_2}\omega_2 - (-1)^{|\omega_1|}\iota_{\eta_2}\omega_1\iota_{\eta_1}\omega_2\\ &= (-1)^{|\omega_1|}\big(\iota_{\eta_1}\omega_1\iota_{\eta_2}\omega_2 - \iota_{\eta_2}\omega_1\iota_{\eta_1}\omega_2\big).\end{aligned} \tag{2.8}$$

另一方面，根据定义（见（C.4））可知

$$(\omega_1^\flat\wedge\omega_2^\flat)\eta_1\wedge\eta_2 = \iota_{\eta_1}\omega_1\iota_{\eta_2}\omega_2 - \iota_{\eta_2}\omega_1\iota_{\eta_1}\omega_2,$$

因此，与（2.8）进行比较，我们可以看到等式（2.4）成立。这就证明了该引理。 □

2.2. 正则泊松情形。 现在我们证明，辛叶状结构 $(\mathsf{F},\ \omega)$ 的 $L_\infty[1]$-代数 $(\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2],\{\mathrm{I}_k^G\})$ 独立于所选择的与 $T\mathsf{F}$ 互补的分布 G。我们将按如下方式进行。给定两个补分布 G_0 和 G_1，我们首先使用 §2.1 找出 $L_\infty[1]$-代数 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_0}\})$ 与 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_1}\})$ 之间的一个同构。然后我们证明，该映射限制于 $L_\infty[1]$-子代数 $(\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_0}\})$ 和 $(\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_1}\})$。

2.2.1. 一个典范的 $L_\infty[1]$-同构。 设 M 上有一个辛叶状结构 $(\mathsf{F},\ \omega)$，其对应的正则泊松结构为 Π，令 G_0 和 G_1 为特征分布 $T\mathsf{F}$ 的补分布。

接下来，我们描述 $L_\infty[1]$-代数 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_0}\})$ 与 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_1}\})$ 之间的一个显式同构。思路如下：利用 $G_i\oplus G_i^0$ 作为 $i=0$ 的补分布，对 $\mathbb{T}M$ 内的 $\mathrm{Gr}\,\Pi$ 进行变形，可在 $\Omega^\bullet(\mathrm{Gr}\,\Pi)[2]$ 上得到两种 $L_\infty[1]$-代数结构；根据定理 2.1，它们彼此同构。由于 $L_\infty[1]$-代数 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_i}\})$ 可通过严格同构由后者得到（见命题 1.11），因此最终可得到 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_0}\})$ 与 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\{\mathrm{I}_k^{G_1}\})$ 之间的一个同构。

给定直和 $\mathbb{T}M = \operatorname{Gr}\Pi \oplus (G_0 \oplus G_0^0)$，我们首先将 $G_1 \oplus G_1^0$ 表示为该分解中的形式。注意，由于 G_0 和 G_1 都与 $T\mathcal{F}$ 横截，存在 $\epsilon \in \Gamma(\operatorname{Hom}(G_0,\ T\mathcal{F}))$，使得

$$G_1 = \operatorname{Gr}(\epsilon) = \{\epsilon(Y) + Y : Y \in G_0\}. \tag{2.9}$$

这立即意味着

$$G_1^0 = \operatorname{Gr}(-\epsilon^*) = \{\alpha - \epsilon^*\alpha : \alpha \in T^*\mathcal{F}\}. \tag{2.10}$$

引理 2.4。 我们有 $G_1 \oplus G_1^0 = \operatorname{Gr}(\eta)$，其中 $\eta \in \Gamma(\wedge^2 \operatorname{Gr}\Pi)$ 由下式确定

$$\eta^\sharp(\psi(X+\beta)) = -\omega^\flat(\epsilon(X)) + \epsilon^*\big(\omega^\flat(\epsilon(X)) - \beta\big) + \epsilon(X), \tag{2.11}$$

对于 $X + \beta \in G_0 \oplus G_0^0$。这里，$\psi$ 表示 $G_0 \oplus G_0^0$ 与 $(\operatorname{Gr}\Pi)^*$ 之间的典范识别，即

$$\psi : G_0 \oplus G_0^0 \to (\operatorname{Gr}\Pi)^* : X + \beta \mapsto \langle\!\langle X + \beta, - \rangle\!\rangle|_{\operatorname{Gr}\Pi}. \tag{2.12}$$

在证明引理之前，我们指出，(2.11) 的右侧确实属于 $\Gamma(\operatorname{Gr}\Pi)$，因为 $\Pi^\sharp$ 在 $G_0^* \cong T\mathcal{F}^0$ 的元素上为零，并且 $\Pi^\sharp \circ \omega^\flat = -\mathrm{Id}_{T\mathcal{F}}$。

引理 *2.4* 的证明。 由 (2.9) 和 (2.10)，我们知道

$$G_1 \oplus G_1^0 = \{\epsilon(Y) + Y + \alpha - \epsilon^*(\alpha) : Y \in G_0,\ \alpha \in T^*\mathcal{F}\}.$$

取定 $Y \in G_0$ 和 $\alpha \in T^*\mathcal{F}$，我们写成

$$\epsilon(Y) + Y + \alpha - \epsilon^*(\alpha) = (X + \beta) + (\delta + \Pi^\sharp(\delta)), \tag{2.13}$$

对于某些 $X + \beta \in G_0 \oplus G_0^0$ 和 $\delta + \Pi^\sharp(\delta) \in \operatorname{Gr}\Pi$。我们需要证明，将 $\delta + \Pi^\sharp(\delta)$ 表示为 X 和 β 的形式后，得到的是（2.11）的右侧。等式（2.13）意味着

$$\epsilon(Y) + Y - X - \Pi^\sharp(\delta) = \beta + \delta - \alpha + \epsilon^*(\alpha) \in TM \cap T^*M,$$

因此两侧都必须为零。另一方面，我们得到

$$\epsilon(Y) - \Pi^\sharp(\delta) = X - Y,$$

其中 左侧属于 $T\mathcal{F}$，右侧属于 G_0。同样，两者都必须为零，因此

$$\Pi^\sharp(\delta) = \epsilon(X) \tag{2.14}$$

and

$$\operatorname{pr}_{T^*\mathcal{F}}\delta = -\omega^\flat(\Pi^\sharp(\delta)) = -\omega^\flat(\epsilon(X)). \tag{2.15}$$

另一方面，我们得到

$$\beta - \alpha + \operatorname{pr}_{T^*\mathcal{F}}\delta = -\epsilon^*(\alpha) - \operatorname{pr}_{G_0^*}\delta,$$

其中的 左侧属于 $T^*\mathcal{F} \cong G_0^0$，右侧属于 G_0^*。因此，二者均为零，故

$$\alpha = \beta + \operatorname{pr}_{T^*\mathcal{F}}\delta = \beta - \omega^\flat(\epsilon(X)),$$

使用（2.15）可得最后一个等式。进而这意味着

$$\operatorname{pr}_{G_0^*}\delta = -\epsilon^*(\alpha) = \epsilon^*\big(\omega^\flat(\epsilon(X)) - \beta\big). \tag{2.16}$$

将（2.14）、（2.15）和（2.16）结合起来，我们得到引理的结论：

$$\begin{aligned}\delta + \Pi^\sharp(\delta) &= \operatorname{pr}_{T^*\mathcal{F}}\delta + \operatorname{pr}_{G_0^*}\delta + \Pi^\sharp(\delta)\\ &= -\omega^\flat(\epsilon(X)) + \epsilon^*\big(\omega^\flat(\epsilon(X)) - \beta\big) + \epsilon(X).\end{aligned}$$

□

现在我们可以将 §2.1 中的结果应用于带有几乎Dirac补的 Dirac 结构 $\mathrm{Gr}\,\Pi \subset \mathbb{T}M$ $G_0 \oplus G_0^0$和 $G_1 \oplus G_1^0$。利用 $\eta \in \Gamma(\wedge^2 \mathrm{Gr}\,\Pi)$（定义见引理 2.4），我们定义余导子 M，其作用于 $\mathsf{S}(\Omega^\bullet(\mathrm{Gr}\,\Pi)[2])$，泰勒系数 $\{\mathsf{M}_k\}$定义如下：

$$\mathsf{M}_k(\omega_1 \odot \ldots \odot \omega_k) = P\{\{\ldots\{\mathsf{m}\omega_1, \omega_2\}, \ldots\}, \omega_k\},$$

其中 $\{-,\ -\}$是 $T^*[2]\mathrm{Gr}\,\Pi[1]$上的泊松括号，$\mathsf{m} = \{\eta,\ -\}$而 $P\colon C^\infty(T^*[2]\mathrm{Gr}\,\Pi[1]) \to \Omega^\bullet(\mathrm{Gr}\,\Pi)$是对零截面的限制。由定理 2.1，我们可以将 流形 M 指数化为一个 $L_\infty[1]$-同构

$$e^{\mathsf{M}} : \left(\Omega^\bullet(\mathrm{Gr}\,\Pi)[2], \mu_1^{G_0\oplus G_0^0}, -\mu_2^{G_0\oplus G_0^0}, \mu_3^{G_0\oplus G_0^0}\right) \to \left(\Omega^\bullet(\mathrm{Gr}\,\Pi)[2], \mu_1^{G_1\oplus G_1^0}, -\mu_2^{G_1\oplus G_1^0}, \mu_3^{G_1\oplus G_1^0}\right).$$

此外　　命题 1.11，我们得到如下 $L_\infty[1]$-代数与 $L_\infty[1]$-同构的图：

$$\begin{array}{ccc} \left(\Omega^\bullet(\mathrm{Gr}\,\Pi)[2], \mu_1^{G_0\oplus G_0^0}, -\mu_2^{G_0\oplus G_0^0}, \mu_3^{G_0\oplus G_0^0}\right) & \xrightarrow{e^{\mathsf{M}}} & \left(\Omega^\bullet(\mathrm{Gr}\,\Pi)[2], \mu_1^{G_1\oplus G_1^0}, -\mu_2^{G_1\oplus G_1^0}, \mu_3^{G_1\oplus G_1^0}\right) \\ \downarrow{\scriptstyle \wedge^\bullet(\mathcal{R}_\Pi|_{T^*M})^*} & & \downarrow{\scriptstyle \wedge^\bullet(\mathcal{R}_\Pi|_{T^*M})^*} \\ \left(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \mathfrak{l}_1^{G_0}, -\mathfrak{l}_2^{G_0}, \mathfrak{l}_3^{G_0}\right) & \dashrightarrow & \left(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \mathfrak{l}_1^{G_1}, -\mathfrak{l}_2^{G_1}, \mathfrak{l}_3^{G_1}\right) \end{array}, \qquad (2.17)$$

下一步是描述该图底行所诱导的同构。所讨论的同构首先通过沿着识别 $\mathrm{R}_{-\Pi}\colon \mathrm{Gr}\ \Pi \to T^*M$ 输运 η 得到；这给出一个二形式 $\xi \in \Omega^2(M)$，我们现在来描述它。

引理 2.5。 按照以下规则定义二形式 $\xi \in \Gamma(G_0^* \otimes T^*\mathcal{F} \oplus \wedge^2 G_0^*)$

$$\begin{cases} \xi(V,W) = 0 & \text{for } V, W \in \Gamma(T\mathcal{F}), \\ \xi(V,W) = -\omega(V, \epsilon(W)) & \text{for } V \in \Gamma(T\mathcal{F}),\ W \in \Gamma(G_0), \\ \xi(V,W) = \omega(\epsilon(V), \epsilon(W)) & \text{for } V, W \in \Gamma(G_0). \end{cases}$$

*Th*在 $\xi \in \Omega^2(M)$与 $\eta \in \Gamma(\wedge^2 \mathrm{Gr}\ \Pi)$之间，在同构 $\mathcal{R}_{-\Pi}\colon \mathrm{Gr}\ \Pi \to T^*M$ 下相对应，即。　　*e.*

$$\wedge^2 \mathcal{R}_{-\Pi}(\eta) = \xi.$$

证明。 我们先证明两个辅助结果。

Claim 1: $(\wedge^2 \mathcal{R}_{-\Pi}(\eta))^\flat = \mathcal{R}_{-\Pi} \circ \eta^\sharp \circ (\mathcal{R}_{-\Pi})^*$ as maps $TM \to T^*M$.

为证明断言 1，我们可以假设 η是可分解的，即对于某个 $\eta_1, \eta_2 \in \Gamma(\mathrm{Gr}\ \Pi)$，有 $\eta = \eta_1 \wedge \eta_2$。于是，对于 V, $W \in TM$，我们有：

$$\begin{aligned} \left\langle (\wedge^2 \mathcal{R}_{-\Pi}(\eta_1 \wedge \eta_2))^\flat(V), W \right\rangle &= \left\langle \mathcal{R}_{-\Pi}(\eta_1) \wedge \mathcal{R}_{-\Pi}(\eta_2), V \wedge W \right\rangle \\ &= \begin{vmatrix} \langle \mathcal{R}_{-\Pi}(\eta_1), V\rangle & \langle \mathcal{R}_{-\Pi}(\eta_1), W\rangle \\ \langle \mathcal{R}_{-\Pi}(\eta_2), V\rangle & \langle \mathcal{R}_{-\Pi}(\eta_2), W\rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \langle \eta_1, (\mathcal{R}_{-\Pi})^*(V)\rangle & \langle \eta_1, (\mathcal{R}_{-\Pi})^*(W)\rangle \\ \langle \eta_2, (\mathcal{R}_{-\Pi})^*(V)\rangle & \langle \eta_2, (\mathcal{R}_{-\Pi})^*(W)\rangle \end{vmatrix} \\ &= \left\langle \left\langle \eta_1, (\mathcal{R}_{-\Pi})^*(V)\right\rangle \eta_2 - \left\langle \eta_2, (\mathcal{R}_{-\Pi})^*(V)\right\rangle \eta_1, (\mathcal{R}_{-\Pi})^*(W) \right\rangle \\ &= \left\langle (\eta_1 \wedge \eta_2)^\sharp((\mathcal{R}_{-\Pi})^*(V)), (\mathcal{R}_{-\Pi})^*(W) \right\rangle \\ &= \left\langle (\mathcal{R}_{-\Pi} \circ (\eta_1 \wedge \eta_2)^\sharp \circ (\mathcal{R}_{-\Pi})^*)(V), W \right\rangle. \end{aligned}$$

第二　个辅助结果再次使用了映射 ψ，它出现在 (2.12) 中。还请回想 §1.2 中的内　　t $\gamma_{G_0} \in \Omega^2($ $M)$ 是将叶向辛形式 ω 在 G_0上延拓为零得到的。

命题 2: 映射 ψ和 $\mathrm{R}_{-\Pi}$ 之间的关系如下，对所有 $V \in \mathfrak{X}(M)$:

$$(\mathcal{R}_{-\Pi})^*(V) = \psi(\mathrm{pr}_{G_0} V + \gamma_{G_0}^\flat(V)).$$

为证明命题 2，注意到对于任意 $V \in \mathfrak{X}(M)$，我们可以写成

$$(\mathcal{R}_{-\Pi})^*(V) = \psi(X + \beta) \tag{2.18}$$

对于某个 $X \in \Gamma(G_0)$ 和 $\beta \in \Gamma(G_0^0)$，我们需要将 X 和 β 表示为 V 的形式。等式（2.18）表明，对所有 $\delta \in \Omega^1(M)$，都有

$$\langle (\mathcal{R}_{-\Pi})^*(V), \delta + \Pi^\sharp(\delta)\rangle = \langle \psi(X + \beta), \delta + \Pi^\sharp(\delta)\rangle,$$

这相当于

$$\delta(V) = \delta(X - \Pi^\sharp(\beta)).$$

由于这对所有 $\delta \in \Omega^1(M)$ 都成立，因此必有 $X - V - \Pi^\sharp(\beta)$ 消失。因此

$$\begin{cases} X = \mathrm{pr}_{G_0} V, \\ \beta = \gamma_{G_0}^\flat(-\Pi^\sharp(\beta)) = \gamma_{G_0}^\flat(V - X) = \gamma_{G_0}^\flat(V). \end{cases},$$

现在证明引理。利用上面的断言 1 和命题 2，对于 V，$W \in \mathfrak{X}(M)$，有：

$$\begin{aligned} (\wedge^2\mathcal{R}_{-\Pi}(\eta))(V,W) &= \langle (\mathcal{R}_{-\Pi} \circ \eta^\sharp \circ (\mathcal{R}_{-\Pi})^*)(V), W\rangle \\ &= \left\langle (\mathcal{R}_{-\Pi} \circ \eta^\sharp \circ \psi)(\mathrm{pr}_{G_0} V + \gamma_{G_0}^\flat(V)), W\right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{R}_{-\Pi}\Big(-\omega^\flat(\epsilon(\mathrm{pr}_{G_0} V)) + \epsilon^*\big(\omega^\flat(\epsilon(\mathrm{pr}_{G_0} V)) - \gamma_{G_0}^\flat(V)\big) + \epsilon(\mathrm{pr}_{G_0} V)\Big), W\right\rangle, \end{aligned} \tag{2.19}$$

其中，最后一个等式由引理 2.4 得出。利用 $\Pi^\sharp \circ \omega^\flat = -\mathrm{Id}_{T\mathcal{F}}$ 展开（2.19）的右侧，得到

$$(\wedge^2\mathcal{R}_{-\Pi}(\eta))(V,W) = \left\langle -\omega^\flat(\epsilon(\mathrm{pr}_{G_0} V)) + \epsilon^*\big(\omega^\flat(\epsilon(\mathrm{pr}_{G_0} V)) - \gamma_{G_0}^\flat(V)\big), W\right\rangle.$$

特别地，我们有：

- 若 V，$W \in \Gamma(T\mathcal{F})$，则 $(\wedge^2\mathrm{R}_{-\Pi}(\eta))(V, W) = 0$。
- 若 $V \in \Gamma(T\mathcal{F})$ 且 $W \in \Gamma(G_0)$，则
$$(\wedge^2\mathcal{R}_{-\Pi}(\eta))(V,W) = \left\langle -\epsilon^*(\omega^\flat(V)), W\right\rangle = -\omega(V, \epsilon(W)).$$
- 若 V，$W \in \Gamma(G_0)$，则
$$(\wedge^2\mathcal{R}_{-\Pi}(\eta))(V,W) = \left\langle -\omega^\flat(\epsilon(V)) + \epsilon^*(\omega^\flat(\epsilon(V))), W\right\rangle = \omega(\epsilon(V), \epsilon(W)).$$

这表明 $(\wedge^2\mathrm{R}_{-\Pi}(\eta)) = \xi$，因此证明完成。 □

利用二形式 $\xi \in \Omega^2(M)$ 在引理 2.5中定义，我们定义 S 的余导子 $\mathsf{N}(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2])$，其泰勒系数 $\{\mathsf{N}_k\}$ 定义如下

$$\mathsf{N}_k(Q_1 \odot \ldots \odot Q_k) = P\{\{\ldots\{\mathsf{n}Q_1, Q_2\}, \ldots\}, Q_k\}, \tag{2.20}$$

其中 $\{-,\ -\}$ 是 $T^*[2]T^*M[1]$ 上的泊松括号，$\mathsf{n} = \{\xi,\ -\}$ 而 $P\colon C^\infty(T^*[2]T^*M[1]) \to \mathfrak{X}^\bullet(M)$ 是对零截面的限制。正如预期，指数映射 e^{N} 正是图（2.17）中我们旨在描述的虚线箭头。

引理 2.6。 余导子 N 在 (2.20) 中定义，$e^{\mathsf{N}}\colon \mathsf{S}(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2]) \to \mathsf{S}(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2])$。后者符合以下由 $L_\infty[1]$-代数和 $L_\infty[1]$-同构构成的交换图：

$$\begin{array}{ccc} \left(\Omega^\bullet(\mathrm{Gr}\,\Pi)[2], \mu_1^{G_0\oplus G_0^0}, -\mu_2^{G_0\oplus G_0^0}, \mu_3^{G_0\oplus G_0^0}\right) & \xrightarrow{e^{\mathsf{M}}} & \left(\Omega^\bullet(\mathrm{Gr}\,\Pi)[2], \mu_1^{G_1\oplus G_1^0}, -\mu_2^{G_1\oplus G_1^0}, \mu_3^{G_1\oplus G_1^0}\right) \\ \downarrow{\scriptstyle \wedge^\bullet(\mathcal{R}_\Pi|_{T^*M})^*} & & \downarrow{\scriptstyle \wedge^\bullet(\mathcal{R}_\Pi|_{T^*M})^*} \\ \left(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \mathrm{I}_1^{G_0}, -\mathrm{I}_2^{G_0}, \mathrm{I}_3^{G_0}\right) & \xrightarrow{e^{\mathsf{N}}} & \left(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \mathrm{I}_1^{G_1}, -\mathrm{I}_2^{G_1}, \mathrm{I}_3^{G_1}\right) \end{array},$$

定理　这个引理可由函子性从引理 1.8 和 §2.1得到，但我们给出一个直接证明　　f 此处。

证明。由引理 2.2 可知，N_2 是 N 唯一非零的泰勒系数。由命题 A.8 可知，这意味着 $\mathsf{N}(\mathsf{S}^n(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2])) \subset \mathsf{S}^{n-1}(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2])$。因此，$\mathsf{N}$ 是幂零完备的，所以其指数映射 e^{N} 是 $\mathsf{S}(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2])$ 的良定义分次余代数自同构。

要证明该图交换，只需证明

$$\wedge^\bullet \mathcal{R}_\Pi^* \circ \mathsf{M} \circ \wedge^\bullet \mathcal{R}_{-\Pi}^* = \mathsf{N},$$

这是 $\mathsf{S}(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2])$ 上自映射之间的等式。进一步，只要证明

$$\wedge^{k+l-2}\mathcal{R}_\Pi^*\left(\mathsf{M}_2\left(\wedge^k\mathcal{R}_{-\Pi}^*(Q_1)\odot\wedge^l\mathcal{R}_{-\Pi}^*(Q_2)\right)\right) = \mathsf{N}_2(Q_1\odot Q_2), \qquad \forall Q_1\in\mathfrak{X}^k(M), Q_2\in\mathfrak{X}^l(M).$$

为验证该等式成立，注意到

$$\begin{aligned}\wedge^{k+l-2}\mathcal{R}_\Pi^*\left(\mathsf{M}_2\left(\wedge^k\mathcal{R}_{-\Pi}^*(Q_1)\odot\wedge^l\mathcal{R}_{-\Pi}^*(Q_2)\right)\right) &= (-1)^k\wedge^{k+l-2}\mathcal{R}_\Pi^*\left(((\wedge^k\mathcal{R}_{-\Pi}^*(Q_1))^\flat\wedge(\wedge^l\mathcal{R}_{-\Pi}^*(Q_2))^\flat)\eta\right)\\ &= (-1)^k(Q_1^\sharp\wedge Q_2^\sharp)(\wedge^2\mathcal{R}_{-\Pi}(\eta))\\ &= (-1)^k(Q_1^\sharp\wedge Q_2^\sharp)(\xi)\\ &= \mathsf{N}_2(Q_1\odot Q_2),\end{aligned}$$

其中第一个和最后一个等式由引理 2.2 得出，第三个等式则用了引理 2.5。　□

2.2.2. 限制到 $L_\infty[1]$-子代数。 在前一个引理中，我们找到了一个 $L_\infty[1]$-同构

$$e^{\mathsf{N}}:(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\mathfrak{l}_1^{G_0},-\mathfrak{l}_2^{G_0},\mathfrak{l}_3^{G_0})\to(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\mathfrak{l}_1^{G_1},-\mathfrak{l}_2^{G_1},\mathfrak{l}_3^{G_1}).$$

还需证明，它将良好多向量场的 $L_\infty[1]$-子代数之间限制为一个同构。这是以下引理的直接推论。

命题 2.7。 余导子N保持$\mathsf{S}(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2])$不变，其中$\mathsf{S}(\mathfrak{X}^\bullet{}_{\mathcal{F}}(M)[2])$。因此，我们得到一个 $L_\infty[1]$-同构

$$e^{\mathsf{N}}:(\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2],\mathfrak{l}_1^{G_0},-\mathfrak{l}_2^{G_0},\mathfrak{l}_3^{G_0})\to(\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2],\mathfrak{l}_1^{G_1},-\mathfrak{l}_2^{G_1},\mathfrak{l}_3^{G_1}).$$

证明。 我们证明 N 保持 $\mathsf{S}(\mathfrak{X}^\bullet{}_{\mathcal{F}}(M)[2])$。回顾一下，与 $\mathsf{S}(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2])$ 的任意余导子一样，N 由其泰勒系数通过公式（A.3）确定。由于 N_2 是 N 唯一非零的泰勒系数（见引理 2.2），因此只需证明，对于 $Q_1\in\mathfrak{X}^k{}_{\mathcal{F}}(M)$ 和 $Q_2\in\mathfrak{X}^l{}_{\mathcal{F}}(M)$，我们有

$$\mathsf{N}_2(Q_1\odot Q_2)\in\mathfrak{X}^{k+l-2}_{\mathcal{F}}(M).$$

为此，回顾一下，分解 $TM = T\mathcal{F} \oplus G_0$ 赋予分次代数 $\mathfrak{X}^\bullet(M)$ 一个双重分次，其定义如下：

$$\mathfrak{X}^\bullet(M)=\bigoplus_{p,q\geq 0}\mathfrak{X}^{(p,q)}(M),\ \text{where}\ \mathfrak{X}^{(p,q)}(M):=\Gamma(\wedge^pT\mathcal{F}\oplus\wedge^qG_0).$$

用这种双重分次表示时，良好多向量场的空间如下所示　　：

$$\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)=\bigoplus_{\substack{p\geq 0\\ q=0,1}}\mathfrak{X}^{(p,q)}(M).$$

多向量场 Q_1和 Q_2仅在双次数 $(k-i,i)$和 $(l-j,j)$分别具有分量，其中 $i,j\in\{0,1\}$。根据引理 2.2，我们知道

$$\mathsf{N}_2(Q_1\odot Q_2)=(-1)^k(Q_1^\sharp\wedge Q_2^\sharp)\xi, \tag{2.21}$$

并且由于二形式 ξ属于 $\Gamma(G_0^*\otimes T^*\mathcal{F}\oplus\wedge^2 G_0^*)$根据引理 2.5, the $(k+l-2)$-vector field (2.21) has a component in bi-degree $(k-i+l-j-1, i+j-1)$ and a component in bi-degree $(k-i+l-j, i+j-2)$. Since $i+j-1$ and $i+j-2$ are at most equal to 1, this shows that $\mathrm{N}_2(Q_1\odot Q_2)$ belongs to $\mathfrak{X}^{k+l-2}{}_{\mathcal{F}}(M)$. □

令 τ 为 $\mathfrak{X}^\bullet{}_{\mathcal{F}}(M)$ [2] 的转置，该转置改变符号，从而得到严格的 $L_\infty[1]$-同构

$$\tau : \left(\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2], \mathrm{I}_1^{G_i}, \mathrm{I}_2^{G_i}, \mathrm{I}_3^{G_i}\right) \to \left(\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2], \mathrm{I}_1^{G_i}, -\mathrm{I}_2^{G_i}, \mathrm{I}_3^{G_i}\right) : Q \mapsto -Q.$$

前置和 将映射复合 e^{N} 自命题 2.7 与 τ，我们得到本节的主要结果 .

推论 2.8。 与辛叶状结构 $(\mathcal{F}\ \omega)$相关联的 $L_\infty[1]$-代数 $(\mathfrak{X}^\bullet{}_{\mathcal{F}}(M)[2], \{\mathrm{I}_k^G\})$不依赖于特征分布 $T\mathcal{F}$ 的补分布 G 的选择。事实上，如果 G_0 和 G_1 是两个补分布，那么我们有一个规范的 $L_\infty[1]$-同构

$$\tau\circ e^{\mathsf{N}}\circ\tau : \left(\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2], \mathrm{I}_1^{G_0}, \mathrm{I}_2^{G_0}, \mathrm{I}_3^{G_0}\right) \to \left(\mathfrak{X}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)[2], \mathrm{I}_1^{G_1}, \mathrm{I}_2^{G_1}, \mathrm{I}_3^{G_1}\right).$$

3. 正则泊松结构的等价

本节讨论给定正则泊松结构的变形之间的等价性 Π 在 M上。我们证明，由同伦给出的几何等价概念，与从支配 $L_\infty[1]$-代数$(\mathfrak{X}^\bullet{}_{\mathcal{F}}(M)[2], \{\mathrm{I}_k^G\})$变形问题的代数规范等价概念一致 Π （见定理 1.13）。我们通过一个例子讨论由此得到的正则泊松结构模空间，并说明它一般并非光滑。

3.1. **规范等价**。 我们的方法是将 M 上的代数规范等价概念与乘积流形 $M\times[0,1]^2$上的 Maurer–Cartan 元素联系起来，进而在这个乘积流形上，将 $L_\infty[1]$-代数（命题 1.10 中引入）对应的 Maurer–Cartan 元素与 Koszul dgL[1]a 对应起来。此方法与 [14]中的方法类似。我们首先回顾泊松版本的莫泽定理，证明见[3, 定理 9。48]

引理 3.1. 设 M 是一个紧致流形，$(\Pi_t)_{t\in[0,1]}$ 是 M 上泊松结构的一条光滑路径，并且 φ_t 是一个同伦，其时变向量场为 $(Y_t)_{t\in[0,1]}$。那么 Π_t 由 φ_t 生成，即

$$\Pi_t = (\varphi_t)_*\Pi_0$$

当且仅当

$$\frac{d}{dt}\Pi_t = d_{\Pi_t}Y_t.$$

若 Π_t 是泊松结构的一条光滑路径，则 $\frac{d}{dt}\Pi_t$ 在第二泊松上同调群 $H^2_{\Pi_t}(M)$ 中定义了一个类，因为

$$0 = \tfrac{d}{dt}[\Pi_t,\Pi_t]_{SN} = 2\left[\Pi_t, \frac{d}{dt}\Pi_t\right]_{SN}.$$

因此，引 理 3.1 要求这些类消失，并且存在一条原函数的光滑路径 .

下文中，我们固定一个正则泊松结构 Π 于流形 M 上，其特征分布为$T\mathcal{F}$，并选取一个分裂 $TM = T\mathcal{F}\oplus G$。首先，我们将 Maurer–Cartan 元素的一般规范等价概念（见定义 A.6）专门化到 $L_\infty[1]$-代数$(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \{\mathrm{I}_k^G\})$，该代数在命题 1.10 中引入。回顾一下，A.5 中给出的 MC 方程（见定义 A.5 ）对于 $W\in\mathfrak{X}^2(M)$ 写作

$$[\Pi, W]_{SN} + \frac{1}{2}[W,W]_\gamma - \frac{1}{6}(W^\sharp\wedge W^\sharp\wedge W^\sharp)\Upsilon^G_{TM} = 0. \tag{3.1}$$

定义 3.2。 两个 Maurer–Cartan 元素 W_0、W_1 属于 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \mathfrak{l}_1^G, \mathfrak{l}_2^G, \mathfrak{l}_3^G)$，若存在一个在二者之间插值的 Maurer–Cartan 元素光滑族 $(W_t)_{t\in[0,1]}$ 以及一个 $\mathfrak{X}(M)$ 中的光滑族 $(X_t)_{t\in[0,1]}$，使得它们 $\mathfrak{l}_3^G)$ 规范等价，则称这两个元素规范等价；其中

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W_t &= \mathfrak{l}_1^G(X_t) + \mathfrak{l}_2^G(X_t, W_t) + \frac{1}{2}\mathfrak{l}_3^G(X_t, W_t, W_t)\\ &= [\Pi, X_t]_{SN} - [X_t, W_t]_\gamma - \frac{1}{2}\left(X_t^\sharp \wedge W_t^\sharp \wedge W_t^\sharp\right)\Upsilon_{TM}^G. \end{aligned} \tag{3.2}$$

下一个引理使我们能够将规范等价条件表述为高维流形上的 MC 方程。考虑流形 $M\times I^2$，其中 $I=[0,1]$ 配备了由 Π 的平凡提升得到的正则泊松结构 $\mathsf{e}\Pi$。用 (t,s) 表示 I^2 上的坐标。 Π 的特征分布 $T\mathcal{F}$ 就是 TF，而我们可以取 $G = G\oplus\mathbb{R}\partial_s\oplus\mathbb{R}\partial_t$ 作为补分布。因此，$\widetilde{\ }$将投影记为 $p\colon M\times I^2\to M$，我们有 $\mathsf{e}\gamma = p^*\gamma$ 和 $\Upsilon^G_{T(M\times I^2)} = p^*\Upsilon^G_{TM}$。

引理 3.3。 设 $(W_t)_{t\in[0,1]}$ 是 $\mathfrak{X}^2(M)$ 中的光滑族，且 $(X_t)_{t\in[0,1]}$ 是 $\mathfrak{X}(M)$中的光滑族。那么 W_t 是 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \{\mathfrak{l}_k^G\})$ 的 *Maurer–Cartan* 元，且满足式 (3.2)，当且仅当

$$\widetilde{W}_t := W_t + (\partial_t + X_t)\wedge\partial_s \tag{3.3}$$

$\widetilde{\ }$是$(\mathfrak{X}^\bullet(M\times I^2)[2], \{\mathfrak{l}_k^G\})$的 *Maurer–Cartan* 元，即

$$[\widetilde{\Pi}, \widetilde{W}_t]_{SN} + \frac{1}{2}[\widetilde{W}_t, \widetilde{W}_t]_{\widetilde{\gamma}} - \frac{1}{6}(\widetilde{W}_t^\sharp \wedge \widetilde{W}_t^\sharp \wedge \widetilde{W}_t^\sharp)\Upsilon^{\widetilde{G}}_{T(M\times I^2)} = 0. \tag{3.4}$$

证明。 展开方程（3.4），不含 ∂_s的项恰好给出 W_t的 MC 方程（3.1），而含有 ∂_s 的项恰好给出关系（3.2）。为验证这一点，我们分别考察（3.4）左侧的各项。

- 首先，显然
$$[\widetilde{\Pi}, \widetilde{W}_t]_{SN} = [\Pi, W_t]_{SN} + [\Pi, X_t]_{SN}\wedge\partial_s.$$
- 其次，我们有

$$\begin{aligned}[\widetilde{W}_t, \widetilde{W}_t]_{\widetilde{\gamma}} &= [W_t, W_t]_{\widetilde{\gamma}} + 2[W_t, (\partial_t + X_t)\wedge\partial_s]_{\widetilde{\gamma}} + [(\partial_t + X_t)\wedge\partial_s, (\partial_t + X_t)\wedge\partial_s]_{\widetilde{\gamma}}\\ &= [W_t, W_t]_{\widetilde{\gamma}} + 2[W_t, \partial_t + X_t]_{\widetilde{\gamma}}\wedge\partial_s - 2(\partial_t + X_t)\wedge[W_t, \partial_s]_{\widetilde{\gamma}} + 2[\partial_t + X_t, \partial_s]_{\widetilde{\gamma}}\wedge(\partial_t + X_t)\wedge\partial_s. \end{aligned} \tag{3.5}$$

We 现在作几点观察。对于时变向量场 $U_t, V_t\in\mathfrak{X}(M)$，我们有

$$\begin{aligned}[U_t, V_t]_{\widetilde{\gamma}} &= [\mathrm{pr}_{\widetilde{G}}U_t, \mathrm{pr}_{\widetilde{G}}V_t] - \widetilde{\Pi}^\sharp\left(\mathcal{L}_{\mathrm{pr}_{\widetilde{G}}U_t}\iota_{V_t}\widetilde{\gamma} - \mathcal{L}_{\mathrm{pr}_{\widetilde{G}}V_t}\iota_{U_t}\widetilde{\gamma}\right)\\ &= [\mathrm{pr}_G U_t, \mathrm{pr}_G V_t] - \Pi^\sharp\left(\mathcal{L}_{\mathrm{pr}_G U_t}\iota_{V_t}\gamma - \mathcal{L}_{\mathrm{pr}_G V_t}\iota_{U_t}\gamma\right)\\ &= [U_t, V_t]_\gamma, \end{aligned}$$

根据 Leibniz 法则，这个等式对时变双向量场也成立。接下来，对于时变向量场 $V_t\in\mathfrak{X}(M)$，我们有

$$\begin{aligned}[\partial_t, V_t]_{\widetilde{\gamma}} &= [\partial_t, \mathrm{pr}_G V_t] - \widetilde{\Pi}^\sharp\left(\mathcal{L}_{\partial_t}\iota_{V_t}\widetilde{\gamma} - \mathcal{L}_{\mathrm{pr}_G V_t}\iota_{\partial_t}\widetilde{\gamma}\right)\\ &= \mathrm{pr}_G\left(\frac{d}{dt}V_t\right) - \Pi^\sharp\left(\gamma^\flat\left(\frac{d}{dt}V_t\right)\right)\\ &= \mathrm{pr}_G\left(\frac{d}{dt}V_t\right) + \mathrm{pr}_{T\mathcal{F}}\left(\frac{d}{dt}V_t\right)\\ &= \frac{d}{dt}V_t, \end{aligned}$$

再次根据 Leibniz 法则，这个等式对时变双向量场 $V_t \in \mathfrak{X}^2(M)$ 也成立。最后，显然

$$[\partial_s, V_t]_{\widetilde{\gamma}} = 0$$

对于所有时变向量场 $V_t \in \mathfrak{X}$（M）。利用这些观察，等式（3.5）变为

$$[\widetilde{W}_t, \widetilde{W}_t]_{\widetilde{\gamma}} = [W_t, W_t]_\gamma - 2\left(\frac{d}{dt}W_t + [X_t, W_t]_\gamma\right) \wedge \partial_s.$$

- 第三，我们得到

$$\begin{aligned}(\widetilde{W}_t^\sharp \wedge \widetilde{W}_t^\sharp \wedge \widetilde{W}_t^\sharp)\Upsilon^{\widetilde{G}}_{T(M\times I^2)} &= \left(W_t^\sharp + X_t^\sharp \wedge \partial_s\right) \wedge \left(W_t^\sharp + X_t^\sharp \wedge \partial_s\right) \wedge \left(W_t^\sharp + X_t^\sharp \wedge \partial_s\right) p^* \Upsilon^G_{TM} \\ &= (W_t^\sharp \wedge W_t^\sharp \wedge W_t^\sharp)\Upsilon^G_{TM} + 3(X_t^\sharp \wedge W_t^\sharp \wedge W_t^\sharp)\Upsilon^G_{TM} \wedge \partial_s.\end{aligned}$$

因此，将包含 ∂_s 的项与不包含该项的项汇总起来，等式（3.4）等价于

$$\begin{cases}[\Pi, W_t]_{SN} + \frac{1}{2}[W_t, W_t]_\gamma - \frac{1}{6}(W_t^\sharp \wedge W_t^\sharp \wedge W_t^\sharp)\Upsilon^G_{TM} = 0 \\ [\Pi, X_t]_{SN} - \left(\frac{d}{dt}W_t + [X_t, W_t]_\gamma\right) - \frac{1}{2}(X_t^\sharp \wedge W_t^\sharp \wedge W_t^\sharp)\Upsilon^G_{TM} = 0\end{cases}.$$

第一个等式表明，W_t 是 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \{\mathrm{I}_k^G\})$ 的 Maurer–Cartan 元，由方程（3.1）可知；而第二个等式恰好是规范等价中的演化方程（3.2）。证明至此完成。□

设 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)$为与 Koszul 微分分次李代数 [1]在移位同构 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[1], d_\Pi, [-,-]_{SN})$下相对应的微分分次 Lie 代数（A.1）。具体而言，对于 P, $Q \in \mathfrak{X}^\bullet(M)$，我们有：

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_1(P) &= d_\Pi(P), \\ \mathfrak{m}_2(P, Q) &= (-1)^{|P|}[P, Q]_{SN}.\end{aligned}$$

引理 3. 3同样适用于 dgL[1]a 的 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)$和 $(\mathfrak{X}^\bullet(M\times I^2)[2], \widetilde{\ }\mathfrak{m}_1, \widetilde{\ }\mathfrak{m}_2)$，如下所示 .

引理 3 .4. 设 $(W_t)_{t\in[0,1]}$是 $\mathfrak{X}^2(M)$中的光滑族，且 $(X_t)_{t\in[0,1]}$是 $\mathfrak{X}(M)$中的光滑族。该 n

$$\begin{cases}[\Pi, W_t]_{SN} + \frac{1}{2}[W_t, W_t]_{SN} = 0 \\ \frac{d}{dt}W_t = [\Pi + W_t, X_t]_{SN}\end{cases} \tag{3.6}$$

当且仅当 $\widetilde{\ } W_t := W_t + (\partial_t + X_t) \wedge \partial_s$是 $(\mathfrak{X}^\bullet(M\times I^2)[2], \widetilde{\ }\mathfrak{m}_1, \widetilde{\ }\mathfrak{m}_2)$的 *Maurer–Cartan* 元。

证明。 双向量场 e W_t是 $(\mathfrak{X}^\bullet(M\times I^2)[2], \mathfrak{fm}_1, \mathfrak{fm}_2)$ 的 Maurer–Cartan 元，当且仅当下式为零：

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathfrak{m}_1}(\widetilde{W}_t) + \frac{1}{2}\widetilde{\mathfrak{m}_2}(\widetilde{W}_t, \widetilde{W}_t) \\ &= [\Pi, W_t]_{SN} + [\Pi, X_t]_{SN} \wedge \partial_s + \frac{1}{2}\left([W_t, W_t]_{SN} + 2[W_t, (\partial_t + X_t) \wedge \partial_s]_{SN} + [(\partial_t + X_t) \wedge \partial_s, (\partial_t + X_t) \wedge \partial_s]_{SN}\right) \\ &= [\Pi, W_t]_{SN} + [\Pi, X_t]_{SN} \wedge \partial_s + \frac{1}{2}[W_t, W_t]_{SN} - \frac{d}{dt}W_t \wedge \partial_s + [W_t, X_t]_{SN} \wedge \partial_s \\ &= [\Pi, W_t]_{SN} + \frac{1}{2}[W_t, W_t]_{SN} + \left([\Pi + W_t, X_t]_{SN} - \frac{d}{dt}W_t\right) \wedge \partial_s.\end{aligned}$$

□

我们断言，赋值 $Z \to Z^\gamma$ 在以下集合之间建立了双射：

- 属于 I_γ 的（$\mathfrak{X}^\bullet$（M）$[2], \{\mathrm{I}_k^G\}$）的 Maurer–Cartan 元素，
- 位于 $\mathrm{I}_{-\gamma}$ 中的 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)$ 的 Maurer–Cartan 元素。

回想一下 Z^γ 的定义使得其锐映射（见（1.1））为

$$(Z^\gamma)^\sharp = Z^\sharp \circ (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ Z^\sharp)^{-1}. \tag{3.7}$$

要看出上述断言成立，注意对于 $Z \in \mathfrak{I}_\gamma$，有

$$Z \in MC(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \{\mathrm{I}_k^G\}) \;\Leftrightarrow\; \exp_G(Z) = \Pi + Z^\gamma \text{ is Poisson},$$

根据对应关系（1.6）即可得出。因此，双向量场 $\Pi + Z^\gamma$ 是泊松的，当且仅当 Z^γ 是 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2],\ \mathfrak{m}_1,\ \mathfrak{m}_2)$中的 Maurer–Cartan 元。现在，我们将此双射应用于正则泊松流形 $(M \times I^2,\ \widetilde{}\,\Pi)$，并将范围限制为与式（3.3）中形式相同的双向量场。

引理 3.5。双射 $Z \to (Z)^\gamma$ 在 *Maurer–Cartan* 元素之间，将其限制后得到以下两者之间的双射：

- $(\mathfrak{X}^\bullet(M \times I^2)[2], \{\mathrm{I}_k^G\})$形式的 *Maurer–Cartan* 元素

$$\widetilde{W}_t := W_t + (\partial_t + X_t) \wedge \partial_s$$

  对于光滑族 $(W_t)_{t\in[0,1]}$（其中 $\mathcal{I}_\gamma$）以及 $(X_t)_{t\in[0,1]}$（其中 $\mathfrak{X}(M)$），

- $(\mathfrak{X}^\bullet(M \times I^2)[2], \widetilde{\ }\mathfrak{m}_1, \widetilde{\ }\mathfrak{m}_2)$形式的 *Maurer–Cartan* 元素

$$\widehat{W}_t + (\partial_t + \widehat{X}_t) \wedge \partial_s$$

  for smooth families $\left(\widehat{W}_t\right)_{t\in[0,1]}$ *in* $\mathcal{I}_{-\gamma}$ *and* $\left(\widehat{X}_t\right)_{t\in[0,1]}$ *in* $\mathfrak{X}(M)$.

具体而言，我们有

$$\widehat{W}_t = W_t^\gamma, \qquad \widehat{X}_t = (\mathrm{id}_{TM} + W_t^\sharp \circ \gamma^\flat)^{-1} X_t. \tag{3.8}$$

证明。我们需要明确计算 $\widetilde{W}_t^{\widetilde{\gamma}}$，它由类似于公式（3.7）中的表达式给出。我们首先将 $\widetilde{W}_t^\sharp$表示为：$T^*(M\times I^2) \to T(M\times I^2)$ 关于定义域分解为 T^*M 与由 dt 和 ds 所张成的直线的直和，以及陪域分解为 TM与由 ∂_t和 ∂_s所张成的直线的直和的分块矩阵。我们得到

$$\widetilde{W}_t^\sharp = \left(\begin{array}{c|c|c} W_t^\sharp & 0 & -X_t \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline X_t^\sharp & 1 & 0 \end{array}\right). \tag{3.9}$$

由此可知，$\mathrm{id}_{T^*(M\times I^2)} + \mathrm{e}\widetilde{\gamma}^\flat \circ \mathrm{e}\widetilde{W}_t^\sharp$是一个上三角矩阵：

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{T^*(M\times I^2)} + \widetilde{\gamma}^\flat \circ \widetilde{W}_t^\sharp &= \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{id}_{T^*M} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|c} \gamma^\flat & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} W_t^\sharp & 0 & -X_t \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline X_t^\sharp & 1 & 0 \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp & 0 & -\gamma^\flat(X_t) \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \end{aligned}$$

当且仅当其对角项 $\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp$可逆时，该矩阵可逆。在这种情况下，其逆矩阵为

$$\left(\mathrm{id}_{T^*(M\times I^2)} + \widetilde{\gamma}^\flat \circ \widetilde{W}_t^\sharp\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp)^{-1} & 0 & (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp)^{-1}(\gamma^\flat(X_t)) \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{3.10}$$

矩阵 $\widetilde{W}_t^{\tilde{\gamma}}$ 由矩阵（3.9）和（3.10）的乘积给出：

$$(\widetilde{W}_t^{\tilde{\gamma}})^\sharp = \left(\begin{array}{c|c|c} W_t^\sharp \circ (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp)^{-1} & 0 & W_t^\sharp\big((\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp)^{-1}(\gamma^\flat(X_t))\big) - X_t \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline X_t^\sharp \circ (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp)^{-1} & 1 & X_t^\sharp\big((\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp)^{-1}(\gamma^\flat(X_t))\big) \end{array}\right). \tag{3.11}$$

我们不 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$w 检查该矩阵确实具有（3.9）的形式，其中包含 W_t 和 X_t，如（3.8中所规定）。

- 显然，左上角元素等于 $(\widehat{\ }W_t)^\sharp$，根据（3.7）。
- 我们检查右下角元素为零。首先，显然
$$\gamma^\flat \circ (\mathrm{id}_{TM} + W_t^\sharp \circ \gamma^\flat) = (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp) \circ \gamma^\flat.$$
由于 $\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp$ 可逆，其对偶 $\mathrm{id}_{TM} + W_t^\sharp \circ \gamma^\flat$ 也可逆，因此我们得到
$$(\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp)^{-1} \circ \gamma^\flat = \gamma^\flat \circ (\mathrm{id}_{TM} + W_t^\sharp \circ \gamma^\flat)^{-1}. \tag{3.12}$$
利用这一点，我们得到
$$\begin{aligned} \Big\langle (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp)^{-1}(\gamma^\flat(X_t)), X_t \Big\rangle &= \Big\langle \gamma^\flat\big((\mathrm{id}_{TM} + W_t^\sharp \circ \gamma^\flat)^{-1}(X_t)\big), X_t \Big\rangle \\ &= -\Big\langle X_t, (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp)^{-1}(\gamma^\flat(X_t)) \Big\rangle \end{aligned}$$
必须为零。这证实了（3.11）中的右下项确实为零。
- （3.11）中的右上项为
$$\big(W_t^\sharp \circ (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp)^{-1} \circ \gamma^\flat - \mathrm{id}_{TM}\big)(X_t),$$
因此我们需要证明
$$(\mathrm{id}_{TM} + W_t^\sharp \circ \gamma^\flat)^{-1} = \mathrm{id}_{TM} - W_t^\sharp \circ (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp)^{-1} \circ \gamma^\flat. \tag{3.13}$$
为此，我们采用与上一条要点类似的论证。由于
$$(\mathrm{id}_{TM} + W_t^\sharp \circ \gamma^\flat) \circ W_t^\sharp = W_t^\sharp \circ (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp),$$
我们有
$$W_t^\sharp \circ (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp)^{-1} = (\mathrm{id}_{TM} + W_t^\sharp \circ \gamma^\flat)^{-1} \circ W_t^\sharp.$$
利用这一点，我们得到
$$\begin{aligned} &(\mathrm{id}_{TM} + W_t^\sharp \circ \gamma^\flat) \circ \big(\mathrm{id}_{TM} - W_t^\sharp \circ (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp)^{-1} \circ \gamma^\flat\big) \\ &\quad = (\mathrm{id}_{TM} + W_t^\sharp \circ \gamma^\flat) \circ \big(\mathrm{id}_{TM} - (\mathrm{id}_{TM} + W_t^\sharp \circ \gamma^\flat)^{-1} \circ W_t^\sharp \circ \gamma^\flat\big) \\ &\quad = \mathrm{id}_{TM}. \end{aligned}$$
这证实等式（3.13）成立。
- 关于左下角的元素，只需注意到
$$(\widehat{X}_t)^\sharp = \big((\mathrm{id}_{TM} + W_t^\sharp \circ \gamma^\flat)^{-1} X_t\big)^\sharp = X_t^\sharp \circ (\mathrm{id}_{T^*M} + \gamma^\flat \circ W_t^\sharp)^{-1}.$$

这证明 $\widetilde{W}_t^{\tilde{\gamma}}$ 的矩阵具有形式（3.9），其中 $\widehat{\ }W_t$ 和 $\widehat{\ }X_t$ 如（3.8）中所定义。 □

结合引理 3.3、引理 3.4和引理 3.5，可得如下结论。

命题 3.6。方程 (3.8) 在……之间建立了一个双射

- 光滑族 $(W_t)_{t\in[0,1]}$ 的 *Maurer–Cartan* 元素，取值于 $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[2], \{\mathrm{I}_k^G\})$ 且属于 $\mathcal{I}_\gamma$，以及光滑族 $(X_t)_{t\in[0,1]}$，取值于 $\mathfrak{X}(M)$，满足方程 (3.2)
- 光滑族 $\big(\widehat{\ }W_t\big)_{t\in[0,1]}$ 取值于 $\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}}$，以及光滑族 $\big(\widehat{\ }X_t\big)_{t\in[0,1]}$ 属于 $\mathfrak{X}(M)$ 满足方程 (3.6)。

注意到，用 $\Pi_t = \Pi + W_t$表示时，方程（3.6）意味着

$$\begin{cases} [\Pi_t, \Pi_t]_{SN} = 0 \\ \frac{d}{dt}\Pi_t = [\Pi_t, \widehat{X}_t]_{SN} \end{cases}. \tag{3.14}$$

将命题 3.6 限制到满足 W_t 属于 $\mathfrak{X}^2\mathcal{F}(M)$ 的元素，可得 正则 泊松结构

$$\Pi_t := \Pi + (W_t)^\gamma$$

根据定理 1.13，其辛叶状结构与 G 横截。回顾一下，$\mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(M) = \mathfrak{X}(M)$，因此同样的限制不会影响向量场。应用 Moser 引理 3.1，我们得到本节的主要结果：规范等价关系 $(\mathfrak{X}^\bullet\mathcal{F}(M)[2], \{\mathrm{I}_k^G\})$ 与由同伦给出的几何等价概念一致，具体而言如下。

定理 3.7. 假设流形 M 是紧的。设 W_0, W_1 是$(\mathfrak{X}^\bullet\mathcal{F}(M)[2], \{\mathrm{I}_k^G\})$ 中属于 $\mathcal{I}_\gamma$ 的 *Maurer–Cartan* 元。则以下陈述等价：

i) W_0 和 W_1 通过光滑族 $(W_t)_{t\in[0,1]} \in MC(\mathfrak{X}^\bullet F(M)[2], \{\mathrm{I}_k^G\}) \cap I_\gamma$ 和 $(X_t)_{t\in[0,1]} \in \mathfrak{X}(M)$ 规范等价，*ii)* 存在一个微分同胚 ψ，它将相应的泊松结构 $\Pi_0 := \Pi + (W_0)^\gamma$ 和 $\Pi_1 := \Pi + (W_1)^\gamma$ 联系起来，并且可通过同伦 $(\psi_t)_{t\in[0,1]}$ 与 id_M 相连，使得对所有 $t \in [0,1]$，$(\psi_t)_*(im\ \Pi_0^\sharp)$ 都与 G 横截。

证明。给定由族 $(W_t)_{t\in[0,1]} \in \mathrm{MC}(\mathfrak{X}^\bullet \mathrm{F}(M)[2], \{\mathrm{I}_k^G\}) \cap \mathrm{I}_\gamma$ 和 $(X_t)_{t\in[0,1]} \in \mathfrak{X}(M)$ 构成的规范等价，它连接 W_0 与 W_1。由命题 3.6 可得一条正则泊松结构的路径 $\Pi_t := \Pi + (W_t)^\gamma$，其叶状结构与 G 横截；以及一条向量场路径 $\left(\mathrm{b}X_t\right)_{t\in[0,1]} \in \mathfrak{X}(M)$，使得

$$\frac{d}{dt}\Pi_t = [\Pi_t, \widehat{X}_t]_{SN}.$$

根据引理 3.1，路径 Π_t由同伦 $(\psi_t)_{t\in[0,1]}$积分 $\left(\widehat{\ }X_t\right)_{t\in[0,1]}$生成，且因此自动满足 $(\psi_t)_*(\mathrm{im}\ \Pi_0^\sharp) \pitchfork G$。

反过来，若 Π_0与 Π_1通过同伦$(\psi_t)_{t\in[0,1]}$相关，且满足$(\psi_t)_*(\mathrm{im}\ \Pi_0^\sharp)$，$\pitchfork G$则由定理1.13 可知

$$\Pi_t := (\psi_t)_*\Pi_0 = \Pi + (W_t)^\gamma$$

存在一条光滑路径$(W_t)_{t\in[0,1]} \in \mathrm{MC}(\mathfrak{X}^\bullet\mathcal{F}(M)[2], \{\mathrm{I}_k^G\}) \cap \mathcal{I}_\gamma$，在 W_0与 W_1之间进行插值。此外，引理 3.1 表明，时变向量场$(Y_t)_{t\in[0,1]} \in \mathfrak{X}(M)$满足$(\psi_t)_{t\in[0,1]}$

$$\frac{d}{dt}\Pi_t = [\Pi_t, Y_t].$$

将命题3.6应用于$(W_t, X_t) = ((W_t)^\gamma, Y_t)$，可知族$(W_t)_{t\in[0,1]}$和$(X_t)_{t\in[0,1]}$其中

$$X_t = (\mathrm{id}_{TM} + W_t^\sharp \circ \gamma^\flat)(Y_t)$$

构成 W_0 与 W_1之间的规范等价。证明至此完成。 □

3.2. **模空间**。现在我们讨论空间 正则泊松$^{2k}(M)$ 上的正则秩为 $2k$ 泊松结构 M，其中将同伦群 $\mathrm{Diff}_0(M)$的作用取商。根据定理 1.13 和定理 3.7，模空间 正则泊松$^{2k}(M)/\mathrm{Diff}_0(M)$ 在 Π的等价类处的形式切空间为

$$T_{[\Pi]}\left(\mathcal{R}eg\mathcal{P}oiss^{2k}(M)/\mathrm{Diff}_0(M)\right) \cong H^2_{\mathcal{F}}(M, \Pi),$$

其中 $H^\bullet\mathcal{F}(M,\ \Pi)$是良好多向量场复形 $(\mathfrak{X}^\bullet\mathcal{F}(M)\ d_\Pi)$，参见定义 1.3。以下示例表明，该切空间可能随点的变化而骤然改变，从而使模空间 正则泊松$^{2k}(M)/\mathrm{Diff}_0(M)$ 不可能是光滑的。

例 3.8。 考虑带有秩为 2 的泊松结构的环面 $\mathbb{T}^3$

$$\Pi = \left(\partial_{\vartheta_1} + \lambda\partial_{\vartheta_2}\right) \wedge \partial_{\vartheta_3},$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是一个常数。底层叶状结构 $T\mathrm{F} = \mathrm{Span}\{\partial_{\vartheta_1} + \lambda\partial_{\vartheta_2}, \partial_{\vartheta_3}\}$ 的性质取决于 λ，因为如果 $\lambda \in \mathbb{Q}$，那么叶是 $\mathbb{T}^2$ 的嵌入副本；而对于 $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，叶是 $\mathbb{R}\times S^1$ 的浸入副本，并且在 $\mathbb{T}^3$ 中稠密。

由于 Π 具有余秩一，良好多向量场空间 $\mathfrak{X}^\bullet\,\mathrm{F}\,(M)$ 与所有多向量场空间 $\mathfrak{X}^\bullet(M)$ 重合，因此 $H^2\,\mathrm{F}\,(M,\Pi)$ 就是通常的泊松上同调 $H^2(M,\Pi)$。由于泊松结构 Π由余辛结构诱导， $H^2(M,\Pi)$ 可以根据 F 的叶状上同调计算，参见 [15, 定理 3.2。17]。我们得到

$$H^2_{\mathcal{F}}(M,\Pi) = H^2(M,\Pi) \cong H^2(\mathcal{F}) \oplus H^1(\mathcal{F}).$$

注意到（$\mathbb{T}^3$, F）是乘积叶状结构（$\mathbb{T}^2$, F_K） $\times$（S^1, F_{full}），其中 $T\mathrm{F}_K = \mathrm{Span}\{\partial_{\vartheta_1} + \lambda\partial_{\vartheta_2}\}$，而 F_{full} 是 S^1上的单叶叶状结构。第二个因子是紧的，并且具有有限维的叶状上同调群；这些群正是 S^1的德拉姆上同调群。因此，可以应用 Künneth 公式 [1] 来计算 $H^\bullet(\mathrm{F})$，得到

$$\begin{aligned} H^2(\mathcal{F}) &\cong H^1(\mathcal{F}_K) \otimes H^1(\mathcal{F}_{full}) \cong H^1(\mathcal{F}_K), \\ H^1(\mathcal{F}) &\cong \left(H^1(\mathcal{F}_K) \otimes H^0(\mathcal{F}_{full})\right) \oplus \left(H^0(\mathcal{F}_K) \otimes H^1(\mathcal{F}_{full})\right) \cong H^1(\mathcal{F}_K) \oplus H^0(\mathcal{F}_K). \end{aligned}$$

总之，我们有

$$H^2_{\mathcal{F}}(M,\Pi) \cong H^1(\mathcal{F}_K) \oplus H^1(\mathcal{F}_K) \oplus H^0(\mathcal{F}_K).$$

如果 $\lambda \in \mathbb{Q}$，那么 F_K由一个 S^1-纤维化给出，因此上同调群 $H^1(\mathrm{F}_K)$和 $H^0(\mathrm{F}_K)$是无限维的。如果 $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，那么 F_K 是著名的克罗内克叶状结构，其第一上同调群 $H^1(\mathrm{F}_K)$取决于 λ是哪一类无理数 [8],[11, 第三章]。如果λ是一个刘维尔数[1]，那么 $H^1(\mathrm{F}_K)$是无限维的；但如果 λ是丢番图的，那么 $H^1(\mathrm{F}_K)$是一维的。因此，

- 如果 $\lambda \in \mathbb{Q}$或 $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$是刘维尔数，那么 $H^2{}_{\mathcal{F}}(M,\Pi)$ 是无限维的。
- 如果 $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$是丢番图的，那么 $H^2{}_{\mathcal{F}}(M,\Pi) \cong \mathbb{R}^3$是有限维的。

这尤其表明， $H^2{}_{\mathcal{F}}(M,\Pi)$ 在 Π 的小扰动下并不稳定。例如，令 λ 为丢番图数，并取一个收敛到 λ 的有理数序列 λ_n。这会产生一族泊松结构 $\Pi_n = \left(\partial_{\vartheta_1} + \lambda_n\partial_{\vartheta_2}\right) \wedge \partial_{\vartheta_3}$，它们在 C^∞ 拓扑下收敛到 Π。无穷小模空间 $T_{[\Pi]}\left(\text{正则泊松}^{2k}(M)/\mathrm{Diff}_0(M)\right)$ 是有限维的，而 $T_{[\Pi_n]}\left(\text{正则泊松}^{2k}(M)/\mathrm{Diff}_0(M)\right)$ 是无限维的。因此，正则泊松$^{2k}(M)/\mathrm{Diff}_0(M)$ 不可能是光滑的。

Appendix A. Background on $L_\infty[1]$-algebras

A.1. $L_\infty[1]$-代数。 我们先回顾一下 $L_\infty[1]$-代数的定义。

定义 A.1。 $L_\infty[1]$-代数 是一个分次向量空间 V，配备一组次数为 1 的线性映射$\mathfrak{m}_k\colon \otimes^k V \to V$（$k \geq 1$），并满足以下条件：对于齐次元素 $v_1,\ldots,v_n \in V$，

(1) 分次对称性：对于 $\sigma \in S_n$，有

$$\mathfrak{m}_n(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma;\mathrm{v})\mathfrak{m}_n(v_1,\ldots,v_n).$$

[1]回想一下，如果存在正数 $s, c \in \mathbb{R}$ 使得，无理数 $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 就称为丢番图数

$$|m\lambda + n| \geq \frac{c}{(1+m^2)^s}$$

对于任意 $(m,\ n) \in \mathbb{Z}^2\setminus\{(0,\ 0)\}$。刘维尔数是非丢番图的无理数。它们具有这样的性质：可以用有理数对其进行很好的近似。

(2) 高阶雅可比恒等式：对于所有 $n \geq 1$，我们有

$$\sum_{\substack{i+j=n+1\\ i,j\geq 1}} \sum_{\sigma\in S_{(i,n-i)}} \epsilon(\sigma;\mathrm{v})\mathfrak{m}_j\big(\mathfrak{m}_i(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(i)}),v_{\sigma(i+1)},\dots,v_{\sigma(n)}\big)=0.$$

这里，$\epsilon(\sigma;\mathrm{v})$ 是 σ 的 Koszul 符号，而 $S_{(i,n-i)}$ 表示 $(i,n-i)$-非交错置换的空间。

注 A.2. (1) $L_\infty[1]$-代数的概念等价于更为常见的 L_∞-代数 [9], 概念，其中多重括号 $\mathfrak{l}_k$ 具有分次反对称性，且次数为 $2-k$。给定一个分次向量空间 V，L_∞-结构$\{\mathfrak{l}_k\}$在 V上与 $L_\infty[1]$-结构$\{\mathfrak{m}_k\}$在移位空间 $V[1]$上存在对应关系，其定义为$(V[1])^i = V^{i+1}$。多重括号之间的关系如下（除整体负号外，我们遵循 [4, 注 **1**。1], 中的约定）：

$$\mathfrak{l}_k(v_1,\dots,v_k) = -(-)^k(-)^{\sum_i (k-i)|v_i|}\mathfrak{m}_k(v_1[1],\dots,v_k[1]). \tag{A.1}$$

(2) dgL[1]a 是一个 $L_\infty[1]$-代数（$V,\{\mathfrak{m}_k\}$），其中只要 $k\geq 3$，就有 $\mathfrak{m}_k = 0$。相应的L_∞-代数于是约化为微分分次李代数（dgLa）。

在本文中很重要的一种构造 $L_\infty[1]$-代数的方法是 Voronov 导出括号构造。该方法使用 V-数据这一概念。

定义 A.3。一个V-数据（$\mathfrak{h}$，$\mathfrak{a}$，P，Θ）由以下部分组成：

- 一个带李括号 $[-,-]$的分次李代数 $\mathfrak{h}$，
- 一个阿贝尔分次李子代数 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{h}$,
- 一个投影 P： $\mathfrak{h}\to\mathfrak{a}$，使得 $\ker P\subset\mathfrak{h}$ 是一个分次李子代数,
- 一个次数为一的元素 $\Theta\in\ker(P)$，使得 $[\Theta,\Theta]=0$。

命题 A.4 ([17]). *V-数据 $(\mathfrak{h},\mathfrak{a},P,\Theta)$ 在 $\mathfrak{a}$ 上诱导出一个 $L_\infty[1]$-代数结构，其多重括号 $Q_k\in\mathrm{Hom}^1(S^k\mathfrak{a},\mathfrak{a})$ 对所有 $a_1,\dots,a_k\in\mathfrak{a}$ 定义如下：*

$$Q_k(a_1\odot\cdots\odot a_k) = P[[\dots[\Theta,a_1],\dots],a_n].$$

最后，我们回顾 Maurer-Cartan 元（简称 MC 元）及其规范等价。

定义 A.5. *$L_\infty[1]$-代数 $(V,\{\mathfrak{m}_k\})$ 的一个 Maurer-Cartan 元 是一个次数为 0 的元素 v，满足 Maurer-Cartan 方程*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathfrak{m}_k(v,\dots,v)=0.$$

定义 A.6. 定义 $(V,\{\mathfrak{m}_k\})$ 的两个 MC 元 v_0 和 v_1 若满足以下条件，则称为规范等价：

- 一条光滑单参数 MC 元族 $(v_t)_{t\in[0,1]}$，其在 v_0 和 v_1 之间插值，
- 一个由 V 中次数为 -1 的元素构成的光滑单参数族 $(w_t)_{t\in[0,1]}$，

使其满足以下演化方程：

$$\frac{d}{dt}v_t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathfrak{m}_{k+1}(w_t,\underbrace{v_t,\dots,v_t}_{k\text{ times}}).$$

本文中出现的 $L_\infty[1]$-代数只有有限多个非零多重括号，因此其 Maurer-Cartan 方程和规范等价都是定义良好的概念。

A.2. $L_\infty[1]$-**态射**。 为了定义 $L_\infty[1]$-代数之间的态射，将 latte 视为.....很有用 r
作为分次 配备余微分的余代数。我们首先回顾这一替代视角。

设 $V = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} V^k$为一个分次向量空间。其分次对称代数 $\mathrm{S^\bullet V} := \oplus_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{S^k V}$ 继承自张量代数 $\mathrm{T^\bullet}V = \oplus_{k\in\mathbb{N}} V^{\otimes k}$ 的分次余代数结构，其余乘积 μ 定义如下：

$$\mu(v_1 \odot \ldots \odot v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\sigma\in S_{(i,n-i)}} \epsilon(\sigma, \mathrm{v})(v_{\sigma(1)} \odot \ldots \odot v_{\sigma(i)}) \otimes (v_{\sigma(i+1)} \odot \ldots \odot v_{\sigma(n)}).$$

定义 **命题 A.7.** 次数为 k 的分次线性映射 $X\colon \mathrm{SV} \to \mathrm{SV}$ 是 $(\mathrm{SV}\ \mu)$ 上的次数 k 余导子 if

$$\mu \circ X = (X \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes X) \circ \mu.$$

现在我们回顾一下，余导子完全可以用其泰勒系数来描述。

命题 A.8. 对于任意分次向量空间 V，存在一个次数为0 的分次线性同构

$$\mathrm{CoDer}^\bullet(\mathrm{S}V) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{S}V, V) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{S}^n V, V) \tag{A.2}$$

将每个$Q \in \mathrm{CoDer}^k(\mathrm{S}V)$映射到如下给出的族$\{Q_n\} \in \oplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}^k(\mathrm{S}^n V, V)$：

$$\mathrm{S}^n V \xhookrightarrow{incl} \mathrm{S}^\bullet V \xrightarrow{Q} \mathrm{S}^\bullet V \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} V\ ,$$

其中，$\mathrm{pr}_1 : \mathrm{S}^\bullet V \to V$表示投影。特别地，$Q \in \mathrm{CoDer}^k(\mathrm{S}V)$ 可以由如下族$\{Q_n\} \in \oplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}^k(\mathrm{S}^n V, V)$重构如下：

$$Q(v_1 \odot \ldots \odot v_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in S_{(i,n-i)}} \epsilon(\sigma; \mathrm{v}) Q_i(v_{\sigma(1)} \odot \ldots \odot v_{\sigma(i)}) \odot v_{\sigma(i+1)} \odot \ldots \odot v_{\sigma(n)}, \tag{A.3}$$

对于所有 ho 次齐次 v_1、.....、$v_n \in V$。此外，同构 (A.2) 在以下两者之间诱导出一个双射

- 余微分 Q作用于 $\mathrm{S}V$，即满足 $Q \in \mathrm{CoDer}^1(\mathrm{S}V)$ 且 $Q \circ Q = 0$,
- $L_\infty[1]$-代数结构 $\{Q_n\}$ 在 V 上。

给定 g 分次向量空间 V和 W，令 μ_V和 μ_W表示 SV 和 SW 上的余乘积。一个次数
ek 分余代数态射 $\mathrm{SV} \to \mathrm{SW}$ 是一个次数为 k 的分次线性映射 $\Phi\colon \mathrm{SV} \to \mathrm{SW}$，使得

$$(\Phi \otimes \Phi) \circ \mu_V = \mu_W \circ \Phi.$$

鉴于命题 A.8 ，现在可以清楚地看出应如何定义 $L_\infty[1]$-代数之间的态射。

定义 A.9。 设 $(V, \{\mathrm{Q}_n\})$ 和 $(W, \{\mathrm{R}_n\})$ 是 $L_\infty[1]$-代数，其余微分 Q 定义在 $\mathrm{S}V$ 上，R 定义在 $\mathrm{S}W$ 上。一个 $L_\infty[1]$-代数（同构）态射 $(V, \{\mathrm{Q}_n\}) \longrightarrow (W, \{\mathrm{R}_n\})$ 是一个次数为 0 的分次余代数（同构）态射 $\Phi : \mathrm{S}V \to \mathrm{S}W$，使得 $\mathrm{R} \circ \Phi = \Phi \circ \mathrm{Q}$。

下述 命题用泰勒系数描述分次余代数态射 .

命题 A.10。 对于分次向量空间 V 和 W，存在一个次数为 0 的分次线性同构

$$\mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{S}V, \mathrm{S}W) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{S}V, W) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{S}^n V, W)$$

映射 将每个 $\Phi \in \mathrm{Hom}^k(\mathrm{S}V, \mathrm{S}W)$映射到由下式给出的族 $\{\Phi_n\} \in \oplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}^k(\mathrm{S}^n V, W)$：

$$\mathrm{S}^n V \xhookrightarrow{incl} \mathrm{S}^\bullet V \xrightarrow{\Phi} \mathrm{S}^\bullet W \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} W\ .$$

特别地，可以根据族 $\{\Phi_n\}$ 重构 Φ ，如下所示：

$\Phi(v_1 \odot \ldots \odot v_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_i=n} \sum_{\sigma\in \mathsf{S}_n} \frac{\epsilon(\sigma;\mathrm{v})}{i!p_1!\cdots p_i!} \Phi_{p_1}(v_{\sigma(1)} \odot \ldots \odot v_{\sigma(p_1)}) \odot \cdots \odot \Phi_{p_i}(v_{\sigma(p_1+\cdots+p_{i-1}+1)} \odot \ldots \odot v_{\sigma(n)})$$

对所有 ho 齐次的 v_1，……，$v_n \in V$。此外，当且仅当 $\Phi_1 : V \to W$ 可逆时，$\Phi : \mathsf{S}V \to \mathsf{S}W$ 可逆。

注 A.11。若一个 $L_\infty[1]$-代数态射 $(V, \{\mathrm{Q}_n\}) \longrightarrow (W, \{\mathrm{R}_n\})$ 满足对应的余微分余代数态射 $\Phi : (\mathsf{S}V, \mathrm{Q}) \to (\mathsf{S}W, \mathrm{R})$ 的泰勒系数 Φ_n 在 $n > 1$ 时均为零，则称其为严格的。

Appendix B. Courant Algebroids and Dirac Structures

我们回顾一些关于 Courant 代数丛和狄拉克结构的背景知识 .

定义 B.1。*Courant*代数丛 是一个向量丛 $E \to M$，其配备非退化对称配对 $\mathrm{hh}-,-\mathrm{ii} : E \otimes E \to \mathbb{R}$、双线性括号 $[\![-,-]\!] : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$（称为*Dorfman*括号），以及一个在 id_M 上方的向量丛态射 $\rho : E \to TM$（称为锚映射），并满足

$$\begin{aligned}
&[\![e, [\![e', e'']\!]]\!] = [\![[\![e, e']\!], e'']\!] + [\![e', [\![e, e'']\!]]\!],\\
&\langle\!\langle [\![e, e']\!], e'' \rangle\!\rangle = \langle\!\langle e, [\![e', e'']\!] \rangle\!\rangle,\\
&\rho(e)\langle\!\langle e', e' \rangle\!\rangle = 2\langle\!\langle [\![e, e']\!], e' \rangle\!\rangle,
\end{aligned}$$

对任意 $e, e', e'' \in \Gamma(E)$。因此，对于 $e, e' \in \Gamma(E)$ 和 $f \in C^\infty(M)$，Dorfman括号与锚映射满足以下 Leibniz 法则：

$$[\![e, fe']\!] = (\rho(e)f)e' + f[\![e, e']\!].$$

例 B.2. 广义切丛 $\mathbb{T}M := TM \oplus T^*M$是 Courant代数丛的典型例子。其配对 $\mathrm{hh}-,-\mathrm{ii}$、Dorfman括号 $[\![-,-]\!]$ 和锚映射 ρ 在截面$X + \alpha, Y + \beta \in \Gamma(\mathbb{T}M)$ 上定义如下：

$$\langle\!\langle X + \alpha, Y + \beta \rangle\!\rangle = \alpha(Y) + \beta(X), \quad \rho(X + \alpha) = X, \quad [\![X + \alpha, Y + \beta]\!] = [X, Y] + \mathcal{L}_X\beta - \iota_Y \mathrm{d}\alpha.$$

定义 B.3. 给定一个 Courant代数丛 E，子丛 $L \subset E$ 称为一个几乎*Dirac*结构，如果 $L = L^\perp$，其中 $L^\perp \subset E$ 表示关于配对 $\mathrm{hh}-,-\mathrm{ii}$ 而言 L 的正交补。*Dirac* 结构是一个几乎Dirac结构 $L \subset E$，并且关于 Dorfman括号 $[\![-,-]\!]$ 还是对合的。

Remark B.4. 对于每个几乎Dirac结构 $L \subset E$，其*Courant*张量 $\Upsilon_L \in \Gamma(\wedge^3 L^*)$ 定义为 by

$$\Upsilon_L(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \langle\!\langle \xi_1, [\![\xi_2, \xi_3]\!] \rangle\!\rangle,$$

对所有 ξ_1、ξ_2、$\xi_3 \in \Gamma(L)$。容易看出，当且仅当 $\Upsilon_L = 0$ 时，L 是狄拉克结构。

例 B.5. M 上的泊松结构可以视为 $\mathbb{T}M$中的狄拉克结构，具体如下。M 上的双向量场与横截于 TM的几乎狄拉克结构相对应，通过

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}^2(M) &\xrightarrow{\sim} \{L \subset \mathbb{T}M \text{ almost Dirac structure} \mid L \pitchfork TM\},\\
Z &\longmapsto \mathrm{Gr}(Z) := \{\iota_\alpha Z + \alpha \mid \alpha \in T^*M\}.
\end{aligned}$$

在此对应关系下，$Z \in \mathfrak{X}^2(M)$ 是泊松结构，当且仅当 $\mathrm{Gr}(Z) \subset \mathbb{T}M$ 是狄拉克结构。

注 B.6。令 $L \subset E$ 为一个几乎Dirac结构，并假设 R 是 E的一个补子丛。利用核为 R的投影 pr_L，可以将 Dorfman括号 $[\![-,-]\!]$限制为 $\Gamma(L)$ 上的几乎李括号 $\mathrm{pr}_L \circ [\![-,-]\!]$。再将锚映射 ρ 限制到 L，便得到 L上的几乎Lie代数丛结构 $(\rho|_L, \mathrm{pr}_L \circ [\![-,-]\!])$。如果 L实际上是Dirac 结构，那么它继承的便是真正的 Lie代数丛结构，且与 R无关。

附录 C. 狄拉克结构变形理论

我们回顾狄拉克结构变形理论中的一些构造和结果。给定一个Courant代数丛 $E \to M$ 和一个Dirac 结构 $A \subset E$，我们回顾命题A.4中的导出括号构造如何用于在 $L_\infty[1]$上获得一个 $\Omega^\bullet(A)$ [2]-代数结构。

从 b 开始 通过固定一个几乎Dirac结构 $B \subset E$，使其与 A互补，从而使得 $E = A \oplus B$。然后配对 hh –, –ii 诱导出一个向量丛同构

$$\varphi_B : E = A \oplus B \xrightarrow{\sim} A \oplus A^*, \; u + v \longmapsto u + \langle\!\langle v, - \rangle\!\rangle|_A, \tag{C.1}$$

这使我们能够将 Courant代数丛结构从 $E = A \oplus B$ 传递到 $A \oplus A^*$。特别地， $A \oplus A^*$ 上的非退化对称配对由下式给出:

$$\langle\!\langle X + \alpha, Y + \beta \rangle\!\rangle = \alpha(Y) + \beta(X).$$

根据 [13, 定理 4.5], ，如此得到的 $A \oplus A^*$ 上的 Courant代数丛结构对应于一个次数为 2 的辛 NQ 流形（$T^*[2]A[1]$, ω, Δ），其中 ω是分次流形 $T^*[2]A[1]$ 上的典范次数 2 辛结构，且 $\Delta = \{\Theta_B, -\}$ 对于分次李代数（$C^\infty(T^*[2]A[1])[2], \{-, -\}$）中的某个 Maurer–Cartan 元 Θ_B成立。这里，$\{-, -\}$ 是与 ω对应的次数 -2 泊松括号。具体而言，有

$$\langle\!\langle u, v \rangle\!\rangle = \{u, v\}, \quad [\![u, v]\!] = \{\{u, \Theta_B\}, v\}, \quad \rho(u)f = \{\{u, \Theta_B\}, f\}, \tag{C.2}$$

对所有 u, $v \in \Gamma(A \oplus A^*) \subset C^\infty(T^*[2]A[1])$ 和 $f \in C^\infty(M) \subset C^\infty(T^*[2]A[1])$，均成立。

根据[5, 引理 2.6], ，我们现在可以构造由以下部分组成的 V-数据（$\mathfrak{h}$, $\mathfrak{a}$, P, Θ_B): f:

(1) 分次李代数 $\mathfrak{h} := (C^\infty(T^*[2]A[1])[2], \{-, -\})$, (2) 阿贝尔李子代数 $\mathfrak{a} := C^\infty(A[1])[2] = \Omega^\bullet(A)[2]$,(3) 投影 P: $\mathfrak{h} \to \mathfrak{a}$是对零截面的限制，满足 $\{\ker P, \ker P\} \subset \ker P$, (4) 满足 $P(\Theta_B) = 0$ 的 MC 元 $\Theta_B \in \mathrm{MC}(\mathfrak{h})$。

应用 Voronov 导出括号构造（见命题 A.4），可在 $L_\infty[1]$上得到一个代数结构 $\mu_k^B\}$，其多重括号 μ_k^B: $\mathsf{S}^k\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ 定义如下:

$$\mu_k^B(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) := P\{\{\ldots\{\Theta_B, \alpha_1\}, \ldots, \}, \alpha_k\}. \tag{C.3}$$

实际上，正如 [5, 引理 26] 中所指出的， $\mu_k^B = 0$ 对于所有 $k > 3$，其他多重括号 μ_1^B、 μ_2^B 和 μ_3^B也可以用 Courant代数丛 $E = A \oplus B$来重新表示，如下文引理 C.1 所述。

在陈述引理 C.1之前，我们需要引入一些记号。设 $A \to M$ 为一个向量丛。对于任意 k-形式 α在 A上，即 $\alpha \in \Omega^k(A)$，我们将 $\alpha^\flat$: $A \to \wedge^{k-1}A^*$记作缩并映射。对于 $\alpha_1 \in \Omega^{k_1}(A) \ldots, \alpha_n \in \Omega^{k_n}(A)$，接着定义一个丛态射 $\alpha_1^\flat \wedge \ldots \wedge \alpha_n^\flat$: $\wedge^n A \to \wedge^{k_1+\ldots+k_n-n}A^*$如下:

$$(\alpha_1^\flat \wedge \ldots \wedge \alpha_n^\flat)(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-)^\sigma \alpha_1^\flat(\xi_{\sigma(1)}) \wedge \ldots \wedge \alpha_n^\flat(\xi_{\sigma(n)}). \tag{C.4}$$

利用这个态射，下一个引理将多重括号（C.3）改写为 Courant代数丛 $E = A \oplus B$的几何表述。出于下文备注 C.2 中解释的原因，我们在二元括号前额外加上一个负号。我们指出，在 [5, 引理 26] 中，三元括号前漏掉了一个整体负号。

引理 C.1。[5, 引理 2。6] 给定一个 *Courant*代数丛 $E \to M$，设 $E = A \oplus B$ 是到狄拉克结构 A 与几乎*Dirac*补 B 的一个分裂。分次向量空间 $\Omega^\bullet(A)[2]$ 具有诱导的$L_\infty[1]$-代数结构 $\{\mu_k^B\}$，其唯一非平凡的多重括号 μ_1^B、 μ_2^B、 μ_3^B 如下:

- μ_1^B 与 *Lie*代数丛 $A \Rightarrow M$ 的 *de Rham*微分一致，即对于所有 $\alpha \in \Omega^\bullet(A)$:

$$\mu_1^B(\alpha) = \mathrm{d}_A\alpha.$$

- μ_2^B 的作用如下，对于所有齐次的 $\alpha, \beta \in \Omega^\bullet(A)$:

$$\mu_2^B(\alpha,\beta) = (-1)^{|\alpha|}[\alpha,\beta]_B. \tag{C.5}$$

这里，$[-,-]_B$ 是 $\Gamma(\wedge^\bullet B)$ 上的几乎 *Gerstenhaber* 括号，它由近似 *Lie* 锚丛 B 的几乎李括号 $\mathrm{pr}_B \circ [\![-,-]\!]$ 延拓而来。

- μ_3^B对所有齐次的 α、β、$\gamma \in \Omega^\bullet(A)$ 的作用如下:

$$\mu_3^B(\alpha,\beta,\gamma) = -(-1)^{|\beta|}(\alpha^\flat \wedge \beta^\flat \wedge \gamma^\flat)\Upsilon_B. \tag{C.6}$$

此处 Υ_B 表示几乎*Dirac*结构的*Courant*张量 B （参见注释 *B.4*）。

In t方程右端(C.5) 和 (C.6)，我们使用如下恒等对应 $B \xrightarrow{\simeq} A^*$： $u \longmapsto \langle\langle u, -\rangle\rangle|_A$。

对于正合Courant代数丛 E，上述 $L_\infty[1]$-代数结构也出现在 [7, Cor. 3.7] 中。

注 C.2. 我们列出一些关于 $L_\infty[1]$-代数 $(\Omega^\bullet(A)[2], \mu_1^B, \mu_2^B, \mu_3^B)$ 的评注。

(1) 对于任意与 Dirac 结构互补的几乎Dirac结构 $B \subset E$ $A \subset E$，其$L_\infty[1]$-代数结构 $\{\mu_k^B\}$ 约化为 dgL[1]a，当且仅当 B 是 Dirac 结构。(2) 严格来说，应用 Voronov 的导出括号构造得到的 $L_\infty[1]$-代数是 $(\Omega^\bullet(A)[2], \mu_1^B, -\mu_2^B, \mu_3^B)$，即引理 C.1 中引入的结构，只是二元括号整体差一个符号。注意，改变二元括号的符号会产生一个同构的$L_\infty[1]$-代数；一个严格的 $L_\infty[1]$-同构只需由以下映射给出

$$(\Omega^\bullet(A)[2], \mu_1^B, \mu_2^B, \mu_3^B) \to (\Omega^\bullet(A)[2], \mu_1^B, -\mu_2^B, \mu_3^B) : \alpha \mapsto -\alpha.$$

引入这个额外的负号有两个好处。首先，它确保下面的引理 C.3 中不会出现负号。其次，如果补分布 B 是狄拉克结构，那么在 décalage 同构 (A.1) 下，与 $(\Omega^\bullet(A)[2], \mu_1^B, \mu_2^B, \mu_3^B)$相对应的 $\Omega^\bullet(A)[1]$上的 L_∞-代数结构会化为 [10]中使用的微分分次 Lie 代数 $(\Omega^\bullet(A)[1], d_A, [-,-]_{A^*})$。

给定一个分裂 $E = A \oplus B$，如引理 C.1所述，我们现在转而讨论 $L_\infty[1]$-代数 $(\Omega^\bullet(A)[2], \{\mu_k^B\})$ 的 Maurer–Cartan 元所编码的信息。利用识别 C.1，关系式

$$L = \mathrm{Gr}(\eta) = \{\xi + \iota_\xi \eta \mid \xi \in A\} \subset A \oplus A^* \simeq A \oplus B = E.$$

给出了 2-形式 $\eta \in \Omega^2(A)$ 与 $L \subset E$ 接近 A 的几乎Dirac结构之间的对应关系，这里的“接近”是指它们仍与 B 横截。正如 [10, 定理 6.1] （当补分布 B 是Dirac结构时）和 [5, 引理 2.6] （一般情形）所证明的，$(\Omega^\bullet(A)[2], \{\mu_k^B\})$ 的 Maurer–Cartan 元恰好是这样的 2- 形式 $\eta \in \Omega^2(A)$：与之对应的几乎 Dirac 结构 L 是对合的，即为 Dirac 结构。

引理 C.3 ([10, 定理 6.1] 和 [5, 引理 2.6])。 设 E 是一个*Courant*代数丛， $A \subset E$ 是一个*Dirac* 结构。取一个与 A互补的几乎*Dirac*结构 $B \subset E$。那么关系式

$$L = \mathrm{Gr}(\eta)$$

在……之间建立典范一一对应

(1) MC 元素 η *of* $(\Omega^\bullet(A)[2], \{\mu_k^B\})$，*(2)* 与 B横截的狄拉克结构 $L \subset E$。

参考文献

[1] M. Bertelson. 关于叶状 de Rham 上同调的 Künneth 公式的评注。《太平洋数学杂志》, 252 274, 2011 2 257( ): – .[2] A. Cattaneo and F. Schätz. 高阶导出括号的等价。《纯粹与应用代数杂志》, 212 2460, 2008 11 2450( ): – .[3] M. Crainic, R.L. Fernandes, and I. Mărcuţ.《泊松几何讲义》，《数学研究生教材》第217卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2021年。[4] D. Fiorenza and M. Manetti. 映射锥上的 L_∞-结构。《代数与数论》, 1(3):301–330, 2007年。

[5] Y. Frégier and M. Zambon. 同时变形与泊松几何。《组合数学》, 151 1790, 2015 9 1763( ): – .[6] S. Geudens, A.G. Tortorella, and M. Zambon. 辛叶状结构的变形。《数学进展》, 404 108445, 2022 B: .[7] M. Gualtieri, M. Matviichuk, and G. Scott. 通过 L_∞-代数变形狄拉克结构。《国际数学研究通知》, 2020(14):4295–4323, 2020年。[8] A. Haefliger. 关于具有极小叶的叶状结构的一些评注。《微分几何杂志》, 15(2):269–284, 1980。[9] T. Lada and M. Markl. 强同伦李代数。《代数通讯》, 23(6):2147–2161, 1995。[10] Z.-J. Liu, A. Weinstein, and P. Xu. 李双代数丛的 Manin 三元组。《微分几何杂志》, 45(3):547–574, 1997。[11] C. Moore and C. Schochet. 《叶状空间上的整体分析》, 《数学科学研究所出版物》第9卷。剑桥大学出版社，纽约，2006年。[12] D. Roytenberg. *Courant* 代数丛、导出括号与偶辛超流形。博士论文，加州大学伯克利分校, 1999年。[13] D. Roytenberg. 关于分次辛超流形与 Courant 代数丛的结构。《当代数学》, 315:169–186, 2002。[14] F. Schätz and M. Zambon. 叶状结构与预辛结构的规范等价。《当代数学通讯》, 0(0):2050067, 2020年。[15] B. Osorno Torres. 余维一辛叶状结构：构造与例子。博士论文，乌得勒支大学，2015年。[16] A.G. Tortorella. 狄拉克-雅可比结构的变形 L_∞-代数。《微分几何及其应用》, 80:101846, 2022年。[17] Th. Voronov. 高阶导出括号与同伦代数。《纯粹与应用代数杂志》, 202(1-3):133–153, 2005 年。

数学系，伦敦大学学院，戈登街25号，伦敦 WC1H 0AY，英国电子邮箱地址：s.geudens@ucl.ac.ukDipMat，萨莱诺大学，教皇若望保禄二世街132号，84084 菲夏诺（萨莱诺省），意大利电子邮箱地址：atortorella@unisa.it数学系，鲁汶大学，塞莱斯蒂嫩兰街200B号，3001 鲁汶，比利时电子邮箱地址：marco.zambon@kuleuven.be