arXiv:2305.00526v2 [hep-th] 5 Aug 2023

非交换几何中的双交叉积与扭曲量子对称性： ϱ-闵可夫斯基时空的案例

Giuseppe Fabiano[*1,2], Giulia Gubitosi[†1,2], Fedele Lizzi[‡1,2,3], Luca Scala[§4], andPatriziaVitale[¶1,2]

[1] “埃托雷·潘奇尼”物理系，那不勒斯费德里科二世大学，那不勒斯，意大利[2]*INFN*，那不勒斯分部，意大利[3]量子物理与天体物理系和宇宙科学研究所（*ICCUB*），巴塞罗那大学，巴塞罗那，西班牙[4] 弗罗茨瓦夫大学，物理与天文学学院，*Maksa Borna 9, 50-204* 弗罗茨瓦夫，波兰

摘要

我们讨论 ϱ-闵可夫斯基时空的庞加莱量子对称性。这是一种具有角形式非交换性的空间。我们证明，这些对称性既可以具有双交叉积结构，也可以具有 Drinfel'd 扭曲结构。我们还得到了一个新的非交换$\star$乘积，它相对于标准积分测度是循环的。

[*]giuseppe.fabiano@unina.it
[†]giulia.gubitosi@na.infn.it, giulia.gubitosi@unina.it
[‡]fedele.lizzi@na.infn.it, fedele.lizzi@unina.it[§]339123@uwr.edu.pl, l.scala.1997@gmail.com

[¶]patrizia.vitale@na.infn.it, patrizia.vitale@unina.it

目录

1 引言 22 **ϱ-闵可夫斯基时空 5**

3 扭曲的 Hopf 代数 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 6

4 双交叉积构造 7

4.1 代数的双交叉积结构 $\mathcal{C}_\varrho(P)$ .74.2 代数的双交叉积结构 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ .104.3 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 与 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 之间的代数同构.154.3.1 ϱ-闵可夫斯基时空的重新推导 .17

5 平面 波和平面 $\star$-积在 ϱ-Minkowski 19
5.1 时间右序与双交叉积基.205.1.1 $\star$-积.225.2 时间对称序与扭曲基.235.2.1 星积的等价类.25

6 结论
25A 扭曲26B 双交叉积结构27B.1 经典 r-矩阵变形方法.29B.2 量子群 $\mathcal{C}_\kappa(P)$ .29**C 命题**
4.1 的证明30D 关于 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$的对易关系的一些显式计算32E κ-Minkowski 中的平面波34

1 引言

引力的量子化很可能需要某种形式的量子时空，而量子时空可由非交换几何有效描述。进而，这种几何可通过时空坐标之间的非对易性来定义，类似于量子力学中相空间坐标的情形。此类非平凡的对易关系通常不具协

变性，无法在经典相对论群的作用下保持不变。因此，量子时空需要引入量子对称性，而这种对称性由等距变换量子群实现。在本文中，我们将特别讨论庞加莱对称性。

后者可以通过两种方式来研究：一是从庞加莱群上的连续函数所构成的非交换代数，即量子霍普夫代数 $\mathcal{C}_\star(P)$ 的角度；二是从由庞加莱李代数的泛包络代数得到的量子霍普夫代数 $U_\star(\mathfrak{p})$ 的角度（下标表示所分析的具体变形）。根据霍普夫代数的一般理论，可以证明这两种结构互为霍普夫对偶。前者因具有类群性质，可视为“量子对称群”；后者则可视为“量子对称代数”。

量子霍普夫代数可以通过不同方式构造。最常用的两种结构是双交叉积和扭曲。双交叉积结构 [1] 可视为经典群通常的半直积的一种量子推广。根据 [1] 其数学结构属于霍普夫代数扩张。它既可以涉及群上的函数代数 $\mathcal{C}_\star(P)$，也可以涉及李代数 $U_\star(\mathfrak{p})$ 的泛包络代数。因此，与经典情形一样，可以通过两种方式导出相应的非交换时空。

一种方法是对 $\mathcal{C}_\star(P)$ 关于洛伦兹霍普夫代数$\mathcal{C}(SO(1,3))$ 取商（我们将看到，该代数并未变形），从而得到与时空同构的（变形）平移部分，这与经典情形相同。第二种方法则是确定 $U_\star(\mathfrak{p})$ 协变作用的空间，并将其视为时空。

扭曲方法 [2] 依赖于一个算子值映射，该映射由某个对称李代数的生成元定义。它可以对具有该李代数表示的理论中的任意双线性映射进行变形。它会影响相关对称 Hopf代数的代数结构和余代数结构；将其应用于时空上的函数乘积时，则会产生非交换性。

双交叉积结构和扭曲结构通常被视为刻画非交换时空量子对称性的两种替代方案。现有实例通常只涉及这两种方法中的一种。[1] 然而，探索与同一非交换时空相关联的、基于这两种框架的量子等距变换，仍然很有意义。

κ所谓的“Majid-Ruegg 基”（有时称为“双交叉积基”）中的 κ-庞加莱量子群，是具有双交叉积结构 [1] 的最著名的量子群。它描述了 κ-闵可夫斯基时空代数 [4] 的对称性。κ-庞加莱代数 [5, 6] 最初是通过收缩 [7]，得到的，后来也在扭曲方法 [8–14] 的框架下得到。然而，这需要扩展对称性代数，至少将韦 Weyl 变换的生成元纳入其中。

另一方面，莫亚尔代数是具有变形庞加莱对称性的非交换时空的一个例子，而这种对称性只能通过扭曲获得。事实上，可以验证它不是双交叉积结构 [15, 16] 的商。它的量子对称性

[1]然而，参见 [3]，其中类光 κ-闵可夫斯基时空与两个对称性量子群相关联：一个是双交叉积，另一个则通过扭曲得到。

群，即所谓的 θ-庞加莱，最早在 [17–20]。

本文探讨扭曲与双交叉积构造之间的关系。我们给出一个非交换时空的实例，称为 ϱ-闵可夫斯基时空，其量子对称性可用这两种结构来定义。尽管这一时空最初是在庞加莱群 [16]，的扭曲变形背景下提出的，我们表明，也可以用双交叉积量子群来自然地描述其对称性。通过这两种方法得到的变形庞加莱对称性是彼此同构的量子群，它们之间由生成元的非线性变换联系起来。我们将它们记为$U_\varrho(\mathfrak{p})$ 和 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$。它们导出不同的 $\star$-乘积；相对于标准积分测度，这两种乘积均具有循环性，这一性质对于构造规范不变理论十分重要。因此，这一特定模型可以作为两种方法之间的桥梁，便于比较相关结构及其物理诠释。

本文的组织如下。在第2 节中，我们介绍 ϱ-闵可夫斯基时空，并简要描述 κ-闵可夫斯基时空，后者将在全文中作为指导性示例。在第3 节中，我们回顾量子包络代数 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ [21]，该代数描述了 ϱ-闵可夫斯基时空的扭曲量子对称性，并回顾相关的 $\star$-乘积。

本文第 4 节和第 5 节包含了论文的主要原创性成果。在第 4.1 节中，我们描述了 $\mathcal{C}_\varrho(P)$，它此前已在 [22,23] 中通过一个经典的 r-矩阵引入，并通过直接计算证明其具有标准的双交叉积结构。因此，我们分析了霍普夫代数 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 和 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$，二者均与 $\mathcal{C}_\varrho(P)$ 互为霍普夫对偶。在第 4.2 节中，我们证明 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 并不属于双交叉积类型。因此，我们引入了该霍普夫代数的一种适当的非线性生成元变换，以获得量子包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$，使其具有双交叉积结构。我们采用了两种方法：一种是构造性方法，另一种是更为抽象的方法；这两种方法均由 Majid 和 Ruegg 在 [1] 中的 κ-庞加莱背景下提出。第 4.3 节证明，量子包络代数 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 和 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 是同构的。二者均与 $\mathcal{C}_\varrho(P)$ 互为霍普夫对偶，但只有第二个具有双交叉积对偶结构。与经典闵可夫斯基时空和 κ-闵可夫斯基时空类似，我们最终重新推导出 ϱ-闵可夫斯基时空，将其表示为相对于洛伦兹子代数作用的对偶 $\mathcal{U}^*_\varrho(\mathfrak{p})$ 的一个适当的商。

在第 5 节中，我们将非对易坐标函数的代数实现为有限维算符，并构造算子值平面波，借此定义 $\star$-乘积。根据排序处方（时间右序或时间对称序），我们得到相容的余乘，它们分别是双交叉积余乘或扭曲Hopf代数余乘。时间右序与双交叉积结构相关，这类似于 κ-Minkowski 情形。与扭曲相关的时间对称序在 κ-庞加莱情形中没有直接对应，在该情形下，相同的排序产生“标准”的 κ-庞加莱基，而不是源自扭曲。

最后，我们重新得到了文献 [24] 中已发现的扭曲星乘积，即与时间对称序相关联的乘积，并发现了一种新的 $\star$-乘积，它与双交叉积基有关。我们证明，与扭曲Hopf代数类似，该乘积也是循环的。然而，与后者不同的是，它并非闭合的。这一事实可能会产生有趣的影响，值得与文献 [21,24] 的结果进行比较，其中扭曲乘积已被应用于标量场论模型。

本文以一节总结与讨论以及五个包含技术细节和回顾性材料的附录作结。

2 ϱ-闵可夫斯基时空

本节介绍 ϱ-闵可夫斯基时空，首先回顾更为广为人知且研究得更为充分的 κ-闵可夫斯基时空，后者将在全文中作为指导性示例。本文采用的洛伦兹度量为 $g_{\mu\nu}$ ，其符号约定为 (+, –, –, –)。

κ-闵可夫斯基时空

κ-闵可夫斯基时空由以下对易子定义

$$[x^\mu, x^\nu] = i\ell(v^\mu x^\nu - x^\mu v^\nu), \tag{2.1}$$

其中我们使用长度（而非能量）作为变形参数 $\ell = 1/\kappa$，以便与 ϱ-闵可夫斯基所用的记号保持一致。四维向量 v^μ 根据其相对于度规 $g_{\mu\nu}$ [25]是类时、类光还是类空，刻画了物理上不同的模型。类时κ-闵可夫斯基的对易关系

$$[x^0, x^i] = i\ell x^i, \qquad [x^i, x^j] = 0, \tag{2.2}$$

几十年来一直是理论研究的焦点（例如参见 [26–33]），因为它在量子引力问题的现象学研究方法中具有重要意义 [34]。非交换时空（2.2）的对称群称为 κ-庞加莱 [5, 6, 35]，并已在多项关于庞加莱代数量子变形的研究中得到探讨（例如参见 [36–38]）。正如我们将要展示的，在变形庞加莱对称性的双交叉积结构中，对易关系（2.2）是作为相对于变形平移生成元的对偶代数推导出来的 [1]。这体现了双交叉积构造最有趣的性质之一：能够定义一种类似于经典情形的过程，在该过程中，闵可夫斯基时空可视为庞加莱代数平移部分的对偶空间。

ϱ闵可夫斯基时空

ϱ闵可夫斯基时空由以下对易关系定义

$$\begin{aligned}[x^1, x^0] &= i\varrho x^2\,,\\ [x^2, x^0] &= -i\varrho x^1\,,\end{aligned} \tag{2.3}$$

所有其他对易子均为零。

这是一种角向非交换性，因为时间变量充当了（x_1， x_2）平面中旋转的生成元。从测量的角度来看，当坐标表示为作用于希尔伯特空间上的算符时，其谱因此将是离散的 [22]。

非交换时空（2.3），其具有 2+1维欧几里得代数的结构（坐标 x^3 为中心元），最早由 [39] 提出（另见 [40]）。文献 [16]在扭曲方法框架下对其进行了分析。正如文献 [21,41–43] 所述，这类非交换时空可能具有物理意义；文献 [44]则指出，它在相对局域性方面具有唯象学意义。以此类时空为基础的非交换场模型已

由 [24, 45] 进行了研究；此外， [46] 在泊松规范理论背景下采用半经典方法进行了研究。文献 [23] 研究了该时空中观察者的性质及定位问题。

一种类似的角向非交换性（其中时间是交换变量，而x^3 起适当空间旋转的作用）在[47] 中进行了研究，其背景是对时空和相空间进行双重量子化。为将其与前一种情况区分开来，后一种情况被称为 λ-闵可夫斯基时空，其特征是具有类似于（2.3）的对易关系，其中 x^3 和 x^0 的作用互换。牢记这一差异，后续各节对 ϱ-闵可夫斯基所进行的分析，也可以经过细微调整后用于 λ-闵可夫斯基的情形。

3 扭曲 Hopf代数 U_ϱ（$\mathfrak{p}$）

给定一个李代数 $\mathfrak{g}$，其泛包络代数 U（$\mathfrak{g}$），若存在扭曲算子，则可将其变形为量子霍普夫代数。该扭曲算子是一个可逆映射 $\mathcal{F} \in U$（$\mathfrak{g}$） $\otimes U$（$\mathfrak{g}$） （称为 Drinfel'd 扭曲），并满足余循环条件和归一化条件。我们将在附录 A中简要回顾其部分性质。当存在一个可容许的扭曲时，便可以同时定义量子时空及其量子对称群。

ϱ-Minkowski 情形的 Drinfel'd 扭曲最早在 [16] 中引入：

$$\mathcal{F} = e^{\frac{i\varrho}{2}[P_0 \wedge M_{12}]}\,, \tag{3.1}$$

其中， P_μ、 $M_{\mu\nu}$ 分别是庞加莱代数 $\mathfrak{p}$的平移和洛伦兹生成元。相应的量子霍普夫代数 $U(\mathfrak{p})$最早在 [42]中引入。李代数生成元的扭曲余乘积将在后续章节中用到，其形式为

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{F}} P_0 =& P_0 \otimes 1 + 1 \otimes P_0\,,\\
\Delta_{\mathcal{F}} P_1 =& P_1 \otimes \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) + \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes P_1 + P_2 \otimes \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) - \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes P_2\,,\\
\Delta_{\mathcal{F}} P_2 =& P_2 \otimes \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) + \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes P_2 - P_1 \otimes \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) + \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes P_1\,,\\
\Delta_{\mathcal{F}} P_3 =& P_3 \otimes 1 + 1 \otimes P_3\,,\\
\Delta_{\mathcal{F}} M_{12} =& M_{12} \otimes 1 + 1 \otimes M_{12}\,,\\
\Delta_{\mathcal{F}} M_{13} =& M_{13} \otimes \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) + \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes M_{13} - M_{32} \otimes \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) + \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes M_{32}\,,\\
\Delta_{\mathcal{F}} M_{32} =& M_{32} \otimes \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) + \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes M_{32} + M_{13} \otimes \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) - \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes M_{13}\,,\\
\Delta_{\mathcal{F}} M_{10} =& M_{10} \otimes \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) + \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes M_{10} + M_{20} \otimes \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) - \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes M_{20}\\
&+ P_1 \otimes \tfrac{\varrho}{2}M_{12}\cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) - \tfrac{\varrho}{2}M_{12}\cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes P_1\\
&+ P_2 \otimes \tfrac{\varrho}{2}M_{12}\sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) + \tfrac{\varrho}{2}M_{12}\sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes P_2\,,\\
\Delta_{\mathcal{F}} M_{20} =& M_{20} \otimes \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) + \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes M_{20} - M_{10} \otimes \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) + \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes M_{10}\\
&+ P_2 \otimes \tfrac{\varrho}{2}M_{12}\cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) - \tfrac{\varrho}{2}M_{12}\cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes P_2\\
&- P_1 \otimes \tfrac{\varrho}{2}M_{12}\sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) - \tfrac{\varrho}{2}M_{12}\sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) \otimes P_1\,,\\
\Delta_{\mathcal{F}} M_{30} =& M_{30} \otimes 1 + 1 \otimes M_{30} + \tfrac{\varrho}{2}P_3 \otimes M_{12} - \tfrac{\varrho}{2}M_{12} \otimes P_3\,,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

而李代数部分、对极和余单位均未发生变形。

变形对称性作用于其上的齐性空间，由利用逆扭曲元素 $\mathcal{F}^{-1}$ 构造的非交换 $\star$-乘积来刻画。按照 [42], ，我们可以用坐标表示将扭曲写作

将 P_μ 实现为 $-i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$，并将 $M_{\mu\nu}$ 实现为 $i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$，即可得到

$$\mathcal{F} = \exp\left\{-\frac{i\varrho}{2}\left[\partial_0 \otimes (x^1\partial_2 - x^2\partial_1) - (x^1\partial_2 - x^2\partial_1)\otimes\partial_0\right]\right\}. \tag{3.3}$$

坐标的两个函数之间的 $\star$-乘积定义为

$$(f \star g)(x) \coloneqq \mu_0 \circ \mathcal{F}^{-1}(f\otimes g)(x)\,, \tag{3.4}$$

其中 μ_0 是普通乘积映射。由扭曲的 $\star$-乘积，可以立即得到坐标函数之间的星对易子，

$$\begin{aligned}[x^1, x^0]_\star &= i\varrho x^2\,,\\ [x^2, x^0]_\star &= -i\varrho x^1\,,\end{aligned} \tag{3.5}$$

其余均为零。正如预期，它们重现了对易子（2.3）。下一节中，我们将在量子群的双交叉积框架下推导类似的对易关系。

4 双交叉积构造

给定两个Hopf代数 $\mathcal{X},\mathcal{A}$，双交叉积霍普夫代数 双交叉积霍普夫代数 $\mathcal{X}\bowtie\mathcal{A}$ [48]，是一个带有霍普夫代数运算的张量积$\mathcal{X}\otimes\mathcal{A}$，并配备两个结构映射，分别是 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{A}$ 上的协变右作用，以及 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{X}$上的协变左余作用。

$$\triangleleft : \mathcal{A}\times\mathcal{X}\to\mathcal{A}, \tag{4.1a}$$
$$\beta : \mathcal{X}\to\mathcal{A}\otimes\mathcal{X}, \tag{4.1b}$$

它们必须与 Hopf代数结构相容。我们在附录中回顾了B中的主要定义和性质。符号 $\bowtie$ 表示第一个代数从右侧作用于第二个代数，而第二个代数则从左侧反作用于第一个代数，这类似于半直积的一种推广。

对于正在分析的情形，通过将代数 $\mathcal{X}$ 认定为闵可夫斯基时空的一个变形，并将 $\mathcal{A}$ 认定为洛伦兹群上的函数代数，可以得到 $\mathcal{C}_\varrho(P)$ 的双交叉结构。对偶地，通过将变形的包络 $U(\mathfrak{p})$ 中的 $\mathcal{X}$ 认定为 $U(\mathfrak{so}(1,3))$，并将 $\mathcal{A}$ 认定为变形的平移李代数，可以得到其双交叉结构。

4.1 代数 $\mathcal{C}_\varrho(P)$ 的双交叉积结构

量子霍普夫代数 $\mathcal{C}_\varrho(P)$ 是通过对群流形上函数的交换代数[22,23]进行变形得到的。可以通过量子化与经典 r-矩阵相关的坐标函数的泊松括号，来获得非交换结构（详见附录B.1），其表达式为[2]

$$r = i\varrho(P_0\wedge M_{12}). \tag{4.2}$$

[2]这 ca n 可通过将扭曲（3.1）按变形参数展开至一阶来快速验证 er.

作为比较，附录 B.2 中总结了对 κ 情形 $\mathcal{C}_\kappa(P)$的类似分析。请注意， ϱ-庞加莱 r矩阵（4.2）满足经典杨–巴克斯特方程，这与 r矩阵不同；已知 κ 情形下的该矩阵满足修正杨–巴克斯特方程。

群流形上的函数非交换代数通过量子化泊松括号（[23] ）得到，具体见B.11。后者还涉及 r 矩阵（4.2），此外还包括庞加莱群的左不变和右不变向量场；为方便起见，这些向量场列于公式（B.12）中。与 κ-闵可夫斯基情形类似，洛伦兹扇区的余乘、对极和余单位保持未变，而平移参数的这些结构则发生变形。通过要求对易关系（3.5）（对于2.2）在量子群的左余作用下具有协变性，可以推导出这一结果（见κ 情形；详见[23] ）。最终得到如下量子群结构：

$$[a^\mu, a^\nu] = i\varrho[\delta^\nu{}_0(a^2\delta^\mu{}_1 - a^1\delta^\mu{}_2) - \delta^\mu{}_0(a^2\delta^\nu{}_1 - a^1\delta^\nu{}_2)]\,, \tag{4.3a}$$
$$[\Lambda^\mu{}_\nu, \Lambda^\varrho{}_\sigma] = 0, \tag{4.3b}$$
$$[\Lambda^\mu{}_\nu, a^\rho] = i\varrho\,[\Lambda^\varrho{}_0(\Lambda^\mu{}_1 g_{2\nu} - \Lambda^\mu{}_2 g_{1\nu}) - \delta^\rho{}_0(\Lambda_{2\nu}\delta^\mu{}_1 - \Lambda_{1\nu}\delta^\mu{}_2)]\,, \tag{4.3c}$$
$$\Delta(\Lambda^\mu{}_\nu) = \Lambda^\mu{}_\alpha \otimes \Lambda^\alpha{}_\nu\,, \tag{4.3d}$$
$$S(\Lambda^\mu{}_\nu) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\,, \tag{4.3e}$$
$$\varepsilon(\Lambda^\mu{}_\nu) = \delta^\mu{}_\nu\,, \tag{4.3f}$$
$$\Delta(a^\mu) = \Lambda^\mu{}_\nu \otimes a^\nu + a^\mu \otimes 1\,, \tag{4.3g}$$
$$S(a^\mu) = -a^\nu(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\,, \tag{4.3h}$$
$$\varepsilon(a^\mu) = 0\,. \tag{4.3i}$$

在这种方法中， ϱ-闵可夫斯基时空是预先指定的。通过要求它成为时空上的连续函数非交换代数，并且在群的左余作用下具有协变性，可以确定其量子对称群： $x^\mu \to x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu \otimes x^\nu + a^\mu \otimes 1$。我们将在第4.3.1 节看到一种对偶图景，其中同一时空作为庞加莱代数的量子包络代数 $\mathfrak{p}$的适当商自然出现。

命题 4.1 量子霍普夫代数 $\mathcal{C}_\varrho(P)$ 具有双交叉积结构，即

$$\mathcal{C}_\varrho(P) = \mathcal{T}^*_\varrho \triangleright\!\blacktriangleleft \mathcal{C}(SO(1,3)), \tag{4.4}$$

其中， $\mathcal{C}(SO(1,3))$ 是定义在洛伦兹群上的经典未变形连续函数（*Hopf*）代数，而 $\mathcal{T}^*_\varrho$是由 ϱ-闵可夫斯基时空上的函数构成的非交换（*Hopf*）代数，具体定义如下：

$$[x^\mu, x^\nu] = i\varrho[\delta^\nu{}_0(x^2\delta^\mu{}_1 - x^1\delta^\mu{}_2) - \delta^\mu{}_0(x^2\delta^\nu{}_1 - x^1\delta^\nu{}_2)]\,, \tag{4.5a}$$
$$\Delta(x^\mu) = x^\mu \otimes 1 + 1 \otimes x^\mu\,, \tag{4.5b}$$
$$S(x^\mu) = -x^\mu\,, \tag{4.5c}$$
$$\varepsilon(x^\mu) = 0\,. \tag{4.5d}$$

为证明这一结论，我们采用附录B中所述的构造。为了定义 $\mathcal{T}^*_\varrho$在 $\mathcal{C}(SO(1,3))$上的右作用，我们首先将元素 $x^\mu \in \mathcal{T}^*_\varrho$扩展到 $x^\mu \otimes 1 \equiv a^\mu \in \mathcal{T}^*_\varrho \otimes \mathcal{C}(SO(1,3))$，并将元素 $\Lambda^\alpha{}_\beta \in \mathcal{C}(SO(1,3))$ 扩展到 $1 \otimes \Lambda^\alpha{}_\beta \equiv \Lambda^\alpha{}_\beta \in \mathcal{T}^*_\varrho \otimes \mathcal{C}(SO(1,3))$；

然后，假设张量积量子群具有双交叉积结构，我们利用霍普夫代数乘积（B.3a）和余乘（4.5b）进行计算

$$[x^\rho \otimes 1, 1 \otimes \Lambda^\mu{}_\nu] = x^\rho \otimes \Lambda^\mu{}_\nu - x^\rho \otimes \Lambda^\mu{}_\nu - 1 \otimes (\Lambda^\mu{}_\nu \triangleleft x^\rho), \tag{4.6}$$

但是 $[x^\rho \otimes 1, 1 \otimes \Lambda^\mu{}_\nu]$ 是对易子（4.3c的负值）。因此，右作用可写为

$$\Lambda^\mu{}_\nu \triangleleft x^\rho = i\varrho\left[\Lambda^\rho{}_0(\Lambda^\mu{}_1 g_{2\nu} - \Lambda^\mu{}_2 g_{1\nu}) - \delta^\rho{}_0(\Lambda_{2\nu}\delta^\mu{}_1 - \Lambda_{1\nu}\delta^\mu{}_2)\right]. \tag{4.7}$$

注意，由（B.5）可知，$\Lambda^\mu{}_\nu \triangleleft 1 = \Lambda^\mu{}_\nu$和 $1 \triangleleft 1 = 1$，但 $1 \triangleleft x^\rho = 0$。

为求 $\mathcal{C}$（SO（1，3））在 $\mathcal{T}^*_\varrho$上的左余作用，我们根据（ Δ（$x^\mu \otimes 1$）、（B.3c）以及余乘（4.5b）计算：

$$\Delta(x^\mu \otimes 1) = x^\mu \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes x^{\mu(\bar{1})} \otimes x^{\mu(\bar{2})} \otimes 1\,. \tag{4.8}$$

因此，将其与（4.3g）比较可得，$x^{\mu(\bar{1})} = \Lambda^\mu{}_\nu$和 $x^{\mu(\bar{2})} = x^\nu$，因此：

$$\beta(x^\mu) = \Lambda^\mu{}_\nu \otimes x^\nu. \tag{4.9}$$

注意，$\beta(1) = 1 \otimes 1$。

得到右作用和左余作用后，我们必须验证相容条件（B.4a）-（B.4d）成立。为避免正文过于冗长，证明见附录 C。

还需检验，通过式（4.3）给出的双交叉积结构，能否重现量子群关系（B.3a）-（B.3e）。

由（B.3a）可得

$$\begin{aligned}
(1 \otimes \Lambda^\mu{}_\nu) \cdot (1 \otimes \Lambda^\alpha{}_\beta) - (1 \otimes \Lambda^\alpha{}_\beta) \cdot (1 \otimes \Lambda^\mu{}_\nu) &= 1 \otimes (\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\alpha{}_\beta - \Lambda^\alpha{}_\beta \Lambda^\mu{}_\nu), \\
(x^\mu \otimes 1) \cdot (x^\nu \otimes 1) - (x^\nu \otimes 1) \cdot (x^\mu \otimes 1) &= (x^\mu x^\nu \otimes 1 + x^\mu \otimes (1 \triangleleft x^\nu)) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= x^\mu x^\nu \otimes 1 - x^\nu x^\mu \otimes 1, \\
(x^\alpha \otimes 1) \cdot (1 \otimes \Lambda^\mu{}_\nu) &= x^\alpha \otimes \Lambda^\mu{}_\nu, \\
(1 \otimes \Lambda^\mu{}_\nu) \cdot (x^\alpha \otimes 1) &= x^\alpha \otimes \Lambda^\mu{}_\nu + 1 \otimes (\Lambda^\mu{}_\nu \triangleleft x^\alpha);
\end{aligned} \tag{4.10}$$

由此可得交换规则（4.3a）-（4.3c）。

由（B.3c）可得

$$\begin{aligned}
\Delta(x^\mu \otimes 1) &= x^\mu \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda^\mu{}_\lambda \otimes x^\lambda \otimes 1, \\
\Delta(1 \otimes \Lambda^\alpha{}_\beta) &= 1 \otimes \Lambda^\alpha{}_\gamma \otimes 1 \otimes \Lambda^\gamma{}_\beta, \\
\Delta(x^\alpha \otimes \Lambda^\mu{}_\nu) &= x^\alpha \otimes \Lambda^\mu{}_\beta \otimes 1 \otimes \Lambda^\beta{}_\nu + 1 \otimes \Lambda^\alpha{}_\beta \Lambda^\mu{}_\gamma \otimes x^\beta \otimes \Lambda^\gamma{}_\nu,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

并且恢复式（4.3d）、（4.3g）。由（B.3d）：

$$\varepsilon(x^\mu \otimes 1) = \varepsilon(x^\mu)\varepsilon(1), \tag{4.12}$$

但由（4.5d）$\varepsilon(x^\mu) = 0$，因此通过将左端项认作 $\varepsilon(a)$，即可得到（4.3i）。此外

$$\varepsilon(1 \otimes \Lambda^\alpha{}_\beta) = \varepsilon(1)\varepsilon(\Lambda^\alpha{}_\beta), \tag{4.13}$$

但是 $\varepsilon(\Lambda^\alpha{}_\beta) = \delta^\alpha{}_\beta$ 并且我们得到 (4.3f)。最后

$$\varepsilon(x^\mu \otimes \Lambda^\alpha{}_\beta) = \varepsilon(x^\mu)\varepsilon(\Lambda^\alpha{}_\beta), \tag{4.14}$$

这正是余单位的同态性质所预期的结果。

要分析的最后一个条件是（B.3e）。由此得到

$$S(x^\mu \otimes 1) = (1 \otimes S(\Lambda^\mu{}_\nu) \cdot (S(x^\mu) \otimes 1) = -x^\nu \otimes (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu, \tag{4.15a}$$
$$S(1 \otimes \Lambda^\mu{}_\nu) = (1 \otimes \Lambda^\mu{}_\nu) \cdot (1 \otimes 1) = 1 \otimes (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu, \tag{4.15b}$$
$$S(x^\alpha \otimes \Lambda^\mu{}_\nu) = S(x^\beta) \otimes S(\Lambda^\alpha{}_\beta \Lambda^\mu{}_\nu) = -x^\beta \otimes (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu, \tag{4.15c}$$

导致 （4.3e）和（4.3h）。这就完成了双交叉积结构（4.4）的证明 .

4.2 代数 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 的双交叉积结构

在本节中，我们构造一个与 $\mathcal{C}_\varrho(P)$ 对偶且具有双交叉积结构的非交换Hopf代数。为了将其与 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 区分开来，后者是在第3节中通过扭曲得到的，我们将用花体记号表示前者： $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 。为此，我们将对生成元进行可逆的非线性变换，以联系这两个代数；正如下一节所示，该变换是一个Hopf代数同态。

代数 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 是著名量子Hopf代数的 ϱ-变形版本$\mathcal{U}_\kappa(\mathfrak{p})$ ，由 Majid 和 Ruegg 于[1], 提出；也就是说，它是附录 κ-庞加莱$\mathcal{C}_\kappa(P)$ 中所述的双交叉积的对偶。第B.2节介绍了该构造。在第 4.3 节中，我们将证明他们的构造适用于我们的情况，并能重现我们的结果。

首先，我们来证明，由 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 定义的扭曲相关霍普夫代数 3.2) 不具有双交叉积结构，也就是说，它并非具有如下形式 $U_\varrho(\mathfrak{p}) = U(\mathfrak{so}(1,3)) \triangleright\!\blacktriangleleft T_\varrho$，其中$U(\mathfrak{so}(1,3))$ 是洛伦兹扇区的未变形泛包络代数，而 T_ϱ 是平移的 ϱ-变形（霍普夫）代数。为此，我们分别用 $m_{\mu\nu}$ 和 p_μ 表示上述张量积中洛伦兹部分和平移部分的生成元，并将它们扩展到整个张量积代数，定义如下

$$P_\lambda = 1 \otimes p_\lambda \in U(\mathfrak{so}(1,3)) \otimes T_\varrho, \qquad M_{\mu\nu} = m_{\mu\nu} \otimes 1 \in U(\mathfrak{so}(1,3)) \otimes T_\varrho. \tag{4.16}$$

根据（3.2）中平移生成元的余乘，我们推导出 T_ϱ 的相关霍普夫代数结构，并自然地将其识别为 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 的子代数，因此有

$$[p_\mu, p_\nu] = 0, \tag{4.17a}$$
$$\Delta_{\mathcal{F}} p_0 = p_0 \otimes 1 + 1 \otimes p_0, \tag{4.17b}$$
$$\Delta_{\mathcal{F}} p_1 = p_1 \otimes \cos\left(\frac{\varrho}{2} p_0\right) + \cos\left(\frac{\varrho}{2} p_0\right) \otimes p_1 + p_2 \otimes \sin\left(\frac{\varrho}{2} p_0\right) - \sin\left(\frac{\varrho}{2} p_0\right) \otimes p_2, \tag{4.17c}$$
$$\Delta_{\mathcal{F}} p_2 = p_2 \otimes \cos\left(\frac{\varrho}{2} p_0\right) + \cos\left(\frac{\varrho}{2} p_0\right) \otimes p_2 - p_1 \otimes \sin\left(\frac{\varrho}{2} p_0\right) + \sin\left(\frac{\varrho}{2} p_0\right) \otimes p_1, \tag{4.17d}$$
$$\Delta_{\mathcal{F}} p_3 = p_3 \otimes 1 + 1 \otimes p_3, \tag{4.17e}$$
$$S(p_\mu) = -p_\mu, \tag{4.17f}$$
$$\varepsilon(p_\mu) = 0, \tag{4.17g}$$

而 Hopf代数 $U(\mathfrak{so}(1,3))$ 则保持未变形。

我们要证明，由元素 $U_\varrho(\mathfrak{p}) = U(\mathfrak{so}(1,3)) \otimes T_\varrho$ 生成的因子分解（4.16）与双交叉积结构不相容。事实上，虽然可以

读出 $U(\mathfrak{so}(1,3))$ 在 T_ϱ上的右作用，但 T_ϱ的左余作用定义不明确。对于右作用，我们应用公式（B.5），

$$[M_{\mu\nu}, P_\lambda] = m_{\mu\nu} \otimes p_\lambda - \left(m_{\mu\nu} \otimes (p_\lambda \triangleleft 1) + 1 \otimes (p_\lambda \triangleleft m_{\mu\nu})\right), \tag{4.18}$$

其中我们使用了未变形余积 $\Delta m_{\mu\nu} = m_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes m_{\mu\nu}$。另一方面，$U_\varrho(\mathfrak{p})$ 的李代数扇区未变形，因此

$$[M_{\mu\nu}, P_\lambda] = i(g_{\nu\lambda} P_\mu - g_{\mu\lambda} P_\nu). \tag{4.19}$$

比较二者后，我们最终得到

$$p_\lambda \triangleleft m_{\mu\nu} = -i(g_{\nu\lambda} p_\mu - g_{\mu\lambda} p_\nu). \tag{4.20}$$

然而，对于左余作用，我们遇到了一个问题。让我们像（3.2）中那样展开张量积，改写方程（4.16）中的最后一个方程。我们有：

$$\Delta(m_{30} \otimes 1) = m_{30} \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes m_{30} \otimes 1 - \frac{\varrho}{2} 1 \otimes p_3 \otimes m_{12} \otimes 1 + \frac{\varrho}{2} m_{12} \otimes 1 \otimes 1 \otimes p_3. \tag{4.21}$$

将后者与公式（B.3c）进行比较，我们得到

$$\Delta(m_{30} \otimes 1) = (m_{30(1)} \otimes {m_{30(2)}}^{(\bar{1})}) \otimes ({m_{30(2)}}^{(\bar{2})} \otimes 1), \tag{4.22}$$

其中我们使用了记号 $\beta(x) = x^{(\bar{1})} \otimes x^{(\bar{2})}$，其中 x，$x^{(\bar{2})} \in U(\mathfrak{so}(1,3))$，$x^{(\bar{1})} \in T_\varrho$，以及 β 所求的左余作用。容易看出，T_ϱ 在 $U(\mathfrak{so}(1,3)$上不存在左余作用，因为式（4.21）中的最后一项以 p_3 作为张量积的第四个分量，而式（4.22）中的所有项都以单位元作为第四个分量。

这意味着，尽管 $\mathcal{C}_\varrho(P)$ 和 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 在霍普夫代数意义下互为对偶，但它们并非双交叉积对偶。

接下来我们将说明，通过对 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 的生成元进行非线性变换，可以得到一个新的量子群，它不仅与 $\mathcal{C}_\varrho(P)$ 霍普夫对偶，而且也与之双交叉积对偶，自身具有双交叉积结构。正如前文所述，这与 κ-庞加莱的情形类似：量子群 $\mathcal{C}_\kappa(P)$ 与标准基和 Majid-Ruegg 基下泛包络代数的量子群均为霍普夫对偶，但仅与 Majid-Ruegg 基下的量子群互为双交叉积对偶。

为此，我们通过定义 $R_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} M_{jk}$, $N_i = M_{i0}$，以非协变方式重写 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 的庞加莱生成元，从而使代数可写为：

$$\begin{array}{llll} [P_\mu, P_\nu] = 0, & [N_i, P_0] = iP_i, & [N_i, P_j] = i\delta_{ij} P_0, & [N_i, N_j] = -i\epsilon_{ijk} R_k, \\ [R_i, P_0] = 0, & [R_i, P_j] = i\epsilon_{ijk} P_k, & [R_i, N_j] = i\epsilon_{ijk} N_k, & [R_i, R_j] = i\epsilon_{ijk} R_k. \end{array} \tag{4.23}$$

(3.2) 中的扭曲余积随后变为

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{F}} P_0 =& P_0 \otimes 1 + 1 \otimes P_0, \\
\Delta_{\mathcal{F}} P_1 =& P_1 \otimes \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) + \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes P_1 + P_2 \otimes \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) - \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes P_2, \\
\Delta_{\mathcal{F}} P_2 =& P_2 \otimes \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) + \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes P_2 - P_1 \otimes \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) + \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes P_1, \\
\Delta_{\mathcal{F}} P_3 =& P_3 \otimes 1 + 1 \otimes P_3, \\
\Delta_{\mathcal{F}} R_1 =& R_1 \otimes \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) + \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes R_1 + R_2 \otimes \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) - \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes R_2, \\
\Delta_{\mathcal{F}} R_2 =& R_2 \otimes \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) + \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes R_2 - R_1 \otimes \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) + \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes R_1, \\
\Delta_{\mathcal{F}} R_3 =& R_3 \otimes 1 + 1 \otimes R_3, \\
\Delta_{\mathcal{F}} N_1 =& N_1 \otimes \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) + \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes N_1 + N_2 \otimes \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) - \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes N_2 \\
& + P_1 \otimes \tfrac{\varrho}{2} R_3 \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) - \tfrac{\varrho}{2} R_3 \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes P_1 + P_2 \otimes \tfrac{\varrho}{2} R_3 \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \\
& + \tfrac{\varrho}{2} R_3 \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes P_2, \\
\Delta_{\mathcal{F}} N_2 =& N_2 \otimes \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) + \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes N_2 - N_1 \otimes \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) + \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes N_1 \\
& + P_2 \otimes \tfrac{\varrho}{2} R_3 \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) - \tfrac{\varrho}{2} R_3 \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes P_2 - P_1 \otimes \tfrac{\varrho}{2} R_3 \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \\
& - \tfrac{\varrho}{2} R_3 \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) \otimes P_1, \\
\Delta_{\mathcal{F}} N_3 =& N_3 \otimes 1 + 1 \otimes N_3 + \tfrac{\varrho}{2} P_3 \otimes R_3 - \tfrac{\varrho}{2} R_3 \otimes P_3.
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

考察方程 (4.22) 可知，为了得到定义良好的左余作用，需要引入一个新的基，使新的余乘中的所有平移生成元都位于张量积的一侧，而洛伦兹生成元则位于另一侧。为此，我们对生成元进行如下非线性变换：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{P}_0 =& P_0, \\
\widetilde{P}_1 =& P_1 \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) - P_2 \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right), \\
\widetilde{P}_2 =& P_2 \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) + P_1 \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right), \\
\widetilde{P}_3 =& P_3, \\
\widetilde{R}_1 =& R_1 \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) - R_2 \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right), \\
\widetilde{R}_2 =& R_2 \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) + R_1 \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right), \\
\widetilde{R}_3 =& R_3, \\
\widetilde{N}_1 =& N_1 \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) - N_2 \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) + \tfrac{\varrho}{2} R_3 \widetilde{P}_1, \\
\widetilde{N}_2 =& N_2 \cos\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) + N_1 \sin\left(\tfrac{\varrho}{2} P_0\right) + \tfrac{\varrho}{2} R_3 \widetilde{P}_2, \\
\widetilde{N}_3 =& N_3 + \tfrac{\varrho}{2} R_3 P_3,
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

使得李代数关系保持不变形。对易子的计算细节见附录D。下面证明余乘具有我们所期望的性质。

利用这一事实

$$
\Delta \cos(x) = \cos(x) \otimes \cos(x) - \sin(x) \otimes \sin(x), \tag{4.26}
$$

$$
\Delta \sin(x) = \cos(x) \otimes \sin(x) + \cos(x) \otimes \sin(x), \tag{4.27}
$$

对于 $x = \varrho P_0/2$，我们可以将新生成元的余乘写作

$$
\begin{aligned}
&\Delta\widetilde{P}_0 = \widetilde{P}_0 \otimes 1 + 1 \otimes \widetilde{P}_0,\\
&\Delta\widetilde{P}_1 = \widetilde{P}_1 \otimes 1 + \cos\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) \otimes \widetilde{P}_1 - \sin\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) \otimes \widetilde{P}_2,\\
&\Delta\widetilde{P}_2 = \widetilde{P}_2 \otimes 1 + \cos\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) \otimes \widetilde{P}_2 + \sin\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) \otimes \widetilde{P}_1,\\
&\Delta\widetilde{P}_3 = \widetilde{P}_3 \otimes 1 + 1 \otimes \widetilde{P}_3,\\
&\Delta\widetilde{R}_1 = \widetilde{R}_1 \otimes 1 + \cos\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) \otimes \widetilde{R}_1 - \sin\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) \otimes \widetilde{R}_2,\\
&\Delta\widetilde{R}_2 = \widetilde{R}_2 \otimes 1 + \cos\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) \otimes \widetilde{R}_2 + \sin\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) \otimes \widetilde{R}_1,\\
&\Delta\widetilde{R}_3 = \widetilde{R}_3 \otimes 1 + 1 \otimes \widetilde{R}_3,\\
&\Delta\widetilde{N}_1 = \widetilde{N}_1 \otimes 1 + \cos\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) \otimes \widetilde{N}_1 - \sin\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) \otimes \widetilde{N}_2 + \varrho\widetilde{P}_1 \otimes \widetilde{R}_3,\\
&\Delta\widetilde{N}_2 = \widetilde{N}_2 \otimes 1 + \cos\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) \otimes \widetilde{N}_2 + \sin\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) \otimes \widetilde{N}_1 + \varrho\widetilde{P}_2 \otimes \widetilde{R}_3,\\
&\Delta\widetilde{N}_3 = \widetilde{N}_3 \otimes 1 + 1 \otimes \widetilde{N}_3 + \varrho\widetilde{P}_3 \otimes \widetilde{R}_3.
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

由于旧生成元的余单位全部为零，很容易看出新生成元也满足相同的结果：

$$
\varepsilon(\widetilde{P}_\mu) = \varepsilon(\widetilde{N}_i) = \varepsilon(\widetilde{R}_i) = 0. \tag{4.29}
$$

对于反元，通过直接计算可得：

$$
\begin{aligned}
&S(\widetilde{P}_0) = -\widetilde{P}_0,\\
&S(\widetilde{P}_1) = -\widetilde{P}_1\cos\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) - \widetilde{P}_2\sin\left(\varrho\widetilde{P}_0\right),\\
&S(\widetilde{P}_2) = -\widetilde{P}_2\cos\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) + \widetilde{P}_1\sin\left(\varrho\widetilde{P}_0\right),\\
&S(\widetilde{P}_3) = -\widetilde{P}_3,\\
&S(\widetilde{R}_1) = -\widetilde{R}_1\cos\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) - \widetilde{R}_2\sin\left(\varrho\widetilde{P}_0\right),\\
&S(\widetilde{R}_2) = -\widetilde{R}_2\cos\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) + \widetilde{R}_1\sin\left(\varrho\widetilde{P}_0\right),\\
&S(\widetilde{R}_3) = -\widetilde{R}_3,\\
&S(\widetilde{N}_1) = -\cos\left(\varrho\widetilde{P}_0\right)\widetilde{N}_1 - \sin\left(\varrho\widetilde{P}_0\right)\widetilde{N}_2 + \varrho\cos\left(\varrho\widetilde{P}_0\right)\widetilde{P}_1\widetilde{R}_3 + \varrho\sin\left(\varrho\widetilde{P}_0\right)\widetilde{P}_2\widetilde{R}_3,\\
&S(\widetilde{N}_2) = -\cos\left(\varrho\widetilde{P}_0\right)\widetilde{N}_2 + \sin\left(\varrho\widetilde{P}_0\right)\widetilde{N}_1 + \varrho\cos\left(\varrho\widetilde{P}_0\right)\widetilde{P}_2\widetilde{R}_3 - \varrho\sin\left(\varrho\widetilde{P}_0\right)\widetilde{P}_1\widetilde{R}_3,\\
&S(\widetilde{N}_3) = -\widetilde{N}_3 + \varrho\widetilde{R}_3\widetilde{P}_3.
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

因此，我们得到了一个新的Hopf代数，我们称其为 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$，以区别于扭曲Hopf代数 $U_\varrho(\mathfrak{p})$。

Propo **命题 4.2** 量子霍普夫代数 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 具有双交叉积分解 n

$$
\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p}) = U(\mathfrak{so}(1,3)) \blacktriangleright\!\!\triangleleft \mathcal{T}_\varrho, \tag{4.31}
$$

其中 $\mathcal{T}_\varrho$ 是新的变形平移扇区。

该命题的证明分为两步。首先，需要求出$U(\mathfrak{so}(1,3))$ 对平移的右作用，以及 $\mathcal{T}_\varrho$ 对洛伦兹扇区的左余作用。然后，在根据方程（B.3a）-（B.3e）检查所给出的 Hopf代数结构后，需要验证这些映射的相容条件，即方程（B.4a）-（B.4d）。

我们分别将 $U(\mathfrak{so}(1,3))$ 的标准庞加莱旋转生成元和推进生成元记为 m_k、n_k，并将 $\mathcal{T}_\varrho$ 的生成元记为 p_μ。然后，我们识别 $\mathcal{X} \equiv U(\mathfrak{so}(1,3))$、$\mathcal{A} \equiv \mathcal{T}_\varrho$

并通过以下设定，将这两个 Hopf代数 的生成元扩展到整个张量积上

$$\widetilde{M}_{\mu\nu} = m_{\mu\nu} \otimes 1, \qquad \widetilde{N}_i = n_i \otimes 1, \qquad \widetilde{R}_i = m_i \otimes 1, \qquad \widetilde{P}_\mu = 1 \otimes p_\mu. \tag{4.32}$$

重复方程（4.18）、（4.19）和（4.20）中的相同步骤，我们应用（B.5）得到

$$\begin{aligned} \left[\widetilde{R}_i, \widetilde{P}_\mu\right] &= m_i \otimes p_\mu - (m_i \otimes (p_\mu \triangleleft 1) + 1 \otimes (p_\mu \triangleleft m_i)) \,, & (4.33)\\ \left[\widetilde{N}_i, \widetilde{P}_\mu\right] &= n_i \otimes p_\mu - (n_i \otimes (p_\mu \triangleleft 1) + 1 \otimes (p_\mu \triangleleft n_i)) \,, & (4.34) \end{aligned}$$

其中我们使用了未变形余乘 $\Delta m_i = m_i \otimes 1 + 1 \otimes m_i$、$\Delta n_i = n_i \otimes 1 + 1 \otimes n_i$。另一方面，$\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 的李代数扇区未发生变形，即

$$\begin{aligned} \left[\widetilde{R}_i, \widetilde{P}_\mu\right] &= i\,\delta_{\mu j}\,\varepsilon_{ijk}\widetilde{P}_k \,, & (4.35)\\ \left[\widetilde{N}_i, \widetilde{P}_\mu\right] &= i\,\delta_{i\mu}\,\widetilde{P}_0 + i\,\delta_{\mu 0}\,\widetilde{P}_i. & (4.36) \end{aligned}$$

比较这两组方程，最终得到洛伦兹生成元对 $\mathcal{T}_\varrho$ 的右作用

$$p_\mu \triangleleft m_i = -i\,\delta_{\mu j}\,\varepsilon_{ijk}p_k, \qquad p_\mu \triangleleft n_i = -i\,(\delta_{\mu i}\,p_0 + \delta_{\mu 0}\,p_i). \tag{4.37}$$

为了求出 $\mathcal{T}_\varrho$ 对 $U(\mathfrak{so}(1,3))$ 的左余作用，我们将（4.28）中的洛伦兹余乘展开

$$\begin{aligned} \Delta(m_A \otimes 1) =& m_A \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \cos(\varrho p_0) \otimes m_a \otimes 1 - 1 \otimes \sin(\varrho p_0) \otimes \varepsilon_{AB} m_B \otimes 1 \,,\\ \Delta(m_3 \otimes 1) =& m_3 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes m_3 \otimes 1 \,,\\ \Delta(n_A \otimes 1) =& n_A \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \cos(\varrho p_0) \otimes n_a \otimes 1 - 1 \otimes \sin(\varrho p_0) \otimes \varepsilon_{AB} n_B \otimes 1\\ &+ \varrho(1 \otimes p_A \otimes m_3 \otimes 1) \,,\\ \Delta(n_3 \otimes 1) =& n_3 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes n_3 \otimes 1 + \varrho(1 \otimes p_3 \otimes m_3 \otimes 1) \,, \end{aligned} \tag{4.38}$$

其中 A、$B = 1$、2。因此我们与（B.3c）进行比较，此时该式写为

$$\begin{aligned} \Delta(m_i \otimes 1) &= (m_{i(1)} \otimes {m_{i(2)}}^{(\bar{1})}) \otimes (m_{i(2)}{}^{(\bar{2})} \otimes 1) \,,\\ \Delta(n_i \otimes 1) &= (n_{i(1)} \otimes {n_{i(2)}}^{(\bar{1})}) \otimes (n_{i(2)}{}^{(\bar{2})} \otimes 1) \,, \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned} \beta(m_A) &= \cos(\varrho p_0) \otimes m_A - \varepsilon_{AB} \sin(\varrho p_0) \otimes m_B,\\ \beta(m_3) &= 1 \otimes m_3,\\ \beta(n_A) &= \cos(\varrho p_0) \otimes n_A - \varepsilon_{AB} \sin(\varrho p_0) \otimes n_B + \varrho p_i \otimes m_3,\\ \beta(n_3) &= 1 \otimes n_3 + \varrho p_3 \otimes m_3. \end{aligned} \tag{4.40}$$

张量积代数的 Hopf代数结构 $U(\mathfrak{so}(1,3)) \otimes \mathcal{T}_\varrho$由上文得到的右作用和左余作用，只要方程（B.3a）-（B.3e）成立，便可确保这一结构成立。事实上，方程（B.3a）、（B.3c）必然成立，因为我们正是利用它们得到了右作用和左余作用。方程（B.3b）显然成立，方程（B.3d）亦然，因为两个因子 Hopf代数以及双交叉积代数中的余单位均为零。其余条件（B.3e）通过直接计算即可轻松验证。

为完成证明，即 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 具有适当的双交叉积结构，还需检验方程（B.4a）-（B.4d）。方程（B.4a）显然成立，因为所有生成元的余单位均为零，且右作用所得各项始终与生成元成比例。方程（B.4b）可通过对作用式（4.37）应用余乘并进行直接计算来验证：

$$\Delta(p_\lambda \triangleleft m_{\mu\nu}) = -i\left(g_{\nu\lambda}\Delta(p_\mu) - g_{\mu\lambda}\Delta(p_\nu)\right). \tag{4.41}$$

为验证方程（B.4c），需要将余作用 β 作用于洛伦兹生成元的对易子：

$$\beta([m_{\mu\nu}, m_{\lambda\sigma}]) = i[g_{\mu\sigma}\beta(m_{\nu\lambda}) - g_{\nu\sigma}\beta(m_{\mu\lambda}) + g_{\nu\lambda}\beta(m_{\mu\sigma}) - g_{\mu\lambda}\beta(m_{\nu\sigma})]. \tag{4.42}$$

随后，直接计算所有可能的洛伦兹对易子可知，式（B.4c）成立。式（B.4d）显然成立，因为 $U(so(1,\ 3))$ 的初始余乘是余交换的，而左端的项 $^{a} \triangleleft x_{(2)}$ 与 p成正比，因此始终与 $x_{(1)}{}^{(\bar{1})}$对易。

至此，命题 4.2 得证。

4.3 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$与 $U_\varrho(\mathfrak{p})$之间的代数同构

在本小节中，我们将遵循 [1] 中所述的步骤，证明 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 与 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 之间的映射是代数同态（事实上，由于该映射可逆，它是代数同构）。此外，我们将得到 ϱ-闵可夫斯基时空 $\mathcal{T}^*_\varrho$，它与平移的包络代数 $\mathcal{T}_\varrho$ 对偶；后者也是一个代数，$\mathcal{T}$ 和整个 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 在其上协变作用。

首先考虑经典庞加莱代数，其结构为半直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_S \mathfrak{f}$，其中 $\mathfrak{h}$ 是平移代数，$\mathfrak{f}$ 是洛伦兹代数（请注意，这里遵循数学家使用的记号：阿贝尔代数位于左侧，并受洛伦兹代数作用）。半直和的数学结构是“分裂扩张”，即一个短正合列

$$\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g} \to \mathfrak{f}, \tag{4.43}$$

其包含映射为 $i : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$，投影映射为 $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{f}$，且 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的不变子代数，而 $\mathfrak{f}$ 是 $\mathfrak{g}$对 $\mathfrak{h}$ 的商。李群也有相同的性质。李群 G 是 H 和 F 的半直积，即 $G = H \rtimes F$，当且仅当

$$H \hookrightarrow G \to F, \tag{4.44}$$

是一个分裂短正合列。

在 [48–50] 中，给出了量子群的一种推广。在那里，双交叉积Hopf代数被构造为Hopf代数的分裂扩张。该方法应用于 [1]，以得到 κ-庞加莱量子群 $\mathcal{U}_\kappa(\mathfrak{p})$（采用所谓的Majid-Ruegg 基），并建立了它与 κ-庞加莱 $U_\kappa(\mathfrak{p})$（采用所谓的标准基）之间的同态。接下来，我们将这一过程应用于 ϱ-庞加莱情形。

出发点是，$\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$包含 $\mathcal{T}_\varrho$ 作为Hopf子代数，它可以通过包含映射 i嵌入 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$。与之互补的是，$\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$通过Hopf代数映射 π投影到经典的 $U(\mathfrak{so}(1,3))$：

$$\mathcal{T}_\varrho \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p}) \overset{\pi}{\to} U(\mathfrak{so}(1,3)). \tag{4.45}$$

F从操作角度看， i是标准浸入映射，而 π 满足

$$\pi(\widetilde{N}_i) = n_i, \qquad \pi(\widetilde{R}_i) = m_i, \qquad \pi(\widetilde{P}_\mu) = 0, \tag{4.46}$$

其中 $\widetilde{N}_i$、 $\widetilde{R}_i$、 $\widetilde{P}_\mu \in \mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 和 n_i、 $m_i \in U(\mathfrak{so}(1,3))$，与第4.2节中一样。也就是说， π 将变形包络代数的生成元映射为其经典洛伦兹对应元素。

要实现双交叉积构造，还需要定义一个 Hopf代数同态 j 和一个线性映射 p，它们相对于 i、 π 起到逆映射的作用。也就是说

$$\mathcal{T}_\varrho \overset{p}{\leftarrow} \mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p}) \overset{j}{\hookleftarrow} U(\mathfrak{so}(1,3)), \tag{4.47}$$

with

$$\pi \circ j = id, \qquad p \circ i = id. \tag{4.48}$$

线性映射 p 必须是余代数同态，这意味着

$$(p \otimes p) \circ \Delta = \Delta \circ p, \qquad \varepsilon \circ p = p. \tag{4.49}$$

此外，如果 j、 p 满足以下性质

$$(id \otimes j) \circ \Delta = (\pi \otimes id) \circ \Delta \circ j, \tag{4.50}$$

$$p(u)t = p(u\, i(t)), \qquad u \in \mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p}), \qquad t \in \mathcal{T}_\varrho, \tag{4.51}$$

那么 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 是由 $\mathcal{T}_\varrho$ [48–50] 对 $U(\mathfrak{so}(1,3))$ 作出的双交叉积扩张。下面我们详细分析这一构造。定义

$$\begin{aligned}
&\widetilde{R}_A \coloneqq j(m_A) = R_A \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) - \epsilon_{AB} R_B \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right), \\
&\widetilde{R}_3 \coloneqq j(m_3) = R_3, \\
&\widetilde{N}_A \coloneqq j(n_A) = N_A \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) - \epsilon_{AB} N_B \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) + \tfrac{\varrho}{2} R_3 \left(P_A \cos\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right) - \epsilon_{AB} P_B \sin\left(\tfrac{\varrho}{2}P_0\right)\right), \\
&\widetilde{N}_3 \coloneqq j(n_3) = N_3 + \tfrac{\varrho}{2} R_3 P_3,
\end{aligned} \tag{4.52}$$

其中，与上一节一样， ϵ_{AB}、 A、 $B = 1$，2 是二维空间中的列维-奇维塔伪张量，可以验证，式（4.50）成立。此外，式（4.51）显然成立。回顾一下，在式（4.52）中，小写生成元属于经典的 $U(\mathfrak{so}(1,3))$，其对易子和余乘均未变形；左端带波浪号的大写生成元属于量子霍普夫代数 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$，右端的大写生成元则与 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 有关。换言之，由式（4.52）定义的映射 j，正是我们在上一节中从 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 到 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 所作的非线性基变换。

至于右作用和左余作用，在这种方法中，它们由以下定义给出

$$t \triangleleft h = j(Sh_{(1)})tj(h_{(2)}), \qquad t \in \mathcal{T}_\varrho, \ h \in U(\mathfrak{so}(1,3)), \tag{4.53}$$

$$\beta(\pi(u)) = p(u_{(1)})Sp(u_{(3)}) \otimes \pi(u_{(2)}), \qquad u \in \mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p}), \tag{4.54}$$

其中，记号 $a_{(3)}$ 源自余乘 $\Delta^2 a = a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)}$ 的平方。

借助这些映射，集合（$\mathcal{T}_\varrho$、 U（$\mathfrak{so}(1,3)$ $\triangleleft$、 β）完全确定了 $\mathcal{U}_\varrho$（$\mathfrak{p}$）的 Hopf代数结构。事实上，对易子和余乘由交叉

关系

$$\begin{aligned} i(t)j(h) &= j(h_{(1)})i(t \triangleleft h_{(2)}), \\ \Delta(i(t)) &= i(t_{(1)}) \otimes i(t_{(2)}), \\ \Delta(j(h)) &= j(h_{(1)})(i \otimes j) \circ \beta(h_{(2)}), \end{aligned} \tag{4.55}$$

其中 $h \in U(\mathfrak{so}(1,3))$， $t \in \mathcal{T}_\varrho$。直接检验即可轻易验证，方程（4.53）、（4.54）和（4.55）重现了上一节所述的 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 的代数与余代数部分。

因此我们可以得出结论：

- 上一节通过对扭曲霍普夫代数 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 进行非线性基变换而得到的量子霍普夫代数 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$，是一个符合 [48–50]中定义的双交叉积代数；

- 这是通过对未变形的 $U(\mathfrak{so}(1,3))$ 进行霍普夫代数扩张，并借助变形的平移霍普夫代数 $\mathcal{T}_\varrho$，通过严谨的数学构造所得到的同一个霍普夫代数；

- 因此，依据方程（4.52），双交叉积代数 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 与扭曲霍普夫代数 $U_\varrho(\mathfrak{p})$ 作为霍普夫代数同态（事实上，它们是同构的，因为该非线性映射可逆）。

4.3.1 重新推导 ϱ-闵可夫斯基时空

在[1], 的结果基础上进一步构建非交换时空，Hopf代数 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$以协变方式作用于其上。

为了理解不同的方法，我们回顾一下：在扭曲框架中，协变时空及其对称性是通过同时扭曲这两种结构来定义的，见第 3节。另一方面，就群流形上的函数量子群$\mathcal{C}_\varrho(P)$而言，量子时空是首要对象，而量子对称性则通过要求前者具有协变性来定义（反过来，也可以从 $\mathcal{C}_\varrho(P)$ 出发并检验量子空间的协变性），见第 4.1节。

本节我们采用后一种方法的对偶方法，利用 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$ 的双交叉积结构及其与 $\mathcal{C}_\varrho(P)$的对偶性。我们将说明，非交换坐标代数可以由平移代数 $\mathcal{T}_\varrho$的对偶得到；后者正是 $\mathcal{T}_\varrho^*$的霍普夫子代数 $\mathcal{C}_\varrho(P)$，我们在 $\mathcal{C}_\varrho(P)$的双交叉积分解中已见过它，见命题 4.1。

对此，我们应用 Hopf代数对偶性的定义

$$\begin{aligned} &\langle t, xy\rangle = \langle t_{(1)}, x\rangle\langle t_{(2)}, y\rangle, \\ &\langle ts, x\rangle = \langle t, x_{(1)}\rangle\langle s, x_{(2)}\rangle, \qquad \forall t, s \in \mathcal{T}_\varrho, \ \forall x, y \in \mathcal{T}_\varrho^*. \end{aligned} \tag{4.56}$$

~引入 $\mathcal{T}_\varrho$ 与 $\mathcal{T}_\varrho^*$之间的对偶配对，其中 $t_\mu = iP_\mu$,

$$\langle \widetilde{P}_\mu, x^\nu\rangle = -i\delta_\mu^\nu, \tag{4.57}$$

and 利用公式（4.56）中的第一式，我们可以直接读出坐标之间的对易子

$$[x^1, x^0] = i\varrho x^2, \qquad [x^2, x^0] = -i\varrho x^1, \qquad [x^3, x^\mu] = 0. \tag{4.58}$$

应用公式（4.56）中的第二式后，余乘为

$$\Delta x^{\mu} = x^{\mu} \otimes 1 + 1 \otimes x^{\mu}. \tag{4.59}$$

因此可以立即恢复 ϱ-闵可夫斯基时空。此外，在这一框架内，还可以利用霍普夫代数对偶关系，定义 ϱ-庞加莱生成元对坐标 x^{μ}的自然作用。 $\mathcal{T}_{\varrho}$ 在 $\mathcal{T}_{\varrho}^{*}$上的典范作用为

$$t \triangleright x = \langle t, x_{(1)} \rangle x_{(2)}\,, \tag{4.60}$$

在我们的例子中，这简单地写作

$$\widetilde{P}_{\mu} \triangleright x^{\nu} = -i\delta_{\nu}^{\mu}. \tag{4.61}$$

$U(\mathfrak{so}(1,3))$对 $\mathcal{T}_{\varrho}^{*}$的作用可以通过对其在 $\mathcal{T}_{\varrho}$上的作用取对偶得到，即:

$$\langle t, h \triangleright x \rangle = \langle t \triangleleft h, x \rangle, \tag{4.62}$$

其中 $t \in \mathcal{T}_{\varrho}$， $x \in \mathcal{T}_{\varrho}^{*}$且 $h \in U(\mathfrak{so}(1,3))$。利用公式（4.20），根据上述定义即可立即写出该作用:

$$\widetilde{N}_i \triangleright x^0 = ix^i, \qquad \widetilde{N}_i \triangleright x^j = -i\delta_i^j x^0, \qquad \widetilde{R}_i \triangleright x^0 = 0, \qquad \widetilde{R}_i \triangleright x^j = \epsilon_{ijk} x^k. \tag{4.63}$$

有了这些构件，两个代数元素（例如 a 和 b）的乘积上的作用由典范霍普夫代数作用给出

$$h \triangleright ab = (h_{(1)} \triangleright a)(h_{(2)} \triangleright b). \tag{4.64}$$

对于任意 $h \in \mathcal{U}_{\varrho}(\mathfrak{p})$，这正是作用满足协变性所要求的。

作为示例，我们证明对易子 $[x^1, x^0] = i\varrho x^2$ 在推进$\sim N_2$下的协变性。利用（4.63）并回顾余乘（4.28），不难看出

$$\widetilde{N}_2 \triangleright (x^1 x^0) = 0, \qquad \widetilde{N}_2 \triangleright (x^0 x^1) = -\varrho x^0, \qquad \widetilde{N}_2 \triangleright (i\varrho x^2) = \varrho x^0, \tag{4.65}$$

使协变性条件

$$\widetilde{N}_2 \triangleright [x^1, x^0] = i\varrho \widetilde{N}_2 \triangleright x^2 \tag{4.66}$$

得到了验证。对易关系在其他洛伦兹生成元作用下的协变性，也可以用类似的方法验证。

对于平移生成元，对易关系的协变性

$$\widetilde{P}_{\sigma} \triangleright [x^{\mu}, x^{\nu}] = i\,\varrho \left(\delta_j^{\mu} \delta_0^{\nu} - \delta_0^{\mu} \delta_j^{\nu} \right) \epsilon^{3j}{}_k \widetilde{P}_{\sigma} \triangleright x^k, \tag{4.67}$$

可通过使用余乘计算左侧（4.28），随后利用$\widetilde{\ }$平移在对偶空间上的作用（4.60）来验证。作为示例，我们对 $t_2 = iP_2$ 展示这一点。

我们有

$$t_2 \triangleright (x^{\mu} x^{\nu}) = i(\widetilde{P}_{2(1)} \triangleright x^{\mu})(\widetilde{P}_{2(2)} \triangleright x^{\nu}), \tag{4.68}$$

其中 $\widetilde{P}_{2(1)} \otimes \widetilde{P}_{2(2)} = \widetilde{P}_2 \otimes 1 + 余弦\left(\varrho\widetilde{P}_0\right) \otimes \widetilde{P}_2 + 正弦(\varrho P_0) \otimes \widetilde{P}_1$。因此，我们对乘积的每一项应用式（4.60），得到

$$t_2 \triangleright (x^\mu x^\nu) = -\left(\delta_2^\mu x^\nu + \delta_2^\nu x^\mu + \varrho\delta_0^\mu\delta_1^\nu\right), \tag{4.69}$$

也就是说

$$t_2 \triangleright (x^\mu x^\nu - x^\nu x^\mu) = -\varrho\left(\delta_0^\mu\delta_1^\nu - \delta_0^\nu\delta_1^\mu\right), \tag{4.70}$$

这与通过计算（4.67）右端所得的结果相同

$$RHS = \varrho\left(\delta_j^\mu\delta_0^\nu - \delta_0^\mu\delta_j^\nu\right)\epsilon^{3j}{}_k\delta_2^k = \varrho\left(\delta_1^\mu\delta_0^\nu - \delta_1^\nu\delta_0^\mu\right). \tag{4.71}$$

对其他平移生成元也可以用类似的方法重复这一证明。因此，（4.67）成立。

5 闵可夫斯基空间中的平面波与 $\star$-乘积

在前几节中，我们已经看到，ϱ-闵可夫斯基时空可以有两种不同的诠释。从扭曲构造的角度来看，时空坐标的交换规则是借助与生成第 $\star$节所讨论的对称代数的扭曲相对应的3-乘积计算得到的。从双交叉积构造的角度来看，ϱ-闵可夫斯基对易关系则是利用平移生成元与时空坐标之间的对偶性推导出来的。

另一方面，从时空的交换规则出发，通过为非交换平面波基 $\hat{}\ \phi(p) =: e^{ip_\mu\hat{}\,x^\mu}$：[51]选择特定的排序，可以将非交换函数代数表示为算子代数。平面ˆ波 $\phi(p)$的算子乘积定义了时空上函数的非交换 $\star$-乘积，定义如下：

$$(f \star g)(x) = \int \mathrm{d}^4p\,\mathrm{d}^4k\,\tilde{f}(p)\tilde{g}(k)\,\langle\hat{\phi}(p)\hat{\phi}(k)\rangle\,, \tag{5.1}$$

其中波浪号表示标准傅里叶变换。不同的排序方案将定义不同的乘积。在附录 E 中，我们简要回顾 κ-Minkowskiˆ $\hat{}$ 的类似情形，以突出两者的相似性。记号 $\langle\phi(p)\phi(k)\rangle$ 定义了非交换函数，$\phi(p \oplus k) = \exp\left[i(p \oplus k)\cdot x\right]$；在计算算子乘积后，它对应于方括号之间的算符，$\oplus$表示一个变形和。用非交换指数函数 $e^{ip_\mu x^\mu}$，函数之间的 $\star$-乘积于是可写为[3]

$$(f \star g)(x) = \int \mathrm{d}^4p\,\mathrm{d}^4k\,\tilde{f}(p)\tilde{g}(k)\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{p}_\mu\mathrm{x}^\mu} \star \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{k}_\nu\mathrm{x}^\nu}\,. \tag{5.2}$$

with

$$e^{ip\cdot x} \star e^{ik\cdot x} = e^{i(p\oplus k)\cdot x}. \tag{5.3}$$

此外，平面波的合成规则定义了平移生成元的一个余乘。这可以通过要求平移作用于式（5.3）两边的一致性来推导，

[3]这里我们忽略收敛问题。对于相当大一类函数，该乘积是定义良好的，其中包括施瓦茨函数。

ˆ ˆ ˆ或者，等价地，对算符形式 $\phi(p)\phi(k) = \phi(q)$ 的两边作用，其中 $q = p \oplus k$。ˆ算符 $\phi(q)$ 及相关函数会因排序方案不同而有所不同。因此，变形和 $\oplus$ 为平移生成元定义了不同的余乘，正如下文将详细说明的那样。

由平面波乘法导出的 $\star$-乘积和余乘，是否对应于通过双交叉积构造或扭曲构造定义的某种结构?

对平面波采用不同的排序处方，会导致平移生成元具有不同的余乘，也会产生不同的 $\star$-乘积。我们将证明，事实上，只有一种特定的排序选择，即所谓的 时间在右 排序处方，才能得到与双交叉积构造相关的平移生成元相容的余乘。这种排序还定义了一种新颖的 $\star$-乘积，它似乎不同于此前已知的乘积 [24, 45]。其他排序选择对应于不同的余乘，也就是对平移生成元进行非线性重定义。特别是，所谓的 时间对称 排序处方与扭曲基底中的平移生成元相关，并一致地定义了由扭曲 [24]得到的 $\star$-乘积。

为了定义平面波及其乘法规则，我们遵循 [52,53]，从时空代数的（有限维）表示出发。对易关系（2.3）可以通过 4×4 矩阵来表示

$$\begin{aligned} \hat{x}^0 &= \begin{pmatrix} 0 & i\varrho & 0 & 0 \\ -i\varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i\varrho \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{x}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\varrho \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\varrho \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

它们在形式上构成三维中心扩张欧几里得群的李代数，其中包含一个旋转（ˆx^0）和两个空间平移（ˆx^1,ˆx^2），而ˆx^3 是一个中心生成元。

5.1 时间右序与双交叉积基

利用表示（5.4），我们可以将平面波写成矩阵形式。选择时间在右的排序，我们定义

$$\hat{\phi}_R(p) = e^{ip_k\hat{x}^k} e^{ip_0\hat{x}^0} = \begin{pmatrix} \cos(\varrho p_0) & -\sin(\varrho p_0) & 0 & -\varrho p_1 \\ \sin(\varrho p_0) & \cos(\varrho p_0) & 0 & -\varrho p_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\varrho p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

将两个平面波相乘，得到

$$\begin{aligned}&\hat{\phi}_R(p)\hat{\phi}_R(k)=\hat{\phi}_R(p\oplus_R k)=\\&=\begin{pmatrix}\cos(\varrho(k_0+p_0)) & -\sin(\varrho(k_0+p_0)) & 0 & -\varrho[p_1+k_1\cos(\varrho p_0)-k_2\sin(\varrho p_0)]\\ \sin(\varrho(k_0+p_0)) & \cos(\varrho(k_0+p_0)) & 0 & -\varrho[p_2+k_2\cos(\varrho p_0)+k_1\sin(\varrho p_0)]\\ 0 & 0 & 1 & -\varrho(p_3+k_3)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

比较单平面波表示的最后一列（式（5.5））与（5.6）的最后一列，我们得到动量加法律，

$$\begin{cases}(p\oplus_R k)_0=p_0+k_0,\\(p\oplus_R k)_1=p_1+k_1\cos(\varrho p_0)-k_2\sin(\varrho p_0),\\(p\oplus_R k)_2=p_2+k_2\cos(\varrho p_0)+k_1\sin(\varrho p_0),\\(p\oplus_R k)_3=p_3+k_3.\end{cases}\tag{5.7}$$

因此，平面波的乘积是一个动量为 $p\oplus_R k$ 的新平面波。也就是说，它仍然是平移的本征函数。接下来我们将说明，这与平移生成元 P^R_μ 的余乘有关。

用非交换平面波算符 $\hat{\ }\ \phi_R = e^{ip_k\hat{x}^k}e^{ip_0\hat{\ }x^0}$ 的语言来说，平移生成元对它们的作用为 $P^R_\mu\hat{\ }\phi_R(p)=p_\mu\hat{\ }\phi_R(p)$，因此必须有

$$P^R_\mu\left(\hat{\phi}(p)\hat{\phi}(k)\right)=P^R_\mu\hat{\phi}(p\oplus_R k)=(p\oplus_R k)_\mu\hat{\phi}(p\oplus_R k).\tag{5.8}$$

通过直接计算可以验证，为了使其成立，P^R_μ 的余乘应为：

$$\begin{aligned}&\Delta P^R_0=P^R_0\otimes 1+1\otimes P^R_0,\\&\Delta P^R_1=P^R_1\otimes 1+\cos\left(\varrho P^R_0\right)\otimes P^R_1-\sin\left(\varrho P^R_0\right)\otimes P^R_2,\\&\Delta P^R_2=P^R_2\otimes 1+\cos\left(\varrho P^R_0\right)\otimes P^R_2+\sin\left(\varrho P^R_0\right)\otimes P^R_1,\\&\Delta P^R_3=P^R_3\otimes 1+1\otimes P^R_3\,.\end{aligned}\tag{5.9}$$

我们来检验 P^R_2，因为其他情况也可以用类似的方法轻松验证。用 $\hat{\ }\mu$ 表示标准算子乘积，将式（5.9）应用于平面波的乘积，我们有

$$\begin{aligned}P^R_\mu\left(\hat{\phi}(p)\hat{\phi}(k)\right)&=\hat{\mu}\circ\Delta P^R_2(\hat{\phi}(p)\otimes\hat{\phi}(k))\\&=\hat{\mu}\circ\left[P^R_2\hat{\phi}(p)\otimes\hat{\phi}(k)+\cos\left(\varrho P^R_0\right)\hat{\phi}(p)\otimes\hat{\phi}(k)+\sin\left(\varrho P^R_0\right)\hat{\phi}(p)\otimes P^R_1\hat{\phi}(k)\right]\\&=\left(p_2+\cos(\varrho p_0)k_2+\sin(\varrho p_0)k_1\right)\hat{\phi}(p)\hat{\phi}(k)\,.\end{aligned}\tag{5.10}$$

就非交换函数 $\phi(p)=e^{ip_\nu x^\nu}$ 而言，平移生成元的作用表现为微分算符，$P^R_\mu\phi(p)=-i\partial_\mu e^{ip_\nu x^\nu}=p_\mu\phi(p)$。[4] 因此我们必须有

$$P^R_\mu\left(\phi(p)\star\phi(k)\right)=P^R_\mu\phi(p\oplus_R k)=-i\partial_\mu\exp(i(p\oplus_R k)_\nu x^\nu)=(p\oplus_R k)_\mu\phi(p\oplus_R k).\tag{5.11}$$

[4]请注意，对于单个平面波，平移生成元的上标 ^{R} 是多余的。我们保留它以便记账。

同样，若 P^R_μ的余乘具有如下形式 (5.9)，则该结论成立。与之前一样，我们对P^R_2进行检验。用 μ 表示函数之间的 $\star$ 乘积，并将 (5.9) 应用于平面波的乘积，可得

$$\begin{aligned} P^R_\mu\left(\phi(p)\star\phi(k)\right) &= \mu\circ\Delta P^R_2(\phi(p)\otimes\phi(k)) = \mu\circ\Big[P^R_2\phi(p)\otimes\phi(k)+\cos\big(\varrho P^R_0\big)\phi(p)\otimes\phi(k) \\ &\quad +\sin\big(\varrho P^R_0\big)\phi(p)\otimes P^R_1\phi(k)\Big] = \left(p_2+\cos(\varrho p_0)k_2+\sin(\varrho p_0)k_1\right)\left(\phi(p)\star\phi(k)\right). \end{aligned} \tag{5.12}$$

与前几节中获得的结果进行比较，我们发现，在双交叉积基中平移算子的 ϱ-Minkowski 余乘（见（4.28））恰好采取了（5.9）的形式。我们得出结论：双交叉积基与平面波的时间右序相容。

我们简要说明选择时间在左排序时的情况。通过类似的计算，可以证明余乘的结构与采用时间在右排序时得到的结构相似，即包络代数仍然是双交叉积，只是变形参数（即 $\varrho\to-\varrho$）取逆，并且张量积空间互换，具体如下：

$$\begin{aligned} \Delta P^L_1 &= 1\otimes P^L_1+P^L_1\otimes\cos\big(\varrho P^L_0\big)+P^L_2\otimes\sin\big(\varrho P^L_0\big), \\ \Delta P^L_2 &= 1\otimes P^L_2+P^L_2\otimes\cos\big(\varrho P^L_0\big)-P^L_1\otimes\sin\big(\varrho P^L_0\big), \\ \Delta P^L_{0,3} &= P^L_{0,3}\otimes 1+1\otimes P^L_{0,3}\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

在分析 κ-Minkowski 中时间在右和时间在左平面波时，也存在类似的结果。

5.1.1 -积

虽然可以针对任意排序定义 $\star$-乘积，但下面我们将重点讨论时间在右侧的排序。由方程（5.2）、（5.3）可得

$$\begin{aligned} (f\star g)(x) &= \int \mathrm{d}^4p\,\mathrm{d}^4k\tilde{f}(p_0-k_0,p_A-R_{AB}(-\varrho p_0+\varrho k_0)k_B,p_3-k_3)\tilde{g}(k)e^{ip_\mu x^\mu} \\ &= \int \mathrm{d}^4p\,(\tilde{f}\circ\tilde{g})(p)e^{ip_\mu x^\mu}\,, \end{aligned} \tag{5.14}$$

其中，$R_{AB}(\theta)$ A、$B=1$、2 是参数 θ and 在 1-2 平面内的旋转矩阵

$$(\tilde{f}\circ\tilde{g})(p)=\int \mathrm{d}^4k\;\tilde{f}(p_0-k_0,p_A-R_{AB}(-\varrho p_0+\varrho k_0)k_B,p_3-k_3)\;\tilde{g}(k) \tag{5.15}$$

傅里叶变换的变形卷积。

下面通过直接计算说明，这个乘积相对于 $\mathbb{R}^4$ 上的标准积分测度是循环的，即

$$\int \mathrm{d}^4x\;f(x)\star g(x)=\int \mathrm{d}^4x\;g(x)\star f(x). \tag{5.16}$$

根据用平面波表示的表达式（5.14），我们计算得

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4x\ (f\star g)(x) &= \int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{d}^4p\ \mathrm{d}^4k\ \tilde{f}(p_0-k_0,p_A-R_{AB}(-\varrho p_0+\varrho k_0)k_B,p_3-k_3)\tilde{g}(k)e^{ip_\mu x^\mu}\\ &= \int \mathrm{d}^4p\ \mathrm{d}^4k\tilde{f}(p_0-k_0,p_A-R_{AB}(-\varrho p_0+\varrho k_0)k_B,p_3-k_3)\tilde{g}(k)\delta(p_\mu)\\ &= \int \mathrm{d}^4k\ \tilde{f}(-k_0,-R_{AB}(\varrho k_0),-k_3)\tilde{g}(k)\\ &= \int \mathrm{d}^4k\ \tilde{f}(k)\tilde{g}(-k_0,-R_{AB}(\varrho k_0)k_B,-k_3)\\ &= \int \mathrm{d}^4p\ \mathrm{d}^4k\tilde{f}(k)\tilde{g}(p_0-k_0,p_A-R_{AB}(-\varrho p_0+\varrho k_0)k_B,p_3-k_3)\delta(p_\mu)\\ &= \int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{d}^4p\ \mathrm{d}^4k\ \tilde{f}(k)\tilde{g}(p_0-k_0,p_A-R_{AB}(-\varrho p_0+\varrho k_0)k_B,p_3-k_3)e^{ip_\mu x^\mu}\\ &= \int \mathrm{d}^4x\ (g\star f)(x).\end{aligned} \tag{5.17}$$

因此我们得出结论：由平面波的时间右序导出的 $\star$乘积确实具有循环性。此外，由于测度未经过变形，它也具有 ϱ-庞加莱不变性。

然而，请注意，更强的闭合条件 [54] $\int f\star g=\int f\cdot g$ 并不成立。人们已经注意到，循环性是 $\star$-乘积的一项基本性质，因为它使得我们能够用 $\star$-规范不变作用量来表述场论（即场按照 $\psi(x)\ \to\ g(x)\ \star\psi(x)$变换，其中 g 是非交换代数中的一个酉元）。当满足更强的闭合条件时，作用量的二次项（如动能项和质量项）还具有一项额外的简化性质：它们不受变形，因此会产生标准的树级传播子。对于扭曲的 ϱ-Minkowski乘积，情况正是如此；闭合性质已被用于研究标量场论在单圈下的行为 [21]。我们回顾一下，Moyal乘积和Wick-Voros乘积也有类似情况：二者表示相同的时空非交换性，且都具有循环性，但只有Moyal乘积是闭合的。它们在标量场论中的应用及结果比较已在[55]中进行了分析。若能在类似的框架下分析新乘积（5.14）的后果，将会很有意思。我们计划在后续发表的文章中继续探讨其应用。[5]

5.2 时间对称序与扭结基

考虑平面波的时间对称序

$$\begin{aligned}&\hat{\phi}_S(p)=e^{i\frac{p_0\hat{x}^0}{2}}e^{ip_k\hat{x}^k}e^{\frac{p_0\hat{x}^0}{2}}=\\ &=\begin{pmatrix}\cos(\varrho p_0) & -\sin(\varrho p_0) & 0 & -\varrho(p_1\cos\left(\varrho\frac{p_0}{2}\right)-p_2\sin\left(\varrho\frac{p_0}{2}\right))\\ \sin(\varrho p_0) & \cos(\varrho p_0) & 0 & -\varrho(p_2\cos\left(\varrho\frac{p_0}{2}\right)+p_1\sin\left(\varrho\frac{p_0}{2}\right))\\ 0 & 0 & 1 & -\varrho p_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{5.18}$$

[5]最近发现了另一种用于 ϱ-闵可夫斯基时空的 $\star$-乘积 [45]，，它基于Weyl量子化。它似乎不同于本文介绍的那些乘积。后者是循环的，但不是闭合的。它有一个有趣的性质：$\int f^\dagger\star g=\int\bar{f}\cdot g$ 其中伴随运算是相对于一种适当的积分测度定义的。

ˆ ˆ 对称序平面波 $\phi_S(p)\phi_S(k)$ 的乘积为

$$\begin{pmatrix} \cos(\varrho(k_0+p_0)) & -\sin(\varrho(k_0+p_0)) & 0 & -\varrho F(p_0,k_0,p_1,k_1,p_2,k_2) \\ \sin(\varrho(k_0+p_0)) & \cos(\varrho(k_0+p_0)) & 0 & -\varrho G(p_0,k_0,p_1,k_1,p_2,k_2) \\ 0 & 0 & 1 & -\varrho(p_3+k_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

with

$$\begin{aligned} F(p_0,k_0,p_1,k_1,p_2,k_2) =& p_1\cos\Big(\varrho\frac{p_0}{2}\Big)+k_1\cos\Big(\frac{\varrho}{2}(k_0+2p_0)\Big) \\ &+p_2\sin\Big(\varrho\frac{p_0}{2}\Big)+k_2\sin\Big(\frac{\varrho}{2}(k_0+2p_0)\Big), \\ G(p_0,k_0,p_1,k_1,p_2,k_2) =& p_2\cos\Big(\varrho\frac{p_0}{2}\Big)+k_2\cos\Big(\frac{\varrho}{2}(k_0+2p_0)\Big) \\ &+p_1\sin\Big(\varrho\frac{p_0}{2}\Big)+k_1\sin\Big(\frac{\varrho}{2}(k_0+2p_0)\Big). \end{aligned} \tag{5.20}$$

ˆ 利用三角恒等式，可将其写成 $\phi_S(p\oplus_S k)$ 的形式，其中变形复合律 $\oplus_S$ 定义如下

$$\begin{cases} (p\oplus_S k)_0 = p_0+k_0, \\ (p\oplus_S k)_1 = p_1\cos\big(\frac{\varrho}{2}k_0\big)+\cos\big(\frac{\varrho}{2}p_0\big)k_1+p_2\sin\big(\frac{\varrho}{2}k_0\big)-\sin\big(\frac{\varrho}{2}p_0\big)k_2, \\ (p\oplus_S k)_2 = p_2\cos\big(\frac{\varrho}{2}k_0\big)+\cos\big(\frac{\varrho}{2}p_0\big)k_2-p_1\sin\big(\frac{\varrho}{2}k_0\big)+\sin\big(\frac{\varrho}{2}p_0\big)k_1, \\ (p\oplus_S k)_3 = p_3+k_3. \end{cases} \tag{5.21}$$

注意到，这恰好是在 [24] 中通过计算平面波的扭曲$\star$-积得到的变形和。通过引入时间对称平移生成元，我们希望像上一小节那样，求出与以下要求相容的余乘 ΔP^S ： $\phi(p\oplus_S k)$ 是平移 $P^S_\mu\phi(p\oplus_S k) = (p\oplus_S k)_\mu\phi(p\oplus_S k)$ 的本征函数。可以验证，这一复合律与平移生成元的扭曲余乘积 (3.2) 相容。事实上，对两个对称排序平面波的乘积作用扭曲余乘积，可得到由 $\oplus_S$ 运算给出的同一复合律，其中包含 p 和 k 。与此一致，可以验证，按照上一节相同的方法，对时间对称平面波进行卷积所得到的 $\star$-积，与在 [24] 中利用扭曲（式 (3.3)）计算出的结果相符。因此，我们得到了与扭曲 $\star$-积对应的平面波表示。

在前几节中，我们已经证明，扭曲平移生成元与双交叉积平移生成元之间存在非线性变换。我们可以验证，时间对称平面波与时间右序平面波的动量之间也存在相同的关系。为此，从时间对称平面波的动量出发，p_i，我们进行如下变换

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= p_1\cos\Big(\varrho\frac{p_0}{2}\Big)-p_2\sin\Big(\varrho\frac{p_0}{2}\Big), \\ \tilde{p}_2 &= p_2\cos\Big(\varrho\frac{p_0}{2}\Big)+p_1\sin\Big(\varrho\frac{p_0}{2}\Big), \\ \tilde{p}_{0,3} &= p_{0,3}\ , \end{aligned} \tag{5.22}$$

我们 作用于时间对称平面波（5.18）。可以验证，该变换 ed

平面波是平移生成元的本征函数

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_1 &= P_1^S \cos\left(\varrho\frac{P_0^S}{2}\right) - P_2^S \sin\left(\varrho\frac{P_0^S}{2}\right),\\ \widetilde{P}_2 &= P_2^S \cos\left(\varrho\frac{P_0^S}{2}\right) + P_1^S \sin\left(\varrho\frac{P_0^S}{2}\right),\\ \widetilde{P}_{0,3} &= P_{0,3}^S\ ,\end{aligned} \tag{5.23}$$

它们正是第 4.2 节通过基变换（4.25）得到的生成元，因此可以将 $\widetilde{P}_\mu$ 与 P_μ^R对应起来。

5.2.1 星积的等价类

众所周知，与给定时空非交换性相关的不同 $\star$-乘积彼此等价，也就是说，总能找到一个可逆映射 T，使得

$$T(f \star g) = Tf \star' Tg. \tag{5.24}$$

在相空间量子化框架中，这种冗余广为人知，并且与排序歧义有关。对于量子时空，这一问题已针对平移不变的 $\star$-乘积 [56]，类进行了研究，其中 Moyal 乘积是唯一闭合的代表。关于旋转不变乘积，文献 [57] 讨论了这一问题。

有趣的是，对于 ϱ-Minkowski 情形，可以根据庞加莱生成元之间的可逆关系轻松找到这样的映射；这些关系与可为平面波的 $\star$-乘积选择的不同排序相关。特别是，连接时间对称序与时间在右排序的方程（5.22）使我们能够将 $\star$中得到的扭曲 [24],-乘积（它是闭合的）与双交叉积（5.14）（它仅是循环的）联系起来。该映射可通过傅里叶变换显式写出

$$Tf := \int \mathrm{d}^4p\, \tilde{f}(p)\tilde{T}\mathrm{e}^{ip_\mu x^\mu} \tag{5.25}$$

根据 $\tilde{T}\mathrm{e}^{ip_\mu x^\mu} :\ = \mathrm{e}^{i\tilde{p}_\mu x^\mu}$ 根据（5.22）。

6 结论

非交换时空 ϱ-闵可夫斯基具有一些有趣的特征，使其在原始 κ-闵可夫斯基的各种变体中脱颖而出。与后者类似，它具有未变形的洛伦兹对称性代数 $C(SO(3,1))$，作为量子庞加莱群 $C_\varrho(P)$ 的一个子代数；同时，它也具有未变形的洛伦兹李代数扇区，以及一种双交叉积构造，使我们能够将其量子相对论群理解为李群半直积在霍普夫代数框架中的自然推广。此外，双交叉积结构还使得时空（即非交换代数 $\mathcal{T}_\varrho^*$）能够被视为经典情形下闵可夫斯基时空齐性空间概念的推广。

除了双交叉积推导之外， ϱ-闵可夫斯基对称性也可以通过扭曲获得。在这种情况下，代数由一个 r矩阵生成，该矩阵是经典杨-巴克斯特方程的解；据我们所知，与 κ-闵可夫斯基代数相关的扭曲

则与修正杨-巴克斯特方程相关，因此需要扩展庞加莱对称性才能定义。通过双交叉积方法和扭曲方法分别得到的变形庞加莱对称性 $\mathcal{U}_\varrho(\mathfrak{p})$和$U_\varrho(\mathfrak{p})$，是由生成元的非线性变换联系起来的同构量子群。

通过使用坐标代数的有限维表示，并将非交换函数按平面波基展开，我们得以定义不同的$\star$乘积，它们对应于不同的排序方案。我们发现，时间对称排序选出了已在 [21], 中发现的扭曲星乘积，而时间右序排序则给出一种新颖的 $\star$乘积，与双交叉积构造相一致。我们证明了它相对于 $\mathbb{R}^4$中的标准测度具有循环性；与扭曲乘积不同，它并非闭合的。因此，值得研究这两种方法下的规范理论，由循环性保证不变性，并比较研究结果。

还有其他有趣的特征，例如，由于坐标非交换性，时间可观测量的谱会离散化[22], ，这可能具有唯象学应用。此外，有人以 $2+1$维的 ϱ-闵可夫斯基框架为出发点，开展量子引力唯象学研究。在 [41, 58], 中，庞加莱对称性的 ϱ-变形预言了所谓的双重透镜效应，这或许能为普朗克尺度唯象学开辟一扇新的窗口。不过，这些研究所使用的相对论对称代数与本文讨论的代数有所不同。特别是，洛伦兹扇区发生了变形。对这些模型不同影响的分析将留待未来工作。另一个值得进一步研究的方面，是它与 λ-闵可夫斯基时空的关系（其中 x^0 和 x^3 的作用互换）；对后者的分析很可能十分相似，尽管它所描述的物理现象会有所不同。

致谢

我们感谢 INFN 的 GeoSymQFT 专项计划（F.L.、P.V.）和 Qua-grap（G.F.、G.G.）提供的支持。F.L. 感谢西班牙科学与创新部国家研究署通过授予宇宙科学研究所的“玛丽亚·德·梅斯图卓越单位 2020–2023”奖项（资助编号：CEX2019-000918-M），以及资助编号为 PID2019–105614 GB-C21 和 2017-SGR-929 的项目提供的经费支持。G.F.、G.G.、F.L. 和 P.V. 的研究是在 STAR Plus计划框架内开展的，该计划由那不勒斯费德里科二世大学和圣保罗基金会提供经费支持。L.S. 感谢弗罗茨瓦夫大学博士生院提供的经费支持，以及波兰国家科学中心（NCN）提供的 SONATA BIS 项目资助（编号：2021/42/E/ST2/00304）。

A 扭曲

在本附录中，我们给出一些定义，并展示扭曲方法的一些性质。

Drinfel'd 扭曲 $\mathcal{F}$是一个可逆映射 $\mathcal{F} \in U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$，其作用于

群上的函数，

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G), \tag{A.1}$$

它满足以下余循环条件和归一化条件

$$(\mathcal{F} \otimes 1)(\Delta \otimes id)\mathcal{F} = (1 \otimes \mathcal{F})(id \otimes \Delta)\mathcal{F}, \tag{A.2}$$

$$(\varepsilon \otimes 1)\mathcal{F} = (1 \otimes \varepsilon)\mathcal{F} = 1. \tag{A.3}$$

Twi不满足余循环条件的扭曲算子称为不可容许的扭曲 s.

借助这一映射，可以在定义于 G 上的函数之间引入非交换的 $\star$积，如下所示

$$f \star g = \mu_\star(f \otimes g) \doteq \mu \circ \mathcal{F}^{-1}(f \otimes g), \quad f, g \in \mathcal{C}(G); \tag{A.4}$$

其中， $\mu_\star$ 是经典交换积 μ 的非交换变形： $\mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G)$。余循环条件和归一化条件意味着 $\star$积是结合的，并且单位元 1 存在： $f \star 1 = 1 \star f = f$。

在本文中，我们将讨论一种称为阿贝尔扭曲（即由李代数的对易生成元构造）的特殊扭曲；对于这种情况，可以证明

$$\mathcal{F}^{-1} \approx 1 \otimes 1 + \frac{1}{2} r + \dots \tag{A.5}$$

也就是说，经典的 r矩阵由扭曲算子关于变形参数的展开式的一阶项给出。

与这一性质相关，可以证明，如果经典 r-矩阵不满足经典杨–巴克斯特方程，而是满足其修正形式，那么对偶泛包络代数就不允许存在阿贝尔可容许扭曲。 κ-庞加莱便是这种情况，这也正是我们不得不通过其他方法来构造其量子代数的原因；而在 ϱ-庞加莱的情形中，由于 r-矩阵满足经典杨–巴克斯特方程，我们可以采用扭曲方法。

对于一种允许容许扭曲算子的李代数型变形，获得庞加莱量子包络代数的一种简单方法是通过以下关系对标准庞加莱霍普夫代数进行变形

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1}, \tag{A.6}$$

同时保持所有其他映射不变形。

这个 κ-闵可夫斯基代数已通过由多种不同扭曲算符导出的 $\star$-乘积加以描述。这些就是所谓的约旦人 [8–11] 和阿贝尔扭曲 [12–14]。一般而言，两者都需要扩展对称性包络代数，至少纳入外尔生成元，例如由此得到外尔群的变形泛包络代数 [59]。

B 双交叉积结构

遵循 [60, 61] ，我们在此给出双交叉积结构的构造性定义。

设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{A}$为两个 Hopf代数，双交叉积代数 $\mathcal{X} \triangleright\!\blacktriangleleft \mathcal{A}$是张量积 $\mathcal{X} \otimes \mathcal{A}$，并赋予两个额外的结构映射： $\mathcal{X}$ 对 $\mathcal{A}$ 的协变右作用，以及 $\mathcal{A}$ 对 $\mathcal{X}$的协变左余作用

$$\triangleleft : \mathcal{A} \times \mathcal{X} \to \mathcal{A}, \tag{B.1a}$$
$$\beta : \mathcal{X} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{X}, \tag{B.1b}$$

使得

$$a \triangleleft (xy) = (a \triangleleft x) \triangleleft y, \tag{B.2a}$$
$$1 \triangleleft x = \varepsilon(x)1, \tag{B.2b}$$
$$(a \cdot b) \triangleleft x = (a \triangleleft x_{(1)})(b \triangleleft x_{(2)}), \tag{B.2c}$$
$$(id \otimes \beta) \circ \beta = (\Delta \otimes id) \circ \beta, \tag{B.2d}$$
$$(\varepsilon \otimes id) \circ \beta = id, \tag{B.2e}$$
$$\beta(ab) = \beta(a)\beta(b), \tag{B.2f}$$
$$\beta(1) = 1 \otimes 1, \tag{B.2g}$$

并且具有如下 Hopf代数结构:

$$\mu((x \otimes a), (y \otimes b)) = (x \otimes a) \cdot (y \otimes b) = xy_{(1)} \otimes (a \triangleleft y_{(2)})b, \tag{B.3a}$$
$$1_{\mathcal{X} \triangleright\!\blacktriangleleft \mathcal{A}} = 1_{\mathcal{X}} \otimes 1_{\mathcal{A}}, \tag{B.3b}$$
$$\Delta(x \otimes a) = (x_{(1)} \otimes {x_{(2)}}^{(\bar{1})} a_{(1)}) \otimes ({x_{(2)}}^{(\bar{2})} \otimes a_{(2)}), \tag{B.3c}$$
$$\varepsilon(x \otimes a) = \varepsilon(x)\varepsilon(a), \tag{B.3d}$$
$$S(x \otimes a) = (1_{\mathcal{X}} \otimes S(x^{(\bar{1})} a)) \cdot (S(x^{(\bar{2})}) \otimes 1_{\mathcal{A}}), \tag{B.3e}$$

其中，$x\ y \in \mathcal{X}$ $a\ b \in \mathcal{A}$ $\Delta\ h\ = \sum_i h_{(1)_i} \otimes h_{(2)_i} = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ $\beta\ x\ = x^{(\bar{1})} \otimes x^{(\bar{2})}$ $x^{(\bar{1})} \in \mathcal{A}$ $x^{(\bar{2})} \in \mathcal{X}$ ……，并且按照 Sweedler记号，我们定义了（）和（），其中……和……。结构映射还必须满足以下相容条件:

$$\varepsilon(a \triangleleft x) = \varepsilon(a)\varepsilon(x), \tag{B.4a}$$
$$\Delta(a \triangleleft x) = (a_{(1)} \triangleleft x_{(1)}){x_{(2)}}^{(\bar{1})} \otimes (a_{(2)} \triangleleft {x_{(2)}}^{(\bar{2})}), \tag{B.4b}$$
$$\beta(xy) = (x^{(\bar{1})} \triangleleft y_{(1)}){y_{(2)}}^{(\bar{1})} \otimes x^{(\bar{2})} {y_{(2)}}^{(\bar{2})}, \tag{B.4c}$$
$${x_{(1)}}^{(\bar{1})}(a \triangleleft x_{(2)}) \otimes {x_{(1)}}^{(\bar{2})} = (a \triangleleft x_{(1)}){x_{(2)}}^{(\bar{1})} \otimes {x_{(2)}}^{(\bar{2})}. \tag{B.4d}$$

需要注意的一点是，双交叉积代数 $\mathcal{X} \triangleright\!\blacktriangleleft \mathcal{A}$ 总可以视为由元素 $X = x \otimes 1$、$\mathcal{A} = 1 \otimes a$ 生成、模去对易关系后的泛包络代数。

$$[X, A] = x \otimes a - x_{(1)} \otimes (a \triangleleft x_{(2)}); \tag{B.5}$$

事实上，根据（B.3a）

$$XA = (x \otimes 1) \cdot (1 \otimes a) = x \otimes (1 \triangleleft 1)a = x \otimes a, \tag{B.6a}$$
$$AX = (1 \otimes a) \cdot (x \otimes 1) = x_{(1)} \otimes (a \triangleleft x_{(2)}). \tag{B.6b}$$

B.1 经典 r 矩阵变形方法

这里简要介绍由经典 r-矩阵所诱导的变形，详情请参阅[62–64] 。

给定与李群 G 对应的李代数 $\mathfrak{g}$，经典 r 矩阵是满足修正杨–巴克斯特方程（MYBE）的张量 $r \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}$

$$[r_{12}, r_{13} + r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = t, \tag{B.7}$$

其中 $t \in \otimes^3\mathfrak{g}$ 是一个 $\mathfrak{g}$ 不变量，而 $r_{\alpha\beta} \in \otimes^3\mathfrak{g}$、$\alpha$、$\beta = 1$、2、3 的定义如下

$$r_{12} = c_{ij} a_i \otimes a_j \otimes 1, \tag{B.8}$$
$$r_{23} = c_{ij} 1 \otimes a_i \otimes a_j, \tag{B.9}$$
$$r_{13} = c_{ij} a_i \otimes 1 \otimes a_j, \tag{B.10}$$

$a_i \in \mathfrak{g}$。如果 $t = 0$ 方程（B.7）称为经典杨–巴克斯特方程（CYBE）。

该元素通过以下*Sklyanin* 括号定义一个泊松–李群 [62] ：

$$\{f, g\} = r^{\alpha\beta}(X^R_\alpha f X^R_\beta g - X^L_\alpha f X^L_\beta g), \qquad f, g \in \mathcal{C}^\infty(G), \tag{B.11}$$

其中 X^R、X^L 分别是右不变和左不变向量场。因此，代数 $\mathcal{C}^\infty$（G）是一个具有平凡余扇区和对极的泊松–霍普夫代数。

如果不存在次序歧义，那么就可以通过对 Sklyanin 括号 $\{,\} \to \frac{1}{i}[,]$ 进行正则量子化，将这一结构量子化为量子群。

在下一节中，我们将把（B.11）应用于 κ-庞加莱情形，而在 4.1 节中，将其应用于 ϱ-庞加莱变形。因此，我们需要明确写出庞加莱群的左不变和右不变向量场。它们如下（例如参见 [23]）

$$\begin{aligned} X^L_{\alpha\beta} &= \Lambda^\mu{}_\alpha \tfrac{\partial}{\partial \Lambda^{\mu\beta}} - \Lambda^\mu{}_\beta \tfrac{\partial}{\partial \Lambda^{\mu\alpha}}, & X^L_\alpha &= \Lambda^\mu{}_\alpha \tfrac{\partial}{\partial a^\mu}, \\ X^R_{\alpha\beta} &= \Lambda_{\beta\nu} \tfrac{\partial}{\partial \Lambda^\alpha{}_\nu} - \Lambda_{\alpha\nu} \tfrac{\partial}{\partial \Lambda^\beta{}_\nu} + a_\beta \tfrac{\partial}{\partial a^\alpha} - a_\alpha \tfrac{\partial}{\partial a^\beta}, & X^R_\alpha &= \tfrac{\partial}{\partial a^\alpha}. \end{aligned} \tag{B.12}$$

B.2 量子群 $\mathcal{C}_\kappa(P)$

为了获得量子群 $\mathcal{C}_\kappa(P)$，可以从 κ-Minkowski 对易关系（2.2）开始，并要求 κ-Minkowski 代数在量子群作用下具有协变性。然而，如[23], 所讨论的，这种方法会导致洛伦兹参数与平移参数之间的混合对易子存在歧义。为避免这一问题，我们将在经典 r-矩阵的框架下进行。

对于 $\mathcal{C}_\kappa(P)$，经典 r-矩阵为 [59]:

$$r = i\lambda M_{0\nu} \wedge P^\nu. \tag{B.13}$$

此 r-矩阵满足修正杨–巴克斯特方程，因此扭曲算子需要扩充庞加莱代数，正如附录 A.

根据 [23] ，我们利用公式（B.11）和（B.12）计算群参数的泊松括号，并通过正则量子化将其量子化，从而得到以下量子群结构：

$$[a^\mu, a^\nu] = i\lambda(\delta^\mu{}_0 a^\nu - \delta^\nu{}_0 a^\mu), \tag{B.14a}$$
$$[\Lambda^\alpha{}_\beta, a^\rho] = -i\lambda((\Lambda^\alpha{}_0 - \delta^\alpha{}_0)\Lambda^\rho{}_\beta + (\Lambda_{0\beta} - g_{0\beta})g^{\alpha\rho}), \tag{B.14b}$$
$$[\Lambda^\alpha{}_\beta, \Lambda^\gamma{}_\delta] = 0, \tag{B.14c}$$
$$\Delta(a^\mu) = \Lambda^\mu{}_\nu \otimes a^\nu + a^\mu \otimes 1, \tag{B.14d}$$
$$\Delta(\Lambda^\mu{}_\nu) = \Lambda^\mu{}_\alpha \otimes \Lambda^\alpha{}_\nu, \tag{B.14e}$$
$$\varepsilon(a^\mu) = 0, \tag{B.14f}$$
$$\varepsilon(\Lambda^\mu{}_\nu) = \delta^\mu{}_\nu, \tag{B.14g}$$
$$S(a^\mu) = -a^\nu(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu, \tag{B.14h}$$
$$S(\Lambda^\mu{}_\nu) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu. \tag{B.14i}$$

该量子群具有一种众所周知的双交叉积结构，该结构由分解给出。

$$\mathcal{C}_\kappa(P) = \mathcal{T}^*_\kappa \blacktriangleright\!\!\triangleleft \mathcal{C}(SO(1,3)), \tag{B.15}$$

其中， $C(SO(1,3))$ 是洛伦兹群上的连续函数的经典交换代数，而 $\mathcal{T}^*_\kappa$ 是平移扇区对偶空间上的函数代数，其定义为

$$[a^\mu, a^\nu] = i\lambda(\delta^\mu{}_0 a^\nu - \delta^\nu{}_0 a^\mu), \tag{B.16a}$$
$$\Delta(a^\mu) = a^\mu \otimes 1 + 1 \otimes a^\mu, \tag{B.16b}$$
$$S(a^\mu) = -a^\mu, \tag{B.16c}$$
$$\varepsilon(a^\mu) = 0. \tag{B.16d}$$

左余作用和右作用分别由

$$\beta_L(x^\mu) = \Lambda^\mu{}_\nu \otimes x^\nu, \tag{B.17a}$$
$$\Lambda^\alpha{}_\beta \triangleleft x^\varrho = -i\lambda((\Lambda^\alpha{}_0 - \delta^\alpha{}_0)\Lambda^\rho{}_\beta + (\Lambda_{0\beta} - g_{0\beta})g^{\alpha\rho}), \tag{B.17b}$$

其中，右作用由混合对易子读出，左余作用则由余乘隐式定义，详见 [1]。这样我们可以明确地看到 $\mathcal{T}^*_\kappa \sim \mathcal{M}_\kappa$，并且能够通过量子群得到非交换时空，其商过程类似于经典情形；需要注意的是，在这个量子版本中，商应当相对于变形作用进行。

由于这一结果在相关文献中已广为人知，因此我们将省略其详细推导。本文仅针对新颖的情形 $\mathcal{C}_\varrho(P)$ 给出具体的计算过程。

C 命题证明4.1

为了完成命题4.1 的证明，我们必须验证作用和余作用满足B.4a)-('B.4d）。

我们证明 开始证明B.4a）。由4.7）和4.3f），并且由于余单位映射是同态 ：

$$\varepsilon(\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \triangleleft x^{\rho}) = i\varrho\,[\delta^{\rho}{}_{0}(g_{2\nu}\delta^{\mu}{}_{1} - g_{1\nu}\delta^{\mu}{}_{2}) - \delta^{\rho}{}_{0}(\delta^{\mu}{}_{1}g_{2\nu} - \delta^{\mu}{}_{2}g_{1\nu})] = 0, \tag{C.1}$$

而根据（4.3i），

$$\varepsilon(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})\varepsilon(x^{\rho}) = 0, \tag{C.2}$$

因此（B.4a）成立。

接下来考虑（B.4b）。从左端开始，我们有（省略 $i\varrho$ 因子）

$$\Delta(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} \triangleleft x^{\rho}) = \Delta(\Lambda^{\rho}{}_{0})[\Delta(\Lambda^{\alpha}{}_{1})g_{2\beta} - \Delta(\Lambda^{\alpha}{}_{2})g_{1\beta}] - \delta^{\rho}{}_{0}[\Delta(\Lambda_{2\beta})\delta^{\alpha}{}_{1} - \Delta(\Lambda_{1\beta})\delta^{\alpha}{}_{2}], \tag{C.3}$$

因为余乘是一个同态。

对于右端，我们有

$$\begin{aligned}&(\Lambda^{\alpha}{}_{\lambda} \triangleleft x^{\rho}) \otimes \Lambda^{\lambda}{}_{\beta} + \Lambda^{\alpha}{}_{\lambda}\Lambda^{\rho}{}_{\sigma} \otimes (\Lambda^{\lambda}{}_{\beta} \triangleleft x^{\sigma})\\ &= \Lambda^{\alpha}{}_{\lambda}\Lambda^{\rho}{}_{\sigma} \otimes \Lambda^{\sigma}{}_{0}(\Lambda^{\lambda}{}_{1}g_{2\beta} - \Lambda^{\lambda}{}_{2}g_{1\beta}) - \delta^{\rho}{}_{0}(\Lambda_{2\lambda}\delta^{\alpha}{}_{1} - \Lambda_{1\lambda}\delta^{\alpha}{}_{2}) \otimes \Lambda^{\lambda}{}_{\beta}.\end{aligned} \tag{C.4}$$

由 $\delta^{\rho}{}_{0}$ 分解的各项与左端由 $\delta^{\rho}{}_{0}$ 余乘分解得到的各项完全相等；此外，可以验证其余各项也与左端的其余各项相等，从而证明了（B.4b）。

对于（B.4c），由右端可得

$$\beta([x^{\mu}, x^{\nu}]) = [\delta^{\mu}{}_{0}(\Lambda_{2\alpha}\delta^{\nu}{}_{1} - \Lambda_{1\alpha}\delta^{\nu}{}_{2}) - \delta^{\nu}{}_{0}(\Lambda_{2\alpha}\delta^{\mu}{}_{1} - \Lambda_{1\alpha}\delta^{\mu}{}_{2})] \otimes x^{\alpha}, \tag{C.5}$$

而右端为

$$\begin{aligned}\beta([x^{\mu}, x^{\nu}]) =&(\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \triangleleft x^{\nu} - \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} \triangleleft x^{\mu}) \otimes x^{\alpha} + \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} \otimes [x^{\alpha}, x^{\beta}]\\ =&[\Lambda^{\nu}{}_{0}(\Lambda^{\mu}{}_{1}g_{2\alpha} - \Lambda^{\mu}{}_{2}g_{1\alpha}) - \delta^{\nu}{}_{0}(\Lambda_{2\alpha}\delta^{\mu}{}_{1} - \Lambda_{1\alpha}\delta^{\mu}{}_{2})\\ &+ \delta^{\mu}{}_{0}(\Lambda_{2\alpha}\delta^{\nu}{}_{1} + \Lambda_{1\alpha}\delta^{\nu}{}_{2}) - \Lambda^{\mu}{}_{0}(\Lambda^{\nu}{}_{1}g_{2\alpha} - \Lambda^{\nu}{}_{2}g_{1\alpha})] \otimes x^{\alpha}\\ &+ \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} \otimes [\delta^{\alpha}{}_{0}(x_{2}\delta^{\beta}{}_{1} - x_{1}\delta^{\beta}{}_{2}) - \delta^{\beta}{}_{0}(x_{2}\delta^{\alpha}{}_{1} - x_{1}\delta^{\alpha}{}_{2})];\end{aligned} \tag{C.6}$$

由 $\delta^{\nu}{}_{0}$ 和 $\delta^{\mu}{}_{0}$ 分解的各项等于（C.5），其余各项相互抵消。

现在来看（B.4d）。为进行计算，我们回顾（4.5b）和（4.9）。计算左端可得：

$$x^{\nu}_{(1)}{}^{(\bar{1})}(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} \triangleleft x^{\nu}_{(2)}) \otimes x^{\nu}_{(1)}{}^{(\bar{2})} = \Lambda^{\nu}{}_{\lambda}(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} \triangleleft 1) \otimes x^{\lambda} + (\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} \triangleleft x^{\nu}) \otimes 1, \tag{C.7}$$

而对于右端：

$$(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} \triangleleft x^{\nu}_{(1)})x^{\nu}_{(2)}{}^{(\bar{1})} \otimes x^{\nu}_{(2)}{}^{(\bar{2})} = (\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} \triangleleft 1)\Lambda^{\nu}{}_{\lambda} \otimes x^{\lambda} + (\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} \triangleleft x^{\nu}) \otimes 1, \tag{C.8}$$

并借助 Λ 的交换性，证明了相容性要求。

D $\mathcal{U}_\varrho$（$\mathfrak{p}$）的对易关系的一些显式计算

在本附录中，我们提供证明新型 ϱ-庞加莱基的代数部分保持未变所需计算的详细过程。

我们将参照基变换（4.25），并提醒读者，未加波浪号的生成元构成标准庞加莱代数。我们希望证明，经过基变换后，代数部分保持不变。

仅涉及旋转和动量的对易子很容易得出。作为一个例子，我们来计算一下

$$\begin{aligned}[\tilde{R}_1,\tilde{P}_2]=&\Big[R_1\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)-R_2\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big),P_2\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)+P_1\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)\Big]\\ =&iP_3\cos^2(\frac{\varrho}{2}P_0)+iP_3\sin^2(\frac{\varrho}{2}P_0)=iP_3=i\tilde{P}_3.\end{aligned}\tag{D.1}$$

当涉及动量的第三个分量时，我们有，

$$\begin{aligned}[\tilde{R}_1,\tilde{P}_3]=&[R_1\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)-R_2\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big),P_3]\\ =&-iP_2\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)-iP_1\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)=-i\tilde{P}_2,\end{aligned}\tag{D.2}$$

得到标准的庞加莱结果。通过类似的计算，我们得出结论：

$$[\tilde{R}_i,\tilde{P}_j]=i\varepsilon_{ij}{}^kP_k.\tag{D.3}$$

涉及推动生成元的李括号更为复杂，因为它们意味着推动生成元对三角函数的作用。让我们以.....为例进行计算，

$$[\tilde{N}_1,\tilde{P}_1]=\Big[N_1\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)-N_2\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)+\frac{\varrho}{2}R_3\tilde{P}_1,P_1\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)-P_2\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)\Big].\tag{D.4}$$

利用以下结果（可通过归纳法轻松证明）

$$[N_1,(P_0)^k]=ik(P_0)^{k-1}P_1,\qquad k\in\mathbb{N},$$

the 涉及推进和 P_0 的三角函数的对易子可以验证为 b e

$$[N_1,\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)]=-i\frac{\varrho}{2}\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)P_1,\qquad[N_1,\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)]=i\frac{\varrho}{2}\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)P_1.\tag{D.5}$$

对于 N_2，类似的计算同样成立。因此，我们可以计算出（D.4）中的所有非平凡项。

$$\begin{aligned}&[N_1\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big),P_1\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)]=iP_0\cos^2(\frac{\varrho}{2}P_0)-i\frac{\varrho}{2}P_1^2\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big),\\ &[N_1\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big),P_2\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)]=i\frac{\varrho}{2}P_1P_2\cos^2(\frac{\varrho}{2}P_0),\\ &[N_2\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big),P_1\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)]=-i\frac{\varrho}{2}P_1P_2\sin^2(\frac{\varrho}{2}P_0),\\ &[N_2\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big),P_2\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)]=iP_0\cos^2(\frac{\varrho}{2}P_0)+i\frac{\varrho}{2}P_2^2\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big).\end{aligned}\tag{D.6}$$

将这些结果与（D.4）中标出的正确符号结合起来，我们得到

$$i(P_0 - \frac{\varrho}{2}(P_1\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big) - P_2\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big))(P_2\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big) + P_1\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big))) = i(\tilde{P}_0 - \frac{\varrho}{2}\tilde{P}_1\tilde{P}_2). \quad \text{(D.7)}$$

涉及旋转生成元的对易子中的剩余项给出

$$[\frac{\varrho}{2}\tilde{P}_1 R_3, \tilde{P}_1] = i\frac{\varrho}{2}\tilde{P}_1\tilde{P}_2, \quad \text{(D.8)}$$

恰好抵消了与 $\frac{\varrho}{2}$ 成比例的另一项。因此我们得出

$$[\tilde{N}_1, \tilde{P}_1] = i\tilde{P}_0. \quad \text{(D.9)}$$

类似的技巧可用于证明，新推进生成元与新平移生成元之间的对易子与标准庞加莱代数中的对易子相同。

至于洛伦兹扇区，类似的计算表明，旋转与推进之间的对易子也没有发生变形。棘手的是那些只涉及推动生成元的对易子。~ ~让我们分析一下 N_1 与 N_2 之间的对易子：

$$\begin{aligned}&[\tilde{N}_1, \tilde{N}_2] = \\ &= [N_1\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big) - N_2\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big) + \frac{\varrho}{2}R_3\tilde{P}_1, N_2\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big) + N_1\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big) + \frac{\varrho}{2}R_3\tilde{P}_2].\end{aligned} \quad \text{(D.10)}$$

引入简写记号

$$\begin{aligned}A &= N_1\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big) - N_2\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big), \qquad B = \frac{\varrho}{2}R_3\tilde{P}_1, \\ C &= N_2\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big) + N_1\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big), \qquad D = \frac{\varrho}{2}R_3\tilde{P}_2,\end{aligned} \quad \text{(D.11)}$$

我们需要计算量 $[A,C] + [B,C] + [A,D] + [B,D]$。我们从 $[A,C]$ 开始，并进一步将其拆分为涉及未加波浪号的推进生成元的对易子。

$$\begin{aligned}&[N_1\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big), N_2\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)] = [N_1, N_2]\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big) + N_1[\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big), N_2]\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big) \\ &+ N_2[N_1, \cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)]\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big) = i\big(-R_3\cos^2(\frac{\varrho}{2}P_0) + \frac{\varrho}{2}\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)(N_1P_2 - N_2P_1)\big), \\ &[N_1\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big), N_1\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)] = i\frac{\varrho}{2}N_1P_1, \\ &[N_2\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big), N_2\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)] = -i\frac{\varrho}{2}N_2P_2, \\ &[N_2\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big), N_1\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)] = i\big(R_3\sin^2(\frac{\varrho}{2}P_0) + \frac{\varrho}{2}\sin\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)\cos\Big(\frac{\varrho}{2}P_0\Big)(N_1P_2 - N_2P_1).\end{aligned} \quad \text{(D.12)}$$

按照（D.10）所规定的符号将这些项相加，得到

$$[A,C] = i\big(-R_3 + \frac{\varrho}{2}N_1P_1 + \frac{\varrho}{2}N_2P_2\big). \quad \text{(D.13)}$$

接下来，我们计算由下式给出的 $[A+B, D]$

$$[\tilde{N}_1, \frac{\varrho}{2}R_3\tilde{P}_2] = \frac{\varrho}{2}[\tilde{N}_1, R_3]\tilde{P}_2 + \frac{\varrho}{2}[\tilde{N}_1, \tilde{P}_2] = -i\frac{\varrho}{2}\tilde{N}_2\tilde{P}_2. \quad \text{(D.14)}$$

然后，$[B,C]$ 也可以轻松计算得出

$$[B,C] = [\frac{\varrho}{2}R_3\tilde{P}_1, \tilde{N}_2 - \frac{\varrho}{2}R_3\tilde{P}_2] = i\big(-\frac{\varrho}{2}\tilde{N}_1\tilde{P}_1 + \frac{\varrho^2}{4}R_3{\tilde{P}_1}^2 + \frac{\varrho^2}{4}R_3{\tilde{P}_2}^2\big). \quad \text{(D.15)}$$

汇总结果如下

$$[\tilde{N}_1,\tilde{N}_2]=i\big(-R_3+\frac{\varrho}{2}N_1P_1+\frac{\varrho}{2}N_2P_2-\frac{\varrho}{2}\tilde{N}_2\tilde{P}_2-\frac{\varrho}{2}\tilde{N}_1\tilde{P}_1+\frac{\varrho^2}{4}R_3{\tilde{P}_1}^2+\frac{\varrho^2}{4}R_3{\tilde{P}_2}^2\big). \tag{D.16}$$

利用（4.25），我们得到

$$\tilde{N}_1\tilde{P}_1+\tilde{N}_2\tilde{P}_2=N_1P_1+N_2P_2+\frac{\varrho}{2}R_3{\tilde{P}_2}^2++\frac{\varrho}{2}R_3{\tilde{P}_1}^2, \tag{D.17}$$

因此

$$[\tilde{N}_1,\tilde{N}_2]=-iR_3=-i\tilde{R}_3, \tag{D.18}$$

~ ~ ~与标准庞加莱情形类似。 N_1、 N_2 与 N_3 之间的对易子可用类似的方法计算，但中间步骤更少。

E 平面波在 κ-闵可夫斯基空间

该 κ-闵可夫斯基时空的特征是坐标之间具有非交换性，如（2.2）所示。根据 [52, 53], ，我们将坐标表示为以下形式的 5×5 矩阵：

$$\hat{x}^0=-i\ell\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \hat{x}^i=i\ell\begin{pmatrix}0&-\mathbf{e}^i&0\\-\mathbf{e}^{iT}&\mathbf{0}_{3\times3}&-\mathbf{e}^{iT}\\0&\mathbf{e}^i&0\end{pmatrix}, \tag{E.1}$$

其中 $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1,\ 2,\ 3}$ 是 $\mathbb{R}^3$的标准向量基。

我们发现，在这种情况下，平面波的时间右序也与双交叉积基中的平移生成元相关联。事实上，时间右序下的非交换 κ-平面波，

$$\hat{\phi}_R(p)=e^{ip_i\hat{x}^i}e^{ip_0\hat{x}^0}, \tag{E.2}$$

导致动量合成律

$$\begin{cases}(p\oplus_R k)_0=p_0+k_0,\\(p\oplus_R k)_i=p_i+e^{-\ell p_0}k_i.\end{cases} \tag{E.3}$$

定义时间右序平移算符 P^R_μ，使得 ˆ $\phi(p\oplus_R k)$ 为本征函数，

$$P^R_\mu\hat{\phi}(p\oplus_R k)=(p\oplus_R k)_\mu\hat{\phi}(p\oplus_R k), \tag{E.4}$$

可以证明，时间向右平移生成元的余乘就是众所周知的双交叉积余乘

$$\begin{aligned}\Delta P^R_0&=P^R_0\otimes1+1\otimes P^R_0,\\\Delta P^R_i&=P^R_i\otimes1+e^{-\ell P^R_0}\otimes P^R_i.\end{aligned} \tag{E.5}$$

另一方面，采用时间对称序的非交换 κ 平面波

$$\hat{\phi}_S(p)=e^{\frac{ip_0\hat{x}^0}{2}}e^{ip_i\hat{x}^i}e^{\frac{ip_0\hat{x}^0}{2}}, \tag{E.6}$$

则导出复合律

$$\begin{cases}(p\oplus_S k)_0 = p_0 + k_0,\\ (p\oplus_S k)_i = p_i e^{\frac{\ell k_0}{2}} + e^{\frac{-\ell p_0}{2}} k_i\,.\end{cases} \tag{E.7}$$

T这与时间对称平移生成元的余乘相容

$$P_\mu^S \hat{\phi}(p\oplus_S k) = (p\oplus_S k)_\mu \hat{\phi}(p\oplus_S k)\,, \tag{E.8}$$

其形式为

$$\begin{aligned}\Delta P_0^S &= P_0^S\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes P_0^S,\\ \Delta P_i^S &= P_i^S\otimes e^{\frac{\ell P_0^S}{2}} + e^{\frac{-\ell P_0^S}{2}}\otimes P_i^S.\end{aligned} \tag{E.9}$$

这些是 κ-庞加莱平移在所谓的标准基 [6] 下的余乘，并通过映射与双交叉积形式相关联 [1]

$$\begin{aligned}P_0^R &= P_0^S,\\ P_i^R &= P_i^S e^{-\frac{\ell P_0^S}{2}}.\end{aligned} \tag{E.10}$$

参考文献

[1] *S. Majid* 和 *H. Ruegg*，*κ*-庞加莱群的双交叉积结构与非交换几何，《物理快报 *B*》*334*（*1994*年） 348 [*hep-th*/9405107].[2] *V. G. Drinfeld*，杨–巴克斯特量子方程的常数准经典解，《苏联科学院通报》*273*（*1983*年） 531 [*http://mi.mathnet.ru/dan*9865].[3] *T. Jurić*、*S. Meljanac* 和 *A. Samsarov*，经由 *Drinfel'd* 扭曲实现的类光 κ-变形与标量场论，《物理学杂志：会议系列》*634*（*2015*年） 012005 [1506.02475].[4] *J. Lukierski*、*H. Ruegg* 和 *W. J. Zakrzewski*，自由 *κ* 相对论系统的经典量子力学，《物理学年鉴》*243*（*1995*年） 90 [*hep-th*/9312153].[5] *J. Lukierski*、*H. Ruegg*、*A. Nowicki* 和 *V. N. Tolstoi*，庞加莱代数的 *Q*-变形，《物理快报 *B*》*264*（*1991*年）*331*。[6] *J. Lukierski*、*A. Nowicki* 和 *H. Ruegg*，新量子庞加莱代数与 κ-变形场论，《物理快报 *B*》*293*（*1992*年）*344*。[7] *E. Celeghini*、*R. Giachetti*、*E. Sorace* 和 *M. Tarlini*，由 *SU(2)_q* 收缩得到的三维量子群，《数学物理学杂志》*31*（*1990*年）*2548*。[8] *P. P. Kulish*、*V. D. Lyakhovsky* 和 *A. I. Mudrov*，李代数的扩展约旦扭曲，《数学物理学杂志》*40*（*1999*年）*4569*[*https://doi.org/10.1063/1.*532987].
[9] *M. Gerstenhaber*、*A. Giaquinto* 和 *S. D. Schack*，量子对称性，载于《量子群》，*P. P. Kulish* 编，（柏林、海德堡），第 *9–46* 页，施普林格·柏林·海德堡，*1992*年

.

[10] V . N. Tolstoy, *Chains of extended jordanian twists for li并且超过lgeb* 2004 *ras,* .[11] *A. Borowiec* 和 *A. Pachol*，κ-闵可夫斯基时空作为约旦扭曲变形的结果，《物理评论*D*》*79*（*2009*年）*045012*。[12] *N. Reshetikhin*，多参数量子群与扭曲拟三角*Hopf*代数，《数学物理通讯》*20*（*1990*年）*331*。[13] *J.-G. Bu*、*H.-C. Kim*、*Y. Lee*、*C. H. Vac* 和 *J. H. Yee*，由扭曲产生的κ变形时空，《物理快报*B*》*665*（*2008*年） 95 [*hep-th*/0611175].[14] *T. R. Govindarajan*、*K. S. Gupta*、*E. Harikumar*、*S. Meljanac* 和 *D. Meljanac*，κ-闵可夫斯基时空中的扭曲统计，《物理评论*D*》*77*（*2008*年） 105010 [0802.1576].[15] *P. Kosinski* 和 *P. Maslanka*，非交换时空的洛伦兹不变解释：全局版本，*hep-th/0408100*。[16] *J. Lukierski* 和 *M. Woronowicz*，由扭曲庞加莱对称性得到的闵可夫斯基空间的新李代数型和二次变形，《物理快报 *B*》*633*（*2006*年）*116*。[17] *R. Oeckl*，解扭非交换*R**d*及量子场论的等价性，《核物理*B*》*581*（*2000*年） 559 [*hep-th*/0003018].[18] *J. Wess*，变形坐标空间：导数，载于第一届巴尔干数学、理论与唯象学标准模型之外挑战研讨会：巴尔干合作展望，第*122–128*页，*2003*年，*hep-th/0408080*，*DOI*。[19] *M. Chaichian*、*P. P. Kulish*、*K. Nishijima* 和 *A. Tureanu*，关于非交换时空的洛伦兹不变解释及其对非交换量子场论的影响，《物理快报*B*》*604*（*2004*年） 98 [*hep-th*/0408069].[20] *M. Chaichian*、*P. Presnajder* 和 *A. Tureanu*，非交换时空中相对论不变性的新概念：扭曲庞加莱对称性及其影响，《物理评论快报》*94*（*2005*年） 151602 [*hep-th*/0409096].[21] *M. Dimitrijević Ćirić*、*N. Konjik* 和 *A. Samsarov*，非极值*Reissner-Nordström*背景中的非交换标量场：准正规模谱，《物理评论*D*》*101*（*2020*年） 116009 [1904.04053].[22] *F. Lizzi* 和 *P. Vitale*，非交换性导致的时间离散化，《物理快报*B*》*818*（*2021*年） 136372 [2101.06633].[23] *F. Lizzi*、*L. Scala* 和 *P. Vitale*，ϱ-闵可夫斯基时空中的定位与观察者，《物理评论*D*》*106*（*2022*年） 025023 [2205.10862].[24] *M. Dimitrijevic Ciric*、*N. Konjik*、*M. A. Kurkov*、*F. Lizzi* 和 *P. Vitale*，角向扭曲产生的非交换场论，《物理评论*D*》*98*（*2018*年） 085011 [1806.06678].[25] *F. Lizzi*、*M. Manfredonia* 和 *F. Mercati*，κ-闵可夫斯基非交换时空的动量空间，《核物理*B*》*958*（*2020*年） 115117 [2001.08756]。

[26] *A. Sitarz*，*κ*-闵可夫斯基空间上的非交换微分演算，《物理快报*B*》*349*（*1995*年） 42 [*hep-th*/9409014].[27] *J. Kowalski-Glikman* 和 *S. Nowak*，双重狭义相对论理论的非交换时空，《国际现代物理杂志*D*》*12*（*2003*年） 299 [*hep-th*/0204245].[28] *M. Dimitrijevic*、*L. Jonke*、*L. Moller*、*E. Tsouchnika*、*J. Wess* 和 *M. Wohlgenannt*，*κ*-时空上的变形场论，《欧洲物理杂志*C*》*31*（*2003*年）*129*[*hep-th*/0307149].[29] *G. Amelino-Camelia*、*G. Gubitosi*、*A. Marciano*、*P. Martinetti* 和 *F. Mercati*，时空非交换性导致的无纯推动不确定性原理，《物理快报*B*》*671*（*2009*年） 298 [0707.1863].[30] *M. Arzano*、*J. Kowalski-Glikman* 和 *A. Walkus*，*κ*-闵可夫斯基空间上的洛伦兹不变场论，《经典与量子引力》*27*（*2010*年） 025012 [0908.1974].[31] *F. Lizzi*、*M. Manfredonia*、*F. Mercati* 和 *T. Poulain*，κ-闵可夫斯基时空中的定位与参考系，《物理评论*D*》*99*（*2019*年） 085003 [1811.08409].[32] *A. Ballesteros*、*G. Gubitosi*、*I. Gutierrez-Sagredo* 和 *F. Mercati*，具有κ-庞加莱对称性的模糊世界线，《高能物理学杂志》*12*（*2021*年） 080 [2109.09699].[33] *M. Arzano* 和 *J. Kowalski-Glikman*，κ-庞加莱*Hopf*代数的群论描述，《物理快报*B*》*835*（*2022*年） 137535 [2204.09394].[34] *G. Amelino-Camelia*，量子时空唯象学，《*Living Rev. Rel.*》*16*（*2013*年）*5*[0806.0339].[35] *J. Lukierski* 和 *H. Ruegg*，任意维度下的量子*κ*-庞加莱，《物理快报*B*》*329*（*1994*年） 189 [*hep-th*/9310117].[36] *J. Kowalski-Glikman* 和 *S. Nowak*，作为*κ*-庞加莱代数不同基底的双重狭义相对论理论，《物理快报*B*》*539*（*2002*年） 126 [*hep-th*/0203040].[37] *G. Gubitosi* 和 *F. Mercati*，κ-庞加莱中的相对局域性，《经典与量子引力》*30*（*2013*年） 145002 [1106.5710].[38] *G. Gubitosi* 和 *S. Heefer*，交互作用 κ-庞加莱模型的相对论相容性及其对相对局域性框架的影响，《物理评论*D*》*99*（*2019*年）*086019*[1903.04593].[39] *S. Gutt*，李群余切丛上的一个显式 $*$-积，《数学物理通讯》*7*（*1983*年）*249*。[40] *J. M. Gracia-Bondia*、*F. Lizzi*、*G. Marmo* 和 *P. Vitale*，可供选择的无穷多个星积，《高能物理学杂志》*04*（*2002*年） 026 [*hep-th*/0112092].[41] *G. Amelino-Camelia*、*L. Barcaroli*、*S. Bianco* 和 *L. Pensato*，普朗克尺度双曲率透镜效应与时空非交换性，《高能物理进展》*2017*年（*2017*年）*6075920* [1708.02429]。

[42] *M. D. Ćirić、N. Konjik* 和 *A. Samsarov*，《*Reissner–Nordström* 黑洞的非交换标量准正规模》，《经典与量子引力》*35*（*2018*年） 175005 [1708.04066].[43] *M. D. Ćirić、N. Konjik* 和 *A. Samsarov*，《探寻量子时空在黑洞准正规模谱中的印迹》，*10*，*2019*年，*1910.13342*.[44] *G. Amelino-Camelia、L. Barcaroli* 和 *N. Loret*，《横向相对局域性的建模》，《国际理论物理杂志》*51*（*2012*年） 3359 [1107.3334].[45] *K. Hersent* 和 *J.-C. Wallet*，《 ρ变形闵可夫斯基时空上的场论》，*2304.05787*.[46] *M. Kurkov* 和 *P. Vitale*，《*U(1)*规范理论的四维非交换变形与 L_∞ 自举》，《高能物理学杂志》*01*（*2022*年） 032 [2108.04856].[47] *G. Gubitosi、F. Lizzi、J. J. Relancio* 和 *P. Vitale*，《双重量子化》，《物理评论*D*》*105*（*2022*年） 126013 [2112.11401].[48] *S. Majid*，《代数学家的物理学：通过双交叉积构造得到的非交换与非余交换霍普夫代数》，《代数学杂志》*130*（*1990*年）*17*.[49] *S. Majid*，《与杨–巴克斯特方程解相关的李群匹配对》，《太平洋数学杂志》*141*（*1990*年）*311*。[50] *W. M. Singer*，《连通霍普夫代数的扩张理论》，《代数学杂志》*21*（*1972*年）*1*.[51] *G. Amelino-Camelia* 和 *S. Majid*，《非交换时空上的波与伽马射线暴》，《国际现代物理学杂志*A*》*15*（*2000*年） 4301 [*hep-th*/9907110].[52] *L. Freidel、J. Kowalski-Glikman* 和 *S. Nowak*，《重新审视*κ*-闵可夫斯基空间上的场论：诺特荷与洛伦兹对称性的破缺》，《国际现代物理学杂志*A*》*23*（*2008*年） 2687 [0706.3658].[53] *J. Kowalski-Glikman*，《生活在弯曲动量空间中》，《国际现代物理学杂志*A*》*28*（*2013*年） 1330014 [1303.0195].[54] *G. Felder* 和 *B. Shoikhet*，《带迹的变形量子化》，*math/0002057*.[55] *S. Galluccio、F. Lizzi* 和 *P. Vitale*，《采用*Wick–Voros*和*Moyal*乘积的扭曲非交换场论》，《物理评论*D*》*78*（*2008*年） 085007 [0810.2095].[56] *S. Galluccio、F. Lizzi* 和 *P. Vitale*，《平移不变性、对易关系与紫外/红外混合》，《高能物理学杂志》*09*（*2009*年），*054*。[57] *V. G. Kupriyanov* 和 *P. Vitale*，《通过闭星乘积实现的非交换 $\mathbb{R}^d$ 》，《高能物理学杂志》*08*（*2015*年），*024*。[58] *G. Amelino-Camelia、L. Barcaroli、G. D'Amico、N. Loret* 和 *G. Rosati*，《量子引力诱导的双重透镜效应与*IceCube* 中微子》，《国际现代物理杂志*D*》*26*（*2017*年） 1750076 [1609.03982]。

[59] *P. Kosinski* 和 *P. Maslanka*，《 κ-外尔群及其代数》，载于《从场论到量子群》，第*41–51*页，世界科技出版社，（*1996*年*6*月），*DOI*。[60] *P. Zaugg*，《由量子群缩并得到的量子庞加莱群》，《物理学杂志》*28*（*1995*年） 2589 [*hep-th/*9409100].[61] *A. Agostini*，《*κ-Minkowski* 非交换时空中的场与对称性》，那不勒斯费德里科二世大学博士论文，*2003*年。*hep-th/0312305*。[62] *V. Chari* 和 *A. Pressley*，《量子群指南》。剑桥大学出版社，*1995*年。[63] *S. Zakrzewski*，《与*κ*-庞加莱代数相关的量子庞加莱群》，《物理学杂志 *A*：数学与通论》*27*（*1994*年）*2075*。[64] *J. Lukierski* 和 *H. Ruegg*，《任意维度的量子 κ-庞加莱群》，《物理快报 *B*》*329*（*1994*年）*189*。