arXiv:2305.00612v1 [math.AP] 1 May 2023

缺少单调性公式时调和函数的渐近性

ZONGYUAN LI

摘要。本文研究调和函数的渐近性。一种典型方法是证明某种重标度狄利克雷能量的单调性公式，并据此研究重整化解——Almgren 爆破。然而，这类单调性公式要求区域和算子满足严格的光滑性假设。我们关注无法使用单调性公式的情形，包括含无界低阶项的变系数方程、粗糙（非C^1）区域上的狄利克雷问题，以及罗宾势粗糙的罗宾问题。

1. 引言

我们讨论椭圆方程的解在内点和边界点附近的渐近性。先从一个简单情形说起。考虑有界区域 $\Omega \subset \mathrm{R}^d$ 内的调和函数u。在内点$x_0 \in \Omega$附近，我们知道u 是解析的:

$$u = \sum_{\alpha} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha = \sum_k P_k(x-x_0)$$
$$= P_N(x-x_0) + O(|x-x_0|^{N+1}). \tag{1.1}$$

这里，P_k 是一个次数为k 的齐次调和多项式，且P_N 表示首项。众所周知，类似于（1.1）的展开公式可能很有用；然而，在存在变系数算子或粗糙区域时，这类公式并不总是适用。例如，在 R^2,的极坐标（r, θ）下，考虑

$$u = \mathrm{Re}\frac{re^{i\theta}}{\log(re^{i\theta})}, \quad r > 0, \theta \neq \pi. \tag{1.2}$$

见图1。可以看出，u 在图1所示的封闭区域内是调和的，并且在由$r = e^{\theta \tan\theta}$给出的边界上等于零，但在（$r, \theta$）$=(1, 0)$处除外，此处$u$ 有一个极点。显然，由于对数漂移，不可能写出类似于（1.1）的展开式。

为了刻画类似 (1.2) 这样的函数的渐近行为，通常会使用“Almgren 爆破”——其重标度极限为 $\lambda \to 0$ 的

$$u_\lambda(\cdot) = \frac{u(\lambda\cdot)}{(\fint_{\partial B_\lambda} |u|^2)^{1/2}}. \tag{1.3}$$

2010数学主题分类。35J15, 35J25, 35B40。关键词与短语。唯一延拓、渐近展开、倍增指标、Almgren 单调性公式。Z. Li 获得了部分 AMS-Simons 旅费资助。

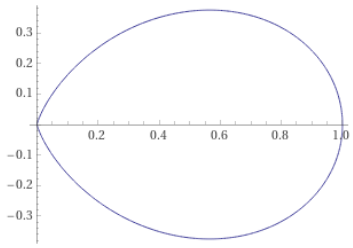

图1。Re(z/ log$z$) 的节点集

对于 (1.2) 中的u，可以直接看出，$(\fint_{\partial B_\lambda} |u|^2)^{1/2} \approx \lambda \log(\lambda)$，且$u_\lambda \to Cr\cos(\theta)$，当$\lambda \to 0$时，其中$C$ 是归一化因子。

实际上，这种收敛性由一个更一般的定理保证——凸区域上的阿尔姆格伦单调性公式。下面介绍其动机和方法。一般来说，我们希望证明族 $\{u_\lambda(\cdot)\}_{\lambda\in(0,1)}$ 具有一个或多个极限。为此，我们估计如下的重标度狄利克雷能量

$$F(r) = \frac{rD(r)}{H(r)} = \frac{r\int_{B_r} |\nabla u|^2}{\int_{\partial B_r} |u|^2}. \tag{1.4}$$

阿尔姆格伦观察到，如果 $\Delta u = 0$ 在 B_1, $F(r)$ 中，则其关于$r \in$ 在 (0, 1) 上单调递增。由此，$\{u_\lambda\}_{\lambda\in(0,1)}$ 在 H^1, 中一致有界，因此在 L_2 中是紧的。在文献中，类似于 (1.4) 的量通常被称为（广义）阿尔姆格伦频率。其单调性在爆破分析中发挥着重要作用。在本文中，我们关注三个更一般的问题。

变系数方程，内部。

$$D_i(a_{ij}D_j u) + W_i D_i u + Vu = 0 \quad \text{in } B_1, \tag{1.5}$$

其中a^{ij} 是对称、有界且一致椭圆的。在 [7], 中，Garofalo-Lin 证明，若$a_{ij} \in C^{0,1}$, W_i、$V \in L_\infty$，则 (1.4) 中F 的一个修正版几乎单调。由于唯一延拓中的经典反例，条件$a_{ij} \in C^{0,1}$ 无法进一步改进。稍后我们将讨论W_i、V无界的情形。

狄利克雷问题，边界。假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 且 $0 \in \partial\Omega$。

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \cap B_1, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \cap B_1. \end{cases} \tag{1.6}$$

当 Ω 是半空间或圆锥时，单调性公式成立。对于曲线区域，在 [13, 2, 1], 中，已证明 (1.4) 中F的某些变体在$C^{1,1}$, 凸区域和$C^{1,Dini}$ 区域上分别几乎单调。文献 [15]中也讨论了C^1 区域。值得一提的是，推导单调性公式需要法向方向$\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}$ 连续，而粗糙区域（例如一般的利普希茨区域）不具备这一性质。

诺伊曼和Robin问题，边界。假设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 且 $0 \in \partial\Omega$。

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \cap B_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \eta u \quad \text{on } \partial\Omega \cap B_1. \end{cases} \tag{1.7}$$

同样，当 Ω 是半空间或圆锥，且 $\eta = 0$（诺伊曼）时，单调性公式成立。在 [1, 6], 中，这进一步推广到了以下情形：$\partial\Omega \in C^{1,1}$且 $\eta \in C^{0,1}$（或 $\eta \in W^{1,1}$，并对 $\nabla\eta$ 有某种逐点控制）。另见 [12]中的尖锐定量版本。在所有这些工作中，不能去掉 η 的可微性；因此，即使在 η 非负且有界的情况下，关于具有粗糙 η 的 (1.7) 的渐近分析仍然是一个悬而未决的问题。例如，参见 [5]中的开放问题。

2. 单调性公式的替代方案：倍增指标的收敛性

罗宾问题和变系数ffi方程。在最近的一项工作中，我们证明了以下奇异集估计。

定理 2.1([11], 定理 1.1 (b))。 设 $\Omega(\subset \mathbb{R}^d) \in C^{1,1}$, $d \geq 2$，且 $\eta \in L^p(\partial\Omega)$ 对某个 $p > 2(d-1)$成立。那么对于任何满足 (1.7)的非平凡解 $u \in H^1$，我们有

$$\dim(\{u = |\nabla u| = 0\} \cap \Omega \cap B_{1/2}) \leq d - 2.$$

这种估计依赖于对内部点和边界点附近进行放大分析。如前所述，只有当 η 可微时，才能证明单调性公式。在 [11], 中，我们首先构造一个辅助函数，并将问题化归为对具有 $a_{ij} \in C^{0,1}$ 和 $W_i, V \in L^q$ 且满足 $q > d$ 的 (1.5) 进行放大分析。然而，仍然没有可用的单调性公式——请回想 Garofalo-Lin[7] 的工作要求 $W_i, V \in L_\infty$。

这要求我们为放大分析设计更稳健的方法。事实证明，我们用来证明定理 2.1 的 Federer 维数约化论证只需要以下条件：

(a) 对“重缩放”边值问题有一致的C^1 估计；(b) 放大序列 (1.3) 的紧性，其中 $\lambda \to 0$；(c) 沿子列，(1.3) 的放大极限具有齐次性。

在 [11], 中，(a) 借助前述辅助函数和标准W^2_p 正则性理论得以实现。对于通常通过单调性公式证明的 (b) 和 (c)，我们证明如下替代结果。

引理 2.2 ([11] 引理 4.2)**.** 设 $u \in H^1$ 是(1.5) 的弱解，且

$$\fint_{B_r} \left(|a_{ij} - a_{ij}(0)|^2 + r^2|W|^2 + r^4|V|^2\right) \to 0, \quad as\ r \to 0. \tag{2.1}$$

那么，

$$\log_2\left(\frac{\fint_{B_{2r}} |u|^2}{\fint_{B_r} |u|^2}\right)^{1/2} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \quad as\ r \to 0.$$

注2.3. (a) 条件 (2.1) 在缩放后自然出现：若 u 是 (1.5) 的解，则u_λ 是其解

$$D_i(a_{ij}(0)D_j u_\lambda) = D_i((a_{ij}(0) - a_{ij}(\lambda\cdot))D_j u_\lambda) - \lambda W_i(\lambda\cdot)D_i u_\lambda - \lambda^2 V(\lambda\cdot)u_\lambda.$$

(b) 条件 (2.1) 由$a_{ij} \in C^0$, $W_i \in L_d$ 和 $V \in L^{d/2}$ 保证。

(c) 我们将结合引理 2.2 和强唯一延拓性质在 [9, 3] —若 $a_{ij} \in C^{0,1}, W_i \in L_{d+\varepsilon}, V \in L^{d/2}$（或者当 $V \in L_{1+\varepsilon}$ 时）$d = 2$，引理 2.2 中的极限必定有限。

在引理 2.2 中，我们研究倍增指标

$$N(r) := \log_2 \frac{(\fint_{\partial B_{2r}} |u|^2)^{1/2}}{(\fint_{\partial B_r} |u|^2)^{1/2}}$$

而不是频率$F(r)$。注意，当u 恰好是一个次数为k的齐次多项式时，$N(r) \equiv k$。因此，引理 2.2 可以解读为“极限齐次性的存在性”。简单计算可知，对于调和函数，在内点附近

$$N(r) = \int_r^{2r} \frac{F(s)}{s}\, ds.$$

因此，F 的单调性意味着，当$r \to 0$时，N收敛。然而，引理 2.2 中的条件远弱于单调性公式的条件——回想一下，在 [7], 中要求$W_i, V \in L_\infty$。因此，我们预期引理 2.2 的结论可作为放大分析中更稳健的工具。

引理 2.2 的证明借鉴了 Lin-Shen [14] 研究均匀化时的思想。本质上，这依赖于这样一个事实：调和函数的单调性公式具有刚性性质。

引理 2.4. 设 u 是 B_1 中的调和函数。那么，其 *Almgren* 单调性函数 F ((1.4)) 要么在 $r \in (0,1)$ 上严格递增；要么对某个 $k \in \mathbb{N}$，$F \equiv k/\log 2$，且 u 是次数为 k 的齐次调和多项式。

由引理 2.4 可知，对于任意非整数实数 μ，随着r 减小到一定的小尺度后，u 的倍增指标$N(r)$将不再从低于 μ 跃升至高于 μ。因此，$N(r)$会被限制在某个整数附近，由此可得引理 2.2。

圆锥点附近的狄利克雷问题。

在最近与 Dennis Kriventsov 合作的一项研究中，我们也考察了调和函数的边界渐近行为。关于边界唯一延拓，一个由来已久的猜想提出：

猜想 2.5。 设$u \in H^1$ 是利普希茨区域 Ω 上方程 (1.6) 的一个弱解。若 $\{\partial u/\partial \boldsymbol{n} = 0\} \cap \partial\Omega$ 具有正的曲面测度，则必有$u \equiv 0$。

该猜想在 $\Omega \in C^{1,1}, C^{1,Dini}$且$C^1$ 属于 [13,2], 、 [1], 的情形下，已通过 Almgren 单调性公式的若干变体得到证明。对于此类公式，$\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}$ 的连续性似乎不可或缺，而在一般的利普希茨区域中，$\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}$ 通常并不连续。我们的目标是研究$\boldsymbol{n}$ 不连续的情形。若点$x_0 \in \partial\Omega$ 满足以下条件，则称其为圆锥点：

$$\frac{(\Omega - x_0) \cap B_r}{r} \to \Gamma_{x_0} = \text{cone}.$$

显然，所有可微的 C^1 点都是圆锥点，且 Γ 为切平面。此外，由于单调性，凸区域的任意边界点都是圆锥点。在 [10], 中，我们证明如下结论。

定理 2.6 （[10]）。 假设 $0 \in \partial\Omega$ 是一个圆锥点，且 $u \in H^1$ 是 （1.6） 的一个非平凡解。那么，u 的极限齐次性存在。也就是说，

$$\log_2 \frac{(\fint_{\partial B_{2r}\cap\Omega} |u|^2)^{1/2}}{(\fint_{\partial B_r\cap\Omega} |u|^2)^{1/2}} \to \{\mu_j\}_j \cup \{+\infty\} \quad as\ r \to 0,$$

其中 μ_j 是由 Δ 在极限锥 Γ上的谱决定的数。

值得一提的是，我们的定理只要求在 $0 \in \partial\Omega$ 处满足单点条件——并不需要 Ω 光滑。

3。爆破的唯一性及其展开 MULA

问题 3.1。 (1.3) 中的子序列极限何时唯一?

另一方面，自然还可以进一步提出这样的问题。

问题 3.2。 保证爆破极限存在的单调性公式，是否也能保证这类极限的唯一性?

当维数为二维时，答案是肯定的。这仅仅是因为在二维中，拉普拉斯算子的所有特征空间都是一维的。在更高维的情形下，答案一般是否定的。在 [10], 中，我们构造了一个凸区域 Ω 和一个调和函数u，它满足该区域上的狄利克雷问题 (1.6)。根据 [2], ，由于区域的凸性，Almgren 单调性公式成立。然而，沿着不同的子序列，爆破极限可能各不相同。实际上，我们的$\{u_\lambda\}_{\lambda\in(0,1)}$ 在一个二维特征空间内旋转。

另一方面，显然，类似 (1.1) 的展开公式会导出爆破极限的唯一性。很容易看出，该极限必定恰好是首项P_N，相差一个归一化因子。对于狄利克雷问题，我们在 [10]中证明，一个略强于“锥形”的条件——H¨older 锥形——将导出这样的展开公式。若点$x_0 \in \partial\Omega$满足以下条件，则称其为 H¨older 锥形:

$$\frac{\operatorname{dist}((\Omega - x_0) \cap B_r, \Gamma_{x_0})}{r} \le Cr^\alpha, \quad \text{for some } \alpha > 0.$$

定理3.3 ([10])。 设 $0 \in \partial\Omega$ 是 *Hölder* 圆锥域。则对于满足 (1.6) 的任意非平凡解 u，要么 $u = O(|x|^N)$ 对所有 $N > 0$成立，要么存在一个 μ_j-齐次调和多项式 P^{μ_j} 定义在圆锥 Γ 上，使得

$$u(x) = P_{\mu_j}(x) + v(x), \quad and \ (\fint_{B_r\cap\Omega} |v|^2)^{1/2} \le Cr^{1+\varepsilon\alpha}.$$

对于 Robin问题 (1.7) 以及具有变系数的内部问题 (1.5)，也有类似性质——某些缩放次临界假设会导出唯一性。我们预期如下:

在引理 *2.2* 中，如果我们将 (2.1) 替换为 $a_{ij} \in C^\alpha$，$W_i \in L_{d+\varepsilon}$，以及 $V \in L_{d+\varepsilon}$，那么要么 $u = O(|x|^N)$对所有 $N > 0$成立，要么存在某个 k-齐次调和多项式 P_k，我们可以 *expand*

$$u(x) = P_k(x) + O(|x|^{k+\varepsilon'}).$$

预计证明将类似于 [8]中的论证。实际上，对于高阶项，也预计可以得到梯度估计。由此，结合 [8] 和 [11], 中的论证，可以进一步证明奇异集的分层，这比我们在定理 2.1 中的豪斯多夫维数估计更强。

参考文献

[1] Vilhelm Adolfsson 和 Luis Escauriaza。$C^{1,\alpha}$ 区域与边界唯一延拓。《纯粹与应用数学通讯》，50(10):935–969，1997年。[2] Vilhelm Adolfsson、Luis Escauriaza 和 Carlos Kenig。凸区域与边界唯一延拓。《伊比利亚美洲数学评论》，11(3):513–525，1995年。

[3] Giovanni Alessandrini。二维一般椭圆方程的强唯一延拓。《数学分析与应用杂志》，386(2):669–676，2012年。[4] Frederick J. Almgren, Jr.。多值函数的狄利克雷问题与质量极小积分流的正则性。载于《极小子流形与测地线》（*1977*年日美研讨会论文集，东京），第1–6页。North-Holland，阿姆斯特丹—纽约，1979年。[5] Laurent Baratchart、Laurent Bourgeois 和 Juliette Leblond。具有有界系数的反罗宾问题的唯一性结果。《泛函分析杂志》，270(7):2508–2542，2016年。[6] Serena Dipierro、Veronica Felli 和 Enrico Valdinoci。圆锥中非零诺伊曼边界条件下的唯一延拓原理。《庞加莱研究所年刊´：非线性分析´，37(4):785–815，2020年。[7] Nicola Garofalo 和 Fang-Hua Lin。椭圆算子的唯一延拓：几何变分方法。《纯粹与应用数学通讯》，40(3):347–366，1987年。[8] Qing Han。椭圆方程解的奇异集。《印第安纳大学数学杂志》，43(3):983–1002，1994年。[9] Herbert Koch 和 Daniel Tataru。非光滑系数二阶椭圆方程的卡尔曼估计与唯一延拓。《纯粹与应用数学通讯》，54(3):339–360，2001年。[10] Dennis Kriventsov 和 Zongyuan Li。调和函数在圆锥点处的渐近行为。准备中。[11] Zongyuan Li。含可测势的罗宾问题解的节点集与奇异集。*arXiv* 电子预印本，页码 arXiv:2304.04342，2023年4月。[12] Zongyuan Li 和 Weinan Wang。$C^{1,1}$ 区域上罗宾边值问题的定量唯一延拓。*arXiv* 电子预印本，页码 arXiv:2111.01766，2021年11月。[13] Fang-Hua Lin。椭圆与抛物方程解的节点集。《纯粹与应用数学通讯》，44(3):287–308，1991年。[14] Fanghua Lin 和 Zhongwei Shen。椭圆均匀化中的节点集与倍增条件。《数学学报（英文版）》，35(6):815–831，2019年。[15] Xavier Tolsa。C^1 区域及小常数利普希茨区域中调和函数的边界唯一延拓。《纯粹与应用数学通讯》，76(2):305–336，2023年。

(Z. Li) 罗格斯大学数学系，110 Frelinghuysen Road，皮斯卡塔韦，新泽西州 08854-8019，美国电子邮箱地址: zongyuan.li@rutgers.edu