arXiv:2305.00613v1 [physics.optics] 1 May 2023

利用核共振实现引力敏感型结构化 X 射线光学

Shin-Yu Lee，[1]Sven Ahrens，[2]和 Wen-Te Liao[1]，3,4，*[1]物理系，国立中央大学，台湾桃园市 *32001*[2]上海师范大学，中国上海 *200234*[3]物理部，国家理论科学研究中心，台湾台北 *10617*[4]量子技术中心，台湾新竹 *30013*（日期：2023年5月2日）

爱因斯坦的广义相对论不仅彻底改变了人类对宇宙的认识，也推动了大尺度上的许多引力应用，例如引力波天文学 [1], 引力透镜 [2], 以及全球定位系统的运行 [3]。然而，在地球上针对微小空间尺度上的引力效应实现应用，仍然是一项挑战。在此，我们研究了一种结构化波导系统，利用 X射线的核共振散射 [4, 5]，能够控制海拔高度间隔为毫米级甚至更短距离的 X 射线轮廓。我们的研究结果表明，可以采用一种紧凑的方案，将地球引力转化为 X 射线光学中的实际应用。

庞德–雷布卡实验 [6]通过利用穆斯堡尔效应 [7]中的极窄核线宽与高 X 射线能量相结合，展示了一种探测引力红移效应的独特系统。¨此外，现代 X 射线光源和光学技术的进步，使 X 射线与原子核相互作用领域的精度提升到了新水平，相干量子控制也由此发挥作用[8–21]。核量子相干性及其对引力的敏感性相结合，有望带来一种新型 X 射线光学，其性能除受典型的塞曼位移 [8, 12] 和多普勒位移 [14, 17–19]影响外，还取决于引力红移。在此背景下，我们研究了一种模拟薛定谔方程 [22] 且对引力敏感的系统。¨对于给定的波导结构，本方案可通过改变系统的高度、X 射线光子能量或外磁场，系统地生成结构化 X 射线 [23–26] 。

系统如图1所示，描述如下。在图1(a)中，X射线驱动核跃迁，使其从基态 $|g\rangle$ 跃迁至激发态 $|e\rangle$ ，总失谐为 $\Delta_t\Gamma = (\Delta_G + \Delta)\Gamma$ 。我们强调，当系统位于与X射线发射位置不同的海拔高度 z 时，必须考虑引力红移 $\Delta_G \simeq -zE_tGM_E/\left(\hbar\Gamma c^2R_E^2\right)$ 。其中， E_t 为核跃迁能量，G 为引力常数，M_E 为地球质量， R_E 为地球平均半径。 $\Delta\Gamma$ 为X射线失谐， Γ 为激发态 $|e\rangle$的自发衰变率。我们的X射线核共振散射系统可由光学布洛赫方程 [9, 21]描述:

$$\partial_t\rho_{eg} = -\Gamma\left[\frac{1}{2} - i\left(\Delta + \Delta_G\right)\right]\rho_{eg} + \frac{i}{2}\frac{P}{\hbar}E, \quad (1)$$

$$\frac{1}{c}\partial_t E + \partial_y E = \frac{-1}{2ik}\nabla_\perp^2 E - \frac{k}{2i}(n_e^2 - 1)E + i\eta\rho_{eg}, \quad (2)$$

其中 ρ_{eg} 是核两能级系统的相干性， E是X射线电场强度， $\hbar$ 是约化普朗克常数， k 是X射线波数， n_e 是电子折射率。此外，我们将横向拉普拉斯算符记为 $\nabla_\perp^2 = \partial_x^2 + \partial_z^2$，将耦合常数记为$\eta = 2\hbar\Gamma\xi/(PL)$，其中 L是波导的长度， P是核跃迁偶极矩， ξ 是核共振厚度。方程 (1-2) 的稳态给出解析解 $\rho_{eg} = PE(i - 2\Delta_t) / \left[\hbar\Gamma\left(1 + 4\Delta_t^2\right)\right]$ 以及光学薛定谔方程 [22]（参见补充信息）

$$i\hbar c\partial_y E = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla_\perp^2 E + \hbar c\left[\frac{k(1 - n_e^2)}{2} + \frac{4\xi\Delta_t}{L\left(1 + 4\Delta_t^2\right)}\right]E, \quad (3)$$

其有效质量为 $m_e = \hbar k/c$。方程（3）表明，可以构建一个由共振原子核组成的结构化X射线波导（SXWG）系统，如图1(b)所示，通过对 n_e 和 ξ进行空间工程设计，该系统具有高度的自由度，可用于模拟不同的量子系统。图1(c)显示了同位素^{45}Sc中 ρ_{eg} 在 $\Delta = 0$ 条件下实部 $Re\left[\rho_{eg}\right]$ （蓝色实线）和虚部$Im\left[\rho_{eg}\right]$ （红色虚线）随海拔高度的变化。 $Re\left[\rho_{eg}\right]$ 描述了原子核折射率，并通过方程（3）的最后一项体现为系统中的引力效应。相比之下，洛伦兹线型的 $Im\left[\rho_{eg}\right]$ 代表X射线的核吸收，并引出庞德–雷布卡实验 [6]。

接下来，我们使用SXWG模拟宽度为 L_x的有限深方势阱中的X射线拉比振荡。如图1(d)所示，我们为 $|x| > L_x/2$ 引入铂包层$n_e = 1 - \delta_{\mathrm{Pt}} + i\beta_{\mathrm{Pt}}$ ，以构成有限深方势阱势，从而在横向上约束X射线沿 [21]方向传播。包层材料使方程（3）中的 E 场具有如下能量本征函数（见补充信息）

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L_x}}\sin\left[\frac{n\pi}{L_x}\left(x + \frac{L_x}{2}\right)\right], \quad (4)$$

其本征角频率为 $\omega_n = n^2\pi^2c/\left(2kL_x^2\right)$.在方势阱 $|x| \le L_x/2$内，我们沿 y 方向（x 方向）引入同位素 X 和碳的周期性（梯度）粒子分布，对系统进行微扰，其中 $\xi(x, y) = (\varrho/2)\left[1 + (2x/L_x)\sin(k_d y)\right]$ 且 $n_e(x, y) = 1 - \delta_{\mathrm{C}}(x, y) + i\beta_{\mathrm{C}}(x, y) - \delta_{\mathrm{X}}(x, y) + i\beta_{\mathrm{X}}(x, y)$（ n_e的具体形式见补充信息）。在图1(d)中，下标 Pt、C 和 X

表 I. **核与波导材料参数**。对于每种同位素 X，我们给出核跃迁能量 E_t 和辐射衰变率 Γ。最后六列列出了 SXWG 材料 [5, 27, 28]的 X 射线折射率 $n_e = 1 - \delta + i\beta$。

X	E_t (keV)	Γ (MHz)	$\delta_X(10^{-6})$	$\delta_C(10^{-6})$	$\delta_{Pt}(10^{-5})$	$\beta_X(10^{-9})$	$\beta_C(10^{-9})$	$\beta_{Pt}(10^{-6})$
^{45}Sc	12.4	2.18×10^{-6}	3.84	2.97	2.091	131.9	1.78	2.737
^{57}Fe	14.413	7.05	7.43	2.20	1.607	338.9	0.93	2.49
^{73}Ge	13.275	0.24	5.41	2.59	1.622	508.9	1.32	2.947
^{181}Ta	6.238	0.11	67.74	11.77	8.731	7987.3	32.76	12.616
^{182}Ta	16.273	2.45×10^{-6}	10.41	1.72	1.304	1062.2	0.55	1.642

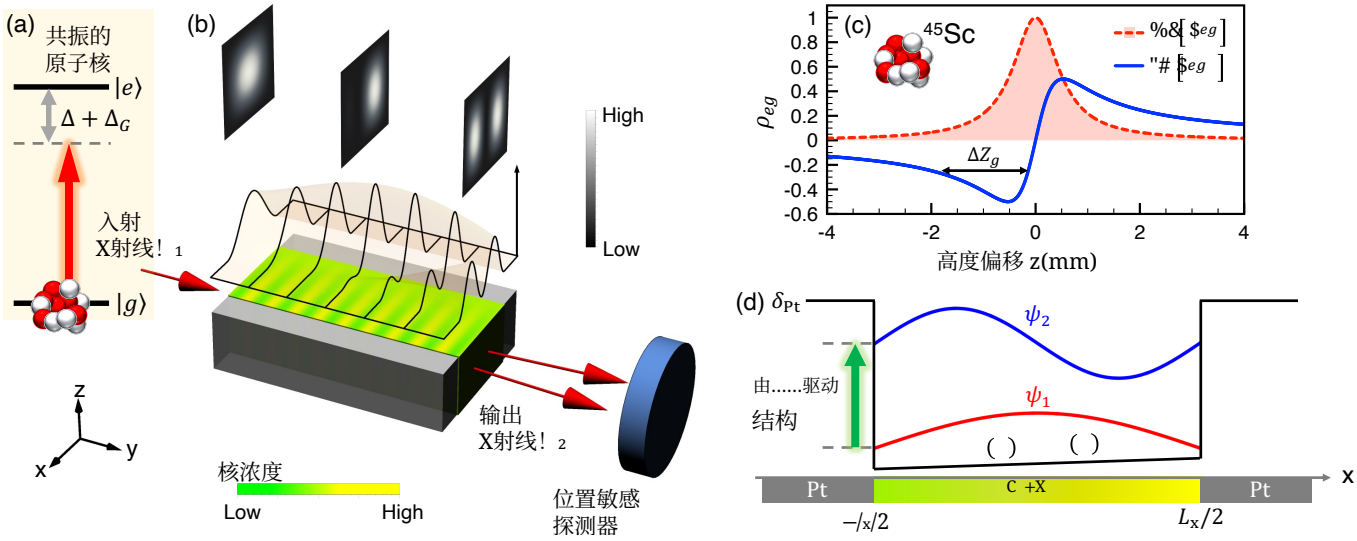

图1。(a)入射X射线（红色向上箭头）驱动核跃迁 $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$，其失谐为 $\Delta + \Delta_G$（灰色竖直双箭头）。Δ 为X射线失谐，Δ_G 为X射线引力红移。(b)横向模式为 ψ_1 的硬X射线（红色箭头）在结构化铂包层波导中传播，波导内具有周期性核分布，其空间浓度由水平的绿—黄色图例表示。下游的位置灵敏探测器（蓝色厚圆盘）测量模式为 ψ_2 的输出X射线。顶部黑色曲线和灰度图像表示波导内X射线强度。(c) SXWG中，核基态 $|g\rangle$ 与同位素 ^{45}Sc 的激发态 $|e\rangle$ 之间的核相干性 ρ_{eg} 随海拔高度的变化。红色虚线（蓝色实线）表示核 ρ_{eg}的虚部（实部）。黑色水平双箭头表示半峰值 $|Re\,[\rho_{eg}]\,|$处的全高度宽度 ΔZ_G。(d) SXWG的电子折射率沿横向（x方向）呈梯度变化，沿纵向（y方向）呈周期性变化。在铂包层之间，由碳和X同位素构成的波导内结构驱动从X射线基态 ψ_1（红色实线）到第一激发态 ψ_2（蓝色实线）的跃迁。

分别表示铂、碳和共振核。其他相关材料参数列于表 I。对于上述密度调制，式 (3) 中的最后一项实际上变为振荡场中的电偶极哈密顿量，它对方势阱势产生扰动。这是驱动具有引力敏感性的 X 射线拉比振荡的关键。当共振条件 $ck_d = \omega_{n+1} - \omega_n$ 满足时，折射率的周期结构驱动偶极跃迁 $\psi_n \to \psi_{n+1}$，其有效拉比频率为（见补充信息）

$$\Omega_n = \frac{16\varrho n\,(n+1)\,c}{\pi^2\,(2n+1)^2\,L}\left[\frac{k\,(\delta_{\mathrm{C}} - \delta_{\mathrm{Sc}})}{2N\sigma_0} + \frac{2\Delta_t}{1+4\Delta_t^2}\right]. \quad (5)$$

传播中的 X 射线会经历由 SXWG 产生的恒定拉比频率，而产生一个 $m\pi$ 脉冲的条件是$|\Omega_n|L/c = m\pi$。我们通过数值求解式 (3)，使用 $m = 2$ 展示 X 射线基态 ψ_1 与第一激发态 ψ_2 之间的拉比振荡。

图 2 中公式 (3) 的解表示一束 X射线穿过 SXWG，其中 X =^{45}Sc,ϱ = 26.25、钪的天然粒子密度为 N = $3.99 \times 10^{28}\mathrm{m}^{-3}$、核共振吸收截面 σ_0 = 12.6(kbarn)、L_x = 100nm、L = 4mm、k_d = 22.778×10^3 rad/m、Δ = 4Γ 和 Δ_G = 0。该过程通过保真度 F_n $(y) = |\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\, E(x,\ y)\, dx|^2 / \int_{-\infty}^{\infty} |E(x,\ y)|^2 dx$ 在图 2(a) 中，以及归一化的波导内X射线强度分布 $|E(x,\ y)|^2 / \int_{-\infty}^{\infty} |E(x,\ y)|^2 dx$ 在图 2(b) 中进行可视化。图 2(a) 中 F_1 和 F_2 的交替清楚地表明，基态 X射线在 $y = 0$进入 SXWG，并在接近$y = 2$mm 时相干地跃迁至第一激发态。之后，X射线返回基态，并

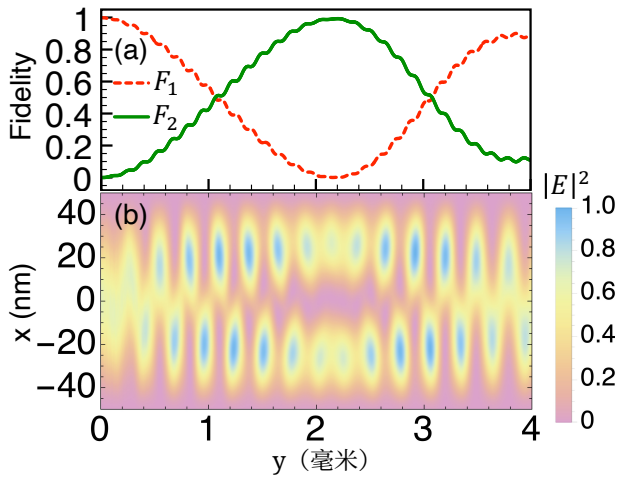

图 2. (a) 保真度 F_1 （红色虚线）和 F_2 （绿色实线），以及 (b) 归一化波导内 X 射线强度分布，展示了 ψ_1 与 ψ_2 之间一个完整的 X 射线拉比振荡周期。处于 ψ_1 态的入射 X 射线分裂，并在 $y = 2$ mm 处达到 ψ_2 态横向双峰间距的最大值，此处也出现最大 F_2。当 $y > 2$ mm 时，X 射线汇聚反映了拉比周期的后半段，横向 X 射线图样则趋于返回 ψ_1 态。

在 $y = 4$mm 处完成一个完整的拉比周期。在图 2(b) 中，也可以从波导内X射线强度观察到同样的现象，其在状态 ψ_1 和 ψ_2 之间往复变化。

上述 X 射线拉比振荡表明，可通过一系列驱动 $\Delta n = 1$ 跃迁的 SXWG，以系统的方式生成 ψ_n 模式，并逐次提高量子数。具体而言，可以连接两个不同的 SXWG 来实现 $\psi_1 \to \psi_3$ 跃迁，其中上游 SXWG 驱动 $\psi_1 \to \psi_2$ 跃迁，下游 SXWG 则实现 $\psi_2 \to \psi_3$ 激发。此外，还可以针对 $\Delta n = 2$ 或任何电偶极禁戒跃迁设计多个 SXWG 模块。因此，SXWG 模块的各种组合能够实现从基态 ψ_1 开始生成高阶 X 射线模式。值得一提的是，另一种可能的应用是将两个 SXWG 留出间隙并组成 X 射线干涉仪。上游 SXWG 作为分束器引发 $\psi_1 \to \psi_2$ 跃迁，而下游 SXWG 则作为合束器使 $\psi_2 \to \psi_1$ 返回。此外，可以在两个 SXWG 之间的间隙中引入相位调制器，对分裂态 ψ_2 的一个分支施加相移，例如图 2 中 $y = 2$ mm 处的 $x > 0$。预计相位调制会在下游 SXWG 末端产生可控干涉。

我们现在可以展示地球引力效应对 SXWG 系统的影响。正如图1(c)所示，在地球上相隔两毫米时，引力红移Δ_G 会显著改变式 (5) 中的核相干性 ρ_{eg} 和拉比频率 Ω_n。这种灵敏度有望使引力得到实际应用，例如用于对引力敏感的 X 射线光学。为说明这一效应，我们对式 (3) 进行数值求解，并在参数为$\varrho = 8.38$、$L_x = 100$nm、$L = 2$mm、$k_d = 23.778 \times 10^3$rad/m 和 Δ = 19.36 的 SXWG 中使用同位素 ^{45}Sc，以展示引力效应。图3(a)展示了上述 SXWG 分别位于自上而下 z = 2.32cm、z = 2cm 和 z = 1.72cm 处的三种情况。具有横向模式ψ_1 的入射 X 射线向上偏转，并经历引力红移（带颜色渐变的竖直向上箭头）。当 X 射线在不同海拔高度照射 SXWG 时，Δ_G会发生变化。每种情况下的总失谐都标注在能级示意图中，自上而下分别为 $\Delta+\Delta_G = -2.52$、$\Delta+\Delta_G = 0.5$和 $\Delta + \Delta_G = 3.14$。需要强调的是，周期性粒子密度调制有效地起到共振场的作用，并且在三种情况下始终会在包层波导中共振驱动 X 射线模式之间的跃迁。然而，各种 Δ_G 会改变有效耦合强度 Ω_n，从而产生不同的输出。散射/分裂后的 X 射线反映输出模式，可由下游的位置灵敏探测器测量。依赖于 x的光子数计数显示输出 $|E(x,\ L)|^2$，并揭示地球的引力效应。图3(c、e 和 g)分别展示了 z = 2.32 cm、z = 2cm 和 z = 1.72cm 时的归一化$|E(x,\ y)|^2$。波导内的强度表明，在 z = 2cm 处的 SXWG 中，经历半个拉比周期 $\psi_1 \to \psi_2$ 时，X 射线在图3(e)中显著分裂。相比之下，图3(c 和 g)仅显示出横向展宽。

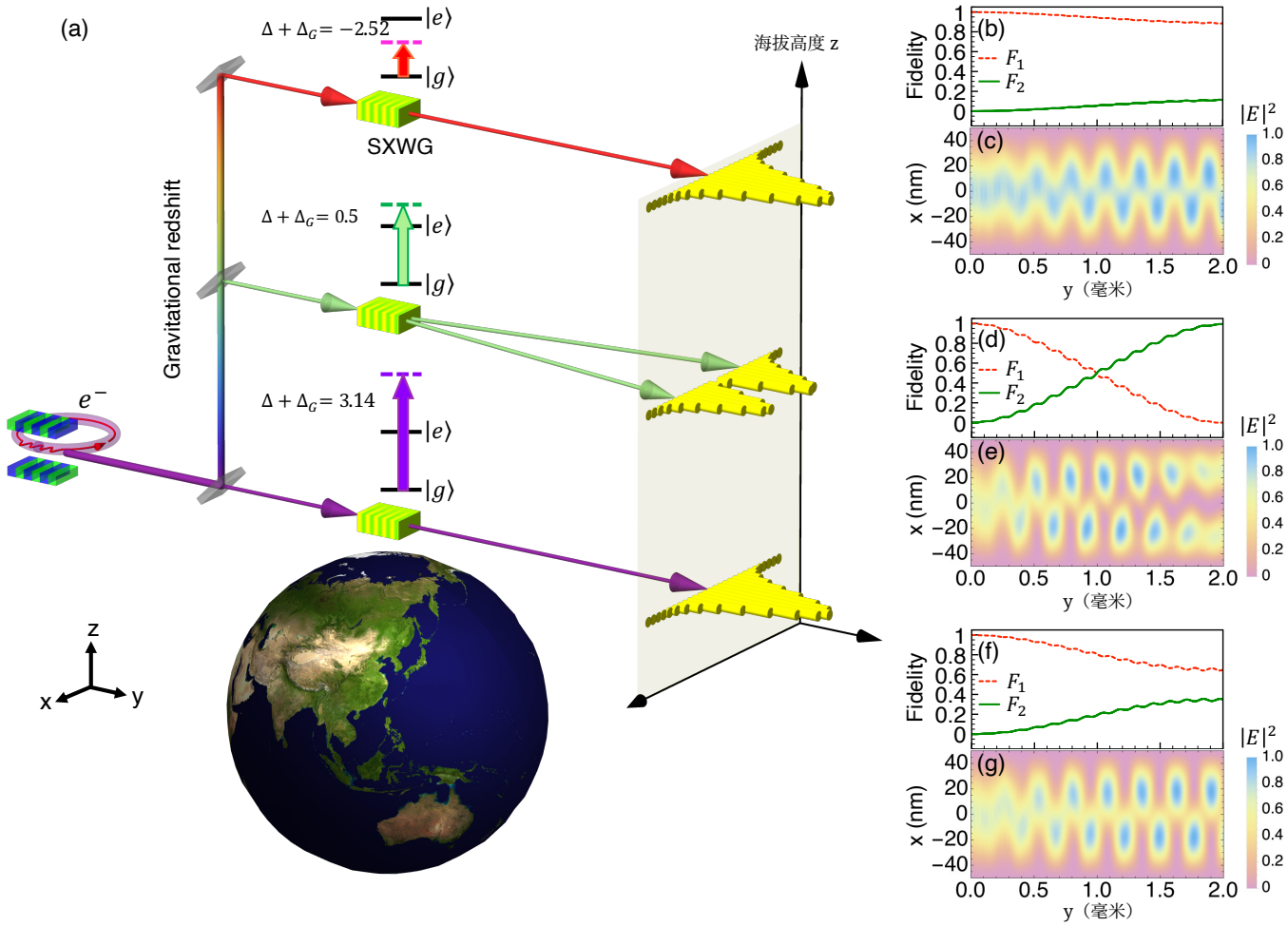

图 3。（a）地球引力改变了由 ^{45}Sc 原子核组成的波导中的X射线传播。在不同海拔高度 $z = 2.32$cm、 $z = 2$cm 和 $z = 1.72$cm 处的三种情况下，X射线以失谐量 $\Delta = 19.36$ 和引力红移 $\Delta_G = -21.88$、$\Delta_G = -18.86$ $\Delta_G = -16.22$ F_1 F_2 $z = 2.32$ 和 分别传播。（b、d 和 f）分别为 cm、$z = 2$cm 和 $z = 1.72$cm 时的保真度（红色虚线）和 （绿色实线）。（c、e 和 g）从上到下分别为海拔高度 $z = 2.32$cm、 $z = 2$cm 和 $z = 1.72$cm 处归一化的波导内X射线强度分布 $|E(x,\ y)|^2$。

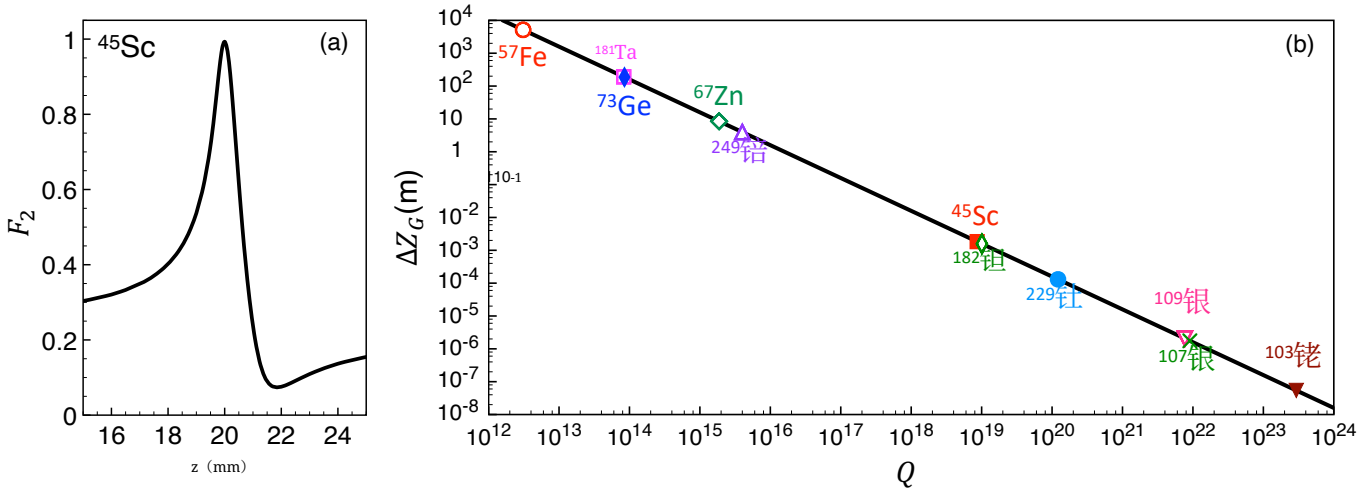

图 4. (a) 由 ^{45}Sc 原子核构成的 SXWG 中，随海拔高度变化的 X 射线保真度 F_2。(b) 地球上的半高全宽 ΔZ_G 取决于不同核素的核共振品质因数 Q。

由于微小的 $|\Omega_1|$，X射线发生了能级混合。图 3(b、d 和 f) 分别展示了在 $z = 2.32$cm、$z = 2$cm 和 $z = 1.72$cm 时的 $F_1(y)$（红色虚线）和 $F_2(y)$（绿色实线）。可以清楚地看到，X射线经历了拉比振荡，并在共振高度 $z = 2$ cm 处变为 ψ_2，这一点也由图 3(d 和 e)指出。鉴于 SXWG 离开共振高度后，$|\Omega_1|$ 会减小，X射线大多保持在初始模式 ψ_1，即在 $z = 2.32$cm 和 $z = 1.72$cm 处，$F_1(y) > F_2(y)$。图 4(a) 展示了在 $y = 2$mm 处随高度变化的输出 F_2。因此，将由 ^{45}Sc 构成的 SXWG 抬升仅一毫米的高度变化，就可能产生不同的 X射线分束。

我们通过半峰值处的全高度宽度 ΔZ_G 量化 SXWG 的引力灵敏度 $Re[\rho_{eg}]$

$$\Delta Z_G = \sqrt{3}\left(\frac{\hbar\Gamma}{E_t}\right)\frac{c^2 R_E^2}{GM_E}, \tag{6}$$

如图1(c)中的黑色水平双箭头所示。引入的 ΔZ_G 是衡量X射线-原子核耦合对 SXWG 垂直位置变化的灵敏度的指标。根据核共振品质因数的定义 $Q = E_t/(\hbar\Gamma)$，我们可以看出，ΔZ_G 与 $1/Q$成正比。图4(b)以双对数图展示了式 (6) 对我们地球上系统的意义，其中根据品质因数标出了同位素 ^{45}Sc、^{57}Fe、^{67}Zn、^{73}Ge、^{103}Rh、^{107}Ag、^{109}Ag、^{181}Ta、^{182}Ta、^{229}Th 和 ^{249}Bk。部分核参数列于表 I。值得注意的是，^{45}Sc 或 ^{182}Ta 核共振具有极高的 $Q \sim 10^{19}$，这一优势使 SXWG 具备了仅需毫米级海拔高度变化的引力灵敏度。值得一提的是，利用 ^{229}Th 也能实现亚毫米级 ΔZ_G，其 $Q \sim 10^{20}$ [29]; 利用 ^{107}Ag 和^{109}Ag 则能达到微米级 ΔZ_G，其 $Q \sim 10^{22}$。还值得一提的是，^{103}Rh 的 $Q > 10^{23}$ [27] 甚至可实现纳米级 ΔZ_G，这或可推动引力在介观尺度上的应用。

总之，我们提出了一种可控的 SXWG 系统，有望将重力转化为 X射线光学的一种应用。周期性的波导内结构，例如文献[30], 中的核光学晶格 ^{57}Fe/^{56}Fe 双层结构，可以驱动 X射线模式之间的跃迁。X射线横向模式在 SXWG 中传播时会经历拉比振荡。我们的方案可用于系统地产生结构化 X 射线，并实现无需分束器的 X射线干涉仪。值得注意的是，将由例如 ^{45}Sc 或 ^{182}Ta 制成的 SXWG 升高仅几毫米，就可能显著改变由重力引起的 X射线分裂。

S.-Y. L. 和 W.-T. L. 获台湾国家科学及技术委员会资助（资助编号：110-2112-M-008-027-MY3、110-2639-M-007-001-ASP、111-2923-M-008-004-MY3 和 111-2639-M-007-001-ASP ）。S. A. 获中国国家自然科学基金委员会资助（资助编号：11975155）。

* wente.liao@g.ncu.edu.tw

[1] B. P. Abbott 等（LIGO科学合作组织和Virgo合作组织），双黑洞并合产生引力波的观测，Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016)。[2] M. Bartelmann 和 P. Schneider，弱引力透镜，Physics Reports 340, 291 (2001)。[3] N. Ashby，相对论与全球定位系统，Physics Today 55, 41 (2002)。[4] J. B. Hastings、D. P. Siddons、U. van B¨urck、R. Hollatz 和 U. Bergmann，利用同步辐射进行穆斯堡尔谱学，Phys. Rev. Lett. 66, 770 (1991)。[5] R. R¨ohlsberger，《同步辐射核凝聚态物理：基本原理、方法与应用》（Springer-Verlag，2004）。[6] R. V. Pound 和 G. A. Rebka，光子的表观重量，Phys. Rev. Lett. 4, 337 (1960)。[7] M. Kalvius 和 P. Kienle，《鲁道夫·穆斯堡尔的故事：他的科学工作及其对科学与历史的影响》（Springer Science & Business Media，2012）。[8] Y. V. Shvyd'ko、T. Hertrich、U. van B¨urck、E. Gerdau、O. Le-upold、J. Metge、H. D. R¨uter、S. Schwendy、G. V. Smirnov、W. Potzel 和 P. Schindelmann，通过磁切换存储核激发能，Phys. Rev. Lett. 77, 3232 (1996)。[9] Y. V. Shvyd'ko，X射线的核共振前向散射：时空图像，Phys. Rev. B 59, 9132 (1999)。[10] A. P´alffy、C. H. Keitel 和 J. Evers，通过相干控制核前向散射在千电子伏能区实现单光子纠缠，Phys. Rev. Lett. 103, 017401 (2009)。[11] R. R¨ohlsberger、H. C. Wille、K. Schlage 和 B. Sahoo，腔中的共振原子核实现电磁诱导透明，Nature 482, 199 (2012)。[12] W.-T. Liao、A. P´alffy 和 C. H. Keitel，利用核激子实现单个硬X射线光子的相干存储与相位调制，Phys. Rev. Lett. 109, 197403 (2012)。[13] B. W. Adams、C. Buth、S. M. Cavaletto、J. Evers、Z. Harman、C. H. Keitel、A. P´alffy、A. Pic´on、R. R¨ohlsberger、Y. Rostovtsev 和 K. Tamasaku，X射线量子光学，Journal of modern optics 60, 2 (2013)。[14] F. Vagizov、V. Antonov、Y. Radeonychev、R. N. Shakhmuratov 和 O. Kocharovskaya，对无反冲 γ射线光子波形的相干控制，Nature 508, 80 (2014)。[15] W.-T. Liao 和 S. Ahrens，X射线超辐射的引力与相对论偏转，Nature Photonics 9, 169 (2015)。[16] K. P. Heeg、J. Haber、D. Schumacher、L. Bocklage、H.-C. Wille、K. S. Schulze、R. Loetzsch、I. Uschmann、G. G. Paulus、R. R¨uffer、R. R¨ohlsberger 和 J. Evers，可调谐的窄带X射线脉冲亚光速传播，Phys. Rev. Lett. 114, 203601 2015( )。[17] K. P. Heeg、A. Kaldun、C. Strohm、P. Reiser、C. Ott、R. Sub-ramanian、D. Lentrodt、J. Haber、H.-C. Wille、S. Goerttler、R. R¨uffer、C. H. Keitel、R. R¨ohlsberger、T. Pfeifer 和 J. Evers，用于核共振精密光谱学的X射线脉冲光谱窄化，Science 357, 375 (2017)。[18] X. Zhang、W.-T. Liao、A. Kalachev、R. Shakhmuratov、M. Scully 和 O. Kocharovskaya，单个 γ **123**, 光子的 250504 2019 核量子存储与时间序列控制，Phys. Rev. Lett. ( )。[19] Y. V. Radeonychev、I. R. Khairulin、F. G. Vagizov、M. Scully 和 O. Kocharovskaya，γ射线光子的声诱导透明观测，Phys. Rev. Lett. 124, 163602 (2020)。[20] K. P. Heeg、A. Kaldun、C. Strohm、C. Ott、R. Subramanian、D. Lentrodt、J. Haber、H.-C. Wille、S. Goerttler、R. R¨uffer 等，核激子的相干X射线-光学控制，Nature 590, 401 2021( )。

[21] Y.-H. Chen、P.-H. Lin、G.-Y. Wang、A. P´alffy 和 W.-T. Liao，利用渐缩X射线波导中的X射线自由电子激光实现瞬态核反转，Phys. Rev. Research **4**, L032007 (2022)。[22] M. A. M. Marte 和 S. Stenholm，傍轴光与原子光学：光学薛定谔方程及其拓展，Phys. Rev. A**56**, 2940 (1997)。[23] D. Seipt、A. Surzhykov 和 S. Fritzsche，通过激光的逆康普顿散射，利用扭曲电子产生结构化X射线束，Phys. Rev. A **90**, 012118 (2014)。[24] H. Rubinsztein-Dunlop、A. Forbes、M. V. Berry、M. R. Dennis、D. L. Andrews、M. Mansuripur、C. Denz、C. Alpmann、P. Banzer、T. Bauer、等，结构光路线图，J ournal of Optics **19**, 013001 (2016)。[25] C. A. MacDonald，面向实验室的结构化X射线光学材料分析，Annual Review of Materials Research **47**, 115（2017）。[26] A. Forbes、M. de Oliveira 和 M. R. Dennis，结构光，Nature Photonics**15**，253（2021）。[27] 国家核数据中心，*https://www.nndc.bnl.gov/ensdf/*。[28] *X*射线光学中心，*https://www.cxro.lbl.gov/*。[29] B. Seiferle、L. von der Wense、P. V. Bilous、I. Amersdorffer、C. Lemell、F. Libisch、S. Stellmer、T. Schumm、C. E. D¨ullmann、A. P´alffy、等，第229号核钟跃迁能量，Nature **573**，243（2019）。[30] J. Haber 、 K. S. Schulze 、 K. Schlage 、 R. Loetzsch 、 L. Bocklage、T. Gurieva、H. Bernhardt、H.-C. Wille、R. R¨uffer、I. Uschmann、等，X射线与原子核在核光学晶格中的集体强耦合，Nature Photonics **10**，445（2016）。