arXiv:2305.00617v1 [math.AP] 1 May 2023

平均场博弈系统的唯一延拓

[1] OLEG IMANUVILOV、 [2] HONGYU LIU 和 [3] MASAHIRO YAMAMOTO

Abstract. 对于一个平均场博弈系统，我们证明了唯一延拓定理：如果在任意选取的侧向子边界上柯西数据为零，那么解恒等于零。

1. Introduction and key Carleman estimate

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，令 $T > 0$，且 $Q := \Omega \times (0, T)$。本文考虑一个平均场博弈系统：

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + a_1(x,t)\Delta u(x,t) - \frac{1}{2}\kappa(x,t)|\nabla u(x,t)|^2 - h(x,t)u = F, \\ \partial_t v(x,t) - \Delta(a_2(x,t)v) - \operatorname{div}(\kappa(x,t)v(x,t)\nabla u(x,t)) = G \quad \text{in } Q. \end{cases} \tag{1.1}$$

在本文中，我们假设

$$a_1, a_2 \in C^2(\overline{Q}), > 0 \quad \text{on } \overline{Q}, \quad \kappa \in C^{1,0}(\overline{Q}), \quad h \in L^\infty(Q). \tag{1.2}$$

在此及下文中，我们设定 $C^{2,\ 2}(\overline{Q}) := \{a \in C(\overline{Q});\ \partial_t^k a、\ \partial_i\partial_j a、\ \partial_i a、\ a \in C(\overline{Q})$ 对于 $0 \le k \le 2$和 $1 \le i、\ j \le n\}$、 $C^{1,\ 0}(\overline{Q}) := \{a \in C(\overline{Q});\ \partial_j a \in C(\overline{Q}) \quad 1 \le j \le n\}$ 和 $H^{2,\ 1}(Q) := \{w \in L^2(Q);\ w、\ \partial_t w、\ \partial_i w、\ \partial_i\partial_j w \in L^2(Q)$ 对于 $1 \le i、\ j \le n\}$。

在（1.1）中， x 和 t 分别是状态变量和时间变量，而 u和 v 分别表示博弈值和参与者的人口密度（例如，Achdou、Cardaliaguet、Delarue、Porretta 和 Santambrogio [1], Lasry 和 Lions [10]）。

本文的主要目的是证明方程 (1.1) 的唯一延拓：定理 1. 任取 $\gamma \subset \partial\Omega$ 中一个非空相对开子集 任意。我们

[1] 美国科罗拉多州立大学数学系，Weber 大楼 101 室，柯林斯堡，科罗拉多州 80523-1874；电子邮箱：oleg@math.colostate.edu[2] 中国香港特别行政区九龙香港城市大学数学系；电子邮箱：hongyliu@cityu.edu.hk[3] 日本东京 153-8914，目黑区驹场，东京大学数理科学研究科；电子邮箱：myama@ms.u-tokyo.ac.jp。

假设 (u,v)、$(\widetilde{u},\widetilde{v}) \in H^{2,1}(Q) \times H^{2,1}(Q)$ 满足 (1.1)，并且

$$\begin{cases} u, \nabla u, \Delta u, \widetilde{u}, \nabla\widetilde{u}, \Delta\widetilde{u} \in L^\infty(Q), \\ v, \nabla v, \widetilde{v}, \nabla\widetilde{v} \in L^\infty(Q), \quad \partial_t(u-\widetilde{u}), \partial_t(v-\widetilde{v}) \in L^2((\partial\Omega\setminus\Gamma)\times(0,T)). \end{cases} \tag{1.3}$$

那么， $u=\widetilde{u}$、 $\nabla u = \nabla\widetilde{u}$、 $v=\widetilde{v}$和 $\nabla v = \nabla\widetilde{v}$在 $\Gamma\times(0,T)$上蕴含 $u=\widetilde{u}$和 $v=\widetilde{v}$在 Q中。

单个抛物型方程的唯一延拓广为人知；作为早期研究，我们可以参考 Mizohata [15]、Saut 和 Scheurer [16] 等诸多成果。

平均场博弈系统由混合型的向后和向前抛物型方程组成，分别对应于 u 和 v，因此初边值问题需要特别处理。不过，建立适用于唯一延拓及反问题等其他问题的 Carleman 估计并不困难。

已知相关的 Carleman 估计可以根据 $\Gamma\times(0,T)$上的柯西数据，导出确定 u和 v时的条件稳定性。例如，在对 Γ施加几何约束的情况下，可参考 Klibanov 和 Timonov [9]。我们可以用与 Huang、Imanuvilov 和 Yamamoto [3], 相同的方法，从任意子边界得到条件稳定性，但此处省略细节。

我们的关键 Carleman 估计作为定理 2 在第2节中陈述，并且由于 u 的二阶耦合项以 Δu 的形式出现在 v 的方程中，因此可以直接推导得出。对于一般情形，这种耦合应为 $\partial_i\partial_j u$、 $1\le i$、 $j\le n$ 的线性组合。相关 Carleman 估计的推导更为复杂，我们将在后续工作中探讨。

关于反问题，请参阅 Klibanov [5], Klibanov and Averboukh [6], Klibanov, Li and Liu [7], [8], Liu, Mou and Zhang [11], Liu and Yamamoto [12], Liu and Zhang [13],[14]

本文由三个部分组成。在第2节中，我们证明了方程 (1.1) 的一个关键 Carleman 估计；第3节则用于完成定理 1 的证明。

2. Key Carleman estimate

对于子边界 $\Gamma\subset\partial\Omega$，我们知道存在 $d\in C^2(\Omega)$，使得

$$d>0 \quad \text{in } \Omega, \quad |\nabla d|>0 \quad \text{on } \overline{\Omega}, \quad d=0 \quad \text{on } \partial\Omega\setminus\Gamma, \quad \nabla d\cdot\nu \le 0 \quad \text{on } \partial\Omega\setminus\Gamma \tag{2.1}$$

（例如，Imanuvilov [4]）。这里 ν 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。

对于任意固定的 $t_0\in(0,T)$ 和满足 $0<t_0-\delta\le t_0+\delta<T$ 的 $\delta>0$，我们设

$$I=(t_0-\delta,t_0+\delta), \quad Q_I=\Omega\times I.$$

我们设

$$P_k v(x,t) := \partial_t v + (-1)^k a(x,t)\Delta v + R(x,t,v), \quad k=1,2,$$

其中 $a \in C^2(\overline{Q_I})$, >0 在 $\overline{Q_I}$ 上，并且

$$|R(x,t,v)| \le C_0(|v(x,t)| + |\nabla v(x,t)|), \quad (x,t) \in Q_I. \tag{2.2}$$

此外，设

$$\varphi(x,t) = e^{\lambda(d(x)-\beta(t-t_0)^2)},$$

其中 $\lambda > 0$ 是一个充分大的参数，$\beta > 0$ 是任意给定的。今后，$C > 0$ 表示与 $s > 0$ 无关、但依赖于 (2.2) 中的 λ、β、C_0 的一般常数。于是

引理1. 存在常数 $s_0 > 0$ 和 $C > 0$，使得

$$\int_{Q_I} \left(\frac{1}{s}(|\partial_t v|^2 + |\Delta v|^2) + s|\nabla v|^2 + s^3|v|^2 \right) e^{2s\varphi} dxdt \le Cs^4 \int_{Q_I} |P_k v|^2 e^{2s\varphi} dxdt + C\mathcal{B}(v), \quad k = 1,2 \tag{2.3}$$

对所有满足 $v \in H^1(\partial\Omega \times I)$ 的 $s > s_0$ 和 $v \in H^{2,1}(Q_I)$，均有。此处及下文，令

$$\mathcal{B}(v) := e^{Cs}\|v\|^2_{H^1(\Gamma\times I)} + s^3 \int_{(\partial\Omega\setminus\Gamma)\times I} (|v|^2 + |\nabla_{x,t} v|^2) e^{2s} dSdt$$

$$+ s^2 \int_\Omega (|v(x,t_0-\delta)|^2 + |\nabla v(x,t_0-\delta)|^2 + |v(x,t_0+\delta)|^2 + |\nabla v(x,t_0+\delta)|^2) e^{2s\varphi(x,t_0-\delta)} dx.$$

关于 $k = 1$ 的引理证明与 Bellassoued 和 Yamamoto [2] 中的引理7.1（第186页）或 Yamamoto [17] 中的定理3.2类似：保留分部积分产生的所有边界积分项 $v|_{\partial Q}$，并使用 (2.1) 中的 $d|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0$。关于 $k = 2$ 的证明可直接由 $k = 1$ 的情形推出，只需令 $V(x,t) := v(x, 2t_0 - t)$，并对 $(x,t) \in Q_I$ 使用 $\varphi(x,t) = \varphi(x, 2t_0 - t)$。

我们强调，由于权函数 $\varphi(x,t)$ 关于以 t_0 为中心的 t 对称，反向抛物型 Carleman 估计与正向抛物型 Carleman 估计相同。

利用 Carleman 估计 (2.3)，我们证明了一个平均场博弈~ ~系统的 Carleman 估计。令 $y := u - \widetilde{u}$ 且 $z := v - \widetilde{v}$，再用带有 $(\widetilde{u}, \widetilde{v}, F, G)$ 的 (1.1) 式减去带有 (u, v, F, G) 的 (1.1) 式，得到

$$\begin{cases} \partial_t y + a_1(x,t)\Delta y + R_1(x,t,y) = h(x,t)z + F - \widetilde{F}, \\ \partial_t z - a_2(x,t)\Delta z + R_2(x,t,z) = \kappa v \Delta y + R_3(x,t,y) + G - \widetilde{G} \quad \text{in } Q_I. \end{cases} \tag{2.4}$$

由此，根据 (1.2) 和 (1.3)，我们可以验证

$$|R_j(x,t,y)| \le C_0 \sum_{k=0}^{1} |\nabla^k y(x,t)|, \quad j = 1,3, \quad |R_2(x,t,z)| \le C_0 \sum_{k=0}^{1} |\nabla^k z(x,t)|, \quad (x,t) \in Q_I. \tag{2.5}$$

我们将 Carleman 估计 (2.3) 应用于 (2.4) 中的第一个方程，并将所得等式乘以 s： y 并得到

$$\int_{Q_I}(|\partial_t y|^2+|\Delta y|^2+s^2|\nabla y|^2+s^4|y|^2)e^{2s\varphi}dxdt$$

$$\leq C\int_{Q_I}s|hz|^2e^{2s\varphi}dxdt+C\int_{Q_I}s|F-\widetilde{F}|^2e^{2s\varphi}dxdt+Cs\mathcal{B}(y) \tag{2.6}$$

对所有 $s>s_{0\circ}$ 根据 (2.5)，将 (2.3) 应用于 $k=1$ 至 z，得到

$$\int_{Q_I}\left(\frac{1}{s}(|\partial_t z|^2+|\Delta z|^2)+s|\nabla z|^2+s^3|z|^2\right)e^{2s\varphi}dxdt$$

$$\leq C\int_{Q_I}(|\kappa\Delta y|^2+|y|^2+|\nabla y|^2)e^{2s\varphi}dxdt+C\int_{Q_I}|G-\widetilde{G}|^2e^{2s\varphi}dxdt+C\mathcal{B}(z) \tag{2.7}$$

对所有 $s>s_{0\circ}$

利用 $\kappa\in L^\infty(Q_I)$，并将 (2.6) 代入 (2.7) 右端包含 Δy、 ∇y、 y 的各项，得到

$$\int_{Q_I}\left(\frac{1}{s}(|\partial_t z|^2+|\Delta z|^2)+s|\nabla z|^2+s^3|z|^2\right)e^{2s\varphi}dxdt$$

$$\leq C\int_{Q_I}s|z|^2e^{2s\varphi}dxdt+C\int_{Q_I}(s|F-\widetilde{F}|^2+|G-\widetilde{G}|^2)e^{2s\varphi}dxdt+Cs(\mathcal{B}(y)+\mathcal{B}(z))$$

对所有足够大的 $s>0_\circ$ 取 $s>0$ 足够大，将右端第一项吸收到左端，我们得到

$$\int_{Q_I}\left(\frac{1}{s}(|\partial_t z|^2+|\Delta z|^2)+s|\nabla z|^2+s^3|z|^2\right)e^{2s\varphi}dxdt$$

$$\leq C\int_{Q_I}(s|F-\widetilde{F}|^2+|G-\widetilde{G}|^2)e^{2s\varphi}dxdt+Cs(\mathcal{B}(y)+\mathcal{B}(z)) \tag{2.8}$$

对所有 $s>s_{0\circ}$ 将 (2.8) 与 (2.6) 相加，并再次取 $s>0$ 足够大，将右端的项 $\int_{Q_I}s|hz|^2e^{2s\varphi}dxdt$ 吸收到左端，得到

定理 2（平均场博弈的 Carleman 估计）。存在常数 $s_0>0$和 $C>0$，使得

$$\int_{Q_I}\Big(|\partial_t(u-\widetilde{u})|^2+|(\Delta(u-\widetilde{u})|^2+s^2|\nabla(u-\widetilde{u})|^2+s^4|u-\widetilde{u}|^2+\frac{1}{s}(|\partial_t(v-\widetilde{v})|^2+|\Delta(v-\widetilde{v})|^2)$$

$$+s|\nabla(v-\widetilde{v})|^2+s^3|v-\widetilde{v}|^2\Big)e^{2s\varphi}dxdt\leq C\int_{Q_I}(s|F-\widetilde{F}|^2+|G-\widetilde{G}|^2)e^{2s\varphi}dxdt$$

对所有 $s>s_0$.， $+Cs(\mathcal{B}(u-\widetilde{u})+\mathcal{B}(v-\widetilde{v}))$

3. Proof of Theorem 1

我们任意选取 $t_0 \in (0,T)$ 和 $\delta > 0$，使得 $0 < t_0 - \delta < t_0 + \delta < T$。我们定义

$$d_0 := \min_{x\in\overline{\Omega}} d(x), \quad d_1 := \max_{x\in\overline{\Omega}} d(x), \quad 0 < r < \left(\frac{d_0}{d_1}\right)^{\frac{1}{2}} < 1. \tag{3.1}$$

我们注意到 $0 < r < 1$。

我们现在证明

引理 2. 在正则性条件 (1.3) 下，如果 $u = \widetilde{u}$、 $v = \widetilde{v}$、 $\nabla u = \nabla\widetilde{u}$ 和 $\nabla v = \nabla\widetilde{v}$ 在 $\Gamma \times$（$t_0 - \delta$、 $t_0 + \delta$）上，则推出 $u = \widetilde{u}$ 和 $v = \widetilde{v}$ 于 $\Omega \times$（$t_0 - r\delta$、 $t_0 + r\delta$）中。

对于定理 1 的证明，只需证明引理 2。事实上，由于 $t_0 \in (0,T)$ 和$\delta > 0$ 可以任意选取，并且 Carleman 估计关于 t_0 不变，只要 $0 < t_0 - \delta < t_0 + \delta < T$，我们可以通过在 $(\delta, T-\delta)$ 上改变 t_0 来应用引理 2，从而在 $\Omega \times ((1-r)\delta, T-(1-r)\delta)$ 中得到 $u = \widetilde{u}$ 和 $v = \widetilde{v}$。由于 $\delta > 0$ 可以任意选取，这意味着在 $\Omega \times (0,T)$ 中有 $u = \widetilde{u}$ 和 $v = \widetilde{v}$。

引理 2 的证明。得到定理 2 中相关的 Carleman 估计后，引理 2 的证明与 [3] 中命题 2 的证明类似，具体如下。首先，我们确定 Carleman 估计的权函数中的常数 $\beta > 0$，使得

$$\frac{d_1 - d_0}{\delta^2 - r^2\delta^2} < \beta < \frac{d_0}{r^2\delta^2}. \tag{3.2}$$

这里我们注意到 (3.1) 验证了 $0 < \frac{d_1-d_0}{\delta^2-r^2\delta^2} < \frac{d_0}{r^2\delta^2}$，这使我们可以选择满足 (3.2) 的 β。

对于简短描述，我们设定

$$M_1 := \sum_{k=0}^{1} (\|\nabla_{x,t}^k (u - \widetilde{u})\|^2_{L^2((\partial\Omega\setminus\Gamma)\times I)} + \|\nabla_{x,t}^k (v - \widetilde{v})\|^2_{L^2((\partial\Omega\setminus\Gamma)\times I)}),$$

$$M_2 := \sum_{k=0}^{1} (\|(u - \widetilde{u})(\cdot, t_0 + (-1)^k\delta)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|(v - \widetilde{v})(\cdot, t_0 + (-1)^k\delta)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

以及 $\mu_1 := e^{\lambda(d_1 - \beta\delta^2)}$。由于 $u = \widetilde{u}$ 和 $v = \widetilde{v}$ 在 $\Gamma \times I$上，定理 2 得出

$$s^3 \int_{Q_I} (|u - \widetilde{u}|^2 + |v - \widetilde{v}|^2) e^{2s\varphi} dxdt \le Cs^5 M_1 e^{2s} + Cs^5 M_2 e^{2s\mu_1}$$

对所有充分大的 $s > 0$，我们将左侧的积分区域缩小为 $\Omega\times(t_0 - r\delta, t_0 + r\delta)$。然后，由于 $\varphi(x,t) = e^{\lambda(d(x) - \beta(t-t_0)^2)} \ge e^{\lambda(d_0 - \beta r^2\delta^2)} =: \mu_2$ 属于 $\Omega \times (t_0 - r\delta, t_0 + r\delta)$，我们得到

$$e^{2s\mu_2} \int_{\Omega\times(t_0 - r\delta, t_0 + r\delta)} (|u - \widetilde{u}|^2 + |v - \widetilde{v}|^2) dxdt \le Cs^2 M_1 e^{2s} + Cs^2 M_2 e^{2s\mu_1},$$

也就是说，

$$\|u-\widetilde{u}\|^2_{L^2(\Omega\times(t_0-r\delta,t_0+r\delta))}+\|v-\widetilde{v}\|^2_{L^2(\Omega\times(t_0-r\delta,t_0+r\delta))}\le Cs^2M_1e^{-2s(\mu_2-1)}+Cs^2M_2e^{-2s(\mu_2-\mu_1)} \tag{3.3}$$

对所有充分大的 $s>0$。这里，由 (3.2) 可知 $\mu_2>\max\{1,\mu_1\}$，因此我们在 (3.3) 中令 $s\to\infty$，从而 $u=\widetilde{u}$ 且 $v=\widetilde{v}$ 属于 $\Omega\times(t_0-r\delta,t_0+r\delta)$。至此，引理 2 的证明以及定理 1 的证明均告完成。 ■

致谢。本研究得到日本学术振兴会科研补助金（A）20H00117的资助。

References

[1] Y. Achdou、P. Cardaliaguet、F. Delarue、A. Porretta 和 F. Santambrogio，《平均场博弈》，意大利切特拉罗，2019年，《数学讲义》，C.I.M.E.基金会子系列，第2281卷，施普林格，2019年。[2] M. Bellassoued 和 M. Yamamoto，《双曲型系统的 Carleman 估计及其在反问题中的应用》，Springer-Japan，东京，2017年。[3] X. Huang、O.Y. Imanuvilov 和 M. Yamamoto，借助 Carleman估计研究逆源问题的稳定性，《反问题》36（2020）125006[4] O.Y. Imanuvilov，抛物型方程的可控性，《数学文集》186（1995）879-900。[5] M. V. Klibanov，《平均场博弈系统：Carleman 估计、Lipschitz稳定性与唯一性》，已在线发表于《反问题与病态问题》，2023年，arXiv:2303.03928[6] M. V. Klibanov 和 Y. Averboukh，借助两个 Carleman 估计研究平均场博弈系统回顾性分析中的 Lipschitz 稳定性估计与唯一性，预印本 arXiv:2302.10709[7] M. V. Klibanov、J. Li 和 H. Liu，借助 Carleman 估计研究平均场博弈系统的 Hölder稳定性与唯一性，预印本，arXiv:2304.00646 ¨M. V. Klibanov、J. Li 和 H. Liu，借助 Carleman 估计研究带侧向Cauchy数据的平均场博弈系统，预印本，arXiv:2303.07556[8] M. V. Klibanov 和 A.A. Timonov，《系数反问题的 Carleman 估计与数值应用》，VSP，乌得勒支，2004年。[9] J.-M. Lasry 和 P.-L. Lions，平均场博弈，《日本数学杂志》2（2007）229-260。[10] H. Liu、C. Mou 和 S. Zhang，平均场博弈的反问题，预印本，arXiv:2205.11350[11] H. Liu 和 M. Yamamoto，平均场博弈方程中状态确定的稳定性，预印本，arXiv:2304.05896[12] H. Liu 和 S. Zhang，平均场博弈的一个边界反问题，预印本，arXiv:2212.09110[13] H. Liu 和 S. Zhang，同时恢复平均场博弈系统中的运行成本与哈密顿量，预印本，arXiv:2303.13096[14] S. Mizohata，关于若干抛物型微分算子解的延拓唯一性，《京都大学理学院纪要》A31（1958）219-239。

[16] J.-C. Saut 和 B. Scheurer，某些演化方程的唯一延拓，《微分方程期刊》66（1987）118-139。

[17] M. Yamamoto，抛物型方程的 Carleman估计及其应用，InverseProblems 25 (2009年) 123013