arXiv:2305.00625v1 [math.AP] 1 May 2023

Kakutani-Matsuuchi模型的波破碎

ShaojieYang*，Jianmin Zhao

昆明理工大学系统科学与应用数学系，中国云南昆明
650500

摘要

本文研究描述黏性作用下水波表面高程的 Kakutani-Matsuuchi模型。我们证明了该模型会发生波破碎：当初始数据的斜率足够负时，解在有限时间内保持有界，但其斜率会变得无界。

关键词：波破碎；Kakutani-Matsuuchi模型；黏性效应。

数学主题分类：35A21；35B44；35Q53

1 引言

重力水波的运动是一个热门研究课题，吸引了数学、物理学和工程学领域众多研究者的关注。在研究深水中的重力水波时，一种经典方法是考虑无旋、不可压、无黏流体 [19]。然而，为了处理更贴近现实的模型，黏性对重力水波的影响也受到关注。有关实验中重力水波黏性效应必要性的例子，可参见文献[1]。人们已开发出多种方法来模拟黏性对重力波的影响。例如，文献[1, 2], 的作者分别独立推导了黏性水波中长重力波的渐近模型。近期，Dias、Dyachenko 和 Zakharov [4]推导了一个非线性模型，用于描述

*通讯作者：shaojieyang@kust.edu.cn

重力和黏性效应作用下表面波的运动。关于 Dias-Dyachenko-Zakharov 模型的更多性质，请参阅 [5–9] 及其中的参考文献。

下面我们回顾 Kakutani 和 Matsuuchi 的开创性论文 [10] 中提出的模型方程。根据几何色散与黏性边界层（非局部项）产生的色散之间的竞争关系，文献 [10] 推导出了三种模型。记 k 为长波的波数，不同的情形如下。

- $\mu \ll k^5$，可忽略黏性效应，此时模型为 KdV 方程

$$u_t + \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{6}u_{xxx} = 0. \tag{1.1}$$

- $\mu \sim k^5$，几何色散与黏性色散达到平衡，此时模型为

$$u_t + \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{6}u_{xxx} = \frac{1}{4\sqrt{\pi R^*}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\operatorname{sgn}(x-y))\,\eta_y}{\sqrt{|x-y|}}. \tag{1.2}$$

- $\mu \gg k^5$，黏性效应较强，此时模型为

$$u_t + \frac{3}{2}uu_x = \frac{1}{4\sqrt{\pi R^*}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\operatorname{sgn}(x-y))\,\eta_y}{\sqrt{|x-y|}}. \tag{1.3}$$

本文考虑具有较强黏性效应的方程 (1.3)。方程 (1.3) 可改写为

$$u_t + uu_x + \Lambda^{\frac{1}{2}}u + \mathcal{H}\Lambda^{\frac{1}{2}}u = 0, \tag{1.4}$$

其中，算子 $\Lambda^{\frac{1}{2}}$ 和 $\mathcal{H}\Lambda^{\frac{1}{2}}$ 可写为

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\frac{3}{2}}} dy,$$

$$\mathcal{H}\Lambda^{\frac{1}{2}} f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sgn}(x-y) dy$$

相差一个常数因子。最近，Chen、Dumont 和 Goubet [11] 推导出了方程 (1.4) 的解的衰减。Bae、Lee 和 Shin [12] 证明，对于某一类初始数据，光滑解会在有限时间内形成奇点。

注意，方程 (1.4) 可视为 Whitham 方程与分数阶色散的组合

$$u_t + uu_x + \Lambda^{\frac{1}{2}}u = 0 \tag{1.5}$$

以及带分数阶扩散的 Whitham 方程

$$u_t + uu_x + \mathcal{H}\Lambda^{\frac{1}{2}}u = 0. \tag{1.6}$$

方程 (1.5) 是伯格斯方程（也称为分形伯格斯方程）的扩展 [21]。文献 [22, 23] 研究了方程 (1.5) 的有限时间奇异性和整体适定性。方程 (1.6) 是对重力作用下二维无限深水流运动表面水波问题的二次近似 [13]。VM Hur 指出，方程 (1.6) 与无限深度水波具有相同的色散关系和尺度对称性 [14], ，并推导出方程 (1.6) 的解会在有限时间内爆破 [14, 15, 20]。

本文旨在运用文献[15–18]中的论证方法，证明方程(1.4)会发生波破碎。文献[15–18]中的思想是沿着特征线，对解及其各阶导数所满足的常微分方程进行分析，而这些方程还涉及非局部强迫项。困难主要在于：在估计解的梯度的上确界范数时，处理非局部强迫项会导致导数损失。下面陈述方程(1.4)发生波破碎的主要结果。

定理 1.1. 当 $\epsilon > 0$ 充分小时，若 $u_0 \in H^\infty(\mathbb{R})$满足

$$\epsilon^2(-\inf_{x\in\mathbb{R}} u_0'(x))^2 > 1 + 2\|u_0\|_{H^3(\mathbb{R})}, \tag{1.7}$$

$$\epsilon^2(1-\epsilon)^4(-\inf_{x\in\mathbb{R}} u_0'(x))^{3/4} > 28(1 + (1 + \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{1/g})g + g^2), \tag{1.8}$$

$$\epsilon^2(-\inf_{x\in\mathbb{R}} u_0'(x))^{1/4} > \frac{9}{4}\mathrm{e}, \tag{1.9}$$

and

$$\|u_0^{(n)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le ((n-1)g)^{2(n-1)} \quad for \quad n = 2, 3, ... \tag{1.10}$$

对某个 $g \ge 1$成立，则与(1.4)及$u(x, 0) = u_0$ 相关的初值问题的解会发生波破碎，即

$$|u(x)| < \infty \quad for \quad any \quad x \in \mathbb{R} \quad for\ any \quad t \in [0, T),$$

but

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} u_x(t, x) \to -\infty \quad as \quad t \to T^-,$$

对某个 $T > 0$成立。此外

$$-\frac{1}{1+\epsilon}\frac{1}{\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} u_0'(x)} < T < -\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\frac{1}{\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} u_0'(x)}. \tag{1.11}$$

注1.1. 假设 (1.7)-(1.9) 要求 u_0' 在 $\mathbb{R}$ 中的某处充分为负。证明的思路在于，u 的波形会逐渐变陡，直至在有限时间内变为垂直。

2 定理 1.1 的证明

假设与 (1.4) 和 $u(\cdot,x)=u_0$ 相关的初值问题在 $C^\infty([0,T);H^\infty(\mathbb{R}))$ 中存在唯一解，其中某个 $T>0$。事实上，可以结合先验估计和紧性论证，得出 $H^s(\mathbb{R})$ 中关于 $s>3/2$ 的局部时间适定性（详情见参考文献 [24] ）。假设 T 是最大存在时间。

对于 $x\in\mathbb{R}$，令 $X(t,x)$ 满足

$$\begin{cases}\frac{dX}{dt}(t,x)=u(X(t;x),t),\\ X(0;t)=x.\end{cases}\tag{2.1}$$

由于 $u(t,x)$ 有界，并且对于任意 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}$，关于 x 满足 Lipschitz 条件，因此根据经典常微分方程理论，对于任意 $x\in\mathbb{R}$，$X(\cdot;t)$ 在整个区间 $[0,T)$ 上存在。此外，对于任意 $x\in\mathbb{R}$，$x\mapsto X(\cdot;t)$ 在整个区间 $(0,T)$ 上连续可微。

Let

$$v_n(t;x)=(\partial_x^n u)(X(t;x),t)\quad\text{for}\quad n=0,1,2,...\tag{2.2}$$

and

$$m(t)=\inf_{x\in\mathbb{R}}v_1(t;x)=\inf_{x\in\mathbb{R}}(\partial_x u)(X(t;x),t)=:m(0)q^{-1}(t).\tag{2.3}$$

显然

$$m(t)<0\ \text{ for any }\ t\in[0,T),\quad q(0)=1\ \text{ and }\ q(t)>0\ \text{ for any }\ t\in[0,T).\tag{2.4}$$

事实上，$m(t)\geq 0$ 将意味着 $u(\cdot,t)$ 关于 $\mathbb{R}$ 非递减，从而 $u(\cdot,t)\equiv 0$。对于 $x\in\mathbb{R}$，对 (1.4) 关于 x 求导，并在 $x=X(t;x)$ 处取值，可得

$$\frac{dv_n}{dt}+\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}v_jv_{n+1-j}+K_n(t;x)+\phi_n(t;x)=0\quad for\quad n=2,3,...,\tag{2.5}$$

$$\frac{dv_1}{dt}+v_1^2+K_1(t;x)+\phi_1(t;x)=0\tag{2.6}$$

and

$$\frac{dv_0}{dt}+K_0(t;x)+\phi_0(t;x)=0,\tag{2.7}$$

其中$\binom{n}{j}$ 表示二项式系数，且

$$\begin{aligned}K_n(t;x)=&(\mathcal{H}\Lambda^{\frac{1}{2}}\partial_x^n u)(X(t;x),t)\\ =&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(X(t;x)-y)}{|X(t;x)-y|^{\frac{3}{2}}}((\partial_x^n u)(X(t;x),t)-(\partial_x^n u)(y,t))dy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_n(t;x) =&(\Lambda^{\frac{1}{2}}\partial_x^n u)(X(t;x),t)\\ =&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\partial_x^n u)(X(t;x),t)-(\partial_x^n u)(y,t)}{|X(t;x)-y|^{\frac{3}{2}}}dy\end{aligned}$$

对于 $n=0$、1、2、.....。令 $\delta>0$。将积分拆分并进行分部积分，可得

$$\begin{aligned}|K_n(t;x)| =&\left|\left(\int_{|y|<\delta}+\int_{|y|>\delta}\right)\frac{\mathrm{sgn}(y)}{|y|^{\frac{3}{2}}}((\partial_x^n u)(X(t;x),t)-(\partial_x^n u)(X(t;x)-y,t))dy\right|\\ \le&\left|2\delta^{-\frac{1}{2}}((\partial_x^n u)(X(t;x)-\delta,t)-(\partial_x^n u)(X(t;x)+\delta,t))\right|\\ &+2\left|\int_{|y|<\delta}\frac{(\partial_x^{n+1}u)(X(t;x)-y,t)}{|y|^{\frac{1}{2}}}\right|\\ &+\left|\int_{|y|>\delta}\frac{\mathrm{sgn}(y)}{|y|^{\frac{3}{2}}}((\partial_x^n u)(X(t;x),t)-(\partial_x^n u)(X(t;x)-y,t))dy\right|\\ \le&12\delta^{-\frac{1}{2}}\|v_n(t)\|_{L^\infty}+8\delta^{\frac{1}{2}}\|v_{n+1}(t)\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}|\phi_n(t;x)| =&\left|\left(\int_{|y|<\delta}+\int_{|y|>\delta}\right)\frac{(\partial_x^n u)(X(t;x),t)-(\partial_x^n u)(X(t;x)-y,t)}{|y|^{\frac{3}{2}}}dy\right|\\ \le&\left|\int_{|y|<\delta}\frac{\mathrm{sgn}^2(y)}{|y|^{\frac{3}{2}}}((\partial_x^n u)(X(t;x),t)-(\partial_x^n u)(X(t;x)-y,t))dy\right|\\ &+\left|\int_{|y|>\delta}\frac{(\partial_x^n u)(X(t;x),t)-(\partial_x^n u)(X(t;x)-y,t)}{|y|^{\frac{3}{2}}}dy\right|\\ \le&\left|\int_{|y|<\delta}\mathrm{sgn}(y)((\partial_x^n u)(X(t;x),t)-(\partial_x^n u)(X(t;x)-y,t))d(-\frac{2}{|y|^{\frac{1}{2}}})\right|\\ &+8\delta^{-\frac{1}{2}}\|v_n(t)\|_{L^\infty}\\ \le&8\delta^{-\frac{1}{2}}\|v_n(t)\|_{L^\infty}+2\left|\frac{\mathrm{sgn}(y)}{|y|^{\frac{1}{2}}}((\partial_x^n u)(X(t;x),t)-(\partial_x^n u)(X(t;x)-y,t))\right|_{-\delta}^{\delta}\\ &+2\left|\int_{-\delta}^{0}-\frac{(\partial_x^{n+1}u)(X(t;x)-y,t)}{|y|^{\frac{1}{2}}}dy\right|+2\left|\int_0^{\delta}\frac{(\partial_x^{n+1}u)(X(t;x)-y,t)}{|y|^{\frac{1}{2}}}dy\right|\\ \le&16\delta^{-\frac{1}{2}}\|v_n(t)\|_{L^\infty}+8\delta^{\frac{1}{2}}\|v_{n+1}(t)\|_{L^\infty},\end{aligned}$$

于是我们有

$$|K_n(t;x)+\phi_n(t;x)|\le 28(\delta^{-\frac{1}{2}}\|v_n(t)\|_{L^\infty}+\delta^{\frac{1}{2}}\|v_{n+1}(t)\|_{L^\infty}) \tag{2.8}$$

对于 $n=0$、1、2、.....，以及任意的 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}$。

接下来，我们将证明

$$|K_1(t;x)+\phi_1(t;x)|\le\epsilon^2m^2(t)\ \text{ for any }\ (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}. \tag{2.9}$$

注意到（1.7），并利用 Sobolev不等式，可得

$$|K_1(0;x)+\phi_1(0;x)|\le|\mathcal{H}\Lambda^{\frac12}u_0'+\Lambda^{\frac12}u_0'|\le2\|u_0\|_{H^{2+}}<\epsilon^2m^2(0)\ \text{ for any }\ x\in\mathbb{R}. \tag{2.10}$$

反设，对于某个 $T_1\in[0,T)$，存在某个 $x\in\mathbb{R}$，使得 $|K_1(T_1;x)+\phi_1(T_1;x)|=\epsilon^2m^2(T_1)$。由连续性，不失一般性，我们可以假设

$$|K_1(t;x)+\phi_1(t;x)|\le\epsilon^2m^2(t)\ \text{ for any }\ t\in[0,T_1]\ \text{ for any }\ (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}. \tag{2.11}$$

我们来导出矛盾。

引理 2.1. 对于 $0<\gamma<1$ 以及 $t\in[0,T_1]$，令

$$\Sigma_\gamma(t)=\{x\in\mathbb{R}:v_1(t;x)\le(1-\gamma)m(t)\}. \tag{2.12}$$

如果 $0<\epsilon\le\gamma<1/2$ 在 $\epsilon>0$ 充分小时成立，那么当$0\le t_1\le t_2\le T_1$时，$\Sigma_\gamma(t_2)\subset\Sigma_\gamma(t_1)$。

证明。引理 2.1 的证明可见参考文献[16], ，此处为完整起见给出详细证明。

反设，对于某个 $x_1\in\mathbb{R}$，有 $x_1\notin\sum_\gamma(t_1)$，但 $x_1\in\sum_\gamma(t_2)$，其中 $0\le t_1\le t_2\le T_1$，即

$$v_1(t_1;x_1)>(1-\gamma)m(t_1)\ \text{ and }\ v_1(t_2;x_1)\le(1-\gamma)m(t_2)<\frac12m(t_2). \tag{2.13}$$

我们可以选取彼此接近的 t_1 和 t_2，使得

$$v_1(t;x_1)\le\frac12m(t)\ \text{ for any }\ t\in[t_1,t_2].$$

事实上，$v_1(\cdot;x_1)$ 和 m 在区间 $[0,T_1]$ 上一致连续。令

$$v_1(t_1;x_2)=m(t_1)<\frac12m(t_1). \tag{2.14}$$

我们可能必须选择使 t_2 更接近 t_1，从而

$$v_1(t;x_2)<\frac12m(t)\ \text{ for any }\ t\in[t_1,t_2].$$

当 $\epsilon > 0$ 足够小时，由（2.11）可得

$$\begin{aligned}|K_1(t;x_j)+\phi_1(t;x_j)| &\le \epsilon^2 m^2(t) \le 4\epsilon^2 v_1^2(t;x_j)\\ &< \frac{\gamma}{2} v_1^2(t;x_j) \ \text{ for any } \ t\in[t_1,t_2] \ \text{ and } \ j=1,2.\end{aligned}$$

为继续证明，由 (2.6) 可得

$$\frac{dv_1}{dt}(\cdot;x_1) = -v_1^2(\cdot;x_1) - K_1(\cdot;x_1) - \phi_1(\cdot;x_1) \ge (-1-\frac{\gamma}{2}) v_1^2(\cdot;x_1)$$

and

$$\frac{dv_1}{dt}(\cdot;x_2) \ge \left(-1+\frac{\gamma}{2}\right) v_1^2(\cdot;x_2)$$

在区间 (t_1,t_2) 内始终成立。对区间 $[t_1,t_2]$ 上的它们进行积分，可得

$$v_1(t_2;x_1) \ge \frac{v_1(t_1;x_1)}{1+(1+\frac{\gamma}{2})v_1(t_1;x_1)(t_2-t_1)}$$

and

$$v_1(t_2;x_2) \le \frac{v_1(t_1;x_2)}{1+(1-\frac{\gamma}{2})v_1(t_1;x_2)(t_2-t_1)}.$$

后一个不等式与 (2.14) 推出

$$m(t_2) \le \frac{m(t_1)}{1+(1-\frac{\gamma}{2})m(t_1)(t_2-t_1)}.$$

前一个不等式与 (2.13) 推出

$$\begin{aligned}v_1(t_2;x_1) >& \frac{(1-\gamma)m(t_1)}{1+(1+\frac{\gamma}{2})(1-\gamma)m(t_1)(t_2-t_1)}\\ >& \frac{(1-\gamma)m(t_1)}{1+(1-\frac{\gamma}{2})m(t_1)(t_2-t_1)}\\ \ge& (1-\gamma)m(t_2).\end{aligned}$$

这就产生了矛盾，因此证明完成。 □

引理 2.2. $0 < q(t) \le 1$，且对任意 $t\in[0,T_1]$ 均递减。

证明。证明与 [16]，非常相似，这里仅列出详细过程，以供日后参考。

令 $x \in \sum_{\gamma}(T_1)$，其中 $0 < \epsilon \le \gamma < 1/2$ 对于 $\epsilon > 0$ 充分小。为简化记号，我们将其省略。由 (2.3) 和引理 2.1 可知

$$m(t) \le v_1(t) \le (1-\gamma)m(t) \quad \text{for any} \quad t \in [0, T_1]. \tag{2.15}$$

将 (2.6) 的解写为

$$v_1(t) = \frac{v_1(0)}{1 + v_1(0)\int_0^t (1 + (v_1^{-2}(K_1 + \phi_1))(\tau))d\tau} =: m(0)r^{-1}(t). \tag{2.16}$$

显然，对于任意 $t \in [0, T_1]$， $r(t) > 0$。由 (2.15) 和 (2.11) 可知

$$|(v_1^{-2}(K_1 + \phi_1))(t)| < (1-\gamma)^{-2}\epsilon^2 < \epsilon \quad \text{for any} \quad t \in [0, T_1]$$

当 $\epsilon > 0$ 充分小时。因此，由 (2.16) 可得

$$(1+\epsilon)m(0) \le \frac{dr}{dt} \le (1-\epsilon)m(0) \quad \text{throughout the interval} \quad (0, T_1). \tag{2.17}$$

因此，对于任意 $t \in [0, T_1]$， $r(t)$ 递减，从而 $v_1(t)$（见 (2.16)）也递减。此外，对于任意 $t \in [0, T_1]$， $m(t)$ 递减，从而 $q(t)$（见 (2.3)）也递减。证明至此完成。由 (2.3)、(2.16) 和 (2.15) 可得

$$q(t) \le r(t) \le \frac{1}{1-\gamma} q(t) \quad \text{for any} \quad t \in [0, T_1]. \tag{2.18}$$

□

引理 2.3. 对于 $s > 0$、 $s \ne 1$，且对于 $t \in [0, T_1]$,

$$\int_0^t q^{-s}(\tau)d\tau \le -\frac{1}{s-1}\frac{1}{(1-\epsilon)^{1+s}}\frac{1}{m(0)}\left(q^{1-s}(t) - \frac{1}{(1-\epsilon)^{1-s}}\right). \tag{2.19}$$

例如，证明可见参考文献[2], 。因此，我们省略其细节。请参见下文 (2.36) 的证明。

引理 2.4。对于 $n \ge 3$,

$$\sum_{j=2}^{n-1} \binom{n}{j} (j-1)^{2(j-1)}(n-j)^{2(n-j)} \le \frac{3}{2} e n (n-1)^{2(n-1)}. \tag{2.20}$$

证明。我们使用斯特林不等式计算得

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{n-1}\binom{n}{j}(j-1)^{2(j-1)}(n-j)^{2(n-j)}\\
\leq&\sum_{j=2}^{n-1}\frac{n^n}{j^j(n-j)^{n-j}}(j-1)^{2(j-1)}(n-j)^{2(n-j)}\\
=&n\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}(n-1)^{2(n-1)}\sum_{j=2}^{n-1}\frac{1}{j}\left(\frac{j-1}{j}\right)^{j-1}\frac{(j-1)^{j-1}(n-j)^{n-j}}{(n-1)^{n-1}}\\
\leq&en(n-1)^{2(n-1)}\sum_{j=2}^{n-1}\frac{1}{j}\frac{j-1}{n-1}\\
\leq&en(n-1)^{2(n-1)}\frac{1}{n-1}\int_1^n\frac{1}{y}dy\\
\leq&\frac{3}{2}en(n-1)^{2(n-1)}.
\end{aligned}$$

□

我们断言

$$\|v_0(t;\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}<C_0, \tag{2.21}$$

$$\|v_1(t;\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=\|(\partial_x u)(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}<C_1q^{-1}(t), \tag{2.22}$$

$$\|v_n(t;\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=\|(\partial_x^n u)(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}<C_2((n-1)g)^{2(n-1)}q^{-1-(n-1)\sigma}(t), \tag{2.23}$$

对于 $n=2$、3、.....，对于任意 $t\in[0,T_1]$，其中

$$C_0=2(\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+\|u_0'\|)_{L^\infty(\mathbb{R})}),\quad C_1=2\|u_0'\|)_{L^\infty(\mathbb{R})},\quad C_2=(-m(0))^{3/4} \tag{2.24}$$

and

$$\sigma=\frac{3}{2}+6\epsilon\ \text{ so that }\ \sigma<2-20\epsilon \tag{2.25}$$

对于定理 1.1 中的 ϵ。由 (1.7) 可知

$$\frac{1}{2}C_1=\|u_0'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}>C_2>1,$$

并且我们在整个证明过程中都默认使用这一点。由 (2.24)、(2.3) 以及 (1.10)、(1.7) 可知

$$\|v_0(0;\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}<C_0,$$

$$\|v_1(0;\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|u_0'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < C_1 q^{-1}(0),$$

$$\|v_n(0;\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|u_0^{(n)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < C_2((n-1)g)^{2(n-1)} q^{-1-(n-1)\sigma}(0)$$

对于 $n = 2$，3，.....。换言之，对于 $t = 0$ 处的任意 $n = 0$，1，2，.....，(2.21)-(2.23) 均成立。反设在区间 $[0, T_2)$ 上，(2.21)-(2.23) 对任意 $n = 0$，1，2，..... 均成立，但对于某个 $n \geq 0$，在 $t = T_2$ 处，对某个 $T_2 \in (0, T_1]$ 不成立。由连续性可知，

$$\|v_0(t;\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_0, \tag{2.26}$$

$$\|v_1(t;\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_1 q^{-1}(t), \tag{2.27}$$

$$\|v_n(t;\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_2((n-1)g)^{2(n-1)} q^{-1-(n-1)\sigma}(t) \tag{2.28}$$

对于 $n = 2$、3、.....以及任意 $t \in [0, T_2]$。我们寻求矛盾。

对于 $n = 0$，证明与 [16], 中的证明类似；此处我们给出详细证明，以便今后使用。

由（2.8）（其中 $\delta(t) = q(t)$）以及（2.26）-（2.27）可得

$$|K_0(t;x) + \phi_0(t;x)| \leq 28(C_0 q^{-\frac{1}{2}}(t) + C_1 q^{-1}(t) q^{\frac{1}{2}}(t)) = 28(C_0 + C_1) q^{-\frac{1}{2}}(t) \tag{2.29}$$

对于任意 $t \in [0, T_2]$ 以及任意 $x \in \mathbb{R}$。随后，在区间 $[0, T_2]$ 上对（2.7）积分，我们得到

$$\begin{aligned}
|v_0(T_2;x)| \leq & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \int_0^{T_2} |K_0(t;x) + \phi_0(t;x)| dt \\
\leq & \frac{1}{2} C_0 + 28(C_0 + C_1) \int_0^{T_2} q^{-\frac{1}{2}}(t) dt \\
\leq & \frac{1}{2} C_0 - 28(C_0 + C_1) \frac{2}{(1-\epsilon)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{m(0)} \left(\frac{1}{(1-\epsilon)^{\frac{1}{2}}} - q^{\frac{1}{2}}(T_2) \right) \\
\leq & \frac{1}{2} C_0 - 56(C_0 + C_1) \frac{1}{(1-\epsilon)^2} \frac{1}{m(0)} \\
< & C_0
\end{aligned} \tag{2.30}$$

对任意 $x \in \mathbb{R}$。因此，（2.21）在整个区间 $[0, T_2]$ 上成立。这里，第二个不等式用到了（2.24）和（2.29），第三个不等式用到了（2.19），第四个不等式用到了引理 2.2，最后一个不等式则用到了（1.8）蕴含

$$-m(0)(1-\epsilon)^2 > 112 \left(1 + \frac{C_1}{C_0} \right)$$

当 $\epsilon > 0$ 充分小时。事实上， $m(0) < -1$ 且，根据假设， $g \geq 1$ ，并且根据（2.24），$C_1/C_0 < 1$ 。

对于 $n = 1$，证明与参考文献 [16]，中的证明类似，此处我们给出细节以备后用。

由 (2.8)（其中 $\delta(t) = q^{\sigma}(t)$）以及 (2.27)、(2.28) 可得

$$\begin{aligned} |K_1(t;x) + \phi_1(t;x)| \leq & 28(C_1 q^{-1}(t) q^{-\frac{\sigma}{2}}(t) + C_2 g^2 q^{\frac{\sigma}{2}}(t) q^{-1-\sigma}(t)) \\ = & 28(C_1 + C_2 g^2) q^{-1-\frac{\sigma}{2}}(t) \end{aligned} \tag{2.31}$$

对任意 $t \in [0, T_2]$，对任意 $x \in \mathbb{R}$。暂且假设 $v_1(T_2; x) \geq 0$。由 (2.6) 注意到

$$\frac{dv_1}{dt}(t;x) = -v_1^2(t;x) - K_1(t;x) - \phi_1(t;x) \leq |K_1(t;x) + \phi_1(t;x)|$$

对任意 $(t, x) \in (0, T_2) \times \mathbb{R}$。在区间 $[0, T_2]$ 上对其积分，得到

$$\begin{aligned} v_1(T_2;x) \leq & \|u_0'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \int_0^{T_2} |K_1(t;x) + \phi_1(t;x)| dt \\ \leq & \frac{1}{2} C_1 + 28(C_1 + C_2 g^2) \int_0^{T_2} q^{-2}(t) dt \\ \leq & \frac{1}{2} C_1 - 28(C_1 + C_2 g^2) \frac{1}{(1-\epsilon)^3 m(t)} (q^{-1}(T_2) - (1-\epsilon)) \\ \leq & \frac{1}{2} C_1 q^{-1}(T_2) - 28(C_1 + C_2 g^2) \frac{1}{(1-\epsilon)^3 m(t)} q^{-1}(T_2) \\ \leq & C_1 q^{-1}(T_2). \end{aligned}$$

第二个不等式用到了 (2.24) 和 (2.31)、引理 2.2、(2.25)；第三个不等式用到了 (2.19)；第四个不等式用到了引理 2.2；最后一个不等式用到了 (1.8) 蕴含

$$-m(0)(1-\epsilon)^3 > 56 \left(1 + \frac{C_2}{C_1} g^2\right)$$

当 $\epsilon > 0$ 足够小时。事实上，根据假设有 $m(0) < -1$ ，并由 (2.24) 得 $C_2/C_1 < 1/2$ 。

另一方面，假设 $v_1(T_2; x) < 0$。不失一般性，我们可以假设 $\|u_0'\|_{L^\infty}(\mathbb{R}) = -m(0)$；否则取 $-u$ 。由 (2.3) 和 (2.24) 可得

$$v_1(T_2;x) \geq m(T_2) = m(0) q^{-1}(T_2) > -C_1 q^{-1}(T_2).$$

因此，(2.22) 在整个区间 $[0, T_2]$ 内成立。

对于 $n \geq 3$，证明与参考文献 [16]，中的证明类似；为便于今后使用，我们在此给出详细证明。

对于 $n \geq 2$，由 (2.8) 可知，其中 $\delta(t) = (ng)^{-2}q^{\sigma}(t)$；再结合 (2.28)，得到

$$\begin{aligned}|K_n(t;x)+\phi_n(t;x)| \leq & 28(ngq^{-\frac{\sigma}{2}}(t)C_2((n-1)g)^{2(n-1)}q^{-1-(n-1)\sigma}(t) \\ & +(ng)^{-1}q^{\frac{\sigma}{2}}(t)C_2(ng)^{2n}q^{-1-n\sigma}(t)) \\ = & 28ngC_2((n-1)g)^{2(n-1)}\left(1+(\frac{n}{n-1})^{2(n-1)}\right)q^{-1-\frac{\sigma}{2}-(n-1)\sigma}(t) \\ < & 28(1+\mathrm{e}^2)ngC_2((n-1)g)^{2(n-1)}q^{-1-\frac{\sigma}{2}-(n-1)\sigma}(t) \end{aligned} \tag{2.32}$$

对任意 $(t,x) \in [0,T_2]\times\mathbb{R}$。

对于 $n \geq 2$，此外，令

$$v_1(T_{3,n};x) = m(T_{3,n}) \text{ and } m(t) \leq v_1(t;x) \leq \frac{1}{(1+\epsilon)^{1/(2+(n-1)\sigma)}}m(t) \tag{2.33}$$

对任意 $t \in [T_{3,n},T_2]$，存在某个 $T_{3,n} \in (0,T_2)$，并且存在某个 $x \in \mathbb{R}$。事实上，由于 v_1 和 m 在区间 $[0,T_2]$ 上一致连续，我们可以找到 $T_{3,n}$，使其充分接近 T_2，从而 (2.33) 成立。当然，x 依赖于 n，但为简化记号，我们省略这一点。我们重复引理 2.2 的证明中的论证，得到

$$(1+\epsilon)m(0) \leq \frac{dr}{dt} \leq (1-\epsilon)m(0) \text{ throughout the interval } (T_{3,n},T_2) \tag{2.34}$$

当 $\epsilon > 0$ 充分小时，并且

$$q(t) \leq r(t) \leq (1+\epsilon)^{1/(2+(n-1)\sigma)}q(t) \text{ for any } t \in [T_{3,n},T_2]. \tag{2.35}$$

于是可得

$$\begin{aligned} & \int_{T_{3,n}}^{T_2} q^{-2-(n-1)\sigma}(t)dt \\ \leq & (1+\epsilon)\int_{T_{3,n}}^{T_2} r^{-2-(n-1)\sigma}(t)dt \\ \leq & \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\frac{1}{m(0)}\int_{T_{3,n}}^{T_2} r^{-2-(n-1)\sigma}(t)\frac{dr}{dt}(t)dt \\ = & -\frac{1}{1+(n+1)\sigma}\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\frac{1}{m(0)}(r^{-1-(n-1)\sigma}(T_2)-r^{-1-(n-1)\sigma}(T_{3,n})) \\ \leq & -\frac{1}{1+(n+1)\sigma}\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\frac{1}{m(0)}(r^{-1-(n-1)\sigma}(T_2)-r^{-1-(n-1)\sigma}(T_{3,n})). \end{aligned} \tag{2.36}$$

当 $T_{3,n}$ 和 T_2 相近时，这比 (2.19) 更精细。注意，(2.36) 的右侧随 n 增大而减小。这里，第一个不等式用到了 (2.35)，第二个不等式用到了 (2.34)，最后一个不等式用到了 (2.35) 和 (2.33)。

对于 $n \geq 3$，令 $|v_n(T_2; x_n)| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |v_n(T_2; x)|$。不失一般性，假设 $v_n(T_2; x_n) > 0$；否则我们取 $-u$。选取接近 T_2 的 $T_{3,n}$，使得

$$v_n(t; x_n) \geq 0 \quad \text{for any} \quad t \in [T_{3,n}, T_n]. \tag{2.37}$$

我们必须选择更接近 T_2 的 $T_{3,n}$，使得对于某个 $x \in \mathbb{R}$，式（2.33）成立。因此，式（2.36）成立。由（2.5）可得

$$\begin{aligned}
\frac{dv_n}{dt}(t; x_n) =& -(n+1)v_1(t; x_n)v_n(t; x_n) - \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} v_j(t; x_n)v_{n+1-j}(t; x_n) \\
& - K_n(t; x_n) - \phi_n(t; x_n) \\
\leq& -(n+1)m(0)C_2((n-1)g)^{2(n-1)}q^{-1}(t)q^{-1-(n-1)\sigma}(t) \\
& + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} C_2^2((j-1)g)^{2(j-1)}((n-j)g)^{2(n-j)}q^{-1-(j-1)\sigma}(t)q^{-1-(n-j)\sigma}(t) \\
& + |K_n(t; x_n)| + |\phi_n(t; x_n)| \\
\leq& -(n+1)m(0)C_2((n-1)g)^{2(n-1)}q^{-2-(n-1)\sigma}(t) \\
& + \frac{9}{4}\mathrm{e}^2 n((n-1)g)^{2(n-1)}C_2^2 q^{-2-(n-1)\sigma}(t) \\
& + 28(1+\mathrm{e}^2)ngC_2((n-1)g)^{2(n-1)}q^{-1-\frac{\sigma}{2}-(n-1)\sigma}(t) \\
\leq& (-m(0)(n+1) + \frac{3}{2}\mathrm{e}C_2 n + 28(1+\mathrm{e}^2)ng)C_2((n-1)g)^{2(n-1)}q^{-2-(n-1)\sigma}(t)
\end{aligned}$$

对于任意 $t \in (T_{3,n}, T_2)$。第一个不等式使用了 (2.3)、(2.37) 和 (2.28)，第二个不等式使用了 (2.20) 和 (2.32)，最后一个不等式使用了引理 2.2 和 (2.25)。在区间 $[T_{3,n}, T_2]$ 上对其积分，得到

$$\begin{aligned}
v_n(T_2; x_n) <& v_n(T_{3,n}, x_n) + (-m(0)(n+1) + \frac{3}{2}\mathrm{e}C_2 n + 28(1+\mathrm{e}^2)ng) \\
& \times C_2((n-1)g)^{2(n-1)} \int_{T_{3,n}}^{T_2} q^{-2-(n-1)\sigma}(t)dt \\
\leq& C_2((n-1)g)^{2(n-1)}q^{-1-(n-1)\sigma}(T_{3,n}) \\
& - (-m(0)(n+1) + \frac{3}{2}\mathrm{e}C_2 n + 28(1+\mathrm{e}^2)ng) \\
& \times \frac{1}{1+(n+1)\sigma}\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\frac{1}{m(0)}C_2((n-1)g)^{2(n-1)} \\
& \times (q^{-1-(n-1)\sigma}(T_2) - q^{-1-(n-1)\sigma}(T_{3,n})) \\
<& C_2((n-1)g)^{2(n-1)}q^{-1-(n-1)\sigma}(T_{3,n}) \\
& + \frac{n+1+\epsilon n}{1+(n-1)\sigma}\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}C_2((n-1)g)^{2(n-1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times (q^{-1-(n-1)\sigma}(T_2) - q^{-1-(n-1)\sigma}(T_{3,n})) \\
<&(1 - \frac{4+3\epsilon}{2\sigma+1}\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon})C_2((n-1)g)^{2(n-1)}q^{-1-(n-1)\sigma}(T_{3,n}) \\
&+ \frac{4+3\epsilon}{2\sigma+1}\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}C_2((n-1)g)^{2(n-1)}q^{-1-(n-1)\sigma}(T_2) \\
<&C_2((n-1)g)^{2(n-1)}q^{-1-(n-1)\sigma}(T_2).
\end{aligned}
$$

因此，在整个区间 $[0, T_2]$ 上，(2.23) 对 $n = 3$、4、.....成立。这里，第二个不等式使用了 (2.28) 和 (2.36)，第三个不等式则利用了 (1.8) 和 (1.9) 蕴含

$$
-m(0)\epsilon > \frac{3}{2}\mathrm{e}C_2 + 28(1 + \mathrm{e}^{1/g})g
$$

当 $\epsilon > 0$ 充分小时。事实上，根据假设并回顾（2.24），$m(0) < -1$。第四个不等式使用了（2.28）以及 $\frac{(1+\epsilon\ n+1}{n\sigma+1-\sigma}$）随 $n \geq 3$减小这一事实，最后一个不等式使用了（2.28）和引理 2.2。事实上，

$$
0 < \frac{4+3\epsilon}{2\sigma+1}\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} < 1. \tag{2.38}
$$

对于 $n = 2$，证明与 [15], 中的证明类似；这里我们给出详细证明，以便将来使用。

当 $x_2 \notin \sum_{1/3}(T_2)$ 时。令 $|v_2(T_2; x_2)| = \max_{x\in\mathbb{R}} |v_2(T_2; x)|$。不失一般性，假设 $v_2(T_2; x_2) > 0$。我们选择接近 T_2 的 $T_{3,\ n}$，使得

$$
v_2(t; x_2) \geq 0 \quad \text{for any } t \in [T_{3,n}, T_2]. \tag{2.39}
$$

我们必然选择更接近 T_2 的 $T_{3,\ n}$，从而（2.33）以及因此（2.36）成立。

暂且假设 $x_2 \notin \sum_{1/3}(T_2)$，即 $v_1(T_2; x_2) > \frac{2}{3}m(T_2)$（见 (2.12)）。我们可以适当地选取 $T_{3,\ n}$，使其更接近 T_2，从而

$$
v_1(t; x_2) \geq \frac{2}{3}m(t) \quad \text{for any } t \in [T_{3,n}, T_2]. \tag{2.40}
$$

事实上，v_1 和 m 在区间 $[0, T_2]$上是一致连续的。证明与 $n \geq 3$ 的证明类似。具体而言，由 (2.5) 可得

$$
\begin{aligned}
\frac{dv_2}{dt}(t; x_2) =& -3v_1(t; x_2)v_2(t; x_2) - K_2(t; x_2) - \phi_2(t; x_2) \\
\leq& -2m(0)C_2g^2q^{-1}(t)q^{-1-\sigma}(t) + 28(1 + \mathrm{e}^2)2gC_2g^2q^{-1-\frac{\sigma}{2}-\sigma}(t) \\
\leq& 2(-m(0) + 28(1 + \mathrm{e}^2)g)C_2g^2q^{-2-\sigma}(t)
\end{aligned}
$$

对于任意 $t \in (T_{3,\ n}, T_2)$。第一个不等式使用了 (2.40)、(2.39)、(2.15) 和 (2.32)，第二个不等式使用了引理 2.2 和 (2.25)。在区间上对其积分

$[T_{3,n}, T_2]$，于是我们证明

$$\begin{aligned} v_2(T_2;x_2) <& v_2(T_{3,n};x_2) + 2(-m(0)+28(1+\mathrm{e}^2)g)C_2g^2\int_{T_{3,n}}^{T_2} q^{-2-\sigma}(t)dt \\ \leq& C_2g^2q^{-1-\sigma}(T_{3,n}) - 2(-m(0)+28(1+\mathrm{e}^2)g) \\ & \times \frac{1}{1+\sigma}\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\frac{1}{m(0)}C_2g^2(q^{-1-\sigma}(T_2)-q^{-1-\sigma}(T_{3,n})) \\ \leq& C_2g^2q^{-1-\sigma}(T_{3,n}) + \frac{2}{1+\sigma}\frac{(1+\epsilon)^2}{1-\epsilon}C_2g^2(q^{-1-\sigma}(T_2)-q^{-1-\sigma}(T_{3,n})) \\ =& \left(1-\frac{2}{1+\sigma}\frac{(1+\epsilon)^2}{1-\epsilon}\right)C_2g^2q^{-1-\sigma}(T_{3,n}) + \frac{2}{1+\sigma}\frac{(1+\epsilon)^2}{1-\epsilon}C_2g^2q^{-1-\sigma}(T_2) \\ \leq& C_2g^2q^{-1-\sigma}(T_2). \end{aligned}$$

第二个不等式使用了 (2.28) 和 (2.36)，第三个不等式使用了这意味着 (1.8)

$$-m(0)\epsilon > 28(1+\mathrm{e}^2)g$$

当 $\epsilon > 0$ 充分小时。事实上，根据假设，$m(0) < -1$ 。最后一个不等式使用了 (2.25) 和引理 2.2。事实上，

$$0 < \frac{2}{1+\sigma}\frac{(1+\epsilon)^2}{1-\epsilon} < 1.$$

当 $x_2 \in \sum_{1/3}(T_2)$ 时。由引理 2.1 可知

$$v_1(t;x_2) \leq \frac{2}{3}m(t) < 0 \quad \text{for any} \quad t \in [0,T_2]. \tag{2.41}$$

我们将探究方程 (2.1) 的解的“平滑效应”。

对 (2.1) 关于 x 求导，并回忆 (2.2)，可得

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\partial_x X) = v_1(\partial_x X), \\ (\partial_x X)(0;x) = 1, \end{cases} \tag{2.42}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\partial_x^2 X) = v_2(\partial_x X)^2 + v_1(\partial_x^2 X), \\ (\partial_x^2 X)(0;x) = 0, \end{cases} \tag{2.43}$$

and

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\partial_x^3 X) = v_3(\partial_x X)^3 + 3v_2(\partial_x X)(\partial_x^2 X) + v_1(\partial_x^3 X), \\ (\partial_x^3 X)(0;x) = 0 \end{cases} \tag{2.44}$$

在整个区间 $(0, T_2)$ 上。此外，对 (2.7) 积分可得

$$v_0(t;x) = u_0(x) - \int_0^t (K_0(\tau;x) + \phi_0(\tau;x))d\tau$$

对任意 $(t, x) \in [0, T_2] \times \mathbb{R}$。对其关于 x 求导，并回顾 (2.2)，可得

$$(v_2(\partial_x X)^2 + v_1(\partial_x^2 X))(t;x) = u_0''(x) - I_2(t;x), \tag{2.45}$$

$$(v_3(\partial_x X)^3 + 3v_2(\partial_x X)(\partial_x^2 X) + v_1(\partial_x^3 X))(t;x) = u_0'''(x) - I_3(t;x) \tag{2.46}$$

对任意 $(t, x) \in [0, T_2] \times \mathbb{R}$，其中

$$I_2(t;x) = \int_0^t ((K_2 + \phi_2)(\partial_x X)^2 + (K_1 + \phi_1)(\partial_x^2 X))(\tau;x)d\tau, \tag{2.47}$$

$$I_3(t;x) = \int_0^t ((K_3 + \phi_3)(\partial_x X)^3 + 3(K_2 + \phi_2)(\partial_x X)(\partial_x^2 X) + (K_1 + \phi_1)(\partial_x^3 X)(\tau;x)d\tau. \tag{2.48}$$

由 (2.44) 和 (2.46) 可知

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\partial_x^3 X)(\cdot;x) = u_0'''(x) - I_3(\cdot;x), \\ (\partial_x^3 X)(0;x) = 0. \end{cases} \tag{2.49}$$

我们断言

$$\frac{1}{2}q^{1+2\epsilon}(t) \le (\partial_x X)(t;x_2) \le 2q^{1-\epsilon}(t) \quad \text{for any} \quad t \in [0, T_2]. \tag{2.50}$$

事实上，由 (2.1)、(2.42)、(2.16) 和 (2.17) 可得

$$\frac{1}{1-\epsilon}\frac{dr/dt}{r} \le \frac{d(\partial_x X)/dt}{\partial_x X} \le \frac{1}{1+\epsilon}\frac{dr/dt}{r}$$

在整个区间 $(0, T_2)$ 上成立。对区间 $[0, t]$ 积分，并回顾 (2.42)，可得

$$\left(\frac{r(t)}{r(0)}\right)^{1/(1-\epsilon)} \le (\partial_x X)(t;x_2) \le \left(\frac{r(t)}{r(0)}\right)^{1/(1+\epsilon)}$$

对任意 $t \in [0, T_2]$，均成立。因此，(2.50) 由 (2.18) 得出。

接下来，我们将证明

$$|(\partial_x^2 X)(t;x_2)| < -\frac{8}{m(0)} C_2 g^2 q^{2-\sigma-2\epsilon}(t) \tag{2.51}$$

and

$$|(\partial_x^3 X)(t;x_2)| < \frac{16\epsilon}{m^2(0)} C_2^2 g^4 q^{3-2\sigma+7\epsilon}(t) \tag{2.52}$$

对任意 $t \in [0, T_2]$。由 (2.43) 和 (2.44) 可知，(2.51) 和 (2.52) 在$t = 0$处成立。反设 (2.51) 和 (2.52) 在整个区间上成立，但对某个 $T_4 \in (0, T_2]$，在 $t = T_4$ 处不成立。由连续性可知，我们得到

$$|(\partial_x^2 X)(t;x_2)| < -\frac{8}{m(0)} C_2 g^2 q^{2-\sigma-2\epsilon}(t), \tag{2.53}$$

$$|(\partial_x^3 X)(t;x_2)| < \frac{16\epsilon}{m^2(0)} C_2^2 g^4 q^{3-2\sigma+7\epsilon}(t) \tag{2.54}$$

对任意 $t \in [0, T_4]$。我们寻求矛盾。

利用 (2.47) 计算可得

$$\begin{aligned}
|I_2(t;x_2)| \leq & \int_0^t (112(1+\mathrm{e}^2) 2g C_2 g^2 q^{-1-\frac{\sigma}{2}-\sigma}(\tau) q^{2-2\epsilon}(\tau) \\
& - \frac{8}{m(0)} C_2 g^2 q^{2-\sigma-2\epsilon}(\tau) 28(C_1 + C_2 g^2) q^{-1-\frac{\sigma}{2}}(\tau)) d\tau \\
\leq & 224 \left((1+\mathrm{e}^2) g + 2 \left(1 + \frac{C_2}{C_1} g^2 \right) \right) C_2 g^2 \int_0^t q^{-\sigma+8\epsilon}(\tau) d\tau \\
\leq & -224 \left((1+\mathrm{e}^2) g + 2 \left(1 + \frac{C_2}{C_1} g^2 \right) \right) C_2 g^2 \\
& \times \frac{1}{\sigma - 1 - 8\epsilon} \frac{1}{(1-\epsilon)^{\sigma+1-8\epsilon}} \frac{1}{m(0)} (q^{1-\sigma+8\epsilon}(t) - (1-\epsilon)^{\sigma-1+8\epsilon}) \\
< & \epsilon C_2 g^2 q^{1-\sigma+8\epsilon}(t)
\end{aligned} \tag{2.55}$$

对任意 $t \in [0, T_4]$。第一个不等式使用了 (2.32)、(2.50) 以及 (2.31)、(2.53)，第二个不等式使用了引理 2.2 和 (2.25)。不失一般性，设$\|u_0'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = -m(0)$；否则我们取 $-u$。第三个不等式使用了 (2.19)，最后一个不等式则利用了 (1.8) 和 (2.25) 可推出

$$-m(0)\epsilon(1-\epsilon)^{\sigma+1-8\epsilon} > \frac{224}{\sigma - 1 - 8\epsilon} \left((1+\mathrm{e}^2) g + 2(1 + \frac{C_2}{C_1} g^2) \right)$$

当 $\epsilon>0$ 充分小时。事实上，由 (2.25) 可得 $\sigma+1-8\epsilon=5/2-2\epsilon$ 和 $\sigma-1-8\epsilon=1/2-2\epsilon$, 根据假设有 $m(0)<-1$，由 (2.24) 可得 $C_2/C_1<1/2$，并将 ϵ 替换为 $\epsilon/18$。在 $t=T_4$ 和 $x=x_2$处计算 (2.45)，随后我们证明

$$\begin{aligned}|(\partial_x^2X)(T_4;x_2)|=&|v_1^{-1}(T_4;x_2)||u_0''(x_2)-I_2(T_4;x_2)-v_2(T_4;x_2)(\partial_xX)(T_4;x_2)^2|\\<&-\frac{3}{2}\frac{1}{m(0)}q(T_4)(g^2+\epsilon^2C_2g^2q^{1-\sigma+8\epsilon}(T_4)+4C_2g^2q^{-1-\sigma}(T_4)q^{2-2\epsilon}(T_4))\\\le&-\frac{3}{2}(5+\epsilon)\frac{1}{m(0)}C_2g^2q^{2-\sigma-2\epsilon}(T_4)\\<&-\frac{8}{m(0)}C_2g^2q^{2-\sigma-2\epsilon}(T_4).\end{aligned}$$

因此，(2.51) 在整个区间 $[0,T_2]$ 上成立。这里，第一个不等式用到了 (2.41)、(2.3) 和 (1.10)、(2.55)、(2.28)、(2.50)；第二个不等式用到了 (1.7)、(2.24) 和引理 2.2、(2.25)；最后一个不等式则在 $\epsilon>0$ 充分小时成立。

类似地，我们利用 (2.48) 计算得

$$\begin{aligned}|I_3(t;x_2)|<&\int_0^t(224(1+\mathrm{e}^2)3gC_2(2g)^4q^{-1-\frac{\sigma}{2}-2\sigma}(\tau)q^{3-3\epsilon}(\tau)\\&-48\times28(1+\mathrm{e}^2)2gC_2^2g^4\frac{1}{m(0)}q^{-1-\frac{\sigma}{2}-\sigma}(\tau)q^{1-\epsilon}(\tau)q^{2-\sigma-2\epsilon}(\tau)\\&+28(C_1+C_2g^2)\frac{\epsilon}{m^2(0)}C_2^2(2g)^4q^{-1-\frac{\sigma}{2}}(\tau)q^{3-2\sigma+7\epsilon}(\tau))d\tau\\\le&56\left(12(1+\mathrm{e}^2)g(\frac{1}{C_2}-\frac{1}{4m(0)})-(1+\frac{C_2}{C_1}g^2)\frac{\epsilon}{m(0)}\right)\\&\times C_2^2(2g)^4\int_0^t q^{1-2\sigma+7\epsilon}(\tau)d\tau\\\le&-56\left(12(1+\mathrm{e}^2)g(\frac{1}{C_2}-\frac{1}{4m(0)})-(1+\frac{C_2}{C_1}g^2)\frac{\epsilon}{m(0)}\right)\\&\times\frac{1}{2\sigma-2-7\epsilon}\frac{1}{(1-\epsilon)^{2\sigma-7\epsilon}}\frac{1}{m(0)}C_2^2(2g)^4(q^{2-2\sigma+7\epsilon}(t)-(1-\epsilon)^{2\sigma-2-7\epsilon})\\\le&-\frac{\epsilon^2}{m(0)}C_2^2(2g)^4q^{2-2\sigma+7\epsilon}(t)\end{aligned}\tag{2.56}$$

对任意 $t\in[0,T_4]$。第一个不等式使用了 (2.32)、(2.50)、(2.53) 以及 (2.29)、(2.54), 第二个不等式使用了 (2.25) 蕴含 $2-5/2\sigma-3\epsilon>1-2\sigma+7\epsilon$。不失一般性，设 $\|u_0'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=-m(0)$。第三个不等式使用了 (2.19)，最后一个不等式使用了 (1.8) 蕴含

$$\epsilon^2(1-\epsilon)^{2\sigma-7\epsilon}(-m(0))^{3/4}>\frac{1680}{2\sigma-2-7\epsilon}(1+\mathrm{e}^2)$$

and

$$-\epsilon(1-\epsilon)^{2\sigma-7\epsilon}m(0) > \frac{56}{2\sigma-2-7\epsilon}\left(1+\frac{C_2}{C_1}g^2\right)$$

当 $\epsilon > 0$ 足够小时。事实上，根据 (2.25)， $2\sigma-7\epsilon = 3+5\epsilon$ 和 $2\sigma-2-7\epsilon = 1+5\epsilon$，$m(0)$ 根据假设 < -1，根据 (2.24) $C_2/C_1 < 1/2$，并将 ϵ 替换为 $\epsilon/32$。在区间 $[0,T_4]$ 上对 (2.49) 积分后，我们得到

$$\begin{aligned}
|(\partial_x^3 X)(T_4;x_2)| \leq & \int_0^{T_4}(|u_0'''(x_2)| + |I_3(t;x_2)|)dt \\
< & \int_0^{T_4}\left((2g)^4 - \frac{\epsilon^2}{m(0)}C_2^2(2g)^4 q^{2-2\sigma+7\epsilon}(t)\right)dt \\
\leq & -\left(\frac{1}{C_2^2}-\frac{\epsilon^2}{m(0)}\right)\frac{1}{2\sigma-3-7\epsilon}\frac{1}{(1-\epsilon)^{2\sigma-1-7\epsilon}}\frac{1}{m(0)} \\
& \times C_2^2(2g)^4(q^{3-2\sigma+7\epsilon}(T_4) - (1-\epsilon)^{2\sigma-3-7\epsilon}) \\
< & \frac{\epsilon}{m^2(0)}C_2^2(2g)^4 q^{3-2\sigma+7\epsilon}(T_4).
\end{aligned}$$

因此，(2.52) 在整个区间 $[0,T_2]$ 上成立。这里的第二个不等式使用了 (1.10) 和 (2.56)，第三个不等式使用了 (2.19)，最后一个不等式使用了 (1.8) 蕴含

$$\epsilon^2(1-\epsilon)^{2\sigma-1-7\epsilon}(-m(0))^{1/2} > \frac{2}{5}$$

当 $\epsilon > 0$ 充分小时，满足 $(1-\epsilon)^{2\sigma-1-7\epsilon} > 2/5$。事实上，根据 (2.25)，$2\sigma-1-7\epsilon = 2+5\epsilon$和 $2\sigma-3-7\epsilon = 5\epsilon$，由假设可知 $m(0) < -1$，并回忆 (2.24)。

继续证明，由于 $v_2(T_2;x_2) = \max_{x\in\mathbb{R}}|v_2(T_2;x)|$，可得

$$v_3(T_2;x_2)(\partial_x X)(T_2;x_2) = 0.$$

将 (2.45) 乘以 $3v_2(\partial_x X)$，将 (2.46) 乘以 v_1，再取两式之差，可得

$$\begin{aligned}
v_2^2(T_2;x_2) = & \frac{1}{3}(\partial_x X)^{-3}(T_2;x_2)(v_1^2(T_2;x_2)(\partial_x^3 X)(T_2;x_2) \\
& + 3v_2(T_2;x_2)(\partial_x X)(T_2;x_2)(u_0''(x_2) - I_2(T_2;x_2)) \\
& - v_1(T_2;x_2)(u_0'''(x_2) - I_3(T_2;x_2))) \\
< & \frac{8}{3}q^{-3-6\epsilon}(T_2)(m^2(0)\frac{\epsilon}{m^2(0)}C_2^2(2g)^4 q^{-2}(T_2)q^{3-2\sigma+7\epsilon}(T_2) \\
& + 6C_2 g^2 q^{-1-\sigma}(T_2)q^{1-\epsilon}(T_2)(g^2 + \epsilon C_2 g^2 q^{1-\sigma+8\epsilon}(T_2)) \\
& - m(0)q^{-1}(T_2)((2g)^4 - \frac{\epsilon^2}{m(0)}C_2^2(2g)^4 q^{2-2\sigma+7\epsilon}(T_2)))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
<&\frac{8}{3}\left(\epsilon+\frac{3}{8}(\frac{1}{C_2}+\epsilon)+\left(\frac{1}{(-m(0))^{1/2}}+\epsilon^2\right)\right)C_2^2(2g)^4q^{-2-2\sigma+\epsilon}(T_2)\\
<&C_2^2g^4q^{-2-2\sigma}(T_2).
\end{aligned}
$$

因此，(2.23) 对整个区间 $[0,T_2]$ 上的 $n=2$ 都成立。这里，第一个不等式用到了 (2.50)、(2.41)、(2.3)、(2.54)、(2.28) 以及 (1.10)、(2.55)、(2.56)；第二个不等式用到了 (1.7)、(2.24)、引理 2.2 和 (2.25)；最后一个不等式用到了

$$
\epsilon+\frac{3}{8}(\epsilon^{\frac{3}{4}}+\epsilon)+\epsilon^{\frac{1}{2}}+\epsilon^2<\frac{3}{2^7}
$$

当 $\epsilon>0$ 充分小时。

综上，反证法证明，对于任意 $n=0$，1，2，.....，在整个区间 $[0,T_1]$ 上，(2.21)、(2.22) 和 (2.23) 均成立。

接下来，注意到

$$
\begin{aligned}
|K_1(t;x)+\phi_1(t;x)|\leq&28(C_1+C_2g^2)q^{-1-\frac{\sigma}{2}}(t)\\
<&28(C_1+C_2g^2)q^2(t)\\
<&28(C_1+C_2g^2)m^{-2}(0)m^2(t)\\
<&\epsilon^2m^2(t)
\end{aligned}
$$

对于任意 $t\in[0,T_1]$，以及任意 $x\in\mathbb{R}$。第一个不等式用到 (2.31)，第二个不等式用到引理 2.2 和 (2.25)，第三个不等式用到 (2.3)。不失一般性，假设 $\|u_0'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=-m(0)$。最后一个不等式用到 (1.8) 蕴含

$$
-m(0)\epsilon^2>56\left(1+\frac{C_2}{C_1}g^2\right)
$$

当 $\epsilon>0$ 充分小时。事实上，根据假设，$m(0)<-1$，并且根据 (2.24)，$C_2/C_1<1/2$。因此，反证法证明 (2.9) 成立。此外，对于任意 $n=0$，1，2，.....，在整个区间 $[0,T']$ 上，任意 $T'<T$ 均满足 (2.21)、(2.22) 和 (2.23)。

To con因此，令 $x\in\sum_\epsilon(t)$ 为 $t\in[0,T)$。由（2.16）和（2.17）可得

$$
m(0)(v_1^{-1}(0;x)+(1+\epsilon)t)\leq r(t;x)\leq m(0)(v_1^{-1}(0;x)+(1-\epsilon)t).
$$

此外，由引理 2.1 可知 $m(0)<v_1(0;x)\leq(1-\epsilon)m(0)$。因此，有

$$
1+m(0)(1+\epsilon)t\leq r(t;x)\leq\frac{1}{1-\epsilon}+m(0)(1-\epsilon)t.
$$

此外，由（2.18）可知

$$
(1-\epsilon)+m(0)(1-\epsilon^2)t\leq q(t)\leq\frac{1}{1-\epsilon}+m(0)(1-\epsilon)t.
$$

由于左侧函数在 $t \to -\frac{1}{m\,0()}\ \frac{1}{1+\epsilon}$ 时趋于零，且右侧函数在 $t \to -\frac{1}{m\,0()}\ 1\ (1-\epsilon)^2$，时趋于零，因此， $q(t) \to 0$，进而（见（2.3））， ——

$$m(t) \to -\infty \ \text{ as } \ t \to T^-,$$

其中 T 满足 (1.11)。另一方面，(2.21)表明，对于任意 $t \in [0, T']$、 $T' < T$ 和 $x \in \mathbb{R}$, $v_0(t; x)$ 均有界。换言之，

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} u_x(t, x) \to -\infty \ \text{ as } \ t \to T^-,$$

b对于任意 $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}$， ut $u(t, x)$ 均有界。证明至此完成。

致谢

本研究得到云南省基础研究项目（项目编号：202101AU070029）资助。

数据可用性声明

由于本研究期间未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] Granero-Belinch´on R, Scrobogna S. 阻尼水波模型. SIAM应用数学杂志, 2019, 79(6): 2530-2550.[2] Liu L F, Orfila A. 黏性效应对瞬态长波传播的影响. 流体力学杂志, 2004, 520: 83-92.[3] Dutykh D, Dias F. 有限水深流体层中的黏性势流自由表面流. 数学报告, 2007, 345(2): 113-118.[4] Dias F, Dyachenko A I, Zakharov V E. 弱阻尼自由表面流理论：一种基于势流解的新表述. 物理快报 A, 2008年, 372(8): 1297-1302.

[5] Ambrose D M, Bona J L, Nicholls D P. 黏性水波模型的适定性. 离散与连续动力系统B辑, 2013年, 17(4): 1113-1137.[6] Nicholls D P, Bona J L, Ambrose D M. 水波截断级数模型的非适定性. 英国皇家学会会刊：数学、物理与工程科学, 2014, 470: 20130849.[7] Granero-Belinch´on R, Scrobogna S. 黏性效应水波模型的适定性. 美国数学学会会刊, 2019, 148(12): 5181-5191.[8] Granero-Belinchon R, Scrobogna S. 黏性水波问题的适定性. 《微分方程杂志》, 2021, 276: 96-148.[9] N Marieme, Nicholls D P. 黏性水波问题解的适定性与解析性. 《微分方程杂志》, 2018, 265: 5031-5065.[10] Kakutani T, Matsuuchi K. 黏性对长重力波的影响. 日本物理学会志, 2007, 39(39): 237-246.[11] Min C, Dumont S, Goubet O. 水波黏性渐近模型（Kakutani-Matsuuchi模型）的解的衰减. 非线性分析：理论、方法与应用, 2012, 75(5): 2883-2896.[12] Bae H, Lee W, Shin J. Kakutani-Matsuuchi模型的Gevrey正则性与有限时间奇异性. 非线性分析：真实世界应用, 2022, 63: 103415.[13] Peregrine D H. 海滩上的破碎波. 流体力学年度评论, 2003, 15(1): 149-178.[14] Hur V M. 表面水波奇点的形成. 纯粹与应用分析通讯, 2017, 11(4): 1465-1474.[15] Hur V M. Whitham 方程中的波破碎. 数学进展, 2017, 317: 410-437.[16] Hur V M, Tao L. 分数阶色散Whitham 方程的波破碎. 《非线性》, 2014, 27(12): 2937-2949.[17] Hur V M , Tao L. 浅水模型中的波破碎. SIAM数学分析杂志, 2016, 50(1): 354-380.[18] Saut J C, Wang Y. 重新审视Whitham型方程的波破碎. SIAM数学分析杂志, 2022, 54(2): 2295-2319.

[19] Lannes D.《水波问题：数学分析与渐近性》. 美国数学会，2013年。[20] Castro A, C´ordoba D, Gancedo F. 表面波模型的奇点形成。《非线性》，2010年, 23(11)：2835。[21] Biler P, Funaki T, Woyczynski W A. 分形伯格斯方程。《微分方程杂志》，1998年，148(1)：9-46。[22] Dong H, Du D, Li D. 分形 Burgers 方程的有限时间奇异性与整体适定性。《印第安纳大学数学杂志》，2009年：807-821。[23] Kiselev A, Nazarov F, Shterenberg R. 分形伯格斯方程的爆破与正则性。《偏微分方程动力学》，2008年，5(3)：1-35。[24] Kato T. 关于（广义）科尔特韦格–德弗里斯方程的柯西问题。《应用数学研究进展及数学补充研究》，1983年，8：93-128。