arXiv:2305.00634v1 [math.CO] 1 May 2023

关于无环符号斜对称簇代数的性质

SIYANG LIU

Contents

1. 引言 1
2. 预备知识 3
3. 折叠理论 5
4. G-矩阵的性质 8
4.1. 重新考察变异 8
4.2. 符号相干性与热带对偶 10
4.3. G-扇与变异扇 15
5. 交换图 17
参考文献 20

Abstract. 我们研究满足某一条件的全符号斜对称簇代数的热带对偶及其交换图的性质。我们证明无圈簇代数总是满足该条件，因此所有结果对无环情形均成立。

1. 引言

簇代数由 Fomin 和 Zelevinsky 于 [FZ02] 提出，旨在为研究全正性以及 Lusztig 与代数群相关联的典范基提供组合框架。它是一类交换代数，由按组合方式定义的生成元（称为簇变量）生成，这些生成元分组为彼此重叠的簇。自簇代数提出以来，人们发现了簇代数与其他领域之间的许多联系。例如，簇代数与黎曼曲面和三角剖分、关于 Y-系统的 Zamolodchikov 周期性、表示论、Donaldson-Thomas 不变量理论以及散射图都有密切联系。

在簇理论奠基系列论文的第一篇中，构造簇代数的初始数据是一个全符号斜对称矩阵。此后，大多数作者更倾向于研究斜对称化簇代数，许多重要性质和猜想也已在斜可对称化情形中得到证明。尽管关于全符号斜对称簇代数仍有许多未知之处，我们相信它们的性质与斜可对称化情形相似。

簇代数最重要的性质是 Laurent 现象。Fomin 和 Zelevin- sky 猜想，以某个簇表示的簇变量是 Laurent 多项式，且其系数均为正，这一猜想称为正性猜想。Lee 和 Schiffler 在对称情形下证明了这一猜想 [LS15]，；Gross、Hacking、Keel 和 Kontsevich 在斜对称化情形下证明了这一猜想 [GHKK18]，；Huang 和 Li 则对无环符号斜对称簇代数证明了这一猜想。最近，Li 和 Pan 证明了这一猜想对所有全符号反对称情形都成立 [LP]。

在奠基性论文的第四篇中， [FZ07], Fomin 和 Zelevinsky 引入了许多组合对象，包括 c-向量和 g-向量（以及 C-矩阵和 G-矩阵），以研究簇代数。著名的符号相容性猜想也在 [FZ07] 中提出。Nakanishi 和 Zelevinsky 在[NZ12]中系统研究了 G-矩阵和 C-矩阵的对偶性。在他们的论文中，假设所有斜对称化簇代数的 c-向量都满足符号相容性猜想。Derksen、Weyman 和 Zelevinsky 在斜对称情形下证实了这一点 [DWZ10] ，Gross、Hacking、Keel 和 Kontsevich 则在斜对称化情形下证实了这一点 [GHKK18]。因此，Nakanishi 和 Zelevinsky 在 [NZ12]中得到的对偶性对斜对称化簇代数成立。设 $\mathcal{A}$ 为一个秩为 n的斜对称化簇代数。粗略地说，他们证明了斜对称化簇代数有以下结果：

(1.1) Every G-matrix is an invertible matrix of some C-matrix;

(1.2) The invertible matrix of every C-matrix is also some C-matrix;

(1.3) 每个 G-矩阵都具有行符号相干性；

(1.4) G-矩阵和 C-矩阵的对偶变异成立。

在假设 [-向量符号相容的条件下，Nakanishi 和 Zelevinsky 证明了这些结论。12] （另见 [Nak]）。尽管 Huang 和 Li 已在无环情形下证明了 c-向量的符号相容性猜想 c，而 Li 和 Pan 已在一般情形下证明了该猜想 [HL18], LP [,], NZ [中的证明很大程度上依赖于斜对称化性质。12]

Reading 研究了 G-扇 $\mathcal{F}_G$ 的性质，它由所有 G-锥（即 G-矩阵的列向量的非负张成）及其面组成，相关内容见 [Rea14]。对于斜对称化簇代数，他还定义了变异扇，并证明了以下结果。

(1.5) $\mathcal{F}_G$ 是一个扇。事实上，它是变异扇的一个子扇。

从 g-向量到簇变量的双射是正性猜想及上述结论的推论， [Nak]证明了这一点。

(1.6) 两个簇变量相同，当且仅当它们对应的 g-向量相同 .

Fomin 和 Zelevinsky 还对交换图的性质提出了一系列猜想$\mathcal{A}$ ，如下所示。

(1.7) 每个种子都由其簇唯一确定。

(1.8) 两个簇相邻，当且仅当它们恰有 $n-1$ 个共同簇变量。

(1.9) 每个带主系数的种子都由对应的 C-矩阵确定 ..

这些猜想已由 Gekhtman、Shapiro 和 Vainshtein 对斜对称化簇代数证明 [GSV08], Cao 和 Li [CL18], 以及 Cao、Huang 和 Li [CHL18]。

本文证明，在满足某个条件（第**假设**节4.2中的1.1—1.9）时，命题对于全符号反对称簇代数成立。特别地，它们对于无环符号斜对称簇代数也成立。

定理1.1 （命题4.7、4.8、定理4.16、4.23、5.8、5.10 ）。设 B 是满足**假设**的全符号反对称矩阵。考虑相应的矩阵模式和簇代数，则上述断言（*1.1—1.9*）成立。特别地，断言（*1.1—1.9*）对无圈簇代数成立。

下一节我们回顾簇代数的基本理论。在第3节中，我们描述折叠理论下簇代数的性质。在第4节中，我们证明满足某一条件（我们猜想该条件总是成立）的全符号反对称簇代数的 G-矩阵的性质。在最后一节中，我们研究交换图的性质。

2. Preliminaries

设 I 为一个可数集。我们称整数矩阵 $B \in Mat_{I\times I}(\mathbb{Z})$ 是局部有限的，如果对于每个$i \in I$，非零元素 b_{ij} 和 b_{ji} 只有有限多个；称 B 是符号反对称的，如果对于所有 i，$b_{ij}b_{ji} \leq 0$ 和 $b_{ij}b_{ji} = 0 \Leftrightarrow b_{ij} = b_{ji} = 0$， $j \in I$。一个可斜对称化的矩阵 B 存在一个对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(d_i, i \in I)$，其对角元素均为正整数，满足 $d_ib_{ij} = -d_jb_{ji}$，显然该矩阵是符号反对称的。一个箭图是一个不含环或 2-圈的有向图。由于局部有限的斜对称矩阵自然对应于局部有限箭图，因此在以下各节中，我们不对二者加以区分。

半域 $\mathbb{P}$ 是一个集合，它具有交换乘法群结构和交换加法半群结构（加法通常记作 $\oplus$），且加法 $\oplus$ 对 $\mathbb{P}$ 中的乘法满足分配律。带指标集 J 的热带半域 $\mathbb{P} = \mathrm{trop}(z_j, j \in J)$ 是由元素 z_j, $j \in J$ 自由生成的乘法群，其加法$\oplus$ 定义为

$$\prod_{j\in J} z_j^{a_j} \oplus \prod_{j\in J} z_j^{b_j} = \prod_{j\in J} z_j^{\min(a_j,b_j)}.$$

令 $\mathbb{QP}$ 为整环 $\mathbb{ZP}$的商域。

定义2.1。 一个（带标号的）种子是一个三元组 $\Sigma = (\mathbf{x},\mathbf{y}\ B)$，其中

- $\mathbf{x} = (x_i, i \in I)$ 是 $\mathbb{QP}$ 上的一个由不定元组成的可数集，使得 $\mathcal{F} = \mathbb{QP}(x_i, i \in I)$ 是 $\mathbb{QP}$的纯超越域扩张，而$\mathbf{x}$ 称为一个簇， $x_i, i \in I$ 称为簇变量；- $\mathbf{y} = (y_i, i \in I)$ 是半域 $\mathbb{P}$ 的一个以 I为指标集的子集；- $B \in Mat_{I\times I}(\mathbb{Z})$ 是一个局部有限的符号反对称矩阵，称为交换矩阵。

对于 $k \in I$，定义另一个三元组$(\mathbf{x}', \mathbf{y}', B') = \mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}\ B)$，称为$(\mathbf{x},\mathbf{y}\ B)$在 k 处的变异，并按以下规则得到：

- $\mathbf{x}' = (x_i', i \in I)$ 由下式给出

$$x_i' = \begin{cases} x_i, & i \neq k, \\ \frac{y_k \prod x_i^{[b_{ik}]_+} + \prod x_i^{[-b_{ik}]_+}}{(y_k \oplus 1)x_k}, & i = k. \end{cases}$$

- $\mathbf{y}' = (y_i', i \in I)$ 由下式给出

$$y_i' = \begin{cases} y_k^{-1}, & i = k, \\ y_i y_k^{[b_{ki}]_+}(y_k \oplus 1)^{-b_{ki}}, & i \neq k. \end{cases}$$

- $B' = (b_{ij}')$ 由下式给出

$$b_{ij}' = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{if } i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + \mathrm{sign}(b_{ik})[b_{ik}b_{kj}]_+, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其中 $[a]_+ = \max\{a, 0\}$。

若两个带标号种子 Σ 和 Σ' 定义了同一个无标号种子，则称之为此情形：存在一个从 I 到 $x'_i = x_{\sigma(i)}$的双射 σ，使得对于所有 $i,\ j \in I,\ y'_i = y_{\sigma(i)}$和 $b'_{ij} = b_{\sigma(i)\sigma(j)}$ 成立。

如果从一个局部有限符号反对称矩阵出发，经过任意有限次变异所得到的每个矩阵也都是符号反对称矩阵，我们就称该矩阵为全符号反对称矩阵。显然，可斜对称化矩阵是全可变异的。对于符号反对称矩阵 $B = (b_{ij})_{i,\ j\in I}$，我们可以定义一个有向图，其顶点由 I索引；若 i 到 j 存在一条箭头，当且仅当 $b_{ij} > 0$。若 B 对应的有向图没有有向环，则称其为无环矩阵。Huang 和 Li 还证明了无环符号反对称矩阵是全可变异的 [HL18]。

令 $\mathbb{T}$ 为一棵 $|I|$-正则树，其每个公共顶点发出的边的价数由 I 标记。簇图式是一棵 $|I|$-正则树 $\mathbb{T}$，满足对于每个顶点 $t \in \mathbb{T}$，都对应一个种子$\Sigma_t = (\mathbf{x}_t,\ \mathbf{y}_t,\ B_t)$；对于每条标记为 $k \in I$ 的边，其端点处的两个种子可由在 k处进行种子变异而彼此得到。注意，簇图式由一个全符号斜对称矩阵唯一确定。相应的交换图是一个图，其顶点为未标记的种子；若两个未标记的种子通过一次变异相关联，则它们之间有一条边。与全符号斜对称矩阵 B 相关联的簇代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{x},\ \mathbf{y}\ B)$ 是 $\mathcal{F}$ 的 $\mathbb{ZP}$-子代数，由对应于矩阵 B 的 $\mathbb{T}$ 上的所有簇变量生成。若半域是由 $\mathbb{P} = \text{trop}(y_i,\ i \in I)$ 给出的热带半域，则称簇代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{x},\ \mathbf{y}\ B)$ 具有主系数。

Fomin 和 Zelevinsky 证明了簇代数具有如下 Laurent 性质，并且还猜想簇变量具有非负的 Laurent 表达式。

定理 2.2（Laurent 现象，[FZ02，FZ07]）。设 $\mathbb{T}$ 是一个簇模式。那么对于任意两个顶点 t、$t_0 \in \mathbb{T}$ 以及任意 $j \in I$，有 $x_{j,\ t} \in \mathbb{ZP}[x^{\pm 1}_{i,t_0}, i \in I]$。此外，

（1）当 $\mathbb{P} = trop(z_i,\ i \in J)$ 是一个热带半域时，有 $x_{j,\ t} \in \mathbb{Z}[z_p, x^{\pm 1}_{i,t_0}, p \in J, i \in I]$。（2）当 $\mathbb{P} = trop(y_{i,\ t_0},\ i \in I)$ 是主情形时，每个簇变量 $x_{j,\ t}$ 相对于 $\mathbb{Z}[y_{i,t_0}, x^{\pm 1}_{i,t_0}, i \in I]$ 中给定的 $\mathbb{Z}^{|I|}$分次是齐次的，该分次定义如下：

$$deg(x_{i,t_0}) = \mathbf{e}_i,\quad deg(y_i) = -\mathbf{b}_i,$$

其中，$\mathbf{e}_i,\ i \in I$ 是 $\mathbb{Z}^{|I|}$中的标准基向量，而$\mathbf{b}_{i,t_0}$ 是B_{t_0}的第 i列向量。

在下文的讨论中，我们固定一个种子，称之为初始种子，通常将其置于 $t_0 \in \mathbb{T}$，以此获得其他数据。

设 $\mathcal{A}$ 是一个具有主系数、初始种子为 $\Sigma = \Sigma_{t_0}$的簇代数。根据定理 2.2，有$x_{j,\ t} \in \mathbb{Z}[y_i, x_i^{\pm 1}, i \in I]$。多项式$F_{j,\ t} := x_{j,\ t}|_{x_i=1,\ i\in I}$称为 F-多项式（初始种子位于 t_0）。由于$y_{j,\ t} \in \text{trop}(y_i,\ i \in I)$，可知$y_{j,\ t}$ 具有如下形式：$y_{j,\ t} = \prod_{i\in I} y_{i,\ t}^{c_{ij}}$，其中$c_{ij,\ t},\ i \in I$为整数。列向量$c_{j,\ t} = (c_{ij,\ t},\ i \in I)^T$称为$c$-向量，矩阵 $C_t^{t_0} = (c_{j,\ t})_{j\in I}$ 称为 t处的 C-矩阵。列向量$g_{j,\ t}$ 是$x_{j,\ t}$ 关于定理 2.2 所给分次的次数向量，称为 g-向量；矩阵$G_t^{t_0} = (g_{j,\ t})_{j\in I}$ 称为 t处的 G-矩阵。注意，F-多项式、C-矩阵和 G-矩阵的定义取决于初始种子的选择。此外，在 [FZ07]，中，Fomin 和 Zelevinsky 给出了 F-多项式、C-矩阵和 G-矩阵的变异规则。

对于 $\mathbb{T}$ 上的每条边$t\ \overset{k}{-}\ t'$，我们都有

$$F_{i,t'} = \begin{cases} F_{i,t}, & \text{if } i \neq k; \\ (F_{k,t})^{-1}\left(\prod_{j\in I} y_j^{c_{jk,t}} F_{j,t}^{[b_{jk,t}]_+} + \prod_{j\in I} y_j^{-c_{jk,t}} F_{j,t}^{[-b_{jk,t}]_+}\right), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- $c_{ij,t'} = \begin{cases} -c_{ik,t}, & \text{if } j = k; \\ c_{ij,t} + \operatorname{sign}(c_{ik,t})[c_{ik,t}b_{jk,t}]_+, & \text{otherwise.} \end{cases}$

- $g_{ij,t'} = \begin{cases} g_{ij,t}, & \text{if } j \neq k; \\ -g_{ik,t} + \Sigma_{s\in I} g_{is,t}[-b_{sk,t}]_+ - \Sigma_{s\in I} b_{is,t}[-c_{sk,t}]_+, & \text{otherwise.} \end{cases}$

如果一个非零向量的坐标符号相容，则其所有坐标要么均非负，要么均非正。Fomin 和 Zelevinsky 猜想，每个 c-向量都符号相容，并且每个 G-矩阵的行向量都符号相容。对于斜可对称簇代数，符号相容性猜想已在 [GHKK18] 中得到证明；对于无环符号斜对称簇代数，则在[HL18、CHL22]中得到证明。

3. Folding theory

回顾一下，箭图是一个没有环或 2-圈的有向图（可能是无限的）。众所周知，一个箭图自然对应于一个斜对称矩阵。

定义 3.1。 设 Q 是一个局部有限箭图，其冻结顶点集为 F，且 Γ 是作用于 Q的顶点集 Q_0 上的群。 $Q_0 \backslash F$ 中的顶点称为可变顶点。设 $B = (b_{ij})_{i,\ j\in Q_0}$是与 Q对应的矩阵，称 Q 是 Γ-可容许的，如果满足以下条件：

（i） i 是可变的 $\iff$ $g(i)$ 是可变的，对所有 $i \in Q_0$ 和 $g \in \Gamma$均成立；（ii） $b_{ij} = b_{g(i)g(j)}$，对所有 i、$j \in Q_0$和 $g \in \Gamma$均成立；（iii） $b_{ig(i)} = 0$，对所有可变的 $i \in Q_0$和 $g \in \Gamma$均成立；（iv） $b_{ij}b_{g(i)j} \geq 0$，对所有 $i \in Q_0$、 $j \in Q_0 \setminus F$和 $g \in \Gamma$均成立。

定义 3.2（轨道变异）。 假设 Q 是 Γ-可容许的，且 $B = (b_{ij})_{i,\ j\in Q_0}$ 是其对应的矩阵。对于每个可变 $k \in Q_0$，轨道变异 $Q' = \mu_{[i]}(Q)$ 在 $[k]$ 处对 Q 进行变异所得的矩阵 $B' = (b'_{ij})_{i,\ j\in Q_0}$ 由以下规则给出：

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{if } i \in [k] \text{ or } j \in [k]; \\ b_{ij} + \sum\limits_{p\in[k]} \frac{|b_{ip}|b_{pj}+b_{ip}|b_{pj}|}{2}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

以下引理可由定义直接推出。

引理 3.3。 假设 Γ 在顶点集 Q_0 上有两个作用，使其成为 Q Γ-可容许的，且这两个作用在可变顶点上的限制相同。那么对于每个可变顶点 $k \in Q_0$，关于 Γ 的两个作用， Q 在 $[k]$ 处的轨道变异是相同的。

假设 Q 是 Γ-可容许的，记 $[i]$ 为每个 $i \in Q_0$ 的 Γ-轨道， I 为 Γ-轨道的集合，并记 $\mu_{[i]} := \prod_{j\in[i]} \mu_j$ 为轨道变异。矩阵 $B^\Gamma = (b_{[i][j]})_{[i],\ [j]\in\bar{I}}$ 由以下规则定义：

$$b_{[i][j]} = \sum_{i'\in[i]} b_{i'j}.$$

定义 3.4. 如果局部有限箭图 Q 相对于群Γ是全局可折叠的，则称之为全局可折叠，即 Q 是 Γ-可容许的，并且对于任意轨道序列 $[i_1], \ldots, [i_k]$，箭图 $\mu_{i_k} \ldots \mu_{i_1}(Q)$ 也是Γ-可容许的。在这种情况下，我们称(Q, Γ) 是 B^Γ的一个展开。

下面的引理可由定义直接推出。

引理 3.5 ([FWZ])。 设 Q 是一个关于群 Γ的作用全局可折叠的局部有限箭图。设 Q 是由 Q 通过引入新的冻结顶点，并添加连接这些顶点与

¯中可变顶点的一些箭头构造而成的箭图。将 Γ 从 Q 到 Q 的作用扩展为¯使 Γ 固定每个新添加的顶点。则箭图 Q 关于 Γ全局可折叠。

注意，对于局部有限箭图 Q，簇代数 $\mathcal{A}$(x Q)、 F-多项式、 c-向量和 g-向量都可以自然地定义。若 Q 关于 Γ 全局可折叠，且对于任意可变 $i \in Q_0$，则按以下规则定义 $\mu_{[i]}(x_j)$：当 $j \in [i]$ 时，$\mu_{[i]}(x_j) = \mu_j(x_j)$；当 $j \notin [i]$ 时，$\mu_{[i]}(x_j) = x_j$ 。

引理 3.6 ([HL18])。 假设局部有限箭图 Q 关于群 Γ全局可折叠。那么我们有如下结论：对于任意可变顶点 i_1，……，i_s

(1) $\mathcal{A}(\mu_{[i_s]} \cdots \mu_{[i_1]}(x\ Q))$ 的簇变量与 $\mathcal{A}(x\ Q)$ 的簇变量相同；*(2)* $\mu_{[i_s]} \cdots \mu_{[i_1]}(x\ Q)$ 中的任意有限个变量都包含于 $\mathcal{A}(x\ Q)$ 的一个簇中；*(3)* $\mu_{[i_s]} \cdots \mu_{[i_1]}(x\ Q)$ 中的任意变量都是 $\mathcal{A}(x\ Q)$ 的簇变量；*(4)* 以 $\mu_{[i_s]} \cdots \mu_{[i_1]}(x\ Q)$ 中的变量构成的任意单项式都是 $\mathcal{A}(x\ Q)$ 的簇单项式；*(5)* 每个 F-多项式的常数项均为 *1*。

证明。 陈述 (1) –(4) 已在 [HL18] 的以下情形中得到证明： B^Γ 是无环的。容易看出，该证明对所有全局可折叠箭图 Q均适用 [。命题 (5) 已在引理 7.12[HL18]]中得到证明。 □

˜设 Q 是一个没有冻结顶点的局部有限箭图。相应的 框架箭图 Q 通过向 Q 中添加冻结顶点 Q_0' 而得到= $\{i', i \in Q_0\}$ ，以及箭 Q_1' ：= $\{i' \to i, i \in Q_0\}$。若˙Q 关于 Γ是全局可折叠的，根据引理 3.5， Q 关于 Γ 是全局可折叠的，其中Γ 冻结顶点保持不变。

引理 3.7。 若没有冻结顶点的局部有限箭图 Q 关于Γ是全局可折叠的，则对于任意顶点 i_1、……、$i_s \in Q_0$，不存在两个冻结顶点 i'、j'和一个可变顶点 k˜，使得在 $\mu_{[i_s]} \cdots \mu_{[i_1]}$（$Q$）中存在形如 $i' \to k \to j'$ 的箭。

˜证明。 由引理 3.5可知， Q 相对于 Γ 是全局可折叠的，且 Γ 固定冻结˜顶点，因此 $\mu_{[i_s]} \cdots \mu_{[i_1]}(Q)$ 是良定义的。

˜若该断言不成立，考虑簇代数 $\mathcal{A}$(˜x Q)，其中 ˜x =(x, y) 和 y =($y_i, i \in$ ˙Q_0) 是冻结变量。假设 (˜x′, Q') = $\mu_{[i_s]} \cdots \mu_{[i_1]}$(˜x Q)。由引理 3.6，˜x′ 中的变量以及变量

$$x'' = \frac{\prod_{i' \to k} y_i \prod_{i \to k} x_i' + \prod_{k \to j'} y_j \prod_{k \to j} x_j'}{x_k'}$$

˜是 $\mathcal{A}$(˜x Q) 中的簇变量。在将 $x_i = 1$ 专门化为所有 $i \in Q_0$ 后，我们得到

$$F'' = \frac{\prod_{i' \to k} y_i \prod_{i \to k} F_i' + \prod_{k \to j'} y_j \prod_{k \to j} F_j'}{F_k'}.$$

由引理 3.6，令 $y_i = 0$ 对所有 $i \in Q_0$取值，可得左边为 1，右边为 0。这构成矛盾。 □

˜**引理 3.8.** 设 Q 是关于 Γ全局可折叠的箭图， Q 是其框架箭图。通过以下方式，将 Γ 在 Q_0 上的作用扩展为 Γ 在 $Q_0 = Q_0$ 上的作用： $g.(i') := g(i)'$ 对每个 $i \in Q_0$均成立。则对于任意满足 $i_1, \ldots, i_s \in Q_0$ 的轨道变异序列，$\mu_{[i_s]} \cdots \mu_{[i_1]}(Q)$ 都是 Γ-可容许的。

证明. 我们通过对轨道变异序列的长度进行归纳来证明该结论。

˜不难看出， Q 也是 Γ-可容许的。假设 $\mu_{[i_s]} \cdots \mu_{[i_1]}$ (Q) 是 Γ-可容许的，我们˜只需证明对于每个 $k \in Q_0$， $\mu_{[k]}\mu_{[i_s]} \cdots \mu_{[i_1]}(Q)$ 也是 Γ-可容许的。

为简便起见，我们可以稍微滥用记号，用 $\begin{pmatrix} B & -C^T \\ C & M \end{pmatrix}$ 表示 $\mu_{[i_s]}\cdots\mu_{[i_1]}(\tilde{Q})$ 的矩阵，并用 $\begin{pmatrix} B' & -C'^T \\ C' & M' \end{pmatrix}$ 表示 $\mu_{[k]}\mu_{[i_s]}\cdots\mu_{[i_1]}(\tilde{Q})$ 的矩阵，其中 $C=(c_{i'j})_{i,j\in Q_0}$ 且 $C'=\tilde{(c'_{i'j})}_{i,j\in Q_{0^\circ}}$ 由于 $\mu_{[i_s]}\cdots\mu_{[i_1]}(Q)$ 是 Γ-可容许的，根据引理 3.3 和引理 3.7，C和 C'具有列符号相容性，且 $M=M'=0$。因此，对于 $i,j\in Q_0$，我们有 $c'_{i'j}c'_{g(i')j}\geq 0$。注意，根据定义，$C$ 和 C' 满足以下关系：

$$c'_{i'j}=\begin{cases} -c_{i'j}, & j\in[k] \\ c_{i'j}+\sum\limits_{p\in[k]}c_{i'p}b_{pj}, & j\notin[k],\ \exists p\in[k] \text{ such that } c_{i'p}>0, b_{pj}>0; \\ c_{i'j}+\sum\limits_{p\in[k]}c_{i'p}b_{pj}, & j\notin[k],\ \exists p\in[k] \text{ such that } c_{i'p}<0, b_{pj}<0; \\ c_{i'j}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

容易验证，对于所有 $i,j\in Q_0$，都有 $c'_{g(i')g(j)}=c'_{i'j}$。若 $j\in[k]$，则 $g(j)\in k$，因此$c'_{g(i')g(j)}=-c_{g(i')g(j)}=-c_{i'j}=c'_{i'j}$。若 $j\notin[k]$，且存在 $\exists p\in[k]$使得 $c_{i'p}>0, b_{pj}>0$，则$g(j)\notin[k]$，并且 $g(p)\in k$ 满足 $c_{g(i')g(p)}=c_{i'p}>0$, $b_{g(p)g(j)}=b_{pj}>0$。因此，我们有

$$c'_{i'j}=c_{i'j}+\sum_{p\in[k]}c_{i'p}b_{pj}=c_{g(i')g(j)}+\sum_{p\in[k]}c_{g(i')g(p)}b_{g(p)g(j)}=c_{g(i')g(j)}+\sum_{p\in[k]}c_{g(i')p}b_{pg(j)}=c'_{g(i')g(j)}.$$

其余情形可类似验证。

This proves that $\mu_{[k]}\mu_{[i_s]}\ldots\mu_{[i_1]}(\tilde{Q})$ is also Γ-admissible. □

定理 3.9。设 Q 是关于 Γ 局部有限全局可折叠的箭图。则簇代数 $\mathcal{A}(B^\Gamma)$ 满足正性猜想，即对于每个簇变量 x 和每个簇 $\mathbf{x}$，都有 x 是一个以$\mathbf{x}$ 中的变量为变量且具有正系数的 *Laurent* 多项式。

此外，每个 F-多项式的常数项均为1，因此 c-向量具有符号相容性。

证明。只需证明主系数簇代数的正性猜想。这可由引理 3.8、引理 3.6 以及无限秩斜对称簇代数满足正性猜想这一事实得出。□

定理 3.10 ([HL18])。每个与无圈符号斜对称矩阵变异等价的符号斜对称矩阵都存在一个展开。

结合定理 3.9 和定理 3.10，可得以下结果。

定理 3.11 (参见 [HL18])。对于初始种子与无圈种子变异等价的符号反对称簇代数，正性猜想成立。

推论 3.12。如果 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是一个与无圈符号斜对称矩阵变异等价的符号斜对称矩阵，那么对于任意序列 $k_1,\ldots,k_s\in[1,n]$，矩阵$\mu_{k_s}\ldots\mu_{k_1}\begin{pmatrix} B & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$是符号反对称的。

证明。根据定理 3.10，存在一个展开（Q，Γ），对应于 B。根据引理 3.8，矩阵 $\begin{pmatrix} B & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$存在一个展开。

□

猜想 3.13. 推论 *3.12* 对所有全符号斜对称矩阵均成立 .

4. The properties of G-matrices

关于 G-矩阵和 C-矩阵的热带对偶，Nakanishi 和 Zelevinky 针对斜对称化簇代数 [NZ12]进行了研究。注意，Nakanishi 和 Zelevinsky 的证明依赖于 c-向量的符号相干性。本节讨论全符号反对称情形下的对偶现象。本节及下一节中，我们始终假设$|I| = n < \infty$。

正如我们在引言中提到的，Fomin 和 Zelevinsky 在论文G中提出了一系列关于 C-矩阵和 [FZ07]-矩阵的猜想。下面回顾这些猜想。

猜想 4.1。对于具有 $B_{t_0} = B$ 的全符号斜对称矩阵模式，以下命题成立。

(i) 对每个 $t \in \mathbb{T}_n$， C-矩阵 C_t 都具有列符号相容性。*(ii)* 对每个 $t \in \mathbb{T}_n$， g-向量 $g_{1,t}, \ldots, g_{n,t}$ 构成格 $\mathbb{Z}^n$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。*(iii)* 对每个 $t \in \mathbb{T}_n$， G-矩阵 G_t 都具有行符号相干性。*(iv)* 设 $t_0 \overset{k}{} t_1$ 是 $\mathbb{T}_n$ 中的两个相邻顶点，且 $B^1 = \mu_k(B)$。那么，对于任意 $t \in \mathbb{T}_n$ 和一个 $\in \mathbb{N}^n$， g-向量 $g^{B,t_0}\boldsymbol{a}\tau := \sum_{l=1}^n a_l g^{B,l \overset{t_0}{},t} = (g_1, \ldots, g_n)^T$ 与 $g^{B^1,t_1}\boldsymbol{a}\, t := \sum_{l=1}^n a_l g^{B^1,l \overset{t_1}{},t} = (g'_1, \ldots, g'_n)^T$ 之间满足以下关系：

$$g'_j = \begin{cases} -g_k & j = k; \\ g_j + [b_{jk}]_+ g_k - b^0_{jk} \min(g_k, 0) & j \neq k. \end{cases}$$

在斜可对称化情形中，这些猜想已由一系列论文证明 [DWZ10、GHKK18]。在完全符号反对称情形中，Huang 和 Li 证明了猜想 (i-iv) [HL18] ，而 Cao、Huang 和 Li [CHL22] 则利用折叠理论和范畴化，证明了无环符号斜对称情形下的猜想4.1 (i)。Li 和 Pan 则在一般情形下证明了猜想 (i)。在接下来的章节中，我们将证明在某个假设下，猜想 (ii-iv) 成立。特别地，对于无圈符号斜对称矩阵，我们得到了这些结果。此外，我们还证明了 G-矩阵与 C-矩阵之间的对偶性，而此前只有 Nakanishi 和 Zelevinsky 在斜可对称化情形下证明了这一点 [NZ12]。证明的核心思想由 Nakanishi 和 Zelevinsky 提出。

4.1. **重新审视变异**。 矩阵的变异 G-矩阵和 C-矩阵已在第2节给出。现在我们用矩阵形式重新表述它们。设 $\mathbb{T}_n$ 为 n-正则树，且 B 为一个完全符号斜对称矩阵。那么我们有一个矩阵交换模式，使得 $B_{t_0} = B$。现在，对于每个顶点 $t \in \mathbb{T}_n$，我们将 B_t 替换为三元组（B_t， C_t， G_t），其中 C_t 和 G_t 分别是对应的 G-矩阵和 C-矩阵，它们位于 t ，并且相对于初始顶点 t_0而言。于是我们得到一个新的模式，并称之为矩阵模式。

下面引入一些后文需要用到的记号。假设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是一个实矩阵，且 $k \in [1, n]$。

(1) $[A]_+$ 表示通过对所有 i, j 将 A 中的 a_{ij}替换为 $max\{a_{ij}, 0\}$ 所得到的 $n \times n$ 矩阵。(2) $A^{k\cdot}$ 表示通过将 A 中的 a_{ij} 替换为 0 所得到的 $n \times n$ 矩阵。(3) $A^{\cdot k}$ 表示通过将 A 中的 a_{ij} 替换为 0 所得到的 $n \times n$ 矩阵。(4) J_k 表示通过将单位矩阵 I_n 中的第 k个对角元素 1 替换为 -1 所得到的 $n \times n$ 矩阵。

命题 4.2 ([FZ07, NZ12])。 设 $B = B_{t_0}$ 是一个全符号斜对称矩阵。在矩阵模式中，对于每个 $t \overset{k}{—} t'$ 属于 $\mathbb{T}_n$，有

$$C_{t'} = C_t(J_k + [\varepsilon B_t]_+^{k\cdot}) + [-\varepsilon C_t]_+^{\cdot k} B_t,$$
$$G_{t'} = G_t(J_k + [-\varepsilon B_t]_+^{\cdot k}) - B_{t_0}[-\varepsilon C_t]^{\cdot k},$$

其中 $\varepsilon \in \{1, -1\}$。

我们注意到，所谓的第一对偶性对于全符号斜对称矩阵模式始终成立。

命题 4.3 ([FZ07])。 对于每个 $t \in \mathbb{T}_n$，我们都有以下等式：

$$G_t B_t = B_{t_0} C_t.$$

证明。 Fomin 和 Zelevinsky 在 [FZ07] 中利用了这一事实证明了该等式： g-向量是来自具有主系数的簇代数的簇变量的 $\mathbb{Z}^n$-分次。后来，Nakanishi 利用命题 4.2 以及 t_0 与 t 在 $\mathbb{T}_n$中之间的距离进行归纳法证明了该等式，见 [Nak]。他们的证明对于全符号斜对称情形同样成立。 □

在 Li 和 Pan 的最新论文 [LP], 中，他们证明了以下定理，从而确认了所有由全符号斜对称矩阵产生的 C-矩阵的列符号相干性。

定理 4.4 ([LP])。 设 B 是一个全符号斜对称矩阵，且 $\mathcal{A}(B)$ 是相应的具有主系数的簇代数。则每个 F-多项式的常数项为 1。因此， C-矩阵具有列符号相干性。

由于 C-矩阵具有列符号相干性，我们可以用 $\varepsilon_k(C)$ 表示 C-矩阵 C 的第 k 列的符号。于是得到以下结果。

命题 4.5. 设 $B = B_{t_0}$ 是一个全符号斜对称矩阵。在矩阵模式中，对每个 $t \overset{k}{—} t' \in \mathbb{T}_n$，都有

$$C_{t'} = C_t(J_k + [\varepsilon B_t]_+^{k\cdot}),$$
$$G_{t'} = G_t(J_k + [-\varepsilon B_t]_+^{\cdot k}),$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_k(C_t)$。

证明. 根据 C-矩阵的符号相干性，我们知道 $[-\varepsilon(C_t)C_t]_+^{\cdot k} = 0$。于是该命题是命题 4.2 的直接推论。 □

现在我们可以看到，对于全符号斜对称矩阵模式，猜想 4.1(ii) 始终成立。

定理 4.6. 对每个 $t \in \mathbb{T}_n$，都有

(i) g向量 $g_{1,t}, \ldots, g_{n,t}$ 构成格 $\mathbb{Z}^n$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基，(ii) c向量 $c_{1,t}, \ldots, c_{n,t}$ 构成格 $\mathbb{Z}^n$ 的一个 $\mathbb{Z}$- 基。

此外，我们有 $|G_t| = |C_t| \in \{1, -1\}$。

证明。 我们通过对 t_0 和 t 在 $\mathbb{T}_n$ 上的距离 $d(t_0, t)$ 进行归纳法来证明 $|G_t| = |C_t| \in \{1, -1\}$。

对于 $d(t_0, t) = 0$，则有 $t = t_0$，我们得到 $G_t = I_n = C_t$，因此 $|G_t| = |C_t| = 1$。假设该结论对 $d(t_0, t) = d$ 成立，并设 $t \overset{k}{—} t'$ 是 $\mathbb{T}_n$上的一条边。根据命题 4.5，我们有

$$C_{t'} = C_t(J_k + [\varepsilon B_t]_+^{k\cdot}),$$

$$G_{t'} = G_t(J_k + [-\varepsilon B_t]^{\cdot k}_+),$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_k(C_t)$。注意，

$$(J_k + [\varepsilon B_t]^{k\cdot}_+)^2 = I_n = (J_k + [-\varepsilon B_t]^{\cdot k}_+)^2,$$

and

$$|J_k + [\varepsilon B_t]^{k\cdot}_+| = -1 = |J_k + [-\varepsilon B_t]^{\cdot k}_+|,$$

以及 $|G_t| = |C_t| \in \{1, -1\}$。我们有，$G_{t'}$ 和 $C_{t'}$ 在 $M_n(\mathbb{Z})$ 中可逆，并且 $|G_{t'}| = |C_{t'}| \in \{1, -1\}$。□

4.2. 符号相干性与热带对偶。设 B 为全符号斜对称矩阵，且 $(B_t, C_t, G_t)_{t\in\mathbb{T}_n}$ 为相应的矩阵模式，其初始顶点为 t_0。显然，B^T 也是全符号斜对称矩阵。B^T 对应的 G-矩阵和 C-矩阵分别记为 $\bar{G}$ 和 $\bar{C}$。注意，$\tilde{B} = -B^T$ 也是全符号斜对称矩阵。设 $(\tilde{B}_t, \tilde{C}_t, \tilde{G}_t)_{t\in\mathbb{T}_n}$ 表示矩阵 $\tilde{B} = -B^T$ 对应的矩阵模式，其初始顶点为 t_0。容易看出，对所有 $t \in \mathbb{T}_n$，都有 $\tilde{B}_t = -B_t^T$。

˜**假设** 对于 B：对于簇代数 $\mathcal{A}(B)$ 和簇代数 $\mathcal{A}(-B)$，无论初始顶点如何，C-矩阵 C 和 C 的列的符号总是相同的。

注意，猜想3.13 蕴含**假设**，因此**假设** 对无圈符号斜对称矩阵成立。

命题 4.7。假设**假设** 成立。对于任意 t_0、$t \in \mathbb{T}_n$，我们有 t

$$(G_t^{t_0})^T \tilde{C}_t^{t_0} = I_n.$$

证明。让我们对 t_0 和 t 在 $\mathbb{T}_n$上的距离 $d(t_0, t)$ 使用归纳法来证明。

当 $d(t_0, t) = 0$时显然成立，因为此时 $G_t^{t_0} = \tilde{C}_t^{t_0} = I_n$ 假设 $d(t_0, t) = s$。我们来考察以下序列：

$$t_0 \text{———————} t \overset{k}{—} t'$$

根据命题 4.5，我们有

$$(G_{t'})^T = (G_t(J_k + [-\varepsilon_k(C_t)B_t]^{\cdot k}_+))^T = (J_k + [-\varepsilon_k(C_t)(B_t)^T]^{k\cdot}_+)G_t^T,$$
$$\tilde{C}_{t'} = \tilde{C}_t(J_k + [-\varepsilon_k(\tilde{C}_t)(B_t)^T]^{k\cdot}_+).$$

Then

$$\begin{aligned}(G_{t'})^T\tilde{C}_{t'} &= (J_k + [-\varepsilon_k(C_t)(B_t)^T]^{k\cdot}_+)G_t^T\tilde{C}_t(J_k + [-\varepsilon_k(\tilde{C}_t)(B_t)^T]^{k\cdot}_+)\\ &= (J_k + [-\varepsilon_k(C_t)(B_t)^T]^{k\cdot}_+)(J_k + [-\varepsilon_k(\tilde{C}_t)(B_t)^T]^{k\cdot}_+)\\ &= I_n.\end{aligned}$$

˜这里第三个等号成立，是因为**假设**保证了 $\varepsilon_k(C_t) = \varepsilon_k(C_t)$。至此，我们完成了证明。□

对于 G 矩阵的行符号相干性，在斜对称情形下由 Derksen、Weyman 和 Zelevinsky 在 [DWZ10], 中证明，在斜可对称化情形下由 Gross、Hacking、Keel 和 Kontsevich 在 [GHKK18], 中证明，在无环符号斜对称情形下则在 [CHL22]中证明。接下来，我们将在 G 矩阵的 **假设下证明行符号相干性**。下面证明的思路来自 [NZ12] 中的证明，并作了少许修改。

命题 4.8。假设**假设** 成立。则有以下结果 :

（a）对于任意 t_0、$t \in \mathbb{T}_n$，有

$$C_t^{t_0} = (\bar{G}_{t_0}^t)^T, \tag{4.1}$$

$$G_t^{t_0} = (\bar{C}_{t_0}^t)^T. \tag{4.2}$$

这意味着 G-矩阵具有行符号相干性，并且我们用 $\varepsilon_k(G)$ 表示 G-矩阵 G 的第 k 行的符号。

(b) 对于任意 t_0、t_1、$t \in \mathbb{T}_n$，若 $t_0 \overset{k}{—} t_1$ 是 $\mathbb{T}_n$ 上的两个相邻顶点，则有

$$C_t^{t_1} = (J_k + [-\varepsilon_k(G_t^{t_0})B_{t_0}]_+^{k\cdot})C_t^{t_0}, \tag{4.3}$$

$$G_t^{t_1} = (J_k + [\varepsilon_k(G_t^{t_0})B_{t_0}]_+^{\cdot k})G_t^{t_0}. \tag{4.4}$$

这里，当条件 *(a)* 成立时，$\varepsilon_k(G_t^{t_0})$ 是良定义的。

（c）对于任意 t_0、$t \in \mathbb{T}_n$ 以及 i、$j \in [1,n]$，$C_t^{t_0}$ 的第 i 列是 $\pm e_j$ 当且仅当 $\tilde{C}_t^{t_0}$ 的第 i 列是 $\pm e_j$。（d）对于任意 t_0、$t \in \mathbb{T}_n$ 以及 i、$j \in [1,n]$，$G_t^{t_0}$ 和 $G_t^{t_0}$ 的第 i 行的符号相同，并且 $G_t^{t_0}$ 的第 i 行是 $\pm e_j$ 当且仅当 $\tilde{G}_t^{t_0}$ 的第 i 行是 $\pm e_j$。

证明。我们将对 t_0 和 t 在 $\mathbb{T}_n$ 上的距离 $d(t_0, t)$ 使用归纳法来证明这些陈述。我们写出以下断言：

$(a)_s$。对于满足 $d(t_0,t) \le s$ 的任意 t_0、$t \in \mathbb{T}_n$，断言 (a) 成立。$(b)_s$。对于满足 $d(t_0,t) \le s$ 的任意 t_0、t_1、$t \in \mathbb{T}_n$，且 $t_1 \overset{k}{—} t_0$ 是 $\mathbb{T}$ 上标记为任意 $k \in [1,n]$ 的两个相邻顶点，断言 (b) 成立。$(c)_s$。对于满足 $d(t_0,t) \le s$ 的任意 t_0、$t \in \mathbb{T}_n$，断言 (c) 成立。$(d)_s$。对于满足 $d(t_0,t) \le s$ 的任意 t_0、$t \in \mathbb{T}_n$，断言 (d) 成立。

我们按以下顺序证明这些断言。

$$(a)_0 \implies (b)_0 \implies (c)_0 \implies (d)_0 \implies (a)_1 \implies (b)_1 \implies \dots \tag{4.5}$$

首先，我们证明 $(a)_0, (b)_0, (c)_0$ 和 $(d)_0$ 成立。由于 $s = 0$ 蕴含 $t = t_0$，因此我们有

$$C_t^{t_0} = \bar{G}_{t_0}^t = G_t^{t_0} = \bar{C}_{t_0}^t = \tilde{C}_t^{t_0} = \tilde{G}_t^{t_0} = I_n,$$

因此，$(a)_0$,$(c)_0$,$(d)_0$ 自然成立。对于$(b)_0$，，我们需要证明

$$C_{t_0}^{t_1} = J_k + [-B_{t_0}]_+^{k\cdot},$$
$$G_{t_0}^{t_1} = J_k + [B_{t_0}]_+^{\cdot k}.$$

根据命题 4.5，我们有

$$C_{t_0}^{t_1} = C_{t_1}^{t_1}(J_k + [B_{t_1}]_+^{k\cdot}) = J_k + [-B_{t_0}]_+^{k\cdot},$$
$$G_{t_0}^{t_1} = G_{t_1}^{t_1}(J_k + [-B_{t_1}]_+^{\cdot k}) = J_k + [B_{t_0}]_+^{\cdot k}.$$

因此，$(b)_0$ 成立。

假设 4.5 中直到 $(d)_s$的论断成立，接下来证明 $(a)_{s+1}$。设 $d(t_0, t) = s$。考虑以下序列：

$$t_1 \overset{k}{—} t_0 ———— t$$

我们需要证明

$$C_t^{t_1} = (\bar{G}_{t_1}^t)^T, \qquad G_t^{t_1} = (\bar{C}_{t_1}^t)^T.$$

由 $(a)_s$ 和 $(b)_s$，可得

$$C_t^{t_0} = (\bar{G}_{t_0}^t)^T, \qquad G_t^{t_0} = (\bar{C}_{t_0}^t)^T,$$
$$C_t^{t_1} = (J_k + [-\varepsilon_k(G_t^{t_0})B_{t_0}]_+^{k\cdot})C_t^{t_0},$$
$$G_t^{t_1} = (J_k + [\varepsilon_k(G_t^{t_0})B_{t_0}]_+^{k\cdot})G_t^{t_0}.$$

注意到 $\varepsilon_k(G_t^{t_0}) = \varepsilon(C_{t_0}^t)$。对其取转置，得到

$$\begin{aligned}(C_t^{t_1})^T &= (C_t^{t_0})^T(J_k + [-\varepsilon_k(G_t^{t_0})B_{t_0}^T]_+^{\cdot k}) \\ &= \bar{G}_{t_0}^t(J_k + [-\varepsilon_k(C_{t_0}^t)B_{t_0}^T]_+^{\cdot k}) \\ &= \bar{G}_{t_1}^t.\end{aligned}$$

第三个等式由命题4.5得出。同样地，我们有

$$\begin{aligned}(G_t^{t_1})^T &= (G_t^{t_0})^T(J_k + [\varepsilon_k(G_t^{t_0})B_{t_0}^T]_+^{k\cdot}) \\ &= \bar{C}_{t_0}^t(J_k + [\varepsilon_k(C_{t_0}^t)B_{t_0}^T]_+^{k\cdot}) \\ &= \bar{C}_{t_1}^t.\end{aligned}$$

因此，$(a)_{s+1}$ 成立。

现在假设 4.5 中的断言直到（a）$_{s+1}$均成立，下面证明（b）$_{s+1}$。假设 d（t_0，t）$= s$。考虑如下序列：

$$t_1 \overset{k}{—} t_0 ———— t \overset{l}{—} t'$$

我们需要证明

$$C_{t'}^{t_1} = (J_k + [-\varepsilon_k(G_{t'}^{t_0})B_{t_0}]_+^{k\cdot})C_{t'}^{t_0}, \tag{4.6}$$

$$G_{t'}^{t_1} = (J_k + [\varepsilon_k(G_{t'}^{t_0})B_{t_0}]_+^{\cdot k})G_{t'}^{t_0}. \tag{4.7}$$

为证明等式 4.6，我们需要证明

$$C_{t'}^{t_1} = (J_k + [-\varepsilon_k(G_{t'}^{t_0})B_{t_0}]_+^{k\cdot})C_t^{t_0}(J_l + [\varepsilon_l(C_t^{t_0}B_t)]_+^{l\cdot}).$$

注意，我们有

$$\begin{aligned}C_{t'}^{t_1} &= C_t^{t_1}(J_l + [\varepsilon_l(C_t^{t_1})B_t]_+^{l\cdot}) \\ &= (J_k + [-\varepsilon_k(G_t^{t_0})B_{t_0}]_+^{k\cdot})C_t^{t_0}(J_l + [\varepsilon_l(C_t^{t_1})B_t]_+^{l\cdot}).\end{aligned}$$

第二个等式由（b）$_s$得出。因此，只需证明

$$\begin{aligned}&(J_k + [-\varepsilon_k(G_{t'}^{t_0})B_{t_0}]_+^{k\cdot})C_t^{t_0}(J_l + [\varepsilon_l(C_t^{t_0}B_t)]_+^{l\cdot}) \\ =&(J_k + [-\varepsilon_k(G_t^{t_0})B_{t_0}]_+^{k\cdot})C_t^{t_0}(J_l + [\varepsilon_l(C_t^{t_1})B_t]_+^{l\cdot}).\end{aligned}$$

现在详细讨论符号。我们注意到，对 G-矩阵进行变异后，$G_{t'}^{t_0}$ 和$G_t^{t_0}$仅在第 l 列不同，因此有如下结论：

(1) $\varepsilon_k(G_{t'}^{t_0}) = \varepsilon_k(G_t^{t_0})$ 当且仅当 $G_t^{t_0}$ 的第 k 行中，除 $(k,\ l)$ 处的元素外还存在非零元素；(2) $\varepsilon_k(G_{t'}^{t_0}) = -\varepsilon_k(G_t^{t_0})$ 当且仅当 $G_t^{t_0}$ 的第 k 行为 $\pm e_l$。

另一方面，由（b）$_s$可知，$C_t^{t_0}$和 $C_t^{t_1}$仅在第 k 行不同，因此有如下结论：

(3) $\varepsilon_l(C_t^{t_1}) = \varepsilon_l(C_t^{t_0})$ 当且仅当 $C_t^{t_0}$ 的第 l 列中除 (l,k) 处的元素外还存在一个非零元素；(4) $\varepsilon_l(C_t^{t_1}) = -\varepsilon_l(C_t^{t_0})$ 当且仅当 $C_t^{t_0}$ 的第 l 列为 $\pm e_k$。

若 $\varepsilon_k(G_{t'}^{t_0}) = \varepsilon_k(G_t^{t_0})$，我们需要证明 $\varepsilon_l(C_t^{t_1}) = \varepsilon_l(C_t^{t_0})$。事实上，若 $\varepsilon_l(C_t^{t_1}) = -\varepsilon_l(C_t^{t_0})$，则 $C_t^{t_0}$ 的第 l 列为 $\pm e_k$，并且根据 $(c)_s$，我们知道 $\tilde{C}_t^{t_0}$ 的第 l 列为 $\pm e_k$。由命题 4.7，$(G_t^{t_0})^T\tilde{C}_t^{t_0} = I_n$，这意味着 $G_t^{t_0}$ 的第 k 行为 $\pm e_l$，因此 $\varepsilon_k(G_{t'}^{t_0}) = \varepsilon_k(G_t^{t_0})$，这就产生了矛盾。因此，若 $\varepsilon_k(G_{t'}^{t_0}) = \varepsilon_k(G_t^{t_0})$，等式 4.6 成立。

若 $\varepsilon_k(G_{t'}^{t_0}) = -\varepsilon_k(G_t^{t_0})$，则 $G_t^{t_0}$ 的第 k 行是 $\pm e_l$。因此由命题 4.7 和假设可知， $C_t^{t_0}$ 的第 l 列是 $\pm e_k$。注意，在此情形下，我们有 $\varepsilon_k(G_t^{t_0}) = \varepsilon_l(C_t^{t_0})$，从而 $\varepsilon_l(C_t^{t_1}) = -\varepsilon_l(C_t^{t_0})$。因此，我们可以令 $\varepsilon_k(G_t^{t_0}) = \varepsilon_l(C_t^{t_0}) = \varepsilon \in \{1, -1\}$，且 $\varepsilon_k(G_{t'}^{t_0}) = \varepsilon_l(C_t^{t_1}) = -\varepsilon$。为证明等式 4.6，只需证明】【：】【“】【

$$\begin{aligned}&(J_k + [\varepsilon B_{t_0}]_+^{k\cdot})C_t^{t_0}(J_l + [\varepsilon B_t)]_+^{l\cdot})\\ =&(J_k + [-\varepsilon B_{t_0}]_+^{k\cdot})C_t^{t_0}(J_l + [-\varepsilon B_t]_+^{l\cdot}),\end{aligned}$$

这等价于证明:

$$\begin{aligned}&C_t^{t_0}(J_l + [\varepsilon B_t)]_+^{l\cdot})(J_l + [-\varepsilon B_t]_+^{l\cdot})\\ =&(J_k + [\varepsilon B_{t_0}]_+^{k\cdot})(J_k + [-\varepsilon B_{t_0}]_+^{k\cdot})C_t^{t_0}.\end{aligned}$$

然后计算上述等式，我们只需证明 that

$$(B_{t_0}C_t^{t_0})^{k\cdot} = C_t^{t_0}(B_t)^{l\cdot}.$$

注意，在这种情况下，我们有】【。

$$(C_t^{t_0})^{\cdot l} = \varepsilon E_{kl} = (G_t^{t_0})^{k\cdot}.$$

因此我们得到,

$$C_t^{t_0}(B_t)^{l\cdot} = (C_t^{t_0})^{\cdot l}B_t = (G_t^{t_0})^{k\cdot}B_t = (G_t^{t_0}B_t)^{k\cdot}.$$

这里，第一个等式和第三个等式成立，是因为对于任意的 $n \times n$ 矩阵 P和Q，以及任意的 $k \in [1, n]$, 都有

$$P^{\cdot k}Q = PQ^{k\cdot}, \qquad P^{k\cdot}Q = (PQ)^{k\cdot}.$$

根据命题 4.3，有 $(B_{t_0}C_t^{t_0})^{k\cdot} = (G_t^{t_0}B_t)^{k\cdot}$，且 $(B_{t_0}C_t^{t_0})^{k\cdot} = C_t^{t_0}(B_t)^{l\cdot}$。这就证明了在此情形下等式 4.6 成立。

下面证明等式4.7。同样，只需证明

$$\begin{aligned}&(J_k + [\varepsilon_k(G_{t'}^{t_0})B_{t_0}]_+^{\cdot k})G_t^{t_0}(J_l + [-\varepsilon_l(C_t^{t_0}B_t)]_+^{\cdot l})\\ =&(J_k + [\varepsilon_k(G_t^{t_0})B_{t_0}]_+^{\cdot k})C_t^{t_0}(J_l + [-\varepsilon_l(C_t^{t_1})B_t]_+^{\cdot l}).\end{aligned}$$

经过与上述类似的讨论， $\varepsilon_k(G_{t'}^{t_0}) = \varepsilon_k(G_t^{t_0})$ 的情形也类似。当 $\varepsilon_k(G_{t'}^{t_0}) = -\varepsilon_k(G_t^{t_0})$ 时，同上，我们只需证明

$$(B_{t_0})^{\cdot k}G_t^{t_0} = (G_t^{t_0}B_t)^{\cdot l}.$$

同样，有

$$(B_{t_0})^{\cdot k}G_t^{t_0} = B_{t_0}(G_t^{t_0})^{k\cdot} = B_{t_0}(C_t^{t_0})^{\cdot l} = (B_{t_0}C_t^{t_0})^{\cdot l} = (G_t^{t_0}B_t)^{\cdot l}.$$

因此，在此情形下等式 4.7 成立。于是 $(b)_{s+1}$ 成立。

现在假设 4.5 中的结论一直成立到 $(b)_{s+1}$，接下来证明 $(c)_{s+1}$。设 $d(t_0, t) = s+1$。（我们强调，此处假设 $d(t_0, t) = s + 1$，而在前面的证明中，我们常假设 $d(t_0, t) = s$。）对于任意 $i, j \in [1, n]$, 我们需要证明： $C_t^{t_0}$ 的第 i 列是 $\pm e_j$，当且仅当 $\tilde{C}_t^{t_0}$ 的第 i 列是 $\pm e_j$。考虑以下序列

$$t_j \overset{j}{\text{———}} t_0 \text{———————} t$$

由于 $d(t_0,\ t) = s+1$ 且 $(b)_{s+1}$ 成立，我们有

$$C_t^{t_1} = (J_k + [-\varepsilon_k(G_t^{t_0})B_{t_0}]_+^{k\cdot})C_t^{t_0}, \tag{4.8}$$

$$\tilde{C}_t^{t_1} = (J_k + [-\varepsilon_k(\tilde{G}_t^{t_0})\tilde{B}_{t_0}]_+^{k\cdot})\tilde{C}_t^{t_0}. \tag{4.9}$$

于是我们得到以下事实：

(1) 由等式 4.8 可知，i 列的 $C_t^{t_0}$ 是 $\pm e_j$，当且仅当 $\varepsilon_i(C_t^{t_0}) = -\varepsilon_i(C_t^{t_j})$。(2) 由等式 4.9 可知，$i$ 列的 $\tilde{C}_t^{t_0}$ 是 $\pm e_j$，当且仅当 $\varepsilon_i(\tilde{C}_t^{t_0}) = -\varepsilon_i(\tilde{C}_t^{t_j})$。(3) 由假设可知，$\varepsilon_i(C_t^{t_0}) = \varepsilon_i(\tilde{C}_t^{t_0})$ 且 $\varepsilon_i(C_t^{t_j}) = \varepsilon_i(\tilde{C}_t^{t_j})$。

因此，$C_t^{t_0}$ 的第 i 列是 $\pm e_j$，当且仅当 $\tilde{C}_t^{t_0}$ 的第 i 列是 $\pm e_j$。

现在假设4.5 至（c）$_{s+1}$，那么我们证明（d）$_{s+1}$。

假设 $d(t_0, t) = s+1$。由 $(a)_{s+1}$，可得

$$G_t^{t_0} = (C_{t_0}^{B_t^T,t})^T, \quad \tilde{G}_t^{t_0} = (C_{t_0}^{-B_t,t})^T.$$

根据**假设**，我们知道 C-矩阵 $C^{B_t^T}{}_{,\ t_0}{}^{\ t}$ 和 $C^{-B_t}{}_{,\ t_0}{}^{\ t}$ 的列符号相同。因此，G-矩阵 $G_t^{t_0}$和 $\tilde{G}_t^{t_0}$ 的行符号也相同。

注意，$G_t^{t_0}$的第 i行是 $\pm e_j$，当且仅当 $\tilde{C}_t^{t_0}$的第 j列是 $\pm e_i$；$\tilde{G}_t^{t_0}$的第 i行是 $\pm e_j$，当且仅当 $C_t^{t_0}$ 的第 j列是 $\pm e_i$。另一方面，由（c）$_{s+1}$可知，$\tilde{C}_t^{t_0}$的第 j列是 $\pm e_i$，当且仅当 $C_t^{t_0}$的第 j列是 $\pm e_i$。因此，我们得到：$G_t^{t_0}$的第 i行是 $\pm e_j$，当且仅当 $\tilde{G}_t^{t_0}$的第 i行是 $\pm e_j$。至此，证明完成。□

命题 *4.9.* 假设该假设成立。设 $t_0\ ^k\ t_1$ 是 $\mathbb{T}_n$ 中两个相邻顶点，并令 $B^1 = \mu_k(B)$。那么，对于任意 $t \in \mathbb{T}_n$ 和一个 $\in \mathbb{N}^n$，g-向量 $g^{B,t_0}{}_{,t} := \sum_{l=1}^n a_l g^{B,l}{}_{,t}^{\ t_0} = (g_1, \ldots, g_n)^T$ 与 $g^{B^1,t_1}{}_{,t} = \sum_{l=1}^n a_l g^{B^1,l}{}_{,t}^{\ t_1} = (g'_1, \ldots, g'_n)^T$ 的关系如下：

$$g'_j = \begin{cases} -g_k & j = k; \\ g_j + [b_{jk}]_+ g_k - b_{jk} min(g_k, 0) & j \neq k. \end{cases} \tag{4.10}$$

证明。 我们可以将方程 4.10 写成如下矩阵形式：

$$G_t^{t_1} = (J_k + [\varepsilon B]_+^{\cdot k})G_t^{t_0} + B[-\varepsilon G_t^{t_0}]_+^{k\cdot},$$

其中 $\varepsilon \in \{1, -1\}$。根据命题 4.8 (a)，我们可以令 $\varepsilon = \varepsilon_k(G_t^{t_0})$，并由命题 4.8(d)，方程4.10 成立。□

于是，对于无圈簇代数，我们有以下结果。

定理 4.10。 如果 B 是到一个无圈符号斜对称矩阵的变异。那么我们有：

(1) 对于每个 $t \in \mathbb{T}_n$ 和 $k \in [1, n]$，$\varepsilon_k(C_t) = \varepsilon_k(C_t)$。(2) 对于任意 $t \in \mathbb{T}_n$ 和 i、$j \in [1, n]$，$C_t^{t_0}$的第 i 列是 $\pm e_j$，当且仅当 $\tilde{C}_t^{t_0}$的第 i 列是 $\pm e_j$。(3) 对于任意 t_0、$t \in \mathbb{T}_n$，$(G_t^{t_0})^T \tilde{C}_t^{t_0} = I_n$.(4) 对于任意 t_0、t_1、$t \in \mathbb{T}_n$，若 $t_0\ ^k\ t_1$ 是 $\mathbb{T}_n$上的两个相邻顶点，则有

$$C_t^{t_1} = (J_k + [-\varepsilon_k(G_t^{t_0})B_{t_0}]_+^{k\cdot})C_t^{t_0}, \tag{4.11}$$

$$G_t^{t_1} = (J_k + [\varepsilon_k(G_t^{t_0})B_{t_0}]_+^{\cdot k})G_t^{t_0}. \tag{4.12}$$

(5) 对于每个 $t \in \mathbb{T}_n$ 和 i、j、$k \in [1,n]$、$\varepsilon_k(G_t) = \varepsilon_k(\tilde{G}_t)$，$G_t^{t_0}$的第 i 行是 $\pm e_j$，当且仅当 $\tilde{G}_t^{t_0}$ 的第 i 行是 $\pm e_j$。

4.3. **G-扇与变异扇**。在本小节中，我们始终假设**假设**成立。下面回顾一些关于锥与扇的基本概念。

定义 4.11. 若子集 $C \subset \mathbb{R}^n$ 满足 $av \in C$，且对任意 $a \in \mathbb{R}_{>0}$和 v，都有 $v+v' \in C, v' \in C$，则称其为凸锥。特别地，若存在有限个元素 $v_1, \ldots, v_s \in C$，使得 C，则称 C 为凸多面锥。

$$C = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_s := \{a_1v_1 + \cdots + a_sv_s \,|\, a_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq s\}.$$

若凸多面锥 C满足 $v_1, \ldots, v_s$ 可以选为 $\mathbb{R}$-线性无关，则称其为单纯锥。

若凸锥是有限个整数向量的非负 $\mathbb{R}$-线性张成，则称其为有理锥；等价地，它可以由有限个系数为整数的弱线性不等式定义。

定义 4.12. 若凸集 C 的子集 F 满足 F 是凸的，且任意内部与 F 相交的线段 $L \subset C$ 都有 $L \subset F$，则称 F 为面。

定义 4.13。 $\mathcal{F}$ 中的扇 $\mathbb{R}^n$ 是由闭凸锥组成的集合，并满足

（1） $\mathcal{F}$ 中任意一个锥的任意面也是 $\mathcal{F}$中的锥；（2） $\mathcal{F}$ 中任意两个锥的交集分别是二者的面。

在定义 4.13中，我们不要求扇是有限集。

定义 4.14。 对于全符号斜对称矩阵模式 $\{(B_t, C_t, G_t)\}_{t\in\mathbb{T}_n}$，锥

$$\sigma(G_t) := \mathbb{R}_{\geq 0}g_{1,t} + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}g_{n,t}$$

称为 G-锥。 $\sigma(G_t)$ 的内部记为 $\bar{\sigma}(G_t)$ 。

由于 G-矩阵 G_t 是可逆的，我们有

$$\bar{\sigma}(G_t) := \mathbb{R}_{>0}g_{1,t} + \cdots + \mathbb{R}_{>0}g_{n,t}.$$

对于具有初始顶点 t_0 的全符号斜对称矩阵模式 $\{(B_t,\ C_t,\ G_t)\}_{t\in\mathbb{T}_n}$，我们引入如下记号:

$$\mathcal{F}_{G^{t_0}} := \{\sigma(G_t^{t_0}) \text{ and its faces}, t \in \mathbb{T}_n\}.$$

对于 $k \in [1,n]$，$\mathbb{R}^n$ 的两个半空间定义如下:

$$e_k^+ := \{w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, w_k \geq 0\}, \quad e_k^- := \{w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, w_k \leq 0\}.$$

设 $t_0 \overset{k}{—} t_1$ 是 $\mathbb{T}_n$ 中两个相邻顶点。定义分片线性映射 $\eta_{t_0}^{t_1}$ 如下:

$$\eta_{t_0}^{t_1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$w \mapsto \begin{cases} (J_k + [B_{t_0}]_+^{\cdot k})w & w \in e_k^+; \\ (J_k + [-B_{t_0}]_+^{\cdot k})w & w \in e_k^-. \end{cases}$$

注意， $\eta_{t_0}^{t_1}$是良定义的，因为如果 $w_k = 0$，则有 $(J_k + [B_{t_0}]_+^{\cdot k})\ w = w = (J_k + [-B_{t_0}]_+^{\cdot k})\ w$。根据命题4.8，对于任意 $t \in \mathbb{T}_n$，

$$G_t^{t_1} = (J_k + [\varepsilon_k(G_t^{t_0})B_{t_0}]_+^{\cdot k})G_t^{t_0},$$

这意味着

$$g_{i,t}^{t_1} = (J_k + [\varepsilon_k(G_t^{t_0})B_{t_0}]_+^{:k})g_{i,t}^{t_0}, \forall i \in [1,n].$$

因此我们有

$$\eta_{t_0}^{t_1}(g_{i,t}^{t_0}) = g_{i,t}^{t_1}$$

对任意 $i \in [1,n]$ 和 $t \in \mathbb{T}_n$,

命题 4.15 (参见 [Nak, Rea14])。以下结论成立。

(1) $\eta_{t_0}^{t_1}\eta_{t_1}^{t_0} = id = \eta_{t_1}^{t_0}\eta_{t_0}^{t_1}$。

(2) $\eta_{t_0}^{t_1}(\sigma(G_t^{t_0})) = \sigma(G_t^{t_1})$。

(3) 映射

$$\eta_{t_0}^{t_1} : \mathcal{F}_{G^{t_0}} \to \mathcal{F}_{G^{t_0}}$$
$$g_{i,t}^{t_0} \mapsto g_{i,t}^{t_1}$$

是 $\mathcal{F}_{G^{t_0}}$ 和 $\mathcal{F}_{G^{t_0}}$ 之间保持交与锥包含关系的双射。

证明。 由命题 4.8可知， G-矩阵满足行符号相干性，因此我们有 $\sigma(G_t^{t_0}) \subset e_k^+$ 或 $\sigma(G_t^{t_0}) \subset e_k^-$。于是 $\eta_{t_0}^{t_1}$ 在 $\sigma(G_t^{t_0})$ 上是线性的，并注意到 $\eta_{t_0}^{t_1}(g_{i,t}^{t_0}) = g_{i,t}^{t_1}$，我们有

$$\eta_{t_0}^{t_1}(\sigma(G_t^{t_0})) = \sigma(G_t^{t_1}).$$

□

定理 4.16 （参见[Nak，Rea14]）。 假设**假设** 成立。则下列集合

$$\mathcal{F}_{G^{t_0}} := \{\sigma(G_t) \text{ and its faces}, t \in \mathbb{T}_n\}$$

是一个扇。

证明。 证明与 [定理 3。17, [Nak]]。 □

推论 4.17。 对于任意 $t \in \mathbb{T}_n$ 和 $i \in [1,n]$，如果 g-向量 $g_{i,t}$ 是非负的，那么 $g_{i,t} = e_j$ 对于某个 j成立，因此，簇变量 $x_{i,t}$ 满足 $x_{i,t} = x_{j,t_0}$。

定义 4.18。 设 B 是一个全符号斜对称矩阵，并设 $\{(B_t、C_t、G_t)\}_{t\in\mathbb{T}_n}$ 是相应的矩阵模式。如果两个向量 w、$w' \in \mathbb{R}^n$ 关于 B 符号等价，则称它们为符号等价。

$$sign(\eta_{t_0}^t(w)) = sign(\eta_{t_0}^t(w'))$$

对于任意 $t \in \mathbb{T}_n$。这里对于 $w \in \mathbb{R}^n$、 $sign(w)$: $=(sign(w_1)\ldots, sign(w_n))$。

符号等价定义了一种等价关系。我们称这些等价类为 B-类。

Reading 证明了，任意 B-类的闭包都是凸锥。

引理 4.19 ([Rea14])。 B-类的闭包是凸锥。我们称它们为 B-锥。

定义 4.20。 令 $\mathcal{MF}(B)$ 为由所有 B-锥以及所有B-锥的面组成的集合。该集合 $\mathcal{MF}(B)$ 称为 B 的变异扇。

定理 4.21 ([Rea14])。 变异扇 $\mathcal{MF}(B)$ 是一个完备扇。

接下来，沿用 Reading 的做法，我们证明 G-扇是变异扇的一个子扇。注意，我们始终假设**假设** 适用于本节中出现的 B。

定义 4.22. 如果两个满维锥有一个余维1 的公共面，且它们的内部不相交，则称它们相邻。

如果存在一列 $C = C_0, C_1, \ldots, C_k = C'$ 属于扇 $\mathcal{F}$ 的满维锥，使得对所有 $i \in [1, k]$， C_{i-1} 和 C_i 都相邻，那么我们称扇 $\mathcal{F}$ 中的两个满维锥 C 和 C' 传递相邻。 $\mathcal{MF}(B)$ 中与 $\mathcal{MF}(B)$ 内的非负¯锥 $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 传递相邻的满维锥，是子扇 $\mathcal{MF}(B)$ 的极大锥，而该子扇属于 $\mathcal{MF}(B)$ 。

定理4.23 （参见 [Rea14]）。 对于全符号斜对称矩阵 B，以下扇相同：

$$\bar{\mathcal{MF}}(B) = \mathcal{F}_{G^{t_0}}.$$

证明。 证明与 [Rea14] 中的证明类似。 □

5. Exchange graphs

回顾一下，Fomin 和 Zelevinsky 提出了以下猜想：

猜想5.1。 每个种子都由其簇唯一确定；因此，交换图的顶点可以与簇相对应，但簇变量的置换除外。

猜想 *5.2*。*</style*当且仅当两个簇恰好有$n-1$ 个共同簇变量时，它们在交换图中相邻。

¯**猜想 5.3**。**</style设为具有主系数的簇代数。那么，每个簇(**¯$\mathbf{x}_t$, ¯$\mathbf{y}_t$, B_t)均由相应的 C矩阵 C_t 唯一确定。

Gekhtman、Shapiro 和 Vainshtein 已对几何类型的斜对称化簇代数证明了这两个猜想 [GSV 08], ，并且他们证明了若猜想5.1 成立，则猜想5.2 也成立。Cao 和 Li 对任意系数的广义簇代数证明了猜想5.1 [CL18]。Cao、Huang 和 Li 对斜对称化簇代数证明了猜想5.3 [CHL22]。本节将对交换矩阵满足假设且满足正性猜想的簇代数证明这三个猜想。这些条件对于无环符号斜对称簇代数均成立。我们还将证明，对于奇数秩且交换矩阵不可分解、但不满足假设条件的簇代数，猜想5.1 和猜想5.2 也成立。

以下定理十分强大，因为它确立了g-向量与任意系数下的簇变量之间的一一对应关系。

定理 5.4. 设 $\mathcal{A}$ 是一个系数来自满足 **假设** 的半域 $\mathbb{P}$ 的全符号斜对称簇代数。那么对于任意 $t_0 \in \mathbb{T}_n$，我们有以下双射。

$$\{g\text{-}vectors\ g^{t_0}_{i,t},\ i \in [1,n],\ t \in \mathbb{T}_n\} \longrightarrow \{cluster\ variables\ x_{i,t}\ in\ \mathcal{A}\ ,\ i \in [1,n],\ t \in \mathbb{T}_n\}$$
$$g^{t_0}_{i,t} \mapsto x_{i,t}.$$

证明。 参见 [定理 8。2, [Nak]]了解详细证明。 □

注意，定理5.4 也由 Li 和 Pan 在其近期论文中针对具有主系数的簇代数以完全一般性得到了证明 [LP]。

定义 5.5。 设 $\mathcal{A}$ 是一个系数取自任意半域 $\mathbb{P}$ 的全符号斜对称簇代数。簇复形 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 是一个单纯复形，其顶点为簇变量，而其单形是簇的非空子集。

我们有以下结果：

推论 5.6。 设 $\mathcal{A}$ 是一个系数取自任意半域 $\mathbb{P}$ 的全符号斜对称簇代数。那么对于任意 $t_0 \in \mathbb{T}_n$，我们有如下单纯复形的同构：

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{F}_{G^{t_0}}$$
$$x_{i,t} \leftrightarrow g_{i,t}^{t_0}.$$

这里$\mathcal{F}_{G^{t_0}}$ 是对应的 G扇。

在证明主要结果之前，我们先做一些准备。回顾一下带有全符号斜对称矩阵的簇代数的普适系数公式。

定理 5.7 ([FZ07])。 设 $\mathcal{A}$ 是一个系数来自普适半域 $\mathbb{P} = \mathbb{Q}_{sf}(Y_1, \ldots, Y_n)$的全符号斜对称簇代数。那么，对于任意 $j \in [1, n]$ 和$t \in \mathbb{T}_n$，

$$Y_{j,t} = (\prod_{i=1}^{n} Y_i^{c_{ij,t}}) \prod_{i=1}^{n} F_{i,t}(\mathbf{Y})^{b_{ij,t}},$$

其中 $F_{i,\ t}$ 是 F-多项式。

对于置换 $\sigma \in S_n$ 和种子 $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{y}_t,\ B_t)$，$\sigma$ 对种子 $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{y}_t,\ B_t)$ 的作用记为 $\sigma(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{y}_t,\ B_t)$，并由下式给出

$$\sigma(\mathbf{x}_t) := (x_{\sigma(1),t}, \ldots, x_{\sigma(n),t}),\ \sigma(\mathbf{y}_t) := (y_{\sigma(1),t}, \ldots, y_{\sigma(n),t}), \sigma(B_t) := (b_{\sigma(i)\sigma(j),t}).$$

定理 5.8。 设 $\mathcal{A}$ 是一个系数来自半域 $\mathbb{P}$ 的全符号斜对称簇代数。假设交换矩阵 $\mathcal{A}$ 满足该**假设**。那么我们有：

(1) 每个种子都由其簇唯一确定，即，如果存在置换 $\sigma \in S_n$ 使得$\sigma(\mathbf{x}_{t'}) = \mathbf{x}_t$ 对某些 t、$t' \in \mathbb{T}_n$ 成立，那么

$$(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t) = \sigma(\mathbf{x}_{t'}, \mathbf{y}_{t'}, B_{t'}).$$

(2) 两个簇在交换图中相邻，当且仅当它们恰好有 $n-1$ 个公共簇变量。

证明。 (1) 假设 $\sigma(\mathbf{x}_{t'}) = \mathbf{x}_t$ 对某些 t，$t' \in \mathbb{T}_n$。为简单起见，不妨令 $t' = t_0$。根据定理 5.4，可知存在一个双射

$$\{g\text{-向量 } g_{i,\ t}^{t_0},\quad i \in [1, n],\quad t \in \mathbb{T}_n\} \longrightarrow \{\text{簇变量 } x_{i,\ t} \text{ 在 } \mathcal{A},\quad i \in [1, n],\quad t \in \mathbb{T}_n\}$$
$$g_{i,t}^{t_0} \mapsto x_{i,t}.$$

L ¯让我们同时考虑带主系数的簇代数 $\mathcal{A}(\bar{}\mathbf{x}\ \bar{}\mathbf{y}\ B)$.

由于 $\sigma(\mathbf{x}^{t_0}) = \mathbf{x}_t$，因此 G-矩阵 $G_t^{t_0}$是一个置换矩阵 P(P 的每一列和每一行都只有一个元素 1。)这意味着 F-多项式 $F_{i,\ t}^{t_0}$ 均为 1，且矩阵 $\tilde{C}_t^{t_0}$也为 P，因为 $P^T P = I_n$ 且 $(G_t^{t_0})^T \tilde{C}_t^{t_0} = I_n$。根据命题 4.8，我们知道 $C_t^{t_0} = \tilde{C}_t^{t_0} = P$。

根据命题 4.3，我们有

$$B_t = (G_t^{t_0})^{-1} B_{t_0} C_t^{t_0} = P^T B_{t_0} P = \sigma(B_{t_0}).$$

根据定理 5.7，我们有 $Y_{j,\ t} = Y_{\sigma(j)}$ 对每个 $j \in [1, n]$ 均成立，因此 $y_{j,\ t} = y_{\sigma(j)}$ 对每个 $j \in [1, n]$均成立，即 $\mathbf{y}_t = \sigma(\mathbf{y}^{t_0})$。

(2) 这是 (1) 的推论。 □

接下来，我们不再采用**假设**，并证明定理5.8 适用于所有奇数秩的全符号斜对称簇代数。

定理 5.9。 设 $\mathcal{A}$ 是一个奇数秩的全符号斜对称簇代数，其系数来自半域 $\mathbb{P}$，且具有不可分解交换矩阵。则有：

(1) 每个种子都由其簇唯一确定，即如果存在置换 $\sigma \in S_n$ 使得$\sigma(\mathbf{x}_{t'}) = \mathbf{x}_t$ 对于某些 t、$t' \in \mathbb{T}_n$ 成立，则

$$(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t) = \sigma(\mathbf{x}_{t'}, \mathbf{y}_{t'}, B_{t'}).$$

(2) 当且仅当两个簇恰好具有 $n-1$ 个公共簇变量时，它们在交换图中相邻。

证明。 为简便起见，设 $t' = t_0$。不失一般性，我们可以假设 $\sigma = id$。

我们还同时考虑具有主系数的簇代数 $\mathcal{A}(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ B)$。根据定理 5.4，有

$$\sigma(\mathbf{x}_{t_0}) = \mathbf{x}_t \implies g_{i,t}^{t_0} = g_{i,t_0}^{t_0}, \forall i \implies \sigma(\bar{\mathbf{x}}_{t_0}) = \bar{\mathbf{x}}_t$$

我们还 k 现在， G-矩阵 $G_t^{t_0}$是单位矩阵 I_n。对于任意 $k \in [1, n]$，我们有

$$\begin{aligned}\mu_k(x_{k,t}) &= \frac{\prod y_i^{[c_{ik,t}]_+} \prod x_i^{[b_{ik,t}]_+} + \prod y_i^{[-c_{ik,t}]_+} \prod x_i^{[-b_{ik,t}]_+}}{x_k} \\ &= \frac{\prod y_i^{[c_{ik,t}]_+} \prod x_i^{[b_{ik,t}]_+} + \prod y_i^{[-c_{ik,t}]_+} \prod x_i^{[-b_{ik,t_0}]_+}}{\prod y_i^{[c_{ik,t_0}]_+} \prod x_i^{[b_{ik,t_0}]_+} + \prod y_i^{[-c_{ik,t_0}]_+} \prod x_i^{[-b_{ik,t_0}]_+}} \mu_k(x_{k,t_0}).\end{aligned}$$

由于 $\mu_k(x_{k,\ t})$ 是关于 x_1，…，$\mu_k(x_{1,\ t_0})$ …，x_n 的 Laurent 多项式，且其系数属于 $\mathbb{N}[y_1, y_2, \ldots, y_n]$，因此对于每个 k，存在一个数 $\varepsilon_k \in \{1, -1\}$，使得

$$\mathbf{b}_{k,t} = \varepsilon_k \mathbf{b}_{k,t_0}, \quad \mathbf{c}_{k,t} = \varepsilon_k \mathbf{c}_{k,t_0}.$$

由于交换矩阵不可分解且是符号反对称的，我们有 $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n \in \{1, -1\}$。因此，我们有以下两种情况之一

$$B_t = -B_{t_0}, \quad C_t = -C_{t_0},$$

or

$$B_t = B_{t_0}, \quad C_t = C_{t_0}.$$

由于簇代数的秩为奇数，即 n 是奇数。于是，若 $C_t = -C_{t_0}$，则有 $|C_t| = (-1)^n = -1$。注意，我们已证明 $G_t = I_n$，因此 $|G_t| = 1$。而根据命题4.6，我们有 $|G_t| = |C_t|$。因此 $|C_t| = -1$ 是矛盾的。因此，我们有 $B_t = B_{t_0}$，$C_t = C_{t_0} = I_n$。

由定理 5.7 以及 $\bar{\mathbf{x}}_{t_0} = \bar{\mathbf{x}}_t$这一事实，$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{t_0}$。证明完毕。□

定理 5.10。设 $\mathcal{A}$ 为具有主系数的簇代数，且其交换矩阵满足**假设** 。那么，每个簇$(\bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{y}}_t, B_t)$ 都由相应的 C矩阵 C_t唯一确定。

证明. 如果在 $\mathbb{T}_n$ 上有两个顶点 t, t' 满足 $C_t = C_{t'}$。我们来证明 $(\bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{y}}_t, B_t) = (\bar{\mathbf{x}}_{t'}, \bar{\mathbf{y}}_{t'}, B_{t'})$。注意，由命题 4.7， $C_t = C_{t'} \implies G_t = G_{t'}$。而由定理 5.4，$G_t = G_{t'} \implies \bar{\mathbf{x}}_{t'} = \bar{\mathbf{x}}_{t'}$.。由定理 5.8，我们有 $C_t = C_{t'}$。因此 $G_t = G_{t'}$，并且 $\bar{\mathbf{x}}_{t'} = \bar{\mathbf{x}}_{t'}$.。由定理 5.4，我们有 $(\bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{y}}_t, B_t) = (\bar{\mathbf{x}}_{t'}, \bar{\mathbf{y}}_{t'}, B_{t'})$。□

推论 5.11. 如果全符号斜对称矩阵满足**假设**，那么G-矩阵与 C-矩阵由彼此唯一确定，并且它们唯一确定这些种子。

作为推论，我们得到以下结果。

定理 5.12. (1) 设 $\mathcal{A}$ 是一个系数取自半域 $\mathbb{P}$的无环符号斜对称簇代数。那么(a) 每个种子都由其簇唯一确定，即，若存在一个置换 $\sigma \in S_n$ 使得 $\sigma(\mathbf{x}_{t'}) = \mathbf{x}_t$ 对某些 $t, t' \in \mathbb{T}_n$成立，则(b) 两个簇在交换图中相邻，当且仅当它们恰有 $n-1$个共同簇变量。(2) 设 $\mathcal{A}$ 是一个带主系数的无环符号斜对称簇代数。那么，每个簇$(\bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{y}}_t, B_t)$ 都由相应的 C矩阵 C_t唯一确定。

$$(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t) = \sigma(\mathbf{x}_{t'}, \mathbf{y}_{t'}, B_{t'}).$$

致谢： 本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12071422）资助。

References

[CHL18] P. Cao、M. Huang 和 F. Li. 关于簇代数 c矩阵的一个猜想。 *Nagoya Mathematical Journal*，第 1–10 页，2018 年。[CHL22] P. Cao、M. Huang 和 F. Li. 符号斜对称簇代数的范畴化及关于 g 向量的一些猜想。 *Algebr. Represent. Theory*，25(6):1685–1698，2022 年。[CL18] P. Cao 和 F. Li. 通过簇公式及 d矩阵模式研究广义簇代数的一些猜想。 *Journal of Algebra*，493(57-78)，2018 年。[DWZ10] H. Derksen、J. Weyman 和 A. Zelevinsky. 带势箭图及其表示 II：在簇代数中的应用。 *J. Amer. Math. Soc*，23(749-790)，2010 年。[FWZ] S. Fomin、L. Williams 和 A. Zelevinsky. 《簇代数导论》第 4–5 章。 *arxiv: 1707.07190*。[FZ02] S. Fomin 和 A. Zelevinsky. 簇代数 I：基础。 *J. Amer. Math. Soc.*，15(2):497–529，2002 年。[FZ07] S. Fomin 和 A. Zelevinsky. 簇代数 IV：系数。 *Compos. Math.*，143(1):112–164，2007 年。[GHKK18] M. Gross、P. Hacking、S. Keel 和 M. Kontsevich. 簇代数的典范基。 *J. Amer. Math.Soc.*，31:497–608，2018 年。[GSV08] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein. 关于簇代数交换图的性质。*Math. Res. Lett.*，15(2):321–330，2008 年。[HL18] M. Huang 和 F. Li. 无环符号斜对称簇代数的展开及其在正性和 f多项式中的应用。 *Advances in Mathematics*，340:221–283，2018 年。[LP] F. Li 和 J. Pan. 通过牛顿多面体研究簇代数中的递推公式、正性和多面体基。 *arXiv:2201.01440*.[LS15] K. Lee 和 R. Schiffler. 簇代数的正性。 *Ann. Math.*，2(1):73–125，2015 年。[Nak] T. Nakanishi. 簇模式与散射图。 *arxiv: 2103.16309*。[NZ12] T. Nakanishi 和 A. Zelevinsky. 关于簇代数中的热带对偶。 *Contemp. Math*，565:217–226，2012 年。[Rea14] N. Reading. 通用几何簇代数。 *Mathematische Zeitschrift*，277:499–547，2014 年。

Siyang LiuSchool of Mathematics, Hangzhou Normal University, Hangzhou 311121, P.R.China*Email address*: siyangliu@hznu.edu.cn