arXiv:2305.00643v2 [math.NT] 7 Oct 2023

# 关于具有有理同源的某些阿贝尔簇的$L$-函数特殊值的算术浩瀚

EMMANUEL LECOUTURIER 和 JUN WANG

摘要。设 $N$ 和 $p$ 是素数 $\geq 5$，使得 $p \,||\, N-1$。在这种情况下，Mazur [16] 定义并研究了 $p$-艾森斯坦商$\tilde{J}^{(p)}$ 的 $J_0(N)$。我们证明了 Birch–Swinnerton-Dyer 猜想的一种模 $p$ 版本，适用于 $\tilde{J}^{(p)}$的偶二次扭曲的“$p$-艾森斯坦部分”。我们的结果是 Mazur [17] 关于奇二次扭曲的一个结果在偶二次扭曲情形下的类比。

目录

1. 引言 1 2. 符号 8 3. 周期 8 4. $L$-值与模符号 10 5. Sharifi 猜想中的层兼容性 12 6. $L$-值的同余公式 15 7. $J_0(N)$ 的 $N$-进一致化 19 8. 塞尔默群计算 20 8.1. $\tilde{J}^{(p)}[I^2]$ 21 的伽罗瓦结构背景8.2. 化归到 $\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 22 8.3. $\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 的计算 25 参考文献 40

## 1. 引言

设 $N$和 $p$ 是满足 $p \mid N-1$的素数 $\geq 5$。在这种情形下，Mazur 在其开创性著作 [16] 中证明，存在一个尖点特征形式$f \in S_2(\Gamma_0(N))$，它模 $p$是 Eisenstein 形式。更准确地说，在 $f$ 的 Hecke 域的整数环 $\mathcal{O}_f$ 中，存在一个位于 $\mathfrak{p}$ 之上的素理想，使得

$$f \equiv E_2 \ (\mathrm{modulo}\ \mathfrak{p}), \tag{1}$$

其中

$$E_2 = \frac{N-1}{24} + \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{d \mid n, \gcd(d,N)=1} d \right) \cdot q^n$$

是层 $\Gamma_0(N)$ 上权 2 的唯一 Eisenstein 级数。实际上，这样的尖点特征形式 $f$ 可能有多个。我们用 $S_2^{\mathrm{Eis}}(N,p)$ 表示 $S_2(\Gamma_0(N))$ 中满足形如 (1) 的同余关系的尖点特征形式所构成的（有限且非空）集合。

为了更深入地研究 (1)，Mazur 研究了*Eisenstein* 理想。令 $\mathrm{T}^0$ 为作用于 $S_2(\Gamma_0(N))$ 上、系数在整数环 Z 中的尖点海克代数。令 $I \subset \mathrm{T}^0$为 Mazur 的 Eisenstein 理想，它由作用于素数 $\ell \neq N$ 的海克算子 $T_\ell - \ell - 1$ 以及 $U_N - 1$ 生成。Mazur 证明了 $\mathrm{T}^0/I$ 是循环群，其阶为$\frac{N-1}{12}$ 的分子（参见 [16, 命题 II.9.7]）。令 $\mathfrak{P}$ 为由 $I$ 和 $p$生成的 $\mathrm{T}^0$ 的极大理想。我们用 $\mathrm{T}^0_{\mathfrak{P}}$ 表示 $\mathrm{T}^0$的 $\mathfrak{P}$-进完备化。更一般地，若 $M$ 是一个 $\mathrm{T}^0$-模，则我们用 $M_{\mathfrak{P}}$ 表示 $M$的 $\mathfrak{P}$-进完备化，即 $M_{\mathfrak{P}} = M \otimes_{\mathbb{T}^0} \mathrm{T}^0_{\mathfrak{P}}$。

为简便起见，本文中我们均假设 $p^2 \nmid N-1$。在此情形下，Mazur 在 [16, 命题 II.19.1] 中证明了 $\mathrm{T}^0_{\mathfrak{P}}$ 是一个离散赋值环。我们的许多结果无需这一假设也可以表述并证明，但这会使证明和记号变得复杂。

Mazur 在 [16, 命题 II.10.1] 中证明了 $J_0(N)$ 在 $\mathbb{T}^0$-模上的 $\mathfrak{P}$-进完备化 $J_0(N)$ 的雅可比簇 $p$ 处亦断一个商，粗略地说，对应于 $S_2^{\mathrm{Eis}}(N,p)$ 中的特征形式。更确切地说，Mazur 如下定义它：

$$\tilde{J}^{(p)} := J_0(N)/\gamma_{\mathfrak{P}} \cdot J_0(N)$$

其中

$$\gamma_{\mathfrak{P}} = \mathrm{Ker}(\mathbb{T}^0 \to \mathbb{T}^0_{\mathfrak{P}}) \ . \tag{2}$$

注意

$$\dim \tilde{J}^{(p)} = \# S_2^{\mathrm{Eis}}(N,p) \ .$$

Mazur 在 [17] 中研究了 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想的模 $\mathfrak{P}$ 版本，该猜想适用于 $\tilde{J}^{(p)}$ 到虚二次域的基变换，或等价地，适用于 $\tilde{J}^{(p)}$ 在 Q 上由奇二次狄利克雷特征所作的二次扭曲。下面回顾 Mazur 的结果。本文固定一个判别式为 $D$、对应二次特征为 $\chi_D$: (Z $/D$ Z)$^\times$ $\to\{\pm 1\}$ 的二次域 $K$。令 $h(K)$ 表示 $K$ 的整数环 $\mathcal{O}_K$ 的类数。我们用 $\tilde{J}^{(p)}_D$ 表示对应于 $K$ 的 $\tilde{J}^{(p)}$ 的二次扭曲。注意，$\tilde{J}^{(p)}$ 和 $\tilde{J}^{(p)}_D$ 均具有 $\mathrm{T}^0/\gamma_{\mathfrak{P}}$ 的典范作用。

我们想讨论“$\mathfrak{P}$ $\tilde{J}^{(p)}_D$ 在 $s=1$处的 $L$函数的代数部分的分量”。Mazur 在 [17, 第1] 章第 IV 节中考虑了泛特殊值 $\Lambda(U_{\mathfrak{P}}, \chi_D)$（当 $D<0$，即 当 $\chi_D$ 为奇数时）。精确定义见第 $\Lambda$ $U_{\mathfrak{P}}$ $\chi_D$ $\in$节（ ）。这里只说，( , ) ( ( ) 整数环 Z)$^{\pm}_{\mathfrak{P}}$其中 ( ) 。

**定理 1.1**。 [17, 第 IV 章，第 1 节，定理] 假设 $D<0$, $N$ 在 $K$和 $p \nmid D$ 中是惰性的。我们有 $\Lambda(U_{\mathfrak{P}}, \chi_D) \in I \cdot H_1(X_0(N), \text{整数环 Z})^-_{\mathfrak{P}}$ 当且仅当

$\tilde{J}_D^{(p)}$ 的 *Mordell–Weil* 秩为 $>0$，或者 $\tilde{J}_D^{(p)}$ 的 *Tate– Shafarevich* 群在 $\mathfrak{P}$ 处的完备化非平凡。

我们希望得到一个与 $\tilde{J}_D^{(p)}$ 的 BSD 猜想更密切相关的陈述。只有在以下假设下，才能推导出这样的陈述:

**假设 H**。

$$\#S_2^{\mathrm{Eis}}(N,p) = \mathrm{rk}_{\mathbf{Z}_p}\, \mathbb{T}^0_{\mathfrak{P}}\ .$$

右端是一个重要的不变量，因此我们沿用 Mazur 的记号

$$g_p := \mathrm{rk}_{\mathbf{Z}_p}\, \mathbb{T}^0_{\mathfrak{P}} \geq 1\ .$$

$\#S_2^{\mathrm{Eis}}(N,p) \geq g_p$ 始终成立，但等号成立的情形相当罕见。利用 Naskręcki 的表格（这些表格扩展了 [18] 的表格，并由 Naskręcki 私下分享给第一作者），可以发现，满足 $p \geq 5$、$p \,||\, N-1$ 和 $N \leq 14251$ 的三元组 $(N,p,g_p)$ 中，假设 H 成立的集合为

$$\{(11,5,1),(31,5,2),(211,5,2),(1871,5,2),(4621,5,2),(9931,5,2)\}\ .$$

因此，从某种意义上说，我们的假设成立的最简单例子是 $N=11$ 和 $p=5$; 此时 $\tilde{J}^{(p)}$ 是椭圆曲线 $X_0(11)$。关于假设 H 的重新表述，请参见第4节。

分别令 $L(\tilde{J}_D^{(p)}, s)$ 和 $\Omega_D > 0$ 为 $\tilde{J}_D^{(p)}$ 的 $L$-函数及其实 Néron 周期。由定理 1.1 可以推出如下关于 BSD 的结果。

**推论 1.2.** 假设假设 $H$。假设 $D<0$, $N$ 在 $K$ 和$p \nmid D$中是惰性的。那么 $p$ 整除 $L(\tilde{J}_D^{(p)},1)\,\Omega_D$ 的分子，当且仅当 $\tilde{J}_D^{(p)}$ 的 *Mordell– Weil* 秩为 $>0$，或者 $\tilde{J}_D^{(p)}$ 的 *Tate–Shafarevich* 群的 $p$-部分非平凡。

**备注 1.1.** (i) 容易验证，上述结果符合 BSD 猜想的预测（利用以下事实： $p$ 不整除 $\tilde{J}_D^{(p)}$ 的 Tamagawa 数，且后者没有任何有理 $p$-挠元）。我们可以将这一结果视为关于 $\tilde{J}_D^{(p)}$ 的 BSD 猜想的一种模 $p$ 版本。(ii) $N$ 在 $K$ 中是惰性的假设，等价于 $L(\tilde{J}_D^{(p)}, s)$的符号为 1。

以下是我们的主要结果。

定理 *1.3.* 假设 $D>0$, $N$ 在 $K$ 和 $p \nmid D$ 中分裂。那么我们有$\Lambda(U_{\mathfrak{P}}, \chi_D) \in I \cdot H_1(X_0(N), \text{整数环 } Z)^{+}_{\mathfrak{P}}$。此外，$\Lambda(U_{\mathfrak{P}}, \chi_D) \in I^2 \cdot H_1(X_0(N), \text{整数环 } Z)^{\pm}_{\mathfrak{P}}$ 当且仅当 $\tilde{J}_D^{(p)}$ 的 *Mordell–Weil* 秩为 $>0$，或者 $\tilde{J}_D^{(p)}$ 的 *Tate–Shafarevich* 群在 $\mathfrak{P}$ 处的完备化非平凡。

和之前一样，可以推导出以下关于 BSD 的结果。

**推论 1.4.** 假设假设 $H$。假设 $D>0$, $N$ 在 $K$ 和$p\nmid D$ 中分裂。那么 $p$ 整除 $L$ 的分子$(\tilde{J}_D^{(p)},1)\,\Omega_D$ 。此外， $p^2$ 整除 $L$ 的分子$(\tilde{J}_D^{(p)},1)\,\Omega_D$ 当且仅当 $\tilde{J}_D^{(p)}$ 的 *Mordell–Weil* 秩为 $>0$，或者 $\tilde{J}_D^{(p)}$ 的 *Tate–Shafarevich* 群的 $p$ 部分非平凡。

假设 $N$ 在 $K$ 中分裂，等价于 $L(\tilde{J}_D^{(p)},s)$ 的符号为 1。如上所述，这一结果由 BSD 猜想预言，也可以看作是关于 $\tilde{J}_D^{(p)}$ 的 BSD 猜想的模 $p$ 版本。我们的策略与 Mazur 的策略相似，现回顾如下。为简单起见，假设 $\#S_2^{\mathrm{Eis}}(N,p)=g_p=1$ （特别地，假设 H 得到满足），一般情形类似。
Mazur 分两大步骤进行。

- 步骤 1： $L$-值的同余公式。Mazur 给出了关于 $\Lambda(U_{\mathfrak{P}},\chi_D)$ 的模 $I$ （Eisenstein 理想）同余公式。他利用模符号和重数一结果得到了这样的同余。下面直观地解释为什么可以预期存在这样的同余公式。设 $f\in S_2(\Gamma_0(N))$，使得如上所述 $f\equiv E_2$ （模 $p$）。我们可以预期 $L(f,\chi_D,1)$ 与 $L(E_2,\chi_D,1)$ 的 “ 代数部分 ” 之间存在同余（在某些情形下，这类同余已经得到证明，例如由 [26]证明）。我们有

$$L(E_2,\chi_D,1)=L(\chi_D,1)\cdot L(\chi_D,0)\ ,$$

  根据函数方程，它与 $L(\chi_D,0)^2=B_{1,\chi_D}^2$ 成比例。根据类数公式，$B_{1,\chi_D}$ 本质上就是 $K$ 的类数 $h(K)$（因为在 Mazur 的结果中，$K$ 是虚数）。因此，可以预期 $L(f,\chi_D,1)$ 的代数部分模 $p$ 与 $h(K)^2$ 成比例。这正是 Mazur 在 [17, II §7 命题] 中利用模符号实际证明的。
- 步骤 2：模 $p$ 塞尔默群计算。Mazur 运用平坦上同调进行了艾森斯坦下降。他能够在[17, §1 步骤 2] 中证明，当且仅当 $p$ 不整除 $h(K)$ 时， $\tilde{J}(p)$ 的 Mordell–Weil 群的秩$D$ 和其 Tate–Shafarevich 群的 $p$ 部分均为零。我们再对这一结果作一个启发式解释。由于 $\tilde{J}(p)_D$ (Q) 没有任何 $p$ 挠元，秩为零且 X 的 $p$ 部分为零，等价于 Sel$p$( $\tilde{J}(D^p/)$ Q) $=0$，其中 Sel$p$ 是 $p$-塞尔默群，是伽罗瓦上同调群 $H^1$ (Gal(Q/ Q) $\tilde{J}(p)_D$ $[p]$) 的一个子群（并且通过限制，它也是 $H^1$ (Gal(Q/$K$) $\tilde{J}(p)_D$ $[p]$) 的一个子群）。于是我们有一个 Gal(Q/$K$)-模的同构

$$\tilde{J}_D^{(p)}[p]\simeq\tilde{J}^{(p)}[p]\simeq\mu_p\oplus\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}\,.$$

因此，Sel$_p(\tilde{J}_D^{(p)}/\mathbb{Q})$ 是

$$H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K),\mu_p)\oplus H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K),\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})\ .$$

塞尔默条件实际上使 Sel$_p(\tilde{J}_D^{(p)}/\mathbb{Q})$ 成为

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(A),\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})\oplus H^1(\mathrm{Spec}(A),\mu_p)$$

其中 $A=\mathcal{O}_K[1/N]$。群 $H^1(\mathrm{Spec}(A),\mu_p)$ 是 $\mathrm{Pic}(A)[p]$ 与 $A^\times\otimes$整数环 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的扩张。由于 $A^\times\otimes$整数环 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 由$N$生成，而它被 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 固定，因此可以预期，当且仅当 $p$ 不整除 $h(K)$ 时，Sel$_p(\tilde{J}_D^{(p)}/\mathbb{Q})$ 非零。

总之，Mazur 证明了以下结果，它蕴含定理 1.1：

**定理 1.5.** [17, 第 IV 章，第 1 节，定理] 假设 $D<0$, $N$ 在$K$ 中是惰性的，且 $p\nmid D$。那么以下断言等价：

*(i)* $\Lambda(U_{\mathfrak{P}},\chi_D)\in I\cdot H_1(X_0(N),\mathbf{Z})^-_{\mathfrak{P}}$.

*(ii)* $p$ *divides* $h(K)$.

*(iii)* $\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}_D^{(p)}/\mathbf{Q})_{\mathfrak{P}}\neq 0$.

在假设 H 下，可以推出以下结果。

**推论 1.6.** 假设假设 $H$。假设 $D<0$, $N$ 在 $K$ 中是惰性的，且$p\nmid D$。那么以下断言等价：

*(i)* $p$ 整除 $L(\tilde{J}_D^{(p)},1)\Omega_D$ 的分子。 *(ii)* $p$整除 $h(K)$。*(iii)* $\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}_D^{(p)}/\mathbf{Q})\neq 0$。

同样，我们证明定理 1.3 的以下强化结果：

**定理 1.7**。假设 $D>0$, $N$ 在 $K$ 和 $p\nmid D$中分裂。设 $u(K)$ 是 $\mathcal{O}_K^\times$中的一个基本单位。则有 $\Lambda(U_{\mathfrak{P}},\ \chi_D)\in I\cdot H_1(X_0(N)$，整数环 $\mathbb{Z})^+_{\mathfrak{P}}$，且以下断言等价：

*(i)* $\Lambda(U_{\mathfrak{P}},\ \chi_D)\in I^2\cdot H_1(X_0(N)$，整数环 $\mathbb{Z})^+_{\mathfrak{P}}$。*(ii)* $u(K)^{h(K)}$ 是模 $K$中整除 $N$ 的任意素数的 $p$ 次幂。*(iii)* $\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}_D^{(p)}/\mathbf{Q})_{\mathfrak{P}}\neq 0$。

在假设 H 下，可以推出以下结果。

**推论 1.8**。假设假设 $H$。假设 $D>0$、 $N$ 在 $K$ 和$p\nmid D$中分裂。令 $u(K)$ 为 $\mathcal{O}_K^\times$ 中的一个基本单位。则 $p$ 整除 $L(\tilde{J}_D^{(p)},1)\Omega_D$ 的分子，且以下断言等价：

*(i)* $p^2$ 整除 $L(\tilde{J}_D^{(p)},1)\Omega_D$ 的分子。*(ii)* $u(K)^{h(K)}$ 是模 $K$ 中任何整除 $N$ 的素数的 $p$ 次幂。*(iii)* $\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}_D^{(p)}/\mathbf{Q})\neq 0$。

让我们解释一下，在尝试遵循 Mazur的方法时会遇到哪些困难。

• 步骤 1（ $L$值的同余公式）。由于在我们的情形中 $\chi_D$ 是偶数，我们有 $L(\chi_D, 0) = 0$。因此，上述朴素同余论证表明， $p$ 总是整除$L(f, \chi_D, 1)$的代数部分。利用 Mazur 给出的偶模符号同余关系，可以轻易地严格证明这一点（参见 [17, 第 211] 页）。如果 $D > 0$ 确实成立，那么 $p$ 总是整除$L(\tilde{J}_{(p)D}, 1)\,\Omega_D$ 这一事实，实际上是 BSD 猜想所预言的：由于 $N$在 $K$中分裂， $\tilde{J}_{(p)D}$的第 $N$个 Tamagawa数与 $\tilde{J}_{(p)}$的第 $N$个 Tamagawa数相同，而后者被 $p$ 整除，这由 [16, 定理 A.1]得出。为了理解模 $p^2$的$L(\tilde{J}_{(p)D}, 1)\,\Omega_D$ ，一种方法是找到模 $p^2$的偶模符号同余公式。 [15, 定理 1.12] 利用层$\Gamma_1(N)$上的 Sharifi 猜想给出了这样的同余关系。然而，该公式是用 Manin 符号表示的，不足以满足我们的目的。我们需要使用层 $\Gamma_1(ND)$上的 Sharifi 猜想。我们在近期工作 [14] 的基础上，得到了一个无条件的同余公式。

•步骤 2（计算 $p$-塞尔默群）。当 $K$ 为虚数时的类似论证同样适用：我们将 $\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}_{(p)D}/\mathbb{Q})$ 与 $H^1(\mathrm{Spec}(A), \mu_p) \oplus \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(A), \text{整数环} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 联系起来，其中 $A = \mathcal{O}_K[1/N]$。若 $K$ 为实数，则 $A^\times \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的维数为 3（一维来自基本单位，另外两维来自 $\mathcal{O}_K$ 中整除 $N$ 的素数），因此 $\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}_{(p)D}/\mathbb{Q})$ 的计算更为复杂。需要仔细分析塞尔默条件（我们依赖于 $J_0(N)$ 的 $N$-进一致化，以及 $N$ 处局部条件的相关结果 [6] ）。

最后，我们以几点评论结束本引言。

我们结果背后的一般理念，是 $\mathrm{GL}_2$ 的解析或代数方面与 $\mathrm{GL}_1$的相应方面之间存在联系。也就是说，我们将一个次数为2 $L$的函数（尖点模形式的 $L$-函数）与一个次数为 1 $L$ 的函数（狄利克雷特征的 $L$-函数）联系起来。类似地，我们将阿贝尔簇的塞尔默群与特征（一个类群）的塞尔默群联系起来。这种联系源于尖点形式与艾森斯坦级数之间的 Eisenstein同余（正如 Mazur 结果的步骤 1 中简要说明的那样）。这一理念当然并不新鲜，至少可以追溯到 Ribet 关于 Herbrand定理逆命题的研究 [20]。近期的一个例子见 [22]。一个普遍现象是，艾森斯坦级数的 $L$-值有“一半”为零（这里的意思是，对于 $D > 0$，有 $L(E_2, \chi_D, 1) = 0$），因此直接的艾森斯坦同余无法提供多少信息。要更进一步，就需要一种关于艾森斯坦同余的“更高阶”理论，例如，如 [12] 中所发展的理论。

我们预期，对于如定理 1.7 中所述的 $D$，有正比例且 $< 100\%$ 满足 $\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}_D^{(p)}/\mathbb{Q}) \neq 0$。根据定理 1.7，这等价于说，对于 $N$ 分裂的实二次域 $K$ 中正比例且 $< 100\%$ 的域，$u(K)^{h(K)}$ 是模（$N$ 上方的一个素数）$N$ 的 $p$ 次幂（此处，$N$ 和 $p$ 固定）。我们不知道数论中的经典技巧能否对此猜想给出结果。

值得注意的是，我们在这里得到的模 $p^2$ 的 $L$-值同余公式，也可以通过另一种方法证明。具体而言，可以利用 Popa 的一个公式（基于 Waldspurger 的一般公式），将 $L(f/K, 1)$ 表示为闭 Heegner 测地线的形式，其中 $K$ 是实二次域，$f$ 是尖点特征形式。详情请参阅 [11] 。我们倾向于采用本文的方法，因为它不依赖 Waldspurger 和 Popa 的困难结果。

最后，我们来谈谈 Castella–Grossi–Skinner[3] 最近的工作。他们证明了 $\mathbb{Q}$ 上某些代数秩为 $\leq 1$ 、具有 $\mathbb{Q}$ 上 $p$ 次同源的椭圆曲线$E$ 的 BSD 公式的 $p$ 部分（参见[3, 定理 D]）。他们的方法是在这一艾森斯坦情形下证明并运用岩泽主猜想 [3, 定理 A]。为此，他们实际上在对某个辅助虚二次域作出若干假设的条件下，证明了 Perrin–Riou 反圆分岩泽主猜想（参见 [3, 猜想 B 和定理 C]）。

[3]等人的结果与我们的结果彼此独立，采用的方法也截然不同，但二者仅在以下一个例子中有所交集：当 $E = X_0(11)$ 且$p = 5$时。他们证明了 $p$ 部分的 BSD 公式，适用于 $E$ 在 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 上的二次扭曲 $E_D$，其中 $D > 0$ 满足 $p$ 在 $K$ 中是惰性的（且 $N = 11$在 $K$中分裂）。如前所述，他们还需要假设 $E_D$ 的秩为零。我们对秩没有这样的限制（对我们而言，秩可以是 $\geq 2$ ），并且我们也处理 $p$ 在 $K$中分裂的情形。一方面，在这个例子及其假设下，他们的结果更为精确，因为他们证明了 BSD 的确切 $p$部分，而我们只证明了 BSD“模 $p$”。另一方面，我们的主要结果定理 1.7 更为明确，因为我们给出了一个以基本单位和类数表述的判据。我们还处理更高维的阿贝尔簇，而 [3] 并未涉及这种情形（我们不知道他们是否能将其方法推广到具有非有理海克域的模特征形式）。

本文的结构安排如下。在第3节中，我们讨论本文中出现的各种周期之间的关系。在第4节中，我们将关于 $\Lambda(U_{\mathfrak{P}}, \chi_D)$ 和 $L(\tilde{J}_D^{(p)}, 1)\,\Omega_D$ 的整除性问题转化为一个关于模符号的问题。在第5节中，我们证明了关于 Sharifi 猜想所需的结果。在第6节中，我们利用第5节的结果，证明上述步骤 1 中的模 $p^2$ Eisenstein同余。在第7节中，我们回顾 de Shalit 关于 $J_0(N)$ 的 $N$-进一致化的一些结果。最后，在第8节中，我们计算 $\tilde{J}_D^{(p)}$ 的塞尔默群在 $\mathfrak{P}$ 处的完备化。

## 2. 记号

我们固定素数 $N$ 和 $p \geq 5$，使得 $p \| N-1$（即 最大公约数$(N-1, p^2) = p$）。固定一个满群同态 log : (整数环 Z $/N$Z)$^\times \to$ 整数环 Z $/p$ Z。

我们用 $X_0(N)$（分别用 $X_1(N)$）表示层为 $\Gamma_0(N)$（分别为 $\Gamma_1(N)$）的紧模曲线。我们用 $H_1(X_0(N)$, 整数环 Z) 表示 $X_0(N)$ 的系数取整数环 Z 的第一奇异同调群。对于 $X_1(N)$，也采用类似的记号。

固定 Q 和 $\mathbb{Q}_p$ 的代数闭包 $\overline{\mathbb{Q}}$ 和 $\mathbb{Q}_p$，以及嵌入 $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ 和 $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$。若 $x, y \in \mathbb{C}^\times$，则当 $\frac{x}{y}$ 是一个代数数，且相对于我们的固定嵌入也是 $p$-进单位时，我们记作 $x \sim y$。

我们固定一个判别式为 $D > 0$ 的实二次域 $K$，使得 gcd$(D, Np) = 1$。我们将对应于 $K$ 的狄利克雷特征记为 $\chi_D : (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^\times \to \{\pm 1\}$。分别用 $u(K)$ 和 $h(K)$ 表示 $K$ 的基本单位和类数。我们假设 $N$ 在 $K$ 中分裂。

## 3. 周期

回顾一下定义：设 $A$ 是定义在 Q 上的阿贝尔簇，其实 Néron 周期 $\Omega_A$。设 $\mathcal{A}$ 为 $A$ 在整数环 Z 上的 Néron模型，$\omega_A$ 为 $\mathcal{A}$ 的整体微分 $g$-形式的一个生成元，其中 $g = \dim(A)$。我们定义 $\Omega^A = \int_{A(\mathbf{R})} |\omega_A|$。

**命题 3.1**。令 $A_D$ 表示 $A$ 关于 $K = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$的二次扭曲（其中 $D$ 如上所述）。则 $\Omega_A \sim \Omega_{A_D}$。

证明。令 $A' := A \times_{\mathbf{Q}} K$ 和 $A'_D = A_D \times_{\mathbf{Q}} K$。令 $\mathcal{A}'$（分别为 $\mathcal{A}'_D$）表示 $A'$（分别为 $A'_D$）在 $\mathcal{O}_K[\frac{1}{D}]$ 上的 Néron模型。由于 $A' \simeq A'_D$ 在 $K$ 上，我们有 $\mathcal{A}' \simeq \mathcal{A}'_D$ 在 $\mathcal{O}_K[\frac{1}{D}]$ 上。由于 Spec$(\mathcal{O}_K[\frac{1}{D}]) \to$Spec(Z$[\frac{1}{D}]$) 是非分歧的，我们有 $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times$Spec$(\mathcal{O}_K[\frac{1}{D}])$ 和 $\mathcal{A}'_D = \mathcal{A}_D \times$Spec$(\mathcal{O}_K[\frac{1}{D}])$，其中 $\mathcal{A}$（分别为 $\mathcal{A}_D$）是 $A$（分别为 $A_D$）在 Z$[\frac{1}{D}]$ 上的 Néron模型。注意，我们有 $A'$(R) $= A$(R) $\times A$(R)。由于 $g$ 的全局微分形式的一个生成元通过基变换诱导出 $\mathcal{A}$ 的全局微分形式的一个生成元，我们得到 $\Omega_{A'} = \Omega_A^2$（这两个量实际上都只在相差一个 $D$ 单位的意义下良定义，但无论如何 $\Omega_{A'} \sim \Omega_A^2$，因为 $p \nmid D$）。类似地，我们得到 $\Omega_{A'} \sim \Omega_{A_D}^2$。因此我们得到 $\Omega_{A_D} \sim \Omega_A$。□

**备注 3.1.** (i) 若能找到一个精确公式来关联 $\Omega_A$ 和 $\Omega_{A_D}$，将会很有意思。当 $A$ 是 [19]中的椭圆曲线时，已经找到了这样的公式。(ii) 与引言中一样，为简便起见，我们将使用记号 $\Omega_D$，而不使用 $\Omega_{A_D}$。

现在让我们建立模阿贝尔簇的周期与模特征形式的周期之间的联系。若 $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ 是一个归一化特征形式，则存在 $\Omega_f^+, \Omega_f^- \in \mathbb{C}$，使得对任意 $c \in H_1(X_0(N), \mathbb{Z})^{\pm}$,

复数 $\int_c 2i\pi f(z)dz\,\Omega_f^{\pm}$ 是代数数，并且在我们的固定嵌入下是 $p$-进整数。这里，$H_1(X_0(N),$ 整数环 $\mathbf{Z})^{\pm}$ 是 $\overline{H_1(X_0(N),\text{整数环 }\mathbf{Z})}$ 中复共轭作用为 $\pm 1$ 的子群。我们还要求存在 $c \in H_1(X_0(N),\text{整数环 }\mathbf{Z})^{\pm}$，使得 $\int_c 2i\pi f(z)dz\,\Omega_f^{\pm}$ 是一个 $p$-进单位。在这些条件下，周期 $\Omega_f^{\pm}$ 在相差一个 $p$-进单位的意义下唯一。

**命题 3.2**。我们有 $\Omega_{\tilde{J}^{(p)}} \sim \prod_{f\in S_2^{\mathrm{Eis}}(N,p)} \Omega_f^+$（回顾第 *1* 节，$S_2^{\mathrm{Eis}}(N,p)$ 是 $S_2(\Gamma_0(N))$ 中与某个素数理想在 $p$ 上方同余于 ***Eisenstein*** 级数 $E_2$ 的特征形式集合）。

证明。为简便起见，记 $\tilde{J}^{(p)}$ 为 $A$，记$\gamma_{\mathfrak{P}}$ 为 $\mathfrak{a}$（参见（2）中$\gamma_{\mathfrak{P}}$的定义）。我们还令 $T = (\mathbf{T}^0/\mathfrak{a}) \otimes_{\mathbf{Z}}$ 整数环 $\mathbf{Z}_p$。令

$$g = \dim(A) = \#S_2^{\mathrm{Eis}}(N,p)$$

并令 $\mathcal{A}$ 为 $A$ 在整数环 $\mathbf{Z}$ 上的 Néron模型。拉回映射。

$$H^0(\mathcal{A},\Omega^1_{\mathcal{A}}) \hookrightarrow H^0(J_0(N)/\mathbf{Q},\Omega^1_{J_0(N)/\mathbf{Q}}) = S_2(\Gamma_0(N),\mathbf{Q})$$

其像包含于 $S_2(\Gamma_0(N),$ 整数环 $\mathbf{Z})[\mathfrak{a}]$ 中，其中对于环 $R \subset \mathbf{C}$，我们将$S_2(\Gamma_0(N)$ $R)$记作尖点形式的子空间，其中这些形式在 $\infty$ 处的 $q$ 展开的系数属于 $R$。$A$的***Manin*** 常数定义为该指标的值。

$$c_A := [S_2(\Gamma_0(N),\mathbf{Z})[\mathfrak{a}] : H^0(\mathcal{A},\Omega^1_{\mathcal{A}})]$$

(参见 [1, §3.1])。根据 [1, 定理 3.5], , 我们有 $p \nmid c_A$。

Let

$$\phi : H_1(X_0(N),\mathbf{Z})^+/\mathfrak{a} \otimes \mathbf{C} \to \mathrm{Hom}(S_2(\Gamma_0(N),\mathbf{Z})[\mathfrak{a}],\mathbf{C})$$

是由配对 $(c,f) \mapsto \int_c 2i\pi f(z)dz$ 给出的映射（其中指数中的“+”表示复共轭下的不变量）。根据 [16,命题 II.18.3]，$H_1(X_0(N),\mathbf{Z})^+/\mathfrak{a} \otimes \mathbf{Z}_p$ 是 $T$上的自由秩一模。令$c \in H_1(X_0(N),\mathbf{Z})^+$ 为 $H_1(X_0(N),\mathbf{Z})^+/\mathfrak{a} \otimes \mathbf{Z}_p$ 在 $T$上的一个生成元。取 $n_1, ..., n_g \in \mathbf{N}$，使得海克算子 $T_{n_1}, ..., T_{n_g}$ 构成 $T$的一组 $\mathbf{Z}_p$-基。最后，固定一族 $f_1, ...\ f_g$，其中元素属于 $S_2(\Gamma_0(N),\mathbf{Z})[\mathfrak{a}]$，并构成 $S_2(\Gamma_0(N),\mathbf{Z}_p)[\mathfrak{a}]$ 的一组 $\mathbf{Z}_p$-基（后者是一个自由的 $T$秩一模）。

由于 $p \nmid c_A$，我们很容易看出 $\Omega_A \sim \det(M)$，其中

$$M = (\int_{T_{n_a}c} 2i\pi f_b(z)dz)_{1\le a,b\le g}.$$

令 $F_1, ..., F_g$ 为 $S_2^{\mathrm{Eis}}(N,p)$ 的元素。注意，$(F_1, ..., F_g)$ 是 $S_2(\Gamma_0(N),\mathbf{Q}_p)[\overline{\mathfrak{a}}]$ 的一个 $\mathbf{Q}_p$-基。令 $P$为 $(F_1, ..., F_g)$ 在 $(f_1, ..., f_g)$ 下的矩阵。若 $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ 且 $n \in \mathbf{N}$，我们用 $a_n(f)$ 表示 $f$ 在 $\infty$ 处的第 $n$ 个傅里叶系数。于是

$$\det(a_{n_a}(F_b))_{1\le a,b\le g} = \det(P)\cdot\det(a_{n_a}(f_b))_{1\le a,b\le g} \sim \det(P)$$

由于 $\det(a_{n_a}(f_b))_{1\le a,\ b\le g}$ 按构造是一个 $p$-进单位。因此，我们有

$$\begin{aligned}\det(M) &= \det(P)^{-1}\cdot\det(\int_{T_{n_a}c} 2i\pi F_b(z)dz)_{1\le a,b\le g}\\ &= \det(P)^{-1}\cdot\det(\int_c 2i\pi a_{n_a}(F_b)\cdot F_b(z)dz)_{1\le a,b\le g}\\ &\sim \det(a_{n_a}(F_b))^{-1}_{1\le a,b\le g}\cdot\det(\int_c 2i\pi a_{n_a}(F_b)\cdot F_b(z)dz)_{1\le a,b\le g}\ .\end{aligned}$$

根据 $c$ 的构造，我们可以选取 $\Omega^+_{F_b}=\int_c 2i\pi F_b(z)dz$。因此得到

$$\begin{aligned}\det(M) &\sim \det(a_{n_a}(F_b))^{-1}_{1\le a,b\le g}\cdot\prod_{b=1}^{g}\Omega^+_{F_b}\cdot\det(a_{n_a}(F_b))_{1\le a,b\le g}\\ &\sim \prod_{b=1}^{g}\Omega^+_{F_b}\ .\end{aligned}$$

这就完成了命题 3.2 的证明。 □

## 4. $L$-值与模符号

本节将计算 $L(\tilde{J}_D^{(p)},1)\,\Omega_D$ 的 $p$-进赋值问题改写为模符号问题。

---

我们先介绍一些关于模符号的基本记号。设 $\Gamma$ 是 $\mathrm{SL}_2$(整数环 $\mathbf{Z}$) 的有限指数子群，我们用 $X(\Gamma)$ 表示层为 $\Gamma$ 的紧模曲线，用 $C(\Gamma)$ 表示 $X(\Gamma)$ 的尖点子集。可以考虑相对奇异同调群 $H_1(X(\Gamma)\ C\Gamma,\mathbf{Z})$。若 $\alpha,\beta\in\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$，我们用 $\{\alpha,\beta\}$ 表示从 $\alpha$ 到 $\beta$ 的扩充上半平面中的双曲路径在 $H_1(X(\Gamma)\ C\Gamma,\mathbf{Z})$ 中的类。元素 $\{\alpha,\beta\}$ 称为模符号。

回顾第3节，我们定义了附加于归一化特征形式 $f\in S_2(\Gamma_0(N))$ 的周期 $\Omega_f^+$。令 $\mathfrak{m}$ 为与 $f$ 对应的剩余特征为 $p$ 的极大理想。若 $H_1(X_0(N),\mathbf{Z})^+_{\mathfrak{m}}$（$H_1(X_0(N),\mathbf{Z})^+$ 的 $\mathfrak{m}$-进完备化）是 $\mathbf{T}^0_{\mathfrak{m}}$ 上的秩一自由模，则可以选取 $H_1(X_0(N),\mathbf{Z})^+_{\mathfrak{m}}$ 的一个生成元 $c$，并定义 $\Omega_f^+=\int_c 2i\pi f(z)dz$。在这种情形下，周期映射 $\varphi_f\colon H_1(X_0(N),\mathbf{Z})^+\to\mathbf{Q}_p$ 由 $\gamma\mapsto\overline{\int_\gamma 2i\pi f(z)dz}\,\Omega_f^+$ 给出，其值落在 $\mathbf{Z}_p$ 中。此外，如果 $\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Q}_p)$，那么我们可以对周期进行归一化，使得 $\varphi_{f^\sigma}=\sigma\circ\varphi_f$，其中 $f$ 被 $\sigma$ 共轭后得到的形式为 $f^\sigma$。

当 $f\in S_2^{\mathrm{Eis}}(N,p)$ 时，本讨论适用。本节中我们固定这样一个 $f$。假设 $p\mid\mid N-1$ 意味着，所有其他这类特征形式都具有 $f^\sigma$ 的形式，其中 $\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}/\mathbf{Q})$。事实上，在这种情况下，艾森斯坦理想 $I$ 是极大理想（命题 II.9.7], ）；又由于它是主理想（命题 II.16.6] ），因此我们得出 $\mathbf{T}^0_{\mathfrak{P}}$ 是一个离散赋值环，特别是没有零因子。

现在我们来重新表述假设 H。我们刚刚注意到，$\#S_2^{\mathrm{Eis}}(N,p)$ 是 $f$ 在 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ 中的自同构作用下所得共轭形式的个数。另一方面，$g_p$ 是 $f$ 在 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p)$ 中的自同构作用下所得共轭形式的个数（回想一下，我们固定了一个嵌入 $\mathbb{Q}\hookrightarrow\mathbb{Q}_p$）。因此，假设 H 成立，当且仅当 $f$ 的所有共轭形式（即 $S_2^{\mathrm{Eis}}(N,p)$ 中的特征形式）实际上都是 $f$ 在某个 $\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p)$ 作用下的共轭形式。

众所周知（参见 [17, §6 命题]），如果 $\chi:(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{C}^\times$ 是导子为 $m>1$ 且与 $N$ 互素的原始狄利克雷特征，那么我们有

$$\tau(\chi^{-1})\cdot L(f,\chi,1)=\sum_{a\in(\mathbf{Z}/m\,\mathbf{Z})^\times}\chi(a)^{-1}\cdot\int_{\frac{a}{m}}^{0}2i\pi f(z)dz \tag{3}$$

其中，$\tau(\chi^{-1})=\sum_{a=0}^{m-1}\chi(a)^{-1}\cdot e^{\frac{2i\pi a}{m}}$ 是与 $\chi^{-1}$ 相关联的高斯和。由于 $\gcd(m,N)=1$，$X_0(N)$ 的尖点 0 和 $\frac{a}{m}$ 等价，因此模符号 $\{0,\frac{a}{m}\}$ 属于 $H_1(X_0(N),\mathbf{Z})$。因此，如果 $\chi$ 为偶数（即 $\chi(-1)=1$），公式（3）可以改写为

$$\tau(\chi^{-1})\cdot\frac{L(f,\chi,1)}{\Omega_f^+}=-\sum_{a\in(\mathbf{Z}/m\,\mathbf{Z})^\times}\chi(a)^{-1}\cdot\varphi_f(\{0,\frac{a}{m}\})\ . \tag{4}$$

我们将此公式应用于 $\chi=\chi_D$。注意到 $\tau(\chi)^2=D$，因此 $\tau(\chi)$ 与 $p$ 互素。按照 Mazur [17, II §6 和 III §2], ，令

$$\Lambda(U_{\mathfrak{P}},\chi_D)=\sum_{a\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^\times}\chi_D(a)\cdot\{0,\frac{a}{D}\}\in H_1(X_0(N),\mathbf{Z})^+_{\mathfrak{P}}\ . \tag{5}$$

鉴于（4），将 $\Lambda(U_{\mathfrak{P}},\chi_D)$ 称为由 $\chi_D$ 扭曲的泛特殊值的 $\mathfrak{P}$-部分是很自然的。我们令

$$\Theta_D=\sum_{a\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^\times}\chi_D(a)\cdot\{0,\frac{a}{D}\}\in H_1(X_0(N),\mathbf{Z})^+\ .$$

因此，$\Lambda(U_{\mathfrak{P}},\chi_D)$ 只是 $\Theta_D$ 在 $H_1(X_0(N),\text{整数环 }\mathbf{Z})^{\pm}$ 的 $\mathfrak{P}$ 完备化中的像。

我们有如下经典的 $L$-函数分解。

$$L(\tilde{J}_D^{(p)},s)=L(\tilde{J}^{(p)},\chi_D,s)=\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\,\mathbf{Q})}L(f^\sigma,\chi_D,s)\ . \tag{6}$$

结合命题 3.1、命题 3.2、(4) 和 (6)，我们得到，如果假设 H 成立，那么

$$\frac{L(\tilde{J}_D^{(p)},1)}{\Omega_D}\sim\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\,\mathbf{Q}_p)}\sigma\left(\sum_{a\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^\times}\chi_D(a)\cdot\varphi_f(\{0,\frac{a}{D}\})\right)\ .$$

注意，$\varphi_f(\{0,\frac{a}{D}\})$ 的取值落在整数环 $\mathbb{Z}_p$ 的一个全分歧有限扩张中（事实上，$\mathbb{T}^0_{\mathfrak{P}}$ 是一个全分歧离散赋值环，参见 [16, 命题 II.19.1]）。

因此，$\sum_{a\in(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^\times}\chi_D(a)\cdot\varphi_f(\{0,\frac{a}{D}\})$ 的 $\mathfrak{P}$-进赋值与 $L(\tilde{J}_D^{(p)},1)\Omega_D$ 的 $p$-进赋值相同。这就证明了以下结果。

**命题 4.1.** 假设假设 $H$ 成立。那么有理数 $L(\tilde{J}_D^{(p)},1)\Omega_D$ 的 $p$-进赋值是满足下列条件的最大整数 $n\geq 0$

$$\Theta_D\in I^n\cdot H_1(X_0(N),\mathbf{Z}_p)^+\ .$$

命题 4.1 表明，推论 1.4 和 1.8 分别由定理 1.3 和 1.7 推出。

当 $D>0$ 时，根据 Mazur，我们有以下“平凡整除性”。

**命题 4.2.** 我们有 $\Theta_D\in I\cdot H_1(X_0(N),$整数环 $\mathbf{Z}_p)^+$。因此，在假设 $H$ 成立的前提下，$p$ 整除 $L(\tilde{J}_D^{(p)},1)\Omega_D$ 的分子。

证明. Mazur 在 [16, 命题 II.18.8]中证明，我们有一个同构

$$\alpha: H_1(X_0(N),\mathbf{Z}_p)^+/I\cdot H_1(X_0(N),\mathbf{Z}_p)^+\xrightarrow{\sim}\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}$$

将模符号 $\{0,\frac{b}{d}\}$（其中 $\gcd(b,d)=\gcd(d,N)=1$）映至 $\log(d)$（参见 第 2 节中 log 的定义）。我们有

$$\alpha(\Theta_D)=\sum_{a\in(\mathbf{Z}/m\,\mathbf{Z})^\times}\chi_D(a)\cdot\log(D)=0$$

由于 $\chi_D$ 是非平凡的。这证明了 $\Theta_D\in I\cdot H_1(X_0(N),\mathbf{Z}_p)^+$。关于 $L(\tilde{J}_D^{(p)},1)\Omega_D$ 的断言由命题 4.1 得出。□

至此，我们证明了定理 1.3 和推论 1.4 的第一个断言。为了进一步研究 $\Theta_D$ 被 $I^2$ 整除的情形，我们将使用关于 Sharifi 猜想的结果。

## 5. Sharifi 猜想中的层兼容性

让我们回顾一下模符号和 Sharifi 猜想的相关背景。对于 $M\in\mathbf{N}$，令 $\Gamma_1(M)=\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2($整数环 $\mathbf{Z})$，使得 $a-1\equiv c\equiv 0$（模 $M$）$\}$，并令 $X_1(M)$ 表示层为 $\Gamma_1(M)$ 的紧模曲线。

设 $C_M=\Gamma_1(M)\backslash\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ 为 $X_1(M)$ 的尖点集合，$C_M^0$ 为 $C_M$ 中形如 $\Gamma_1(M)\cdot\frac{a}{b}$ 的尖点，其中 $\gcd(a,b)=1$ 且 $a\not\equiv 0$（模 $M$）（在 $b=0$ 的情况下，我们有尖点 $\Gamma_1(M)\cdot\infty$）。

令 $H_1(X_1(M)\ C_M,$整数环 $\mathbf{Z})$ 表示 $X_1(M)$ 相对于$C_M$的奇异同调。若 $\alpha$和 $\beta$属于 $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$，令 $\{\alpha,\beta\}$表示 $H_1(X_1(M)\ C_M,$整数环 $\mathbf{Z})$ 中从 $\alpha$ 到 $\beta$、位于 $X_1(M)$ 内的双曲测地线的同调类。

Let

$$\xi_M:\mathbf{Z}[\Gamma_1(M)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})]\to H_1(X_1(M),C_M,\mathbf{Z})$$

表示（修正后的）Manin 映射：它将陪集 $\Gamma_1(M)\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 映到

$\{-\frac{d}{Mb}, -\frac{c}{Ma}\}$（它是通常的 Manin 映射与 Atkin–Lehner 对合 $W_M$ 的复合）。Manin 证明了 $\xi_M$ 是满射。

令 $S_M^0 \subset \Gamma_1(M)\backslash \mathrm{SL}_2(\text{整数环 } \mathbf{Z})$ 为由满足 $M \nmid c$ 和 $M \nmid d$ 的 $\Gamma_1(M)\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 组成的子集。注意，$S_M^0$ 可视为由数对 $[c,d]$ 构成的集合，其中 $c$、$d \in \mathbf{Z}/M\mathbf{Z} - \{0\}$，并按等同关系 $[c,d] = [-c,-d]$ 取商。限制映射

$$\xi_M^0 : \mathbf{Z}[S_M^0] \to H_1(X_1(M), C_M, \mathbf{Z})$$

是满射（参见 [8, §2.1.3]）。

若 $A$ 是交换环，令 $K_2(A)$ 表示由 Quillen 定义的 $A$ 的第二 K 群。令 $\zeta_M \in \mathbf{Q}$ 为一个本原 $M$ 次单位根。伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_M)/\mathbf{Q})$（尤其是复共轭）作用于 $K_2(\mathbf{Z}[\zeta_M, \frac{1}{M}])$。我们用 $\mathcal{K}_M$ 表示 $K_2(\mathbf{Z}[\zeta_M, \frac{1}{M}])\otimes\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ 的最大商，在该商上复共轭作用平凡。将 $\Gamma_1(M)\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 映至斯坦伯格符号 $\langle 1-\zeta_M^c, 1-\zeta_M^d\rangle$ 的映射 $\mathbf{Z}[S_M^0] \to \mathcal{K}_M$ 经由 $\xi_M^0$ 分解（参见 [8, §2.1.4]），因而诱导出一个映射

$$\varpi_M : H_1(X_1(M), C_M^0, \mathbf{Z}) \to \mathcal{K}_M\ .$$

Sharifi 猜想 $\varpi_M$ 被海克算子 $T_\ell - \ell\langle\ell\rangle - 1$ 消去，其中素数 $\ell$ 不整除 $M$（参见 [23] 中定理 4.3.6 后的注记）。这项猜想已有一些部分结果：[9], [15]，最近还有 [23] 和 [14]。特别是，已知 $\varpi_M$ 在 $H_1(X_1(M), \text{整数环 } \mathbf{Z})$ 上的限制会被 $T_\ell - \ell\langle\ell\rangle - 1$ 消去，其中素数 $\ell$ 不整除 $M$（参见 [23, 定理 4.3.7]，，此处提醒读者，他们使用的是通常的Manin 符号和对偶海克算子）。若 $M = N$ 是素数，则对 Sharifi 和 Venkatesh 所用技巧稍作改进即可证明，$\varpi_N$（未取限制）会被海克算子 $T_\ell - \ell\langle\ell\rangle - 1$ 消去，其中素数 $\ell \neq N$ [14, 见注 1.1(v)]。

我们将使用 [15] 的以下结果。

**定理 5.1**。 我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H_1(X_1(N), \mathbf{Z}_p)^+ & \xrightarrow{\qquad\varpi_N\qquad} & J\cdot(\mathcal{K}_N\otimes\mathbf{Z}_p) \\ \downarrow\pi & & \downarrow \\ I\cdot H_1(X_0(N), \mathbf{Z}_p)^+/I^2\cdot H_1(X_0(N), \mathbf{Z}_p) & \xrightarrow{\sim} & J\cdot(\mathcal{K}_N\otimes\mathbf{Z}_p)/J^2\cdot(\mathcal{K}_N\otimes\mathbf{Z}_p), \end{array}$$

其中 $\pi$ 是遗忘映射（由上半平面上的 $z \mapsto z$ 诱导），$J$ 是整数环 $\mathbf{Z}[\text{伽罗瓦群}(\mathbf{Q}(\zeta_N)/\mathbf{Q})]$ 的增广理想，垂直箭头均为满射，下方的水平映射是同构。（右侧的垂直箭头是显然的投影。）

证明。 我们来说明这个结果如何由 [15] 推出。根据 [15, 命题 2.3 (ii)], , 映射

$$\pi : H_1(X_1(N), \mathbf{Z}_p)^+ \to H_1(X_0(N), \mathbf{Z}_p)^+$$

其核为 $J \cdot H_1(X_1(N), \mathbf{Z}_p)^+$，其中我们将 $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_N)/\mathbf{Q})$ 与 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ 视为同一对象（后者通过 diamond 算子作用于 $H_1(X_1(N), \mathbf{Z}_p)^+$）。

根据 [15, 命题 2.12 (ii)] 和 [15, 引理 2.15], , 映射 $\varpi_N$: $H_1(X_1(N), \mathbf{Z}_p)^+ \to \mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p$ 的取值落在 $J \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p)$ 中。最后，根据 [16, 引理 II.18.7], , $\pi$ 的像为 $I \cdot H_1(X_0(N), \mathbf{Z}_p)^+$。

因此，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H_1(X_1(N), \mathbf{Z}_p)^+ & \xrightarrow{\varpi_N} & J \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ I \cdot H_1(X_0(N), \mathbf{Z}_p)^+ & \longrightarrow & J \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p)/J^2 \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p), \end{array}$$

其中垂直箭头均为满射。

根据 [15, 命题 2.14 (b)] 的证明，映射 $\varpi_N$: $H_1(X_1(N), \mathbf{Z}_p)^+ \to J \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p)$ 是满射。我们知道，映射 $\varpi_N$ 被素数 $\ell \neq N$ 对应的海克算子 $T_\ell - \ell\langle\ell\rangle - 1$ 消去，并且 $I$ 由 $\ell \neq N$ 对应的算子 $T_\ell - \ell - 1$ 生成。

因此，该映射

$$I \cdot H_1(X_0(N), \mathbf{Z}_p)^+ \to J \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p)/J^2 \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p)$$

可经由一个满射

$$I \cdot H_1(X_0(N), \mathbf{Z}_p)^+/I^2 \cdot H_1(X_0(N), \mathbf{Z}_p)^+ \to J \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p)/J^2 \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p) \ .$$

由 [15, 注 1.3], 可知，我们有一个（典范的）同构

$$J \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p)/J^2 \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p) \simeq ((\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times)^{\otimes 2} \otimes \mathbf{Z}_p \ .$$

另一方面， $I \cdot H_1(X_0(N), \text{整数环 } \mathbf{Z}_p)^+/I^2 \cdot H_1(X_0(N), \text{整数环 } \mathbf{Z}_p)^+$ 也（典范地）同构于

$$J \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p)/J^2 \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p) \simeq ((\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times)^{\otimes 2} \otimes \mathbf{Z}_p$$

（这归功于 Mazur，参见 [15, 第 2]页）。因此，这个满射

$$I \cdot H_1(X_0(N), \mathbf{Z}_p)^+/I^2 \cdot H_1(X_0(N), \mathbf{Z}_p)^+ \to J \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p)/J^2 \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \mathbf{Z}_p)$$

必为同构。至此，定理 5.1 的证明完成。 □

Sharifi 理论的另一个重要方面，是当改变 $M$ 时，映射$\varpi_M$ 之间如何相互关联。此前在一些假设下， [9] 和 [29]研究了这一问题。最近，作者 [14] 运用 Sharifi 和 Venkatesh 的新颖技巧扩展了这些结果。为方便读者，下面概述本文将用到的 [14] 的结果。

**定理 5.2.** [14, 定理 1.4] 设 $q \geq 2$ 是一个素数，且 $M \geq 4$。设 $\pi_1$, $\pi_2$: $X_1(Mq) \to X_1(M)$ 为两个通常的退化映射，分别由上半平面上的 $z \mapsto z$ 和 $z \mapsto qz$ 给出。设 $C \subset C^0_{Mq}$ 是一组尖点，它们在 $\mathrm{Ker}((\text{整数环 } \mathbf{Z}/Mq\mathbf{Z})^\times \to (\text{整数环 } \mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^\times)$ 的作用下属于同一轨道（该作用由菱形算子给出）。

*(i)* 假设 $q$ 整除 $M$。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H_1(X_1(Mq), C, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\varpi_{Mq}} & \mathcal{K}_{Mq} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Norm}} \\ H_1(X_1(M), \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\varpi_M} & \mathcal{K}_M. \end{array}$$

*(ii)* 假设 $q$ 不能整除 $M$。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H_1(X_1(Mq), C, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\varpi_{Mq}} & \mathcal{K}_{Mq} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1 - \langle p \rangle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Norm}} \\ H_1(X_1(M), \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\varpi_M} & \mathcal{K}_M. \end{array}$$

这里，$\langle q \rangle$ 是第 $q$ 个 *diamond* 算子，它由矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M)$ 的作用诱导，其中 $d \equiv q$ （模 $M$），作用在 $X_1(M)$ 上。

## 6. $L$ 值的同余公式

现在我们已经具备了研究 $\Theta_D$ 被 $I^2$整除性的所有工具，因此可以证明定理 1.7 中 (i) 与 (ii) 等价（推论 1.8 也可通过命题 4.1 类似地证明）。

回想一下，我们曾令

$$\Theta_D = \sum_{a \in (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^\times} \chi_D(a) \cdot \{0, \frac{a}{D}\} \in H_1(X_0(N), \mathbf{Z}_p)^+$$

并且 $\Theta_D \in I \cdot H_1(X_0(N), \text{整数环 } \mathbf{Z}_p)^+$。根据定理 5.1，我们有 $\Theta_D \in I^2 \cdot H_1(X_0(N), \text{整数环 } \mathbf{Z}_p)^+$ 当且仅当 $\varpi_N(\tilde{\Theta}_D) \in J^2 \cdot (\mathcal{K}_N \otimes \text{整数环 } \mathbf{Z}_p)$，其中

$$\tilde{\Theta}_D = \sum_{a \in (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^\times} \chi_D(a) \cdot \{0, \frac{a}{D}\} \in H_1(X_1(N), \mathbf{Z}_p)^+$$

（注意，由于尖点 $\frac{a}{D}$ 在 $X_1(N)$ 中都等价，因此 $\Theta_D$ 的边界确实为零。）

现在我们面临的问题是 $\tilde{\Theta}_D$ 以何种方式表示为 Manin 符号的线性组合。因此，我们无法得到关于 $\varpi_N(\Theta_D)$ 的直接显式公式。不过，若将层提升至 $\Gamma_1(ND)$，便可解决这一问题。令

$$\tilde{\Theta}'_D = \sum_{a \in (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^\times} \chi_D(a) \cdot \{0, \frac{a}{D}\} \in H_1(X_1(DN), C^0_{ND}, \mathbf{Z}_p)^+ .$$

由于 $\chi_D$ 是模 $D$ 的本原特征，因此容易看出，定理 5.2 给出

$$\mathrm{Norm}(\varpi_{DN}(\tilde{\Theta}'_D)) = \varpi_N(\tilde{\Theta}_D) \ ,$$

其中 范数: $\mathcal{K}_{ND} \otimes$ 整数环 $\mathsf{Z}_p \to \mathcal{K}_N \otimes$整数环 $\mathsf{Z}_p$ 是范数映射。

现在情况更好了，因为 $\tilde{\Theta}'_D = \sum_{a\in(\text{整数环 }\mathsf{Z}\ /D\,\text{整数环 }\mathsf{Z})^\times} \chi_D(a)\cdot\xi^0_{ND}([-Na,1])$。因此我们得到

$$(7)\quad \varpi_N(\tilde{\Theta}_D) = \mathrm{Norm}\left(\langle \prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^\times} (1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)}, 1-\zeta_{ND}\rangle\right) \in J\cdot\mathcal{K}_N \ .$$

**命题 6.1**。我们有

$$\mathrm{Norm}\left(\langle \prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^\times} (1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)}, 1-\zeta_{ND}\rangle\right) \in J^2\cdot(\mathcal{K}_N\otimes\mathbf{Z}_p)$$

当且仅当 $u(K)^{h(K)}$ 是模 $N$ 在 $K$ 中上方的一个素数的 $p$ 次幂。

证明。 令 $\iota$: $\mathcal{K}_N \otimes$ 整数环 $\mathsf{Z}_p \to \mathcal{K}_{ND} \otimes$整数环 $\mathsf{Z}_p$ 为由包含映射 $\mathsf{Q}(\zeta_N) \subset \mathsf{Q}(\zeta_{ND})$ 导出的函子映射。如果 $x \in \mathcal{K}_{ND}$, 则我们有

$$\iota\circ\mathrm{Norm}(x) = \sum_{g\in\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{ND})/\,\mathbf{Q}(\zeta_N))} g\cdot x \ .$$

将 $\zeta_{ND} = \zeta_N^u\cdot\zeta_D^v$ 写成某个 $u, v \in$ 整数环 $\mathsf{Z}$, 使得 $uD + vN = 1$。因此我们得到:

$$\begin{aligned}
&\iota\circ\mathrm{Norm}\left(\langle \prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^\times} (1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)}, 1-\zeta_{ND}\rangle\right)\\
&= \sum_{b\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^\times} \langle \prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^\times} (1-\zeta_D^{ab})^{\chi_D(a)}, 1-\zeta_N^u\zeta_D^{vb}\rangle\\
&= \langle \prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^\times} (1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)}, \prod_{b\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^\times} (1-\zeta_N^u\zeta_D^{vb})^{\chi_D(b)}\rangle\\
&= \chi_D(v)\cdot\langle \prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^\times} (1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)}, \prod_{b\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^\times} (1-\zeta_N^u\zeta_D^{b})^{\chi_D(b)}\rangle
\end{aligned}$$

我们计算范数$\mathbf{Q}(\zeta_{ND})/\,\mathbf{Q}(\zeta_D)(1-\zeta_N^u\zeta_D^b) = \frac{1-\zeta_D^{Nb}}{1-\zeta_D^b}$。由于根据假设有 $\chi_D(N) = 1$, 我们得到

$$\mathrm{Norm}_{\mathbf{Q}(\zeta_{ND})/\,\mathbf{Q}(\zeta_D)} \prod_{b\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^\times} (1-\zeta_N^u\zeta_D^b)^{\chi_D(b)} = 1 \ .$$

另请注意,

$$\prod_{b\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^\times} (1-\zeta_N^u\zeta_D^b)^{\chi_D(b)} \in K(\zeta_N)$$

and

$$\prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^\times}(1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)}\in K\ .$$

根据希尔伯特90，存在 $y\in K(\zeta_N)^\times$ 使得

$$\prod_{b\in(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^\times}(1-\zeta_N^u\zeta_D^b)^{\chi_D(b)}=\frac{\sigma(y)}{y}\ ,$$

其中 $\sigma\in$ 伽罗瓦群$(K(\zeta_N)/K)\simeq(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ 是一个固定生成元。因此我们得到

$$\iota\circ\mathrm{Norm}\left(\langle\prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^\times}(1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)},1-\zeta_{ND}\rangle\right)=(\sigma-1)\cdot\alpha\ , \tag{8}$$

其中 $\alpha\in K_2(K(\zeta_N^+))\otimes\mathbf{Z}_p$ 由下式给出

$$\alpha=\chi_D(v)\cdot\langle\prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^\times}(1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)},y\rangle\ .$$

这里，$K(\zeta_N^+)$ 是 $K(\zeta_N)$ 的全实子域；$\langle\prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^\times}(1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)}y\rangle$ 表示同一个斯坦伯格符号在复共轭固定部分上的投影。

这样的 $\alpha$ 在 $(K_2(K(\zeta_N^+))\otimes\mathbf{Z}_p)[J]$ 中唯一确定（这里我们将 $J$ 视为 $\mathbf{Z}[$伽罗瓦群$(K(\zeta_N)/K)]$的增广理想）。

**引理6.2.** 令 $\partial\colon K_2(K(\zeta_N^+))\otimes\mathbf{Z}_p\to\prod_{\mathfrak{q}}\mathbf{F}_{\mathfrak{q}}^\times\otimes\mathbf{Z}_p$ 为温和剩余符号映射，其中 $\mathfrak{q}$ 遍历 $N$ 在 $K(\zeta_N^+)$ 的整数环中的素因子。则 $\partial$ 在 $(K_2(K(\zeta_N^+))\otimes\mathbf{Z}_p)[J]$ 上的限制是零映射。

证明。我们断言，$(K_2(K(\zeta_N^+))\otimes\mathbf{Z}_p)[J]$ 是 $K_2(K)\otimes\mathbf{Z}_p$ 在 $K_2(K(\zeta_N^+))\otimes\mathbf{Z}_p$ 中的像（通过函子映射）。根据 [25, 定理 5，4], étale陈类映射诱导出一个单射

$$K_2(K(\zeta_N^+))\otimes\mathbf{Z}_p\hookrightarrow H^2(K(\zeta_N^+),\mathbf{Z}_p(2))$$

其像是 $H^2(K(\zeta_N^+),\mathbf{Z}_p(2))$ 的挠群。事实上，$H^2(K(\zeta_N^+),\mathbf{Z}_p(2))$ 是一个挠群，因为 $H^2(\mathcal{O}_S,\mathbf{Z}_p(2))$ 是有限群，并且我们有一个正合序列

$$0\to H^2(\mathcal{O}_S,\mathbf{Z}_p(2))\to H^2(\mathbf{Q}(\zeta_N^+),\mathbf{Z}_p(2))\to\oplus_{\mathfrak{p}\notin S}\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^\times\to 0\ ,$$

其中 $\mathcal{O}_S$ 是 $K(\zeta_N^+)$ 关于某个有限赋值集 $S$ 的 $S$-整数环。因此，陈类映射是一个同构。于是，为证明上述断言，只需证明限制映射

$$H^2(K,\mathbf{Z}_p(2))\to H^2(K(\zeta_N^+),\mathbf{Z}_p(2))[J]$$

是满射。根据 [10, 命题 2，9], 只需验证

$$H^1(K(\zeta_N^+),\mathbf{Z}_p(2))=0\ .$$

这由 [28, 注记 46]得出。

为完成引理的证明，只需注意到下图是交换图：

$$\begin{array}{ccc} K_2(K)\otimes \mathbf{Z}_p & \xrightarrow{\partial} & \prod_{\mathfrak{q}'|N} \mathbf{F}_{\mathfrak{q}'}^{\times}\otimes \mathbf{Z}_p \\ \downarrow & & \downarrow 0 \\ K_2(K(\zeta_N^+))\otimes \mathbf{Z}_p & \xrightarrow{\partial} & \prod_{\mathfrak{q}|N} \mathbf{F}_{\mathfrak{q}}^{\times}\otimes \mathbf{Z}_p\,. \end{array}$$

这由温和剩余符号的定义，以及素数 $\mathfrak{q}' \mid N$ 在 $K(\zeta_N^+)$ 中的分歧指数可被 $p$ 整除这一事实推出（注意，根据假设，我们有 $\mathbf{F}_{\mathfrak{q}} = \mathbf{F}_{\mathfrak{q}'} = \mathbf{F}_N$）。□

由引理6.2，所有满足条件 (8) 的 $\alpha \in K_2(K(\zeta_N^+)) \otimes \mathbf{Z}_p$ 在剩余映射下于 $\mathbf{F}_N^{\times}\otimes\mathbf{Z}_p$ 中的像相同。我们知道

$$\mathrm{Norm}\left(\langle \prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^{\times}} (1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)}, 1-\zeta_{ND}\rangle\right) = (\sigma-1)\cdot x$$

对某个 $x \in K_2(\mathbf{Z}[\zeta_N, \frac{1}{N}])$ 成立。我们有

$$\mathrm{Norm}\left(\langle \prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^{\times}} (1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)}, 1-\zeta_{ND}\rangle\right) \in J^2\cdot(\mathcal{K}_N\otimes\mathbf{Z}_p)$$

当且仅当 $x \in J\cdot K_2(\mathbf{Z}[\zeta_N, \frac{1}{N}])$，当且仅当 $x$ 在 $\mathbf{F}_N^{\times}\otimes\mathbf{Z}_p$ 中的剩余为零（参见 [15, 命题 2.12]）。由上可知，这当且仅当

$$\langle \prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^{\times}} (1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)}, y\rangle$$

在 $\mathbf{F}_N^{\times}\otimes\mathbf{Z}_p$ 中为零。

注意到，$K$ 的类数公式等价于

$$|u(K)|^{\pm h(K)} = \prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^{\times}} (1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)}$$

（对于某个符号 $\pm$，其取决于高斯和 $\mathcal{G}(\chi_D) = \pm\sqrt{D}$）。因此，

$$\langle \prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\,\mathbf{Z})^{\times}} (1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)}, y\rangle$$

在 $K$ 中 $N$ 上方的素数 $\mathfrak{N}$ 处，

$$(u(K)^{\pm h(K)})^{v_{\mathfrak{N}}(y)} \text{ modulo } \mathfrak{N}\,,$$

其中 $v_{\mathfrak{N}}(y)$ 是 $y$ 的 $\mathfrak{N}$-进赋值。

令 $K(\zeta_N)_{\mathfrak{N}}$ 为 $K(\zeta_N)$ 的 $\mathfrak{N}$-进完备化。元素 $1-\zeta_N$ 是 $\mathfrak{N}$ 处的一致化元，因此可以写作

$$y = u\cdot(1-\zeta_N)^{v_{\mathfrak{N}}(y)}$$

对于某个局部单位 $u$。

设我们的生成元 $\sigma$ 对应于 $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_N)/\mathbf{Q})$ 的生成元，并对应于 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ 的生成元 $g$。于是我们有

$$\frac{\sigma(y)}{y} \equiv \left(\frac{1-\zeta_N^g}{1-\zeta_N}\right)^{v_{\mathfrak{N}}(y)} \equiv g^{v_{\mathfrak{N}}(y)} \ (\mathrm{modulo}\ \mathfrak{N}).$$

另一方面，根据定义，我们有

$$\frac{\sigma(y)}{y} \equiv \prod_{a\in(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^\times} (1-\zeta_D^a)^{\chi_D(a)} \equiv u(K)^{\pm h(K)} \ (\mathrm{modulo}\ \mathfrak{N}).$$

因此，$p$ 整除 $v_{\mathfrak{N}}(y)$ 当且仅当 $u(K)^{\pm h(K)}$ 是模 $\mathfrak{N}$ 的 $p$ 次幂。至此，命题 6.1 得证。□

总之，我们已经证明了定理 1.7 中 (i) 与 (ii) 等价。

## 7. $J_0(N)$ 的 $N$-进一致化

本节旨在证明以下结果，这对于理解定义我们塞尔默群的局部 Kummer 映射的像至关重要。我们的证明依赖于 Ehud de Shalit 的结果 [6]，以及基于这些结果对 $\tilde{J}^{(p)}(\mathbf{Q}_N)$ 的显式描述。

**命题 7.1**。我们有一个群同构

$$\left(\tilde{J}^{(p)}(\mathbf{Q}_N)/I\cdot\tilde{J}^{(p)}(\mathbf{Q}_N)\right)\otimes\mathbf{Z}_p \simeq (\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})^2 \ .$$

证明。我们回顾一些关于 $J_0(N)$ 的 $N$-进一致化的基本结果。我们将使用 [13], 的结果，但要强调的是，我们所使用的结果很容易由 de Shalit 的工作 [6] 推出。注意，我们的 $N$ 和 $p$ 分别对应于 [13] 中的 $p$ 和 $\ell$。

设 $S$ 为 $X_0(N)$ 在特征 $N$ 下的超奇异点的（有限）集合，即 $\mathbf{F}_N$ 上模同构的超奇异椭圆曲线的集合。设 $N_0 = \mathbf{Z}[S]^0$ 为 $\mathbf{Z}[S]$ 中零次元的子群。$\mathbf{T}^0$ 在 $N_0$ 上有一个自然作用（回顾一下，$\mathbf{T}^0$ 是定义在 $\mathbf{Z}$ 上、层为 $\Gamma_0(N)$ 的权 2 的尖点海克代数）。

我们有一个 $\mathbf{T}^0$-等变同构

$$J_0(\mathbf{Q}_N) \simeq \mathrm{Hom}(N_0, \mathbf{Q}_N^\times)/q_0(N_0) \ ,$$

其中

$$q_0 : N_0 \to \mathrm{Hom}(N_0, \mathbf{Q}_N^\times)$$

是某个单同态（参见 [13, §1.3]）。

我们将需要以下结果

**事实**。

$$q_0(N_0) \subset I\cdot\mathrm{Hom}(N_0, \mathbf{Q}_{N^2}^\times) \ .$$

证明。（事实）在 [5]（另见 [13, §1.3]）中，de Shalit 证明存在一个同态 $q\colon \mathbf{Z}[S] \to \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}[S], \mathbf{Q}_{N^2}^{\times})$，它诱导出 $q_0$。根据 [13, 命题 1.3 (ii)]，$q$ 是 T-等变的（其中 T 是作用在 $\mathbf{Z}[S]$上且忠实作用的完整海克代数）。因此，该事实可由等式得出

$$N_0 = I \cdot \mathbf{Z}[S] \ . \tag{9}$$

显然我们有 $I\cdot\mathbf{Z}[S] \subset N_0$ (参见 [7, 定理 3.1 (i)])。由于 $\mathbf{Z}[S]/N_0 = \mathbf{Z}$（通过次数映射），若能证明 $\mathbf{Z}[S]/I\cdot\mathbf{Z}[S] \simeq \mathbf{Z}$（右侧具有 T 通过 $\mathbf{T}/I \simeq \mathbf{Z}$ 的作用），则 (9) 成立。只需在 T 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$ 处完备化后验证这一点。若 $\mathfrak{m}$ 不是艾森斯坦的，即若 $I$ 不包含于 $\mathfrak{m}$，这一点显然。若 $\mathfrak{m}$ 是艾森斯坦的，则由 $\mathbf{Z}[S]$ 在 $\mathfrak{m}$ [7, 处局部自由这一事实可得定理 4.2]。□

这证明了

$$\left(\tilde{J}^{(p)}(\mathbf{Q}_N)/I\cdot\tilde{J}^{(p)}(\mathbf{Q}_N)\right)\otimes\mathbf{Z}_p \simeq \left(\mathrm{Hom}(N_0,\mathbf{Q}_N^{\times})/I\cdot\mathrm{Hom}(N_0,\mathbf{Q}_N^{\times})\right)\otimes\mathbf{Z}_p \ . \tag{10}$$

根据 [16, 推论 II.16] 和 [7, 定理 0], , $\mathbf{T}_{\mathfrak{P}}^0$-模 $\mathrm{Hom}(N_0, \text{整数环 } \mathbf{Z}_p)\otimes_{\mathbb{T}}\mathbf{T}_{\mathfrak{P}}^0$ 是秩一自由模。由于

$$\left(\mathrm{Hom}(N_0, \mathbf{Q}_N^{\times})/I\cdot\mathrm{Hom}(N_0, \mathbf{Q}_N^{\times})\right)\otimes\text{整数环 } \mathbf{Z}_p \simeq \mathrm{Hom}(N_0, \mathbf{Q}_N^{\times})\otimes_{\mathbb{T}^0}\mathbf{T}_{\mathfrak{P}}^0/I \simeq \mathbf{Q}_N^{\times}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{T}_{\mathfrak{P}}^0/I$$

且 $\mathbf{Q}_N^{\times}\otimes_{\mathbf{Z}}$整数环 $\mathbf{Z}_p \simeq$(整数环 $\mathbf{Z}/p$整数环 $\mathbf{Z})^2$, 我们得到

$$\left(\mathrm{Hom}(N_0,\mathbf{Q}_N^{\times})/I\cdot\mathrm{Hom}(N_0,\mathbf{Q}_N^{\times})\right)\otimes\mathbf{Z}_p \simeq \mathbb{T}_{\mathfrak{P}}^0/I\otimes_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})^2 \simeq (\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})^2 \ .$$

由（10），我们得到

$$\left(\tilde{J}^{(p)}(\mathbf{Q}_N)/I\cdot\tilde{J}^{(p)}(\mathbf{Q}_N)\right)\otimes\mathbf{Z}_p \simeq (\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})^2$$

正如所需。 □

## 8. Selmer 群计算

本节的目标是证明定理 1.7 中 (ii) 与 (iii) 等价。

本节的记号：

令 $G_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}/\overline{\mathbf{Q}})$ 和 $G_K = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}/K)$。若 $v$ 是 Q 的一个处，我们固定 $G_{\mathbf{Q}_v}\subset G_{\mathbf{Q}}$ 在 $v$ 处的一个分解群。类似地，若 $w$ 是 $K$ 上方 Q 的一个处 $v$，我们固定 $G_{K_w}\subset G_K$ 在 $w$ 处的一个分解群。注意，我们不一定有 $G_{K_w}\subset G_{\mathbf{Q}_v}$，但存在 $g\in G_{\mathbf{Q}}$ 使得$G_{K_w}\subset gG_{\mathbf{Q}_v}g^{-1}$。实际上，可以选择 $g=1$ 或 $g=g_0$，其中$g_0\in G_{\mathbf{Q}}$ 固定为使 $g_0$ 到 $K$ 的限制生成 $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$。我们滥用记号，通过同构$gG_{\mathbf{Q}_v}g^{-1}\xrightarrow{\sim} G_{\mathbf{Q}_v}$将 $G_{K_w}$ 视为 $G_{\mathbf{Q}_v}$ 的一个子群。

我们用 $\chi_p: G_{\mathbf{Q}}\to\mathbf{Z}_p^{\times}$ 表示 $p$-进圆分特征，并令 $\overline{\chi}_p\colon G_{\mathbf{Q}}\to(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{\times}$ 表示 $\chi_p$ 模 $p$ 的约化。我们用 $(\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})(1)$ 表示 $G_{\mathbf{Q}}$-模，其底层为 $\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}$，作用由 $\overline{\chi}_p$ 给出。我们

记 $\mu_p$ 为由 Q 中的 $p$ 次单位根构成的 $G_{\mathbf{Q}}$-模。注意，我们有一个 $G_{\mathbf{Q}}$-模的非典范同构 (整数环 Z $/p$Z)(1) $\simeq \mu_p$】【。

我们用 $g_p \geq 1$ 表示 $\mathrm{T}_{\mathfrak{P}}^0$ 的 Z$_p$-秩（即尖点海克代数在 $p$-Eisenstein 素数 $\mathfrak{P}$ 处的完备化）。回顾一下，由于我们假设了 $p \mid\mid N-1$，$\mathrm{T}_{\mathfrak{P}}^0$ 是一个离散赋值环。我们固定 $I$ 的一个局部生成元 $\eta$，即 $\eta \in I$ 满足 $I \cdot \mathrm{T}_{\mathfrak{P}}^0 = \eta \cdot \mathrm{T}_{\mathfrak{P}}^0$。

和之前一样，我们假设 $N$ 在 $K$ 中分裂，并用 $N\mathcal{O}_K = \mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2$ 表示 $\mathcal{O}_K$ 的素理想 $\mathfrak{N}_1$、$\mathfrak{N}_2$。回顾一下，$u(K)$ 是 $\mathcal{O}_K$ 的基本单位，而 $h(K)$ 是其类数。

**8.1. 关于 $\tilde{J}^{(p)}[I^2]$ 的伽罗瓦结构背景。** 在本段中，我们陈述一些关于 $G_{\mathbf{Q}}$-模 $\tilde{J}^{(p)}[I^2]\otimes$Z$_p$ 的事实。这些事实对于研究 Mazur 的 Eisenstein 理想的专家而言广为人知（例如参见 [2], [27]）。Mazur 证明了 [16,推论 II.16.4], 即

$$\tilde{J}^{(p)}[I] \otimes \mathbf{Z}_p = \Sigma_p \oplus C_p \ , \tag{11}$$

其中 $C_p \simeq$ Z $/p$ Z 是尖点子群的 $p$-部分，而 $\Sigma_p$ is the $p$-部分是志村子群的。

回顾一下，$\Sigma_p$ 对应于 $\tilde{J}^{(p)}$ 中核在自然映射 $J_0(N) \to J_1(N)$ 下的像的 $p$-部分。根据 [16, Proposition II.11.6], ，我们有一个 $G_{\mathbf{Q}}$-模的典范同构

$$\Sigma_p \simeq \mathrm{Hom}((\mathbf{Z}/N\,\mathbf{Z})^\times, \mu_p) \ . \tag{12}$$

选取 $\tilde{J}^{(p)}[I^2] \otimes$ Z$_p$ 的一个 $\mathrm{T}_{\mathfrak{P}}^0/I^2$-基 $(e_1, e_2)$，使得 $I \cdot e_1 = \Sigma_p$ and $I \cdot e_2 = C_p$。我们选取 $e_2$，使得 $\eta \cdot e_2$ 是 $C_p$ 的典范生成元（对应于 $1 \in$ Z $/p$Z）。这一基的选取给出一个伽罗瓦表示

$$\rho : G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{T}_{\mathfrak{P}}^0/I^2)$$

由 $\rho = \begin{pmatrix} a & \eta b \\ \eta c & d \end{pmatrix}$ 给出。注意，$\det(\rho) = \chi_p$，且 $\rho$ 在 $N$ and $p$ 之外非分歧。

我们看到 $a$ 和 $d$ 是 $G_{\mathbf{Q}} \to (\mathrm{T}_{\mathfrak{P}}^0/I^2)^\times$ 和 $a \cdot d = \det(\rho) = \chi_p$ 的特征。记 $a = \chi_p \cdot (1+\eta\cdot\varphi)$ 和 $d = 1-\eta\cdot\varphi$，其中 $\varphi$: $G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{T}_{\mathfrak{P}}^0/I =$整数环 Z $/p$整数环 Z 是一个群同态。

Mazur 证明了 [16, 命题 II.18.9]存在一个典范群同构。

$$I/I^2 \otimes \mathbf{Z}_p \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Z}/N\,\mathbf{Z})^\times \otimes \mathbf{Z}_p$$

给出的

$$T_\ell - \ell - 1 \mapsto \ell^{\ell-1} \otimes 1$$

对于所有素数 $\ell \neq N$（我们正在使用 $p > 2$ 这一事实；否则，如果 $\ell \neq 2$, 则需要使用 $\ell^{\frac{\ell-1}{2}}$）。

我们对局部生成元 $\eta \in I$ 的选取决定了 (Z $/N$ Z)$^\times \otimes$Z$_p$ 的一个生成元，即 一个满群同态 log : (Z $/N$Z)$^\times \to$ Z $/p$ Z。根据

(12)， $\eta$ 的选取诱导出一个典范 同构

$$\Sigma_p \xrightarrow{\sim} \mu_p \ . \tag{13}$$

注意， $e_1$ 的选取通过 (13) 确定了 $\mu_p$的一个生成元，即 $\eta \cdot e_1$。我们将 $\mu_p$ 的这个生成元记为

$$\zeta_p \in \overline{\mathbf{Q}} \ . \tag{14}$$

Mazur 同构可改写为

$$I/I^2 \otimes \mathbf{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}$$

$$T_\ell - \ell - 1 \mapsto (\ell - 1)\log(\ell)$$

$$\eta \mapsto 1 \ .$$

可以通过同一化 Gal(Q($\zeta_N$)/ Q) $\simeq$(Z /$N$Z)$^\times$，将 log 看作群同态 $G_{\mathbf{Q}} \to$Z /$p$ Z。若 $\ell \neq N$是一个素数，且 Frob$_\ell \in G_{\mathbf{Q}}$是 $\ell$处的弗罗贝尼乌斯，则（根据 Eichler–Shimura 关系）

$$T_\ell = \mathrm{Tr}(\rho(\mathrm{Frob}_\ell)) = \ell + 1 + \eta(\ell - 1)\varphi(\mathrm{Frob}_\ell) \ .$$

因此，我们有

$$\varphi(\mathrm{Frob}_\ell) = \log(\ell) \ .$$

我们将需要以下由上文给出的 $\rho$的描述所导出的推论。

**命题 8.1**。 设 $F$ 是一个数域，使得 $F \cap \mathbf{Q}(\zeta_{Np}) = \mathbf{Q}$。那么$\tilde{J}^{(p)}(F)$ $[I^2] = C_p$。

证明。 令 $Q \in \tilde{J}^{(p)}(F)[I^2]$。于是 $\eta \cdot Q \in \tilde{J}^{(p)}(F)[I]$，因此 $\eta \cdot Q$属于$\tilde{J}^{(p)}(F)$ $\cap (C_p \oplus \Sigma_p)$。由于 $\Sigma_p \simeq \mu_p$ 和 $F \cap$Q($\zeta_p$) $=$Q，我们得出$\eta \cdot Q \in C_p$。不妨设 $Q = e_2$ （ $\tilde{J}^{(p)}[I^2]$的一个基元素）。但对于 $g \in G_{\mathbf{Q}}$，我们有 $g(e_2)$ $- e_2 = \eta \cdot b(g) \cdot e_1 - \eta \cdot \log(g) \cdot e_2$。由于$F \cap$ Q($\zeta_N$) $=$ Q，存在 $g \in G_F$ 使得 log($g$) $\neq 0$。因此，$g(e_2) \neq e_2$ 和 $e_2$ 不能在 $F$上定义。□

8.2. **化归到** 塞尔默群$_I$( $\tilde{J}^{(p)}/K$)。 在本段中，我们进行一些化归，以便将塞尔默群$_p$( $\tilde{J}_D^{(p)}$/ Q)$\mathfrak{P}$替换为“更简单的”塞尔默群 Sel$_I$( $\tilde{J}_{(p)}/K$)（定义见下文）。我们首先建立塞尔默群$_p$( $\tilde{J}_D^{(p)}$/ Q)与 $_p$( $\tilde{J}^{(p)}/K$)之间的关系。

**引理 8.2.** 我们有一个自然的群同构

$$\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}^{(p)}/K) \simeq \mathrm{Sel}_p(\tilde{J}^{(p)}/\,\mathbf{Q}) \oplus \mathrm{Sel}_p(\tilde{J}_D^{(p)}/\,\mathbf{Q}) \ .$$

证明。 我们将使用以下一般事实。设 $A$ 是一个交换环，且 2 在其中可逆；设 $G$ 是一个群， $H$ 是 $G$ 的正规子群，并且 $G/H \simeq$Z /2Z。若 $M$ 是一个 $A$-模，且带有 $G$ 的作用，则存在一个自然的 $G$-等变的 $A$-模同构

$$\mathrm{Ind}_H^G M \simeq M \oplus (M \otimes \chi) \ ,$$

其中 $\chi:\ G/H \to \{1,-1\}$ 是与 $H$ 相联系的特征。这可由诱导模的定义直接得出。

由于 $p$ 是奇数，我们得到一个 $G_{\mathbf{Q}}$-模的同构

$$\mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{\mathbf{Q}}}\, \tilde{J}^{(p)}[p] \simeq \tilde{J}^{(p)}[p] \oplus \tilde{J}_D^{(p)}[p]\ . \tag{15}$$

类似地，对于 $\mathsf{Q}$ 的任意处 $v$，我们都有一个 $G_{\mathbf{Q}_v}$-模的同构

$$\bigoplus_{\substack{w|v\\ w \text{ place of } K}} \mathrm{Ind}_{G_{K_w}}^{G_{\mathbf{Q}_v}}\, \tilde{J}^{(p)}(\overline{\mathbf{Q}}_w)\otimes \mathbf{Z}_p \simeq \tilde{J}^{(p)}(\overline{\mathbf{Q}}_v)\otimes \mathbf{Z}_p \bigoplus \tilde{J}_D^{(p)}(\overline{\mathbf{Q}}_v)\otimes \mathbf{Z}_p \tag{16}$$

（当 $v$ 是惰性处或分歧处时，我们使用上文陈述的一般事实。）结合 (15) 和 (16)，我们得到一个 $G_{\mathbf{Q}_v}$-模的同构

$$\left(\mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{\mathbf{Q}}}\, \tilde{J}^{(p)}[p]\right)|_{G_{\mathbf{Q}_v}} \simeq \bigoplus_{\substack{w|v\\ w \text{ place of } K}} \mathrm{Ind}_{G_{K_w}}^{G_{\mathbf{Q}_v}}\, \tilde{J}^{(p)}[p]\ . \tag{17}$$

这是关于诱导表示的限制的麦基公式的一个特例。下面的图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc}
H^1(G_K, \tilde{J}^{(p)}[p]) & \xrightarrow{\oplus_{w|v}\mathrm{Res}_w} & \oplus_{w|v} H^1(G_{K_w}, \tilde{J}^{(p)}(\overline{\mathbf{Q}}_w)\otimes \mathbf{Z}_p) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \text{Shapiro}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \text{Shapiro}} \\
H^1(G_{\mathbf{Q}}, \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{\mathbf{Q}}}\, \tilde{J}^{(p)}[p]) & \xrightarrow{(17)} & \oplus_{w|v} H^1(G_{\mathbf{Q}_v}, \mathrm{Ind}_{G_{K_w}}^{G_{\mathbf{Q}_v}}\, \tilde{J}^{(p)}(\overline{K}_w)\otimes \mathbf{Z}_p) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (15)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (16)} \\
H^1(G_{\mathbf{Q}}, \tilde{J}^{(p)}[p]) \bigoplus H^1(G_{\mathbf{Q}}, \tilde{J}_D^{(p)}[p]) & \xrightarrow{\mathrm{Res}_v} & H^1(G_{\mathbf{Q}_v}, \tilde{J}^{(p)}(\overline{\mathbf{Q}}_v)\otimes \mathbf{Z}_p) \bigoplus H^1(G_{\mathbf{Q}_v}, \tilde{J}_D^{(p)}(\overline{\mathbf{Q}}_v)\otimes \mathbf{Z}_p).
\end{array}$$

这证明了

$$\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}^{(p)}/K) \simeq \mathrm{Sel}_p(\tilde{J}^{(p)}/\mathbf{Q}) \oplus \mathrm{Sel}_p(\tilde{J}_D^{(p)}/\mathbf{Q})\ .$$

□

现在，对每个整数 $n \geq 1$，我们再定义一个塞尔默群，记作 $\mathsf{Sel}_{I^n}(\tilde{J}^{(p)}/K)$，它将更容易理解（我们主要关注 $n=1$ 的情形，但该定义将有助于引理 8.3 的证明）。回顾一下，我们已固定 $\eta \in I$，使得 $\eta$ 生成 $I\cdot \mathrm{T}^0_{\mathfrak{P}}$。我们定义

$$\mathrm{Sel}_{I^n}(\tilde{J}^{(p)}/K) \subset H^1(G_K, \tilde{J}^{(p)}[I^n]\otimes \mathbf{Z}_p)$$

通过要求在 $K$ 的每个处 $w$ 处，$\mathsf{Sel}_{I^n}(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 在 $w$ 处的限制都属于库默尔映射的像

$$\kappa_w : \left(\tilde{J}^{(p)}(K_w)/I^n\tilde{J}^{(p)}(K_w)\right)\otimes \mathbf{Z}_p \to H^1(G_{K_w}, \tilde{J}^{(p)}[I^n]\otimes \mathbf{Z}_p)$$

来自短正合列

$$0 \to \tilde{J}^{(p)}[\eta^n] \to \tilde{J}^{(p)} \xrightarrow{\eta^n} \tilde{J}^{(p)} \to 0\ .$$

这里，我们利用了以下事实： $\tilde{J}^{(p)}[I^n] \otimes$整数环 $\mathbf{Z}_p = (\tilde{J}_{(p)}[\eta^n])_{\mathfrak{P}}$和

$$\left(\tilde{J}^{(p)}(K_w)/I^n\tilde{J}^{(p)}(K_w)\right) \otimes \mathbf{Z}_p = \left(\tilde{J}^{(p)}(K_w)/\eta^n\tilde{J}^{(p)}(K_w)\right)_{\mathfrak{P}} .$$

类似地，我们有一个嵌入

(18)

$$\left(\tilde{J}^{(p)}(K)/I^n\tilde{J}^{(p)}(K)\right) \otimes \mathbf{Z}_p = \left(\tilde{J}^{(p)}(K)/\eta^n\tilde{J}^{(p)}(K)\right)_{\mathfrak{P}} \hookrightarrow \mathrm{Sel}_{I^n}(\tilde{J}^{(p)}/K) .$$

$\mathrm{Sel}_{I^n}(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 的定义不依赖于 $\eta$ 的选择。注意，如果 $\mathbf{T}^0_{\mathfrak{P}} =$整数环 $\mathbf{Z}_p$ (即 $g_p = \mathrm{rk}_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{T}^0_{\mathfrak{P}} = 1$)，则可以选取 $\eta = p$，从而得到 $\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) = \mathrm{Sel}_p(\tilde{J}^{(p)}/K)_{\mathfrak{P}}$。更一般地，我们有 $\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}^{(p)}/K)_{\mathfrak{P}} = \mathrm{Sel}_{I^{g_p}}(\tilde{J}^{(p)}/K)$。

**引理 8.3.** 尖点子群 $C_p \subset \tilde{J}^{(p)}(\mathbf{Q})[I] \subset \tilde{J}^{(p)}(K)[I]$ 给出 $\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 的一个非零子群。此外，$\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}_{(p)_D}/\mathbf{Q})_{\mathfrak{P}} \neq 0$ 当且仅当 $\mathrm{rk}_{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) > 1$。

证明。 对于所有 $n \geq 1$，尖点子群 $C_p$ 给出 $\left(\tilde{J}^{(p)}(K)/I^n\tilde{J}^{(p)}(K)\right)$⊗整数环 $\mathbf{Z}_p$ 的一个子群，我们将其记为 $\overline{C}_p^{(n)}$。我们断言 $\overline{C}_p^{(n)}$ 非零，因此根据 (18) 可得到 $\mathrm{Sel}_{I^n}(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 中的一个非零元素。事实上，若 $\overline{C}_p^{(n)} = 0$，则$C_p \subset I^n \cdot \tilde{J}^{(p)}(K)$。这意味着 $\tilde{J}^{(p)}(K)[I^2]$ 严格包含 $C_p$，这与应用于 $F = K$ 的命题 8.1 矛盾（我们利用了 $p$ 和 $N$ 在 $K$ 中非分歧这一事实）。由此我们证明了 $\overline{C}_p^{(n)}$ 是 $\mathrm{Sel}_{I^n}(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 的一个非零子群。

让我们证明引理的第二部分。根据 Mazur [17, 16],的工作，我们知道,

- $\tilde{J}_{(p)}(\mathbf{Q})$ 的 Mordell–Weil 秩为零。
- $\mathfrak{P}$ 处 Tate–Shafarevich 群 $\tilde{J}_{(p)}$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的完备化是平凡的。
- $p$-部分的挠元在 $\tilde{J}_{(p)}(\mathbf{Q})$ 中等于尖点子群$C_p$（在假设 $p \,||\, N-1$ 的情况下，它是一个阶为 $p$ 的循环群）。

因此，我们得出 $\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}^{(p)}/\mathbf{Q})_{\mathfrak{P}} \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$。根据引理 8.2，我们得到 $\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}^{(p)}_D/\mathbf{Q})_{\mathfrak{P}} \neq 0$ 当且仅当 $\mathrm{rk}_{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}^{(p)}/K)_{\mathfrak{P}} > 1$。若 $g_p = 1$，则有 $\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}^{(p)}/K)_{\mathfrak{P}} = \mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$，因此结论成立。接下来，我们假设 $g_p > 1$。

考虑短正合列

$$0 \to \tilde{J}^{(p)}[\eta] \to \tilde{J}^{(p)}[\eta^{n+1}] \xrightarrow{\eta} \tilde{J}^{(p)}[\eta^n] \to 0 .$$

容易验证，在 $\mathfrak{P}$ 处完备化并取伽罗瓦上同调后，我们得到一个正合序列

$$\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) \to \mathrm{Sel}_{I^{n+1}}(\tilde{J}^{(p)}/K) \to \mathrm{Sel}_{I^n}(\tilde{J}^{(p)}/K) .$$

我们断言，$\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}_{(p)}/K) \to \mathrm{Sel}_{I^{n+1}}(\tilde{J}_{(p)}/K)$ 的核由 $\overline{C}_p^{(1)}$ 生成。事实上，设 $\alpha\colon G_K \to \tilde{J}^{(p)}[I] \otimes$ 整数环 $\mathbf{Z}_p$ 是一个上循环，其上同调类属于该核。这意味着，经过对 $\alpha$ 进行缩放后，存在 $P \in \tilde{J}^{(p)}[I^{n+1}]$，使得对所有 $g \in G_K$，都有 $\alpha(g) = gP - P$。由于 $\eta \cdot \alpha(g) = 0$，我们得到 $Q := \eta \cdot P \in \tilde{J}^{(p)}(K)$，因此 $Q \in \tilde{J}_{(p)}(K)[I^{n+1}]$。根据命题 8.1，我们有 $\tilde{J}^{(p)}(K)[I^{n+1}] = C_p$。因此 $\alpha$ 属于 $\overline{C}_p^{(1)}$。

因此，对所有 $n \geq 1$，我们都有一个正合序列

$$0 \to \overline{C}_p^{(1)} \to \mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) \to \mathrm{Sel}_{I^{n+1}}(\tilde{J}^{(p)}/K) \to \mathrm{Sel}_{I^n}(\tilde{J}^{(p)}/K)\ .$$

回顾一下，我们的目标是证明 $\mathrm{rk}^{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) > 1$ 当且仅当 $\mathrm{rk}^{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_p(\tilde{J}^{(p)}/K)_{\mathfrak{P}} > 1$。更一般地，我们来证明，对所有 $n \geq 1$，$\mathrm{rk}^{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) > 1$ 当且仅当 $\mathrm{rk}^{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_{I^n}(\tilde{J}^{(p)}/K) > 1$。我们对 $n$ 作归纳证明。根据上面的正合序列，要证明归纳步骤，只需证明：$\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 中不属于 $\overline{C}_p^{(1)}$ 的元素，会映射到 $\mathrm{Sel}_{I^{n+1}}(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 中不属于 $\overline{C}_p^{(n+1)}$ 的元素。

令 $P \in \tilde{J}^{(p)}(\overline{K})[I^{n+1}]$，使得 $\eta^{n+1} \cdot P$ 是 $C_p$ 的一个生成元。$\overline{C}_p^{(n+1)}$ 的一个生成元由上循环 $\beta\colon G_K \to \tilde{J}^{(p)}[I^{n+1}] \otimes \mathbf{Z}_p$ 给出，其定义为 $g \mapsto g(P) - P$。设 $\alpha\colon G_K \to \tilde{J}^{(p)}[I] \otimes \mathbf{Z}_p$ 是一个上循环，其在 $\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}_{(p)}/K)$ 中的类映射到 $\beta$ 在 $\mathrm{Sel}_{I^{n+1}}(\tilde{J}_{(p)}/K)$ 中的类。这意味着存在 $Q \in \tilde{J}_{(p)}[I^{n+1}] \otimes \mathbf{Z}_p$，使得对所有 $g \in G_K$，我们有

$$\alpha(g) = g(P) - P - (g(Q) - Q) \in \tilde{J}^{(p)}[I] \otimes \mathbf{Z}_p\ .$$

对 $Q$ 乘以一个与 $p$ 互素的整数进行缩放后，可以假设 $Q \in \tilde{J}^{(p)}[I^{n+1}]$。此外，我们可以假设（将 $P$ 替换为 $P - Q$ 后）对所有 $g \in G_K$，都有 $g(\eta \cdot P) = \eta \cdot P$。这意味着 $\eta \cdot P \in \tilde{J}^{(p)}(K)$。由于 $\eta^{n+1} \cdot P$ 是 $C_p$ 的生成元，我们得到 $C_p \subset \eta^n \cdot \tilde{J}^{(p)}(K)$，进而得到 $C_p \subset I \cdot \tilde{J}^{(p)}(K)$。因此，我们有 $\tilde{J}^{(p)}(K)[I^2] \neq C_p$。这与命题 8.1 矛盾。

□

8.3. **计算** $\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}_{(p)}/K)$。本节的目标是证明以下结论：

(19)
$\mathrm{rk}^{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) > 1 \Longleftrightarrow u(K)^{h(K)}$ 是模 $\mathfrak{N}_i$ 的 $p$次幂（对任意一个 $i \in \{1,2\}$成立，等价地，对所有 $i \in \{1,2\}$均成立）。

根据引理 8.3，这将证明定理 1.7 中 (ii) 与 (iii) 等价。

回顾一下，$\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$是 $H^1(G_{K,\ Np}, \tilde{J}^{(p)}[I] \otimes \mathbf{Z}_p)$的一个子群，它由 $\mathfrak{N}_1$、$\mathfrak{N}_2$ 处以及 $\mathcal{O}_K$ 中 $p$上方素数处的某些局部条件定义（在其他处，条件是非分歧的，因此使用伽罗瓦群$G_{K,\ Np}$

的 $K$的在 $Np$ 之外非分歧的最大扩张）。根据我们对$\eta \in I$的选择，由(11)和(13)可得

$$\tilde{J}^{(p)}[I] \otimes \mathbf{Z}_p = \Sigma_p \oplus C_p \simeq \mu_p \oplus \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \ .$$

因此得到一个自然包含

$$\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) \subset H^1(G_{K,Np}, \mu_p) \bigoplus H^1(G_{K,Np}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \ .$$

Česnavičius 已在 [4] 中确定了 $p$ 处的局部条件。

**引理 8.4**。 $_I$塞尔默群$_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$在 $K$ 中整除 $p$ 的处 $w$ 上的塞尔默条件是 ***fppf*** 条件，即子群

$$H^1_{\mathrm{fppf}}(\mathcal{O}_w, \mu_p) \bigoplus H^1_{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_w, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \subset H^1(G_{K_w}, \mu_p) \bigoplus H^1(G_{K_w}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \ .$$

证明。 我们对 $A = B = \tilde{J}^{(p)}$ 在 $k = K_w$ 上应用 [4, 命题 2.5 (d)]，所用同源为 $\phi = \eta$（如前所述，它是 Eisenstein 理想 $I$ 的一个局部生成元）。由于 $\tilde{J}^{(p)}$ 在 $w$ 处有良好约化，其 Néron模型 $\mathcal{J}$ 在 $\mathcal{O}_w$ 上（即 $K_w$ 的赋值环）是 $\mathcal{O}_w$ 上的连通适当阿贝尔概形。因此，Tamagawa数 $c_A$ 和 $c_B$ 均为一。阿贝尔概形 $\mathcal{J}[\eta]$ 是其素于 $p$ 的部分与其 $p$ 部分的直和。 $\mathcal{J}[\eta]$ 的 $p$ 部分按 $\mathrm{T}^0$ 的剩余特征为 $p$ 的极大理想分解（事实上，每个这样的极大理想都对应于 $\mathrm{T}^0 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$ 中的一个幂等元）。该幂等元分解中对应的 $\mathfrak{P}$ 部分为 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \oplus \mu_p$。于是，直接由 [4, 命题 2.5 (d)] 得到此引理（先取 $p$ 部分，再按上述幂等元分解即可）。□

因此，$\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 是一个子群

$$H^1(\mathcal{O}_K[1/N], \mu_p) \bigoplus H^1(G_{K,N}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \ ,$$

其中 $H^1(\mathcal{O}_K[1/N], \mu_p)$ 是 $H^1(G_{K,Np}, \mu_p)$ 的子群，它在局部的 $w \mid p$ 处属于

$$H^1_{\mathrm{fppf}}(\mathcal{O}_w, \mu_p) \simeq \mathcal{O}_w^\times / (\mathcal{O}_w^\times)^p$$

（通过 Kummer 理论）。

通过切除和 Kummer 理论，可以看出

$$H^1(\mathcal{O}_K[1/N], \mu_p) \cong H^1_{\mathrm{fppf}}(\mathcal{O}_K[1/N], \mu_p) \ ,$$

其中 $H^1_{\mathrm{fppf}}$ 表示平坦上同调（参见 [24, Tag03PK]，了解平坦上同调的基本定义和事实；另参见 [21, 定理 3.6]，了解上述同一性）。平坦上同调的 Kummer 理论给出一个正合序列

(20)
$$0 \to \mathcal{O}_K[1/N]^\times / (\mathcal{O}_K[1/N]^\times)^p \to H^1(\mathcal{O}_K[1/N], \mu_p) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K[1/N])[p] \to 0 \ .$$

现在我们精确确定在 $\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$ 处截取 $\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 的局部条件

$$H^1(\mathcal{O}_K[1/N],\mu_p)\bigoplus H^1(G_{K,N},\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})\ .$$

也就是说，对于 $i\in\{1,2\}$，我们通过库默尔映射 $\kappa_{\mathfrak{N}_i}$ 描述 $(\tilde{J}^{(p)}(K_{\mathfrak{N}_i})/I\tilde{J}^{(p)}(K_{\mathfrak{N}_i}))\otimes\mathbf{Z}_p$ 的像

$$H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}},\tilde{J}^{(p)}[I]\otimes\mathbf{Z}_p)=H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}},\mu_p)\bigoplus H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}},\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})\ .$$

回顾 §8.1，我们选取了 $\tilde{J}^{(p)}[I^2]\otimes\mathbf{Z}_p$ 的一个基 $(e_1,e_2)$，使得相应的伽罗瓦表示 $\rho:\ G_{\mathbf{Q}}\to\mathrm{GL}_2(\mathbf{T}^0_{\mathfrak{P}}/I^2)$ 具有如下形式

$$\rho=\begin{pmatrix}\chi_p(1+\eta\log) & \eta b\\ \eta c & 1-\eta\log\end{pmatrix}\ . \tag{21}$$

这里，$b$、$c$ 和 log 是 $G_{\mathbf{Q}}\to\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 上的映射。更确切地说，$b$ 是 $Z^1(G_{\mathbf{Q}},(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})(1))$ 中的一个上循环，$c$ 是 $Z^1(G_{\mathbf{Q}},(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})(-1))$ 中的一个上循环，而 log 是 $Z^1(G_{\mathbf{Q}},\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ 中的一个上循环。

对于 $i\in\{1,2\}$，我们固定了一个分解群 $G_{K_{\mathfrak{N}_i}}$，即一个嵌入 $\overline{K}\hookrightarrow\overline{K}_{\mathfrak{N}_i}$。因此，可以将 $\mu_p\subset\mathbf{Q}^\times$ 视为 $\overline{K}^\times_{\mathfrak{N}_i}$ 的子群。由于我们选择了 $\log:(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times\to\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$（该选择由 $\eta\in I$ 的选取诱导），我们得到了 $\mu_p((\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times)$ 的一个典范生成元，其 log 等于 $\frac{N-1}{p}$。其 Teichmüller提升给出了 $\mu_p(\overline{K}_{\mathfrak{N}_i})$ 的一个典范生成元。因此，对于 $i\in\{1,2\}$，我们有一个自然的 $G_{K_{\mathfrak{N}_i}}$-模同构（取决于 $\eta$ 的选择）

$$\mu_p\xrightarrow{\sim}\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\ . \tag{22}$$

我们的计算需要以下结果。

**引理 8.5.** 在库默尔同构 $H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}},\mu_p)\ \simeq\ K^\times_{\mathfrak{N}_i}\otimes$整数环 $\mathbf{Z}/p$整数环 $\mathbf{Z}$ 以及恒等式（*22*）下，$N\otimes 1$ 的类对应于上循环 $-\log$ 在 $H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}},$整数环 $\mathbf{Z}/p$整数环 $\mathbf{Z})$中的类。

证明。令 $F=K_{\mathfrak{N}_i}=\mathbf{Q}_N$，$\mathrm{Art}:\ F^\times\to\mathrm{Gal}(F_{\mathrm{ab}}/F)$ 为阿廷映射（将一致化元映到算术 Frobenius 元）。与 $N$ 相关联的上循环（在此情形下是群同态）对应于由 $a\mapsto\mathrm{Art}(a)(N^{1/p})/N^{1/p}$ 给出的映射$F^\times\to\mu_p(F)$。局部类域论的显式互反律告诉我们，$\overline{\mathrm{Art}(a)(N^{1/p})/N^{1/p}}\equiv u^{-\frac{N-1}{p}}()$（模 $N$），其中 $a=u\cdot N^v$对某个 $u\in$整数环 $\mathbf{Z}_N^\times$ 和 $\overline{v\in\text{整数环}\ \mathbf{Z}}_{\geq 0}$ 成立。因此，在由 log 给出的识别 (22) 下，$N$ 的 Kummer 类对应于群同态$G_F\to$整数环 $\mathbf{Z}/p$整数环 $\mathbf{Z}$，定义为 $\mathrm{Art}(a)\mapsto-\log(u)$，这就完成了引理的证明。□

回顾一下，根据我们对 $(e_1, e_2)$ 和 $\eta \in I$ 的选择，在 (14) 中有一个自然生成元 $\zeta_p \in \mu_p$。对于 $i \in \{1,2\}$，我们记

$$a_i \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times \tag{23}$$

$\zeta_p$ 经由 (22) 得到的像。

利用 (22)，可以将 $H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \tilde{J}^{(p)}[I] \otimes \mathbf{Z}_p)$ 视为以下对象的子群

$$H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \bigoplus H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) ,$$

其中，$\Sigma_p$ 对应于 $H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ 的第一个副本，而 $C_p$ 对应于第二个副本。

根据命题 7.1，群 $(\tilde{J}^{(p)}(K_{\mathfrak{N}_i})/I\tilde{J}^{(p)}(K_{\mathfrak{N}_i})) \otimes \mathbf{Z}_p$ 同构于由 $\Sigma_p$ 和 $C_p$ 生成的 $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$，，即由 $\eta \cdot e_1$ 和 $\eta \cdot e_2$ 生成。令 $\kappa_\Sigma$ 和 $\kappa_C$ 分别为 $H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \tilde{J}^{(p)}[I] \otimes \mathbf{Z}_p)$ 中对应于 $\eta \cdot e_1$ 和 $\eta \cdot e_2$ 的上循环类（它们隐含地依赖于 $i \in \{1,2\}$）。

根据库默尔映射的定义，对所有 $g \in G_{K_{\mathfrak{N}_i}}$，我们有

$$\kappa_\Sigma(g) = g(e_1) - e_1$$

and

$$\kappa_C(g) = g(e_2) - e_2 \tag{24}$$

（作为上循环）。库默尔映射 $\kappa_{\mathfrak{N}_i}$ in 的像

$$H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \bigoplus H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$$

是形如以下形式的上循环类集合

$$\lambda_i \cdot \kappa_C + \mu_i \cdot \kappa_\Sigma$$

对于 $\lambda_i, \mu_i \in$ 整数环 $\mathbf{Z}/p$ 整数环 $\mathbf{Z}$。这些上循环的描述实际上取决于 $g_p = 1$ 还是 $g_p > 1$（这里回顾一下，$g_p = \mathrm{rk}^{\mathbf{Z}_p}\mathbf{T}^0_{\mathfrak{P}}$）。这两种情况需要进行相似但不同的计算。因此，我们将分别考察这两种情况。

8.3.1. 情形 $g_p = 1$。假设本段中 $g_p = 1$。在这种情况下，可以取 $\eta = p$，并且有 $\mathbf{T}^0_{\mathfrak{P}}/I^2 =$ 整数环 $\mathbf{Z}/p^2$ 整数环 $\mathbf{Z}$。圆分特征（模 $I^2$）$\chi_p\colon G_{K_{\mathfrak{N}_i}} \to ($整数环 $\mathbf{Z}/p^2$ 整数环 $\mathbf{Z})^\times$ 可写为

$$\chi_p = 1 + \eta \cdot \phi$$

其中 $\phi\colon G_{K_{\mathfrak{N}_i}} \to$ 整数环 $\mathbf{Z}/p$ 整数环 $\mathbf{Z}$ 是一个非分歧群同态。态射 $\phi$（严格来说它取决于 $i \in \{1,2\}$）由以下条件刻画

$$\phi(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{N}_i}) = \frac{N-1}{p} ,$$

其中 $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{N}_i}$ 是 $\mathfrak{N}_i$ 处的算术 Frobenius 元。

我们需要以下对式（21）中涉及的上循环 $b$ 和 $c$ 的局部描述。

**引理 8.6.** 存在 $k \in$(整数环 $\mathbf{Z}$ $/p\,\mathbf{Z})^{\times}$，使得对于任意 $i \in \{1,2\}$， $b$ 和 $c$ 在 $G_{K_{\mathfrak{N}_i}}$ 上的限制满足

$$b = ka_i^{-1} \cdot \log$$

*and*

$$c = -k^{-1}a_i \cdot \log -k^{-1}a_i \cdot \phi \ .$$

证明。由于我们已固定一个全局的 $p$ 次单位根 $\zeta_p \in \mu_p$，上循环 $b \in Z^1$ ($G_{\mathbf{Q}}$, ($\mathbf{Z}$ $/p\,\mathbf{Z}$)(1)) 的类给出 $H^1$($G_{\mathbf{Q},Np}$,$\mu_p$) 中的一个类。由于表示 $\rho$ 在 $p$ 处有限平坦，我们看到 $b$ 的类属于 $H^1_{\mathrm{fppf}}$($\mathbf{Z}[1/N]$,$\mu_p$)，即 属于 $\mathbf{Z}[1/N]^{\times}\otimes\mathbf{Z}$ $/p$ $\mathbf{Z}$。若 $b$ 在 $H^1_{\mathrm{fppf}}$($\mathbf{Z}[1/N]$,$\mu_p$) 中平凡，则我们可以假设 $e_2$ 被 $G_{\mathbf{Q}}$ 固定，这意味着 $\tilde{J}^{(p)}(\mathbf{Q})[p^2]$ 含有一个同构于 $\mathbf{Z}/p^2\,\mathbf{Z}$ 的子群。这与 Mazur 证明的 $\tilde{J}^{(p)}(\mathbf{Q})[p^2] \simeq \mathbf{Z}$ $/p\,\mathbf{Z}$ 矛盾。

因此， $b$在 $H^1_{\mathrm{fppf}}$($\mathbf{Z}[1/N]$,$\mu_p$)中表示一个非平凡类，它必定对应于某个$k \in$($\mathbf{Z}$ $/p$ $\mathbf{Z}$)$^{\times}$所对应的 $N \otimes k \in \mathbf{Z}[1/N]^{\times} \otimes \mathbf{Z}$ $/p$的 Kummer 类。由引理 8.5，我们在 $\mathfrak{N}_i$处局部有 $a_i \cdot b = -k \cdot \log$。将 $k$ 替换为 $-k$后，我们得到 $b = ka_i^{-1} \cdot \log$，正如所需。

现在证明 $c = -k^{-1}a_i \cdot \log -k^{-1}a_i \cdot \phi$ 在 $\mathfrak{N}_i$ 处局部成立。回顾一下， $\rho : G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{T}^0_{\mathfrak{P}}/I^2)$ 由 $\rho = \begin{pmatrix} \chi_p(1+\eta\cdot\log)\,\eta c & \eta b \\ & 1-\eta\cdot\log \end{pmatrix}$ 给出。

由于 $J_0(N)$ 在 $N$ 处有半稳定约化，我们知道 $\tilde{J}^{(p)}[I^2]$ 中存在一条被 $G_{K_{\mathfrak{N}_i}}$ 固定的商直线。由于 $\rho - 1$ 在 $G_{K_{\mathfrak{N}_i}}$ 处的限制具有 $\eta \cdot \begin{pmatrix} \phi + \log & b \\ c & -\log \end{pmatrix}$ 的形式，我们得到的是

$$\det \begin{pmatrix} \phi + \log & b \\ c & -\log \end{pmatrix} = 0 \ .$$

这就证明了 $bc = -\log(\phi + \log)$。由于 $b = ka_i^{-1}\log$，我们得到 $c = -k^{-1}a_i \cdot \log -k^{-1}a_i \cdot \phi$，正如所需。□

在 $\mathfrak{N}_i$ 处局部地，与 $\Sigma_p$ 相关联的上循环由下式给出。

$$\begin{aligned} \kappa_\Sigma(g) &= g(e_1) - e_1 \\ &= \chi_p(g)(1+\eta\log(g)) \cdot e_1 + \eta c(g) \cdot e_2 - e_1 \\ &= (\phi(g) + \log(g)) \cdot \eta e_1 + c(g) \cdot \eta e_2 \ . \end{aligned}$$

类似地，与 $C_p$ 相关联的上循环为

$$\begin{aligned} \kappa_C(g) &= g(e_2) - e_2 \\ &= b(g) \cdot \eta e_1 - \log(g) \cdot \eta e_2 \ . \end{aligned}$$

因此，在 $\mathfrak{N}_i$ 处局部地，Kummer 像为

$$\lambda_i\kappa_C + \mu_i\kappa_\Sigma = (\mu_i\phi + \mu_i\log + \lambda_i b) \cdot \eta e_1 + (\mu_i c - \lambda_i \log) \cdot \eta e_2 \ ,$$

其中 $\mu_i, \lambda_i \in$整数环 $\mathbf{Z}$ $/p$整数环 $\mathbf{Z}$。回忆一下， $\eta e_1 \in \Sigma_p$对应于 $\zeta_p \in \mu_p$，而后者又通过 (23) 对应于整数环 $\mathbf{Z}/p$整数环 $\mathbf{Z}$ 中的 $a_i$。

因此，Kummer 像在

$$H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}) \bigoplus H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})$$

由形如以下形式的元素给出

$$\big(a_i \cdot (\mu_i\phi(g) + \mu_i \log(g) + \lambda_i b(g)), \mu_i c(g) - \lambda_i \log(g)\big)$$

对 $\mu_i, \lambda_i \in$ 整数环 $\mathbf{Z}/p$ 整数环 $\mathbf{Z}$。

根据引理 8.6，在

$$H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}) \bigoplus H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})$$

由形如以下形式的元素给出

$$(25)\ \big(a_i\mu_i\cdot\phi(g)+(k\lambda_i+a_i\mu_i)\cdot\log(g), -\mu_i a_i k^{-1}\cdot\phi(g)-(\lambda_i+k^{-1}\mu_i a_i)\cdot\log(g)\big)$$

对 $\mu_i, \lambda_i \in$ 整数环 $\mathbf{Z}/p$ 整数环 $\mathbf{Z}$。

**命题 8.7**。若 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K[1/N]) \otimes$ 整数环 $\mathbf{Z}_p \neq 0$ 则 秩$_{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) > 1$。

证明。 我们来证明投影映射的核 $V$

$$\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) \to H^1(\mathcal{O}_K[1/N], \mu_p)$$

是 Hom(Pic($\mathcal{O}_K[1/N]$), 整数环 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$)。事实上，设 $x \in V$，我们可以将其视为 $H^1(G_{K,N}$, 整数环 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$) 中的元素。由 (25)， $x$ 在 $G_{\mathfrak{N}_i}$ 上的限制具有如下形式：$-\mu_i a_i k^{-1}\cdot\phi(g) - (\lambda_i + k^{-1}\mu_i a_i)\cdot\log(g)$，其中 $\lambda_i, \mu_i \in$ 整数环 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 满足

$$a_i\mu_i\cdot\phi + (k\lambda_i + a_i\mu_i)\cdot\log = 0\ .$$

后一个等式推出 $\mu_i = \lambda_i = 0$，因此 $x$ 对于 $i \in \{1,2\}$ 在 $\mathfrak{N}_i$ 处是局部平凡的。这证明了 $x \in$Hom(Pic($\mathcal{O}_K[1/N]$), 整数环 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$)。反过来，Hom(Pic($\mathcal{O}_K[1/N]$), 整数环 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$) 包含于 $V$ 中，因为 Hom(Pic($\mathcal{O}_K[1/N]$), 整数环 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$) 的元素在 $\mathfrak{N}_i$ 处是局部平凡的（因此属于局部 Kummer 像）。

为完成命题的证明，只需验证由尖点子群 $C_p$ 给出的 $\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 中的元素不属于 $V$ （参见引理 8.3）。该元素由 (24) 的上循环 $\kappa_C$ 给出。我们已知在 $\mathfrak{N}_i$ 处局部地， $\kappa_C$ 由 $(b, -\log)$ 给出，因此它非平凡。由于 $V$ 的所有元素在 $\mathfrak{N}_i$ 处都局部平凡，这就证明了 $\kappa_C \notin V$。命题 8.7 的证明至此完成。□

由命题 8.7，要证明 (19)，只需考虑以下两种情形：

(A) $p \nmid h(K)$。(B) $p \mid h(K)$ 且 Pic($\mathcal{O}_K[1/N]$) $\otimes \mathbf{Z}_p = 0$。

在讨论这两种情形之前，先引入一些记号会很有用。对于 $i \in \{1,2\}$，令

$$\log_i : \mathcal{O}^\times_{K_{\mathfrak{N}_i}} \to \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}$$

定义为以下复合映射

$$\mathcal{O}^\times_{K_{\mathfrak{N}_i}} \to \mathbf{F}_N^\times \xrightarrow{\log} \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}\ ,$$

其中，第一个映射是模 $\mathfrak{N}_i$ 约化。

我们还用 $s \in \mathbf{N}$ 表示 $\mathfrak{N}_i$ 在 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ 中的阶（它不依赖于 $i$）。将 $\mathfrak{N}_i^s = (\pi_i)$ 记作某个 $\pi_i \in \mathcal{O}_K$。我们可以并且确实假设 $g_0(\pi_1) = \pi_2$，这里回顾一下，$g_0 \in G_{\mathbf{Q}}$ 限制为 $K$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的非平凡自同构。

**引理 8.8.** 我们有 $\log_1(u(K)) = -\log_2(u(K))$ 且 $\log_1(\pi_2) = \log_2(\pi_1)$。

证明。注意，若 $x \in \mathcal{O}_K$ 与 $\mathfrak{N}_1$互素，则 $\log_1(x) = \log_2(g_0(x))$。第一个等式由此可从 $g_0(u(K)) = \pm u(K)^{-1}$ 推出，而第二个等式则由 $g_0(\pi_1) = \pi_2$推出。□

下面的结果讨论情形 (A)。

**命题 8.9.** 假设 $p \nmid h(K)$。那么 $\mathrm{rk}_{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) > 1$ 当且仅当 $\log_1(u(K)) = 0$。

证明。回想一下，我们将 $\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 与其一个子群等同

$$H^1(\mathcal{O}_K[1/N], \mu_p) \bigoplus H^1(G_{K,N}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) .$$

因此，$\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 的一个元素可写为 $(f_\Sigma, f_C)$，其中某个 $f_\Sigma \in H^1(\mathcal{O}_K[1/N], \mu_p)$ 且 $f_C \in H^1(G_{K,N}$, 整数环 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$。

设 $K(N)$ 为 $K$ 的最大 $p$ 阿贝尔扩张，且在 $\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$ 之外非分歧。由于 $p \nmid h(K)$ 和 $p \neq N$，利用幂等阿廷映射，我们很容易得到

$$\mathrm{Gal}(K(N)/K) \simeq \left((\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{N}_1}}^\times/U_1 \times \mathcal{O}_{K_{\mathfrak{N}_2}}^\times/U_2)/u(K)^{\mathbf{Z}}\right) \otimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} , \tag{26}$$

其中 $U_i \subset \mathcal{O}_{K_{\mathfrak{N}_i}}^\times$ 是主单位子群，而 $u(K)^{\mathbf{Z}}$ 表示由 $u(K)$ 的对角像生成的 $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{N}_1)^\times \times (\mathcal{O}_K/\mathfrak{N}_2)^\times$ 子群。

利用 $\log_1$ 和 $\log_2$，我们得到一个典范同构

$$\mathrm{Gal}(K(N)/K) \otimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \simeq (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) / \mathbf{Z} \cdot (\log_1(u(K)), -\log_1(u(K))) . \tag{27}$$

于是，我们的同态 $f_C \in H^1(G_{K,\ N}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K(N)/K), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ 可视为定义在 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 上、在 $(\log_1(u(K)), -\log_1(u(K)))$ 上取零值的同态，因此由其取值 $v_1 := f_C(1, 0)$ 和 $v_2 := f_C(0, 1)$ 确定。

下面是全球类域论中的一个简单练习。由于 $p \nmid h(K)$，我们有 $p \nmid s$（这里回顾一下，$s$ 是 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ 中 $\mathfrak{N}_i$ 的阶）。

**引理 8.10.** 令 $f_C \in H^1(G_{K,\ N}$，整数环 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ 并令 $v_1$，$v_2 \in$整数环 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 如上定义。在 $\mathfrak{N}_1$ 处局部地，我们有

$$f_C = v_1 \cdot \log + s^{-1} \log_1(\pi_2)(v_1 - v_2) \cdot \phi$$

并且在 $\mathfrak{N}_2$ 处的局部情形下，我们有

$$f_C = v_2 \cdot \log + s^{-1} \log_1(\pi_2)(v_2 - v_1) \cdot \phi .$$

证明概要。我们来考察 $\mathfrak{N}_1$ 处的局部情形（$\mathfrak{N}_2$ 处的描述可通过对称性得到）。设 $L$ 为 $K_{\mathfrak{N}_1}$ 的最大指数 $p$ 阿贝尔扩张。局部类域论给出了一个典范同构

$$(K_{\mathfrak{N}_1}^{\times}/U_1)\otimes \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}\simeq \mathrm{Gal}(L/K_{\mathfrak{N}_1})\ . \tag{28}$$

注意，$L$ 是 $L_1$ 与 $L_2$的复合域，其中 $L_1$ 是 $K_{\mathfrak{N}_1}(\zeta_N)$的次数为 $p$的子扩张，而 $L_2$是 $K_{\mathfrak{N}_1}$的非分歧整数环 Z $/p$整数环 Z-扩张。因此我们有

$$\mathrm{Gal}(L/K_{\mathfrak{N}_1})\simeq \mathrm{Gal}(L_1/K_{\mathfrak{N}_1})\times \mathrm{Gal}(L_2/K_{\mathfrak{N}_1})\simeq \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}\times \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}\ . \tag{29}$$

同构

$$(K_{\mathfrak{N}_1}^{\times}/U_1)\otimes \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}\simeq \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}\times \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}$$

由 (28) 和 (29) 得到的同构描述如下。它将 $N\in K_{\mathfrak{N}_1}^{\times}$ 映为 (0,1)。其在 $\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{N}_1}}^{\times}$上的限制由 $(\log_1, 0)$ 给出。

我们的固定嵌入

$$\mathrm{Gal}(\overline{K}_{\mathfrak{N}_1}/K_{\mathfrak{N}_1})\hookrightarrow G_K$$

给出一个典范映射

$$\mathrm{Gal}(L/K_{\mathfrak{N}_1})\to \mathrm{Gal}(K(N)/K)\ . \tag{30}$$

现在我们来描述映射

$$\varphi:\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}\times \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}\to (\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}\times \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})\,/\,\mathbf{Z}\cdot(\log_1(u(K)),-\log_1(u(K)))$$

通过结合（27）、（29）和（30）得到。我们有 $\varphi(1,0)=(1,0)$（这由局部与整体阿廷映射之间的相容性推出）。现在让我们确定 $\varphi(0,1)$。这相当于将阿代尔元素 $x$ of $\mathbf{A}_K^{\times}$ 写成 $x=y\cdot z$，其中 $y\in K^{\times}$ 是一个 $N$-单位（对角元素），而 $z$ 除了在 $\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$ 处可能具有不同于 1 的分量外，在其他各处的分量均为 1，且 $z$ 的分量均为单位。

写成 $N^s=\pm\pi_1\pi_2$。元素 $x^s$ 的形式为 $\pi_1\cdot y$，其中 $y$ 在不整除 $N$ 的处的分量均为单位，$y$ 在 $\mathfrak{N}_1$ 处的分量为 $\pm\pi_2$，在 $\mathfrak{N}_2$ 处的分量为 $\pi_1^{-1}$。因此，我们有

$$\varphi(0,1)=s^{-1}\cdot(\log_1(\pi_2),-\log_2(\pi_1))=s^{-1}(\log_1(\pi_2),-\log_1(\pi_2))\ .$$

根据构造，在 $\mathfrak{N}_1$ 处局部地有：

$$\begin{aligned} f_C &= f_C(\varphi(1,0))\cdot\log + f_C(\varphi(0,1))\cdot\phi\\ &= f_C(1,0)\cdot\log + s^{-1}\log_1(\pi_2)\cdot f_C(1,-1)\cdot\phi\\ &= v_1\cdot\log + s^{-1}\log_1(\pi_2)(v_1-v_2)\cdot\phi\ . \end{aligned}$$

引理得证。 □

回顾一下，根据式 (25)，对每个 $i\in\{1,2\}$，都存在 $\lambda_i,\mu_i\in$整数环 Z $/p$ 整数环 Z，使得在 $\mathfrak{N}_i$ 处局部地

$$f_C=-a_i\mu_i k^{-1}\cdot\phi-(\lambda_i+k^{-1}\mu_i a_i)\cdot\log\ .$$

因此， $\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$ 处关于 $f_C$ 的局部 Kummer 条件可写为:

$$
\begin{array}{rcl}
-a_1\mu_1 k^{-1} & = & s^{-1}\log_1(\pi_2)(v_1-v_2), \\
-(\lambda_1+k^{-1}\mu_1 a_1) & = & v_1, \\
-a_2\mu_2 k^{-1} & = & s^{-1}\log_1(\pi_2)(v_2-v_1), \\
-(\lambda_2+k^{-1}\mu_2 a_2) & = & v_2.
\end{array} \tag{31}
$$

由于 $p\nmid h(K)$，我们有

$$H^1(\mathcal{O}_K[1/N],\mu_p)\simeq \mathcal{O}_K[1/N]^\times\otimes \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}\ .$$

$\mathcal{O}_K[1/N]^\times\otimes\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 中的一个元素具有 $\pi_1^{\alpha_1}\pi_2^{\alpha_2}u(K)^\beta$ 的形式，其中 $\alpha_1$、$\alpha_2$、$\beta\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$。因此，我们的上同调类 $f_\Sigma$ 具有如下形式

$$\pi_1^{\alpha_1}\pi_2^{\alpha_2}u(K)^\beta = N^{s\alpha_1}\pi_2^{\alpha_2-\alpha_1}u(K)^\beta.$$

在 $\mathfrak{N}_1$ 处局部地，我们得到

$$f_\Sigma=-s\alpha_1\cdot\log+((\alpha_2-\alpha_1)\log_1(\pi_2)+\beta\log_1(u(K)))\cdot\phi\ .$$

同样地，在 $\mathfrak{N}_2$ 处局部地，我们得到

$$\begin{aligned} f_\Sigma &= -s\alpha_2\cdot\log+((\alpha_1-\alpha_2)\log_2(\pi_1)+\beta\log_2(u(K)))\cdot\phi \\ &= -s\alpha_2\cdot\log+((\alpha_1-\alpha_2)\log_1(\pi_2)-\beta\log_1(u(K)))\cdot\phi\ . \end{aligned}$$

根据 (25)， $f_\Sigma$ 在 $\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$ 处的库默尔条件因此可以写成

$$
\begin{array}{rcl}
a_1\mu_1 & = & (\alpha_2-\alpha_1)\log_1(\pi_2)+\beta\log_1(u(K)), \\
k\lambda_1+a_1\mu_1 & = & -s\alpha_1, \\
a_2\mu_2 & = & (\alpha_1-\alpha_2)\log_1(\pi_2)-\beta\log_1(u(K)), \\
k\lambda_2+a_2\mu_2 & = & -s\alpha_2.
\end{array} \tag{32}
$$

现在我们求解方程 (31) 和 (32)。注意，变量为 $v_1$、$v_2$、$\alpha_1$、$\alpha_2$ 和 $\beta$。这些变量完全确定了 $f_C$ 和 $f_\Sigma$。我们区分三种情形。

情形 1：$\log_1(u(K))=\log_1(\pi_2)=0$。由 (32) 可得 $\mu_1=\mu_2=0$。我们的方程化简为 $v_1=-\lambda_1, v_2=-\lambda_2, \alpha_1=-s^{-1}k\lambda_1$ 和 $\alpha_2=-s^{-1}k\lambda_2$。对 $\beta$ 没有任何条件，因此它可以任意选取。于是，可以在 $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^3$ 中任意选取 $(v_1,v_2,\beta)$。这表明在此情形下，$\mathrm{rk}^{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)=3>1$，正如所需。

情形 2：$\log_1(u(K))=0$ 和 $\log_1(\pi_2)\neq 0$。由 (31) 和 (32) 的第二个和第四个方程，得到 $\alpha_1=ks^{-1}v_1$ 和 $\alpha_2=ks^{-1}v_2$。由 (31) 的第一个和第三个方程，得到 $\mu_1=ka_1^{-1}s^{-1}\log_1(\pi_2)(v_2-v_1)$ 和 $\mu_2=-ka_2^{-1}s^{-1}\log_1(\pi_2)(v_2-v_1)$。由 (31) 的第二个和第四个方程，得到 $\lambda_1=-v_1+s^{-1}\log_1(\pi_2)(v_1-v_2)$ 和 $\lambda_2=-v_2+s^{-1}\log_1(\pi_2)(v_2-v_1)$。因此，$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\lambda_1$、$\lambda_2$、$\mu_1$ 和 $\mu_2$ 由 $(v_1,v_2,\beta)\in(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^3$ 的选取确定。反过来，很容易验证刚才给出的表达式是 (31) 和 (32) 的解。于是再次得到 $\mathrm{rk}^{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)=3>1$，正如所需。

情形 3：$\log_1(u(K)) \neq 0$。在此情形下，由 (27) 可知，$f_C$ 经由 $\mathrm{Gal}(K(\zeta_N^{(p)})/K)$ 分解，其中 $K(\zeta_N^{(p)})$ 是 $K(\zeta_N)$ 中 $K$ 的唯一一个次数为 $p$ 的子扩张。换言之，必有 $v_1 = v_2$。由 (31) 的第一个和第三个方程，得到 $\mu_1 = \mu_2 = 0$。由 (31) 的第二个和第四个方程，得到 $\lambda_1 = \lambda_2 = -v_1 = -v_2$。由 (32) 的第二个和第四个方程，得到 $\alpha_1 = \alpha_2 = -s^{-1}k\lambda_1 = s^{-1}kv_1$。最后，由 (32) 的第一个和第三个方程，得到 $\beta = 0$。因此，我们只有一个自由度，即可以选择例如，$v_1$。这就证明了 $\mathrm{rk}_{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) = 1$，正如所需。

至此，命题 8.9 的证明结束。

□

下面的结果讨论情形 (B)。

**命题 8.11.** 假设 $p \mid h(K)$ 且 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K[1/N]) \otimes$整数环 $\mathbf{Z}_p = 0$。那么$\mathrm{rk}_{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) > 1$。

证明。 </style}假设 $p \mid h(K)$ 且 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K[1/N]) \otimes$整数环 $\mathbf{Z}_p = 0$，这意味着 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ 的 $p$-部分由 $N$ 上方的素理想 $\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$ 生成。特别地，$p \mid s$（这里回顾一下，$s$ 是 $\mathfrak{N}_i$ 在 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ 中的阶）。

回顾一下，$\mathrm{Sel}_I($ $\tilde{J}^{(p)}/K)$ 中的元素由一对 $(f_\Sigma, f_C)$ 给出，且属于

$$H^1(\mathcal{O}_K[1/N], \mu_p) \bigoplus H^1(G_{K,N}, \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})$$

满足在 $\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$处的局部库默尔条件 (25)。

取 $f_C = 0$。由 (25)，在 $\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$ 处的库默尔条件为

$$\begin{array}{rcl} -a_1\mu_1 k^{-1} & = & 0, \\ \lambda_1 + k^{-1}\mu_1 a_1 & = & 0, \\ -a_2\mu_2 k^{-1} & = & 0, \\ \lambda_2 + k^{-1}\mu_2 a_2 & = & 0. \end{array} \tag{33}$$

这等价于

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0\ . \tag{34}$$

下面证明，可以找到 $f_\Sigma \in H^1(\mathcal{O}_K[1/N], \mu_p)$，使得 $(f_\Sigma, f_C)$ 属于 $\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$。回顾一下，由 (20) 可得

$$\mathcal{O}_K[1/N]^\times \otimes \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z} \simeq H^1(\mathcal{O}_K[1/N], \mu_p)\ .$$

由于 $p \mid s$，我们看到，$\mathcal{O}_K[1/N]^\times \otimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 中的元素具有如下形式：$\pi_1^\alpha N^\beta u(K)^\gamma$，其中 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$。于是写作 $f_\Sigma = \pi_1^\alpha N^\beta u(K)^\gamma$。

$f_\Sigma$ 在 $G_{K_{\mathfrak{N}_2}}$ 处的限制为

$f_\Sigma = -\beta\log + (\alpha\log_2(\pi_1) + \gamma\log_2(u(K)))\phi = -\beta\log + (\alpha\log_1(\pi_2) - \gamma\log_1(u(K)))\phi$。

在 $\mathfrak{N}_1$，写作 $f_\Sigma = \pi_2^{-\alpha}N^{\beta+s\alpha}u(K)^\gamma = \pi_2^{-\alpha}N^\beta u(K)^\gamma$（因为 $p \mid s$）。因此，$f$ 在 $G_{K_{\mathfrak{N}_1}}$ 处的限制为

$$f_\Sigma = -\beta\log + (-\alpha\log_1(\pi_2) + \gamma\log_1(u(K)))\phi\ .$$

根据（25），$\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$ 处的局部 Kummer 条件为

$$
\begin{array}{rcl}
a_1\mu_1 & = & -\alpha\log_1(\pi_2)+\gamma\log_1(u(K)),\\
k\lambda_1+\mu_1 a_1 & = & -\beta,\\
a_2\mu_2 & = & \alpha\log_1(\pi_2)-\gamma\log_1(u(K)),\\
k\lambda_2+\mu_2 a_2 & = & -\beta.
\end{array}
\tag{35}
$$

根据（34），方程（35）等价于

$$
\begin{array}{rcl}
\beta & = & 0,\\
\alpha\log_1(\pi_2)-\gamma\log_1(u(K)) & = & 0.
\end{array}
\tag{36}
$$

总可以选择一组 $(\alpha,\beta,\gamma)$ 使其满足这些方程。因此，我们证明了存在一个形如 $(f_\Sigma, 0)$ 的元素，属于 $\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$。该元素不是尖点子群 $\kappa_C \in \mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 的倍数。事实上，在 $\mathfrak{N}_i$ 处的局部情形中，我们已经看到 $\kappa_c$ 等于 $(b,-\log)$。它非零，因此不可能是 $(f_\Sigma, 0)$ 的倍数。这就证明了 $\mathrm{rk}^{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) > 1$，证毕。

□

8.3.2. 情形 $g_p > 1$。本段中假设 $g_p > 1$。在这种情况下，我们有一个同构 $\mathrm{T}^0_{\mathfrak{P}}/I^2 \simeq \mathrm{F}_p[T]/(T^2)$（$T$，它对应于我们的局部生成元 $\eta \in I$）。圆分特征（模 $p$）$\chi_p\colon G_{K_{\mathfrak{N}_i}} \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ 是平凡特征。这会使计算比情形 $g_p = 1$ 简单一些。

我们将需要以下关于式（21）中涉及的上循环 $b$ 和 $c$ 的局部描述。

**引理 8.12.** 存在 $k \in (\text{整数环 } \mathbf{Z}/p\text{整数环 } \mathbf{Z})^\times$，使得对于任意 $i \in \{1,2\}$，$b$ 和 $c$在 $G_{K_{\mathfrak{N}_i}}$ 上的限制满足

$$b = ka_i^{-1}\cdot\log$$

*and*

$$c = -k^{-1}a_i\cdot\log\ .$$

证明。与引理 8.6 的证明类似的论证表明，$b$ 在 $H^1_{\mathrm{fppf}}(\mathbf{Z}[1/N],\mu_p)$ 中表示一个非平凡类，它必定对应于某个 $k \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ 的 Kummer 类 $N \otimes k \in \mathbf{Z}[1/N]^\times \otimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$。由引理 8.5，我们在 $\mathfrak{N}_i$ 处有局部的 $a_i\cdot b = -k\cdot\log$。将 $k$ 替换为$-k$ 后，我们得到所需的 $b = ka_i^{-1}\cdot\log$。

现在证明 $c = -k^{-1}a_i\cdot\log$ 在 $\mathfrak{N}_i$ 处局部成立。回忆 $\rho : G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathrm{T}^0_{\mathfrak{P}}/I^2)$ 由 $\rho = \begin{pmatrix} 1+\eta\cdot\log\eta c & \\ & 1-\eta\cdot\log \end{pmatrix}$ 给出。由于 $J_0(N)$ 在 $N$ 处具有半稳定约化，我们知道 $\tilde{J}^{(p)}[I^2]$ 中存在一条由 $G_{K_{\mathfrak{N}_i}}$ 固定的商直线。由于 $\rho - 1$ 在 $G_{K_{\mathfrak{N}_i}}$ 处的限制具有如下形式

$\eta \cdot \begin{pmatrix} \log c & -\overset{b}{} \log \end{pmatrix}$，我们得到

$$\det \begin{pmatrix} \log & b \\ c & -\log \end{pmatrix} = 0 \ .$$

这证明了 $bc = -\log^2$。由于 $b = ka_i^{-1}\log$，我们得到 $c = -k^{-1}a_i \cdot \log$，正如所需。□

在 $\mathfrak{N}_i$ 处局部地，与 $\Sigma_p$ 相关联的上循环为

$$\begin{aligned} \kappa_\Sigma(g) &= g(e_1) - e_1 \\ &= (1 + \eta \log(g)) \cdot e_1 + \eta c(g) \cdot e_2 - e_1 \\ &= \log(g) \cdot \eta e_1 + c(g) \cdot \eta e_2 \ . \end{aligned}$$

类似地，与 $C_p$ 相关联的上循环为

$$\begin{aligned} \kappa_C(g) &= g(e_2) - e_2 \\ &= b(g) \cdot \eta e_1 - \log(g) \cdot \eta e_2 \ . \end{aligned}$$

因此，在 $\mathfrak{N}_i$ 处局部地，Kummer 像为

$$\lambda_i \kappa_C + \mu_i \kappa_\Sigma = (\mu_i \log + \lambda_i b) \cdot \eta e_1 + (\mu_i c - \lambda_i \log) \cdot \eta e_2 \ ,$$

其中 $\mu_i$、$\lambda_i \in$ 属于整数环 Z，$/p$ 属于整数环 Z。回忆一下，$\eta e_1 \in \Sigma_p$ 对应于 $\zeta_p \in \mu_p$，而后者又通过 (23) 对应于整数环 Z $/p$ 整数环 Z 中的 $a_i$。

因此，Kummer 像位于

$$H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}) \bigoplus H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})$$

由形如以下的元素给出

$$\big(a_i \cdot (\mu_i \log(g) + \lambda_i b(g)), \mu_i c(g) - \lambda_i \log(g)\big)$$

其中 $\mu_i$、$\lambda_i \in$ Z、$/p$ Z。

根据引理 8.12，在

$$H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}) \bigoplus H^1(G_{K_{\mathfrak{N}_i}}, \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})$$

由形如以下的元素给出

$$\big((k\lambda_i + a_i\mu_i) \cdot \log(g), -(\lambda_i + k^{-1}\mu_i a_i) \cdot \log(g)\big) \tag{37}$$

其中 $\mu_i$、$\lambda_i \in$ Z、$/p$ Z。

下面给出命题 8.7 的类比结果。

**命题 8.13**。若$\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K[1/N]) \otimes$整数环 $\mathbf{Z}_p \neq 0$则$\mathrm{rk}^{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) > 1$。

证明。我们来证明投影映射的核 $V$

$$\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) \to H^1(\mathcal{O}_K[1/N], \mu_p)$$

是 Hom(Pic($\mathcal{O}_K[1/N]$)，整数环 Z $/p$Z)。事实上，设 $x \in V$，我们可以将其视为 $H^1$($G_{K,\ N}$，整数环 Z $/p$Z) 内的对象。根据（37），$x$ 到 $G_{\mathfrak{N}_i}$ 的限制具有如下形式

$$-(\lambda_i + k^{-1}\mu_i a_i) \cdot \log(g)$$

其中 $\lambda_i$、$\mu_i \in$ 整数环 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 满足

$$(k\lambda_i + a_i\mu_i)\cdot \log(g) = 0\ .$$

后一个方程意味着 $k\lambda_i + a_i\mu_i = 0$，即 $\lambda_i + k^{-1}\mu_i a_i = 0$。因此，$x$ 在 $\mathfrak{N}_i$ 处对 $i \in \{1,2\}$是局部平凡的。这就证明了

$$x \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K[1/N]), \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})\ .$$

反之，Hom(Pic($\mathcal{O}_K[1/N]$)，$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$) 包含于 $V$ 中，因为 Hom(Pic($\mathcal{O}_K[1/N]$), $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$) 中的元素在 $\mathfrak{N}_i$处是局部平凡的（因而属于局部 Kummer 像）。

为完成该命题的证明，只需验证由尖点子群 $C_p$给出的 $\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 中的元素不属于 $V$（参见引理 8.3）。这与命题 8.7 的证明完全采用相同的论证。□

根据命题 8.13，为证明 (19)，只需考虑两种情形:

(A) $p \nmid h(K)$; (B) $p \mid h(K)$ 且 Pic($\mathcal{O}_K[1/N]$) $\otimes \mathbf{Z}_p = 0$。

以下结果是命题 8.9 的一个类似结论，讨论情形 (A)。

**命题 8.14.** 假设 $p \nmid h(K)$。那么 $\mathrm{rk}_{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}_{(p)}/K) > 1$ 当且仅当 $\log_1(u(K)) = 0$。

证明. 我们沿用命题 8.9 证明中的记号，特别是 $f_\Sigma$, $f_C$, $K(N)$ 和 $s$。由 (27)，我们的同态 $f_C \in H^1(G_{K,N}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K(N)/K), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ 可视为定义在 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 上、在 $(\log_1(u(K)) - \log_1(u(K)))$ 上取零值的同态，因此由其取值 $v_1 := f_C(1,0)$ 和 $v_2 := f_C(0,1)$ 决定。

回顾一下，由 (37)，对每个 $i \in \{1,2\}$，存在 $\lambda_i, \mu_i \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$，使得在 $\mathfrak{N}_i$ 处局部地

$$f_C = -(\lambda_i + k^{-1}\mu_i a_i)\cdot \log\ .$$

由引理 8.10，$f_C$ 在 $\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$ 处的局部 Kummer 条件可写为:

$$(38)\qquad \begin{array}{lcl} 0 & = & s^{-1}\log_1(\pi_2)(v_1 - v_2), \\ -(\lambda_1 + k^{-1}\mu_1 a_1) & = & v_1, \\ 0 & = & s^{-1}\log_1(\pi_2)(v_2 - v_1), \\ -(\lambda_2 + k^{-1}\mu_2 a_2) & = & v_2. \end{array}$$

回顾一下，由于 $p \nmid h(K)$，我们的上同调类 $f_\Sigma$ 具有如下形式:

$$\pi_1^{\alpha_1}\pi_2^{\alpha_2}u(K)^\beta = N^{s\alpha_1}\pi_2^{\alpha_2-\alpha_1}u(K)^\beta.$$

在 $\mathfrak{N}_1$ 处的局部情形下，我们得到

$$f_\Sigma = -s\alpha_1\cdot\log + ((\alpha_2-\alpha_1)\log_1(\pi_2) + \beta\log_1(u(K)))\cdot\phi\ .$$

类似地，在 $\mathfrak{N}_2$处的局部情形下，我们得到

$$f_\Sigma = -s\alpha_2 \cdot \log + ((\alpha_1 - \alpha_2)\log_1(\pi_2) - \beta \log_1(u(K))) \cdot \phi \ .$$

由（37），因此 $f_\Sigma$ 在 $\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$ 处的库默尔条件可写为

$$(39) \qquad \begin{array}{lcl} 0 & = & (\alpha_2 - \alpha_1)\log_1(\pi_2) + \beta \log_1(u(K)), \\ k\lambda_1 + a_1\mu_1 & = & -s\alpha_1, \\ 0 & = & (\alpha_1 - \alpha_2)\log_1(\pi_2) - \beta \log_1(u(K)), \\ k\lambda_2 + a_2\mu_2 & = & -s\alpha_2. \end{array}$$

现在我们求解方程 (38) 和 (39)。注意，变量是 $v_1$、$v_2$、 $\alpha_1$、 $\alpha_2$ 和 $\beta$。这些变量完全决定了 $f_C$ 和 $f_\Sigma$。我们区分三种情形。

情形 1：$\log_1(u(K)) = \log_1(\pi_2) = 0$。我们的方程 (38) 和 (39) 等价于

$$\begin{array}{lcl} v_1 & = & k^{-1}s\alpha_1, \\ v_2 & = & k^{-1}s\alpha_2, \\ k\lambda_1 + a_1\mu_1 & = & -s\alpha_1, \\ k\lambda_2 + a_2\mu_2 & = & -s\alpha_2. \end{array}$$

因此，可以在 (整数环 Z $/p$ 整数环 Z)$^3$ 中自由选取 $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$。这表明在这种情况下 $\mathrm{rk}_{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) = 3 > 1$，正如所需。

情形 2：$\log(u(K)) = 0$ 和 $\log_1(\pi_2) \neq 0$。我们的方程 (38) 和 (39) 等价于

$$\begin{array}{lcl} v_1 & = & v_2, \\ v_1 & = & k^{-1}s\alpha_1, \\ \alpha_1 & = & \alpha_2, \\ k\lambda_1 + a_1\mu_1 & = & -s\alpha_1 \\ k\lambda_1 + a_1\mu_1 & = & k\lambda_2 + a_2\mu_2. \end{array}$$

因此，可以在 (Z $/p$ Z)$^2$ 中任意选取 $(\alpha_1, \beta)$。这表明，在此情形下，$\mathrm{rk}_{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) = 2 > 1$，正如所需。

情形 3：$\log_1(u(K)) \neq 0$。在此情形下，由 (27) 可知， $f$ 通过 $\mathrm{Gal}(K(\zeta_N^{(p)})/K)$ 分解，其中 $K(\zeta_N^{(p)})$ 是 $K(\zeta_N)$ 中 $K$ 的唯一次数为 $p$ 的子扩张。换句话说，必有 $v_1 = v_2$。我们的方程 (38) 和 (39) 等价于

$$\begin{array}{lcl} v_1 & = & v_2, \\ k\lambda_1 + a_1\mu_1 & = & k\lambda_2 + a_2\mu_2, \\ k\lambda_1 + a_1\mu_1 & = & -s\alpha_1, \\ \alpha_1 & = & \alpha_2, \\ v_1 & = & k^{-1}s\alpha_1, \\ \beta & = & 0. \end{array}$$

因此，在这种情形下，我们只有一个自由度，即 $v_1$。这表明，在这种情形下，$\mathrm{rk}_{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}_{(p)}/K) = 1$，正如所需。

命题 8.9 的证明至此完成。

□

下面的结果处理情形 (B)，从而完成定理 1.7 的证明。

**命题 8.15**。假设 $p \mid h(K)$ 且 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K[1/N]) \otimes$整数环 $\mathbf{Z}_p = 0$。则$\mathrm{rk}_{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) > 1$。

证明。假设 $p \mid h(K)$ 和 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K[1/N]) \otimes \mathbf{Z}_p = 0$ 意味着，$\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ 的 $p$ 部分由 $\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$ 以及 $N$ 上方的素理想生成。特别地，$p \mid s$（这里回顾一下，$\mathfrak{N}_i$ 在 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ 中的阶为 $s$）。

回忆一下，$\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 的一个元素由中的一对 $(f_\Sigma, f_C)$ 给出

$$H^1(\mathcal{O}_K[1/N], \mu_p) \bigoplus H^1(G_{K,N}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$$

满足在 $\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$ 处的局部 Kummer 条件 (37)。

令我们选择 $f_C = 0$。根据 (37)，在 $\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$ 处的库默尔条件为

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 + k^{-1}\mu_1 a_1 & = & 0, \\ \lambda_2 + k^{-1}\mu_2 a_2 & = & 0. \end{array} \tag{40}$$

我们来证明，可以找到 $f_\Sigma \in H^1(\mathcal{O}_K[1/N], \mu_p)$，使得 $(f_\Sigma, f_C)$ 属于 $\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$。如命题 8.11 的证明中所做，我们于是写作 $f_\Sigma = \pi_1^\alpha N^\beta u(K)^\gamma$。

$f_\Sigma$ 在 $G_{K_{\mathfrak{N}_2}}$ 处的限制是

$$f_\Sigma = -\beta\log + (\alpha\log_2(\pi_1) + \gamma\log_2(u(K)))\phi = -\beta\log + (\alpha\log_1(\pi_2) - \gamma\log_1(u(K)))\phi\ .$$

$f$ 在 $G_{K_{\mathfrak{N}_1}}$ 处的限制是

$$f_\Sigma = -\beta\log + (-\alpha\log_1(\pi_2) + \gamma\log_1(u(K)))\phi\ .$$

由 (37)，在 $\mathfrak{N}_1$ 和 $\mathfrak{N}_2$ 处的局部 Kummer 条件为

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & -\alpha\log_1(\pi_2) + \gamma\log_1(u(K)), \\ k\lambda_1 + \mu_1 a_1 & = & -\beta, \\ 0 & = & \alpha\log_1(\pi_2) - \gamma\log_1(u(K)), \\ k\lambda_2 + \mu_2 a_2 & = & -\beta. \end{array} \tag{41}$$

根据 (40)，方程 (41) 等价于

$$\begin{array}{rcl} \beta & = & 0, \\ \alpha\log_1(\pi_2) - \gamma\log_1(u(K)) & = & 0, \\ \lambda_1 + k^{-1}\mu_1 a_1 & = & 0, \\ \lambda_2 + k^{-1}\mu_2 a_2 & = & 0. \end{array} \tag{42}$$

总能选取满足这些方程的（$\alpha$，$\beta$，$\gamma$）和（$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\mu_1$，$\mu_2$）。因此，我们证明了存在一个形如（$f_\Sigma$, 0）的 $\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 元素。该元素不是尖点子群 $\kappa_C \in \mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K)$ 的倍数。事实上，在 $\mathfrak{N}_i$ 的局部化下，我们已经看到

$\kappa_c$ 等于（$b$, $-\log$）。这非零，因此不可能是（$f_\Sigma$, 0）的倍数。这就证明了 $\mathrm{rk}^{\mathbf{F}_p}\mathrm{Sel}_I(\tilde{J}^{(p)}/K) > 1$，正如所要求的。

□

## 参考文献


[1] Amod Agashe、Kenneth Ribet 和 William A. Stein。《Manin 常数》。Pure Appl. Math. Q., 2 636, 2006 2, 2 617（约翰·科茨纪念专辑。第 ): – .[2] Frank Calegari 和 Matthew Emerton。《Eisenstein 素数处 Hecke 代数的分歧》。Invent. Math., 160(1):97–144, 2005. [3] Francesc Castella、Giada Grossi 和 Christopher Skinner。《Eisenstein 素数处的 Mazur 主猜想》。预印本，https://arxiv.org/abs/2303.04373。[4] Kestutis Cesnavicius。《作为平坦上同调群的塞尔默群》。J. Ramanujan Math. Soc., 31(1):31–61, 2016. [5] Ehud de Shalit。《 $p$进周期与 $X_0(p)$》。Math. Ann., 303(3):457–472, 1995. [6] Ehud de Shalit。《 $p$进周期与素数导子椭圆曲线的模符号》。Invent. Math., 121(2):225–255, 1995. [7] Matthew Emerton。《超奇异椭圆曲线、θ 级数与权二模形式》。J. Amer. Math. Soc., 15(3):671–714, 2002. [8] Takako Fukaya、Kazuya Kato 和 Romyar Sharifi。《岩泽理论中的模符号》。载于《岩泽理论 2012》，Contrib. Math. Comput. Sci. 第 7 卷，第 177–219 页。Springer，海德堡，2014。[9] Takako Fukaya 和 Kato Kazuya。《关于 Sharifi 猜想》。即将发表于 Kyoto Journal of Mathematics。[10] Manfred Kolster。《 $K$理论与算术》。载于《代数 $K$理论的当代发展》，ICTP Lect. Notes，第 XV 卷，第 191–258 页。Abdus Salam 国际理论物理中心，的里雅斯特，2004。[11] Emmanuel Lecouturier。《关于三重积 L 函数与 Harris–Venkatesh 猜想》。即将发表于 International Mathematics Research Notices。[12] Emmanuel Lecouturier。《高阶 Eisenstein 元、高阶 Eichler 公式与 Hecke 代数的秩》。Invent. Math., 223(2):485–595, 2021. [13] Emmanuel Lecouturier。《关于素数导子情形的 Mazur–Tate 猜想与 Mazur 的 Eisenstein 理想》。American Journal of Mathematics, 145(5):1365–1387, 2023. [14] Emmanuel Lecouturier 和 Jun Wang。《Sharifi 猜想中的层兼容性》。即将发表于 Canadian Mathematical Bulletin。[15] Emmanuel Lecouturier 和 Jun Wang。《关于 Sharifi 猜想与 Mazur 的 Eisenstein 理想》。Int. Math. Res. Not. IMRN, (1):391–421, 2022. [16] B. Mazur。《模曲线与 Eisenstein 理想》。Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (47):33–186 (1978), 1977。附录由 Mazur 和 M. Rapoport 撰写。[17] B. Mazur。《关于 $L$ 函数特殊值的算术》。Invent. Math., 55(3):207– 240, 1979. [18] Bartosz Naskręcki。《尖点形式与 Eisenstein 级数之间的高阶同余》。载于《模形式计算》，Contrib. Math. Comput. Sci. 第 6 卷，第 257–277 页。Springer，Cham，2014。[19] Vivek Pal。《椭圆曲线二次扭曲的周期》。Proc. Amer. Math. Soc., 140(5):1513–1525, 2012。附录由 Amod Agashe 撰写。[20] Kenneth A. Ribet。《Q($\mu_p$) 的非分歧 $p$ 扩张的一种模构造》。Invent. Math., 34(3):151–162, 1976. [21] Alexander Schmidt。《$\pi$ 上 $K$ 型的整数环》。Doc. Math., 12:441–471, 2007. [22] Arul Shankar 和 Jacob Tsimerman。《BSD 蕴含虚二次域类群中 5-挠元的一个非平凡界》。预印本，https://arxiv.org/abs/2112.12949。

[23] Romyar Sharifi 和 Akshay Venkatesh。《动机上同调中的 Eisenstein 上循环》。预印本，*https://arxiv.org/abs/2011.07241*。[24] Stacks 项目作者。《Stacks 项目》。https://stacks.math.columbia.edu, 2023. [25] John Tate。《 $K_2$ 36 257 274, 与伽1976罗瓦上同调之间的关系》。*Invent. Math.*, : – .[26] V. Vatsal。《典范周期与同余公式》。*Duke Math. J.*, 98 419, 1999年 2 397( ): – .[27] Preston Wake 和 Carl Wang-Erickson。《Mazur 的 Eisenstein 理想的秩》。*Duke Math. J.*, 169(1):31–115, 2020年。[28] Charles Weibel。《局部域与全局域整数环的代数 $K$理论》。载于《 $K$-理论。第 *1*、*2* 卷，第 139–190 页。Springer，柏林，2005年。[29] R. Scott Williams。《从模符号到杯积过程中的层兼容性》。*Research in Number Theory*, 7(1):论文编号 9，26，2021年。