arXiv:2305.00649v1 [math-ph] 1 May 2023

条带上XXZ模型液滴态的纠缠熵界

CHRISTOPH FISCHBACHER 和 LEE FISHE R

Abstract. 本文研究了在存在非负背景磁场的情况下，定义于宽度为 M 的条带上的海森堡自旋-1/2 XXZ模型中液滴态的纠缠熵标度行为。在不对 V作任何假设的情况下，证明了带对数修正的面积定律。假设 V的取值为独立同分布的随机变量，可得到期望意义下的面积定律。

1. Introduction

在本文中，我们将给出定义于任意宽度 M条带上的海森堡自旋-$1/2$ XXZ模型液滴态的纠缠熵（EE）标度行为的界。在不对背景磁场作任何额外假设的情况下，我们将证明，EE的上界由一个随系统尺寸的对数增长的项给出。另一方面，在存在随机背景磁场的情况下，我们证明了期望意义下的面积定律，从而表明系统具有局域化性质。这是Beaud和Warzel的工作 [3],的推广；他们针对一维链（对应于 $M = 1$）证明了同类结果（无随机性时为对数上界，有随机性时为面积定律）。对于一维链中EE标度行为的对数上界，也已有针对高能态 [1] 以及更高局域自旋[6]的研究结果。对于相同的模型（自旋 $1/2$ 以及更高局域自旋），在 [2], [4], [5], 和 [10]中也已获得局域化结果。尽管目前已有大量关于EE界的研究结果（仅列举近期的一些结果： [11, 12, 13, 14]），但对于高维中的相互作用多粒子系统，似乎仍然缺乏此类结果（例如， [15]中也指出了这一点）。从这个意义上说，我们将本文结果视为朝这一方向迈出的第一步。

本文结构安排如下:

在第2节中，我们将介绍阐述主要结果所需的背景知识。我们尽可能简明扼要，同时提供更详细论述的参考资料。

在第3节中，我们陈述主要结果。第一个结果——定理 3.1——是组合性的，也是证明后续关于纠缠熵（EE）标度行为界的关键工具。这些界见定理3.3和3.4。

随后，在第4节中，我们介绍主要定理后续证明所需的已有结果：关于谱投影的确定性界（命题 4.1）、关于纠缠熵（EE）的初步确定性估计（命题 4.2），以及谱投影期望值的估计（引理 4.3）。

接着，我们将在第5节引入层集的概念——它们使得
最后，主要定理 3.1、3.3 和 3.4 的证明见第6节。

2. The model and relevant concepts

2.1. 一般图上的 XXZ 哈密顿量。我们考虑一般图上的自旋-1/2XXZ模型，并将证明液滴态纠缠熵缩放行为的估计。设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是一个可数、连通且无向的图，其最大度数有界。我们将 $\mathcal{V}$ 中的顶点视为自旋所在的位置，而边集 $\mathcal{E}$ 描述自旋之间存在相互作用的位置。设 $V\colon \mathcal{V} \to [0,\infty)$ 是任意一个非负函数，我们称其为背景势。那么，作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}} = \bigotimes_{u\in\mathcal{V}} \mathbb{C}^2$ 上的 XXZ 哈密顿量 $H_{\mathcal{G}}(V)$ 形式上定义为

$$H_{\mathcal{G}}(V) = \sum_{\{u,v\}\in\mathcal{E}} \left(-\frac{1}{\Delta}(S_u^1 S_v^1 + S_u^2 S_v^2) + \frac{1}{4} - S_u^3 S_v^3 \right) + \sum_{u\in\mathcal{V}} V(u) \left(\frac{1}{2} - S_u^3 \right), \quad (2.1)$$

其中 $\Delta > 1$、S^1、S^2 和 S^3 是自旋-1/2 矩阵，定义如下

$$S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ and } S^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

对于任意 $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$，我们采用通常的约定：$A_u$ 在张量积中对应于 $u \in \mathcal{V}$ 的分量上作用为 A，在所有其他因子上作用为恒等算子。注意，如果 $\mathcal{G}$ 是无限图，那么严格定义 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$ 和 $H_{\mathcal{G}}$需要更多工作。关于这一点的详细信息，请参见 [1], ，其中给出了显式构造，并将 $H_{\mathcal{G}}$ 描述为离散的多粒子薛定谔算符的直和。

$H_{\mathcal{G}}(V)$的一个重要特征是总磁化强度或粒子数守恒。定义总粒子数算符 $\mathcal{N}_{\mathcal{G}} := \sum_{u\in\mathcal{V}} \left(\frac{1}{2} - S_u^3\right)$后，容易验证 $[H_{\mathcal{G}}, \mathcal{N}_{\mathcal{G}}] = 0$。同样容易看出 $\sigma(\mathcal{N}_{\mathcal{G}}) \subset \{0, 1, 2, \dots\}$。于是，将与一个 $N \in \sigma(\mathcal{N}_{\mathcal{G}})$相对应的 $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ 特征子空间解释为“N个自旋向下”或“N粒子子空间”，记作 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}^N$。此外，我们引入记号 $H_{\mathcal{G}}^N(V) := H_{\mathcal{G}}(V) \restriction_{\mathcal{H}_{\mathcal{G}}^N}$；不过，在方便时，记号中会省略对 $\mathcal{G}$和 V的依赖，直接写作 H、H^N 等。

2.2. 条带上的XXZ模型。本文考虑长度为 2ℓ、宽度为 M的条带上的XXZ模型，即 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, 2\ell\} \times \{1, 2, \dots, M\}$。对于$x$、$y \in \mathcal{V}$，令 $d(x, y) := |x - y|_1$。那么，该图的边集 $\mathcal{E}$ 由$\mathcal{E} = \{\{u, v\} \subset \mathcal{V}$给出：$d(y, v) = 1\}$。为方便后续讨论，我们还引入宽度为 M的无限条带，其定义为 $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z} \times \{1, 2, \dots, M\}$。

我们将证明关于二分划分 $\mathcal{V} = \Lambda_\ell \cup \Lambda_\ell^c$的纠缠熵界，其中

$$\Lambda_\ell := \{1, 2, \dots, \ell\} \times \{1, 2, \dots, M\}. \quad (2.3)$$

此外，对于任意 $\delta > 0$，引入液滴区间（参见 [9]）

$$I_\delta = \left[\left(1 - \tfrac{1}{\Delta}\right) M, \left(1 - \tfrac{1}{\Delta}\right) (M + 1 - \delta) \right]. \quad (2.4)$$

对于本文给出的结果，我们将讨论范围限定在粒子数 N为 $N = kM$形式的情形，其中 $k \in \{M, M+1, \dots\}$，并引入相应的粒子数集合，定义为

$$\mathfrak{N} := \{kM : k \in \{M, M+1, M+2, \dots\}\}. \quad (2.5)$$

我们的主要结果将是关于属于 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}^N(V)$ 的液滴态的论述，其中 $N \in \mathfrak{N}$。为此，令 $\mathcal{Q}_\delta(V) := \mathrm{ran}\,(1_{I_\delta}(H_{\mathcal{G}}(V)))$ 表示相应的谱

子空间 $H_{\mathcal{G}}(V)$，其对应于 I_δ。此外，令 $Q_\delta(V)$ 表示到 $\mathcal{Q}_\delta(V)$ 上的正交投影。我们将 $\mathcal{Q}_\delta$ 的元素称为液滴态。我们还定义到 N 粒子子空间的限制：
$Q_\delta^N = Q_\delta \restriction_{\mathcal{H}^N}$ 以及 $\mathcal{Q}_\delta^N := \mathrm{ran}(Q_\delta^N)$。

备注 2.1。为简化表述，我们作出了一些假设。利用我们的方法，也可以对更一般的准一维图得到类似结果，例如 $\mathbb{Z}\times\{1,2,\dots,M\}^d$，或更一般地说：$\mathbb{Z}\times\mathcal{K}$，其中 $\mathcal{K}$ 是有限的。此外，我们还可以为对应于稍大能量区间的态，以及其他粒子数（而不只是矩形构型）的态，得到纠缠熵的界。主要区别在于，命题 4.1 中到最近矩形构型的距离必须替换为到稍复杂构型的距离——这只会使下文定理 3.1 和引理 6.1 中给出的组合论论证更复杂。最后，也可以考虑二分划分，其中 $|\Lambda_\ell| = q|\mathcal{V}|$ 对任意 $q \in (0,1)$ 都成立。同样，为求简洁，我们只介绍 $q = 1/2$ 的情形。

2.3. 纠缠熵。设 $\mathcal{H}_{\Lambda_\ell}$ 为对应于子区域 $\Lambda_\ell \subset \mathcal{V}$ 的希尔伯特空间，并将 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}} = \mathcal{H}_{\Lambda_\ell} \otimes \mathcal{H}_{\Lambda_\ell{}^c}$ 分解。对于任意归一化态 $\psi \in \mathcal{H}_{\mathcal{G}}$ 及其对应的密度矩阵 $\psi\langle\psi,\ \cdot\rangle$，约化态 $\rho_{\psi;\ell}$：$\mathcal{H}_{\Lambda_\ell^c} \to \mathcal{H}_{\Lambda_\ell^c}$ 定义为对 $\psi\langle\psi\,\cdot\rangle$ 关于 $\mathcal{H}_{\Lambda_\ell}$ 求偏迹（更多细节参见 [1] 或 [6]）。则 ψ 关于二分划分 $\mathcal{V} = \Lambda_\ell \cup \Lambda_\ell^c$ 的纠缠熵 $\mathscr{E}(\psi;\ell)$ 定义为 $\rho_{\psi;\ell}$ 的冯·诺依曼熵，即

$$\mathscr{E}(\psi;\ell) = -\operatorname{tr}(\rho_{\psi;\ell}\log\rho_{\psi;\ell})\,. \tag{2.6}$$

此外，对于任意 $\alpha \in (0,1)$，令 $\mathscr{E}_\alpha(\psi;\ell) := \frac{1}{1-\alpha}\log\operatorname{tr}(\rho_{\psi;\ell}^\alpha)$ 表示 $\rho_{\psi;\ell}$ 的 α-Rényi 熵。众所周知，对于任意 $\alpha \in (0,1)$，$\mathscr{E} \le \mathscr{E}_\alpha$。

2.4. 构型。为描述向下自旋的构型，我们引入以下记号：设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ 和 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ 都是 $\mathcal{V}$ 的子集 —— 或称 "N 粒子构型"—— 且各自恰好包含 N 个元素（下文也称为"粒子"）。任意两个这样的 N粒子构型之间的距离 $d_N(\cdot,\cdot)$ 定义为（参见 [9]）

$$d_N(X,Y) = \min_{\pi\in S_N}\sum_{i=1}^N d(x_i, y_{\pi(i)})\,, \tag{2.7}$$

其中，S_N 是 N 个元素的置换群。若 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 是 N粒子构型的集合，则 $d_N(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \min_{X\in\mathcal{A},\ Y\in\mathcal{B}} d_N(X,Y)$。

对于任意构型 $X \subset \mathcal{V}$，我们定义

$$\chi_{\{X\}} := \left(\prod_{u\in X}\left(\frac{1}{2} - S_u^3\right)\right)\left(\prod_{u\in\mathcal{V}\setminus X}\left(\frac{1}{2} + S_u^3\right)\right)\,, \tag{2.8}$$

这是投影到由与如下构型对应的向量张成的线性空间上的秩一正交投影：该构型仅在顶点 X 处有向下自旋，其余各处均为向上自旋（另见 [8]）。此外，对于任意一组这样的构型 $\mathcal{A}$，我们定义

$$\chi_{\mathcal{A}} := \sum_{X\in\mathcal{A}}\chi_{\{X\}}\,. \tag{2.9}$$

若 N 是 M 的整数倍，即 $N = kM$，其中 $k \in \mathbb{N}$，令 R_i^N 表示以下矩形粒子构型：

$$R_i^N = \{i, i+1, \ldots, i+k-1\} \times \{1, 2, \ldots, M\} . \tag{2.10}$$

对于任意 $z \in \mathbb{Z}$，我们还将使用以下记号来描述矩形的平移：$R_i^N + z := R_{i+z}^N$。此外，$\mathcal{R}^N$ 表示 $\mathcal{V}$ 上所有此类矩形构型的集合。注意，对于任意一组包含 N 个粒子的构型 $\mathcal{A}$，这意味着

$$d_N(\mathcal{A}, \mathcal{R}^N) = \min_{z \in \mathbb{Z}} d_N(\mathcal{A}, R + z) , \tag{2.11}$$

其中，$R \subset \mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$ 是任意满足 $|R| = N$ 的矩形构型。最后，给定非负背景势 V，我们引入所有势足够小的矩形构型所组成的集合：

$$\mathcal{R}_V^N = \left\{ R \in \mathcal{R}_N : \sum_{x \in R} V(x) < 1 \right\} . \tag{2.12}$$

3. Main results

现在我们陈述主要定理。本文使我们能够证明下述定理的主要新贡献，是以下组合学结果：

定理 3.1. 设 $R = R_i^N$ 为任意矩形构型，且满足 $N = |R| \in \mathfrak{N}$。那么对于任意 $\mu > 0$，我们有

$$f(R, \mu) := \sum_{X \subset \mathcal{V}_{\mathbb{Z}} : |X| = N} e^{-\mu d_N(X, R)} \leq \left(1 + \frac{2M}{\mu}\right) e^{\frac{4M}{\mu}} . \tag{3.1}$$

注 3.2.

下一个定理给出了 H^N 的液滴态的对数上界，其中 $N \in \mathfrak{N}$，且该上界与背景势无关。

定理 3.3. 对任意非负的 V 以及任意 $\delta > 0$，都有

$$\limsup_{\ell \to \infty} \left(\frac{\sup_{N \in \mathfrak{N}} \sup \left\{ \mathscr{E}(\psi; \ell) : \psi \in \mathcal{Q}_\delta^N, \|\psi\| = 1 \right\}}{\log \ell} \right) \leq 1 . \tag{3.2}$$

最后一个结果讨论了 V 为随机变量的情形：

定理 3.4. 设 $\delta > 0$，并设 $\{\nu_x\}_{x \in \mathcal{V}_{\mathbb{Z}}}$ 为一列独立同分布的非负随机变量，使得 $\mathbb{P}(\nu = 0) \neq 1$。令随机背景势为 $V_\omega(x) = \nu_x$。那么，存在一个常数 $K = K(\Delta, \delta) < \infty$，使得

$$\sup_{\ell} \mathbb{E} \left[\sup_{N \in \mathfrak{N}} \sup \left\{ \mathscr{E}(\psi; \ell) : \psi \in \mathcal{Q}_\delta^N, \|\psi\| = 1 \right\} \right] \leq K . \tag{3.3}$$

4. Previous results needed for the proofs

为了证明主要结果，我们需要几个此前已证明的命题。其中一些命题是针对更一般的图陈述的，另一些则针对一维链（对应于 $M = 1$）证明。由于处理 $M > 1$ 情形所需的修改十分直接，我们仅为命题 4.1 和 4.2 提供此前证明的参考文献。引理 4.3 的一个版本见 [2, 引理 1.2], ，不过我们的结果更一般，且可由更简单的论证推出。

命题 4.1。设 $N \in \mathfrak{N}$、$\delta > 0$ 和 V 是任意非负背景势。那么，对于任意一组 N 粒子构型 $\mathcal{A}$，我们得到以下界

$$\|\chi_{\mathcal{A}} Q_\delta^N(V)\| \leq C \exp(-\mu d_N(\mathcal{A}, \mathcal{R}_V^N)) \leq C \exp(-\mu d_N(\mathcal{A}, \mathcal{R}^N)) \,, \tag{4.1}$$

其中常数 C 和 μ 定义如下

$$C = \frac{3\sqrt{5}}{2} \frac{(2M+1)^{3/2}}{\min\{1, \delta^{3/2}\}} \quad \textit{and} \quad \mu = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\delta\Delta}{4M+2}\right) \tag{4.2}$$

而 $\mathcal{R}_V$ 是矩形构型的集合

证明。这是 [1, 引理 4.1], 中一般结果的直接推论，因为根据 [9, 引理 B.2] ，矩形构型使条带上的边缘表面最小。另请参见 [1, 备注 3.4] ，其中讨论了添加任意非负背景势的情形。□

为了陈述下一个结果，我们引入构型集合 $\mathcal{A}_{X,\ N}$；对于任意 $N \in \mathbb{N}$、$X \subset \Lambda_\ell^c$，其中 $|X| \leq N$，该集合定义为

$$\mathcal{A}_{X,N} = \{X \cup Z : Z \subset \Lambda_\ell, |X| + |Z| = N\} \,. \tag{4.3}$$

命题 4.2. 设 $\delta > 0$、$N \in \mathfrak{N}$ 和 $\alpha \in (0, 1)$。那么，对于任意归一化的 $\psi \in \mathcal{Q}_\delta^N$，我们得到以下估计：

$$\mathrm{tr}\left(\rho_{\psi;\ell}^\alpha\right) \leq 6 + 2 \sum_{j=1}^{|\Lambda_\ell^c|-1} \sum_{X \subset \Lambda_\ell^c : |X| = j} \left\|\chi_{\mathcal{A}_{X,N}} \psi\right\|^{2\alpha} \,. \tag{4.4}$$

证明。这可由与 [1,第5节中给出的论证完全类似的论证得到，直至并包括公式 (5.14)]。□

引理 4.3. 设 $\{\nu_x\}_{x \in \mathcal{V}_\mathbb{Z}}$ 是一列相互独立且同分布的非负随机变量，满足 $\mathbb{P}(\nu = 0) \neq 1$。令随机背景 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 势为 $V_\omega(x) = \nu_x$。那么，存在常数 $C = C(\delta, \Delta, \mathbb{P})$ 和 $\lambda = \lambda(\delta, \Delta, \mathbb{P}) < 1$，使得对于任意 $X \in \Lambda_\ell^c$，其中 $|X| = j$，都有

$$\mathbb{E}\left(\|\chi_{\mathcal{A}_{X,N}} Q_\delta^N(V_\omega)\|\right) \leq \tilde{C} \lambda^j \,. \tag{4.5}$$

证明。由于 $\mathbb{P}(\nu = 0) \neq 1$，存在 $k \in \mathbb{N}$ 和 $p > 0$，使得 $\mathbb{P}(\nu \geq 1/k) = p$。现在，对每个 $x \in \mathcal{V}_\mathbb{Z}$，引入伯努利随机变量 Y_x：当 $\nu_x \geq 1/k$ 时其取值为 1（概率为 p），否则取值为 0（概率为 $1 - p$）。那么，对于任意满足 $|X| = j$ 的 $X \subset \Lambda_\ell^c$，我们有

$$d_N(\mathcal{A}_{X,N}, \mathcal{R}_{V_\omega}^N) \geq \sum_{x \in X} Y_x(\omega) - (k-1) \,. \tag{4.6}$$

注意到 $\sum_{x\in X} Y_x$ 统计了 X 中背景势至少为 $1/k$ 的格点数，即可看出这一点。因此，若 $\sum_{x\in X} Y_x \geq k$，就意味着不存在满足 $X \subset R$ 的矩形构型 $R \in \mathcal{R}_V^N$。至少有 $\sum_{x\in X} Y_x(\omega) - (k-1)$ 个粒子必须各自移动一步或多步，才能到达 $\mathcal{R}_{V_\omega}^N$ 中的某个构型，由此可推出 (4.6)。因此，利用命题 4.2，我们得到

$$\mathbb{E}\left(\|Q_\delta^N(V_\omega)\chi_{\mathcal{A}_{X,N}}\|\right) \leq C\cdot\mathbb{E}(\exp(-\mu d_N(\mathcal{A}_{X,N},\mathcal{R}_{V_\omega}^N))) \tag{4.7}$$

$$\leq Ce^{\mu(k-1)}\mathbb{E}\left[\exp\left(-\mu\sum_{x\in X}Y_x(\omega)\right)\right] = \tilde{C}\left(1-p+pe^{-\mu}\right)^{|X|} = \tilde{C}\lambda^j\,, \tag{4.8}$$

其中 $\lambda := (1-p+pe^{-\mu}) < 1$ 和 $\tilde{C} := Ce^{\mu(k-1)}$。 □

5. Level Sets

对于矩形构型 $R_i^{kM} = \{i, i+1, \ldots, i+k-1\}\times\{1,2,\ldots,M\}$，其内部边界定义为

$$\partial^{in}R_i^{kM} = \{i\}\times\{1,2,\ldots,M\}\cup\{i+k-1\}\times\{1,2,\ldots,M\}\,. \tag{5.1}$$

定义 5.1。设 $R \subset \mathcal{V}_\mathbb{Z}$ 是一个矩形构型。我们将层函数 $L_R\colon \mathcal{V}_\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 定义为

$$L_R(x) = \begin{cases} d(x,\partial^{in}R) & \text{if } x\notin R \\ -d(x,\partial^{in}R) & \text{if } x\in R \end{cases} \tag{5.2}$$

$L_R^{-1}(n)$ 的原像称为 R 的层，而量 $L_n(R) = |L_R^{-1}(n)|$ 称为 R 的层的大小。注意，非正层只有有限多个。

定义 5.2。若 e_n 对 $\mathcal{V}_\mathbb{Z}$ 的枚举是层次保持的，则称其为

- $e_1 \in L_R^{-1}(\min\{n\in\mathbb{Z} : L_R^{-1}(n)\neq\emptyset\})$.
- $L_R(e_n) \geq L_R(e_m)$ *if and only if* $n \geq m$.

引理 5.3. 设 R 是一个具有 $|R| = N$ 的矩形构型，并设 e_n 是 $\mathcal{V}_\mathbb{Z}$ 的层次保持枚举。我们有以下不等式:

$$\sum_{\substack{X\subset\mathcal{V}_\mathbb{Z}\\|X|=N}} e^{-\mu d_N(X,R)} \leq \sum_{j=0}^{N}\left(\sum_{\substack{X\subset\mathcal{V}_\mathbb{Z}\setminus R\\|X|=j}} e^{-\mu\sum_{x\in X}d(x,\partial^{in}R)}\right)\left(\sum_{\substack{Y\subset R\\|X|=j}} e^{-\mu\sum_{y\in Y}d(y,\partial^{in}R)}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{N}\left(\sum_{N<x_1<\cdots<x_j} e^{-\mu(L_R(e_{x_1})+\cdots L_R(e_{x_j}))}\right)\left(\sum_{0<y_1<\cdots<y_j\leq N} e^{-\mu(|L_R(e_{y_1})|+\cdots|L_R(e_{y_j})|)}\right) \tag{5.3}$$

证明。将 X 分解为 $X_{in}\cup X_{out}$，分别对应于 X 中位于 R内部或外部的元素。如果构型 X 沿着一条最短路径移动到 R，那么 X_{out} 中的每个元素/粒子最终都必须经过 $\partial^{in}R$ –因此对 X 与 R 之间的距离 $d_N(X,R)$至少贡献 $\sum_{x\in X} d(x,\partial^{in}R)$。现在，对于 X_{in}中的粒子，即那些已经位于矩形 R内部的粒子，考虑 $Y = R\setminus X_{in}$ —— “空穴”的互补构型。最终,

每个这样的空穴都必须移动到 R的外部，因此对距离$d_N(X,R)$至少贡献$\sum_{y\in Y} d(y,\partial^{in}R)$。因此，

$$d(X,R) \geq \sum_{x\in X} d(x,\partial^{in}R) + \sum_{y\in Y} d(y,\partial^{in}R). \tag{5.4}$$

第一个不等式随即得到。第二个等式源于层函数以及尊重层级的枚举的定义。特别要注意，每个由 j 粒子组成的构型都可实现为枚举 e_n 中 j 个元素的有序子集。此外，由于 e_n 尊重层级，我们有 $e_{N+1} \notin R$，而 $e_N \in R$。□

6. Proof of the main results

在继续证明定理 3.1、3.3 和 3.4 之前，我们还需要一个技术引理。

引理 6.1。设 $R \subset \mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$ 是一个满足 $|R| = N = kM$的矩形构型。则有

$$\sum_{\substack{|X|=j \\ X\subset \mathcal{V}_{\mathbb{Z}}\setminus\Lambda_\ell}} \exp\left(-\mu \min_{z\in\mathbb{Z}} \left(d_N(\mathcal{A}_{X,N}, R+z)\right)\right) \leq \frac{8f(R,\frac{\mu}{2})}{1-e^{-\frac{\mu}{2}}}. \tag{6.1}$$

证明。为方便起见，记 $\Lambda = \Lambda_\ell$。我们首先将 $\mathbb{Z}$ 划分为三个互不相交的子集：

(i) $M_1 = \{z \in \mathbb{Z} : (R+z) \subset \mathcal{V}_{\mathbb{Z}} \setminus \Lambda\}$(ii) $M_2 = \{z \in \mathbb{Z} : (R+z) \cap \partial^{in}\Lambda \neq \emptyset\}$(iii) $M_3 = \{z \in \mathbb{Z} : (R+z) \cap \partial^{in}\Lambda = \emptyset$ 和 $(R+z) \subset \Lambda\}$

由于 R 是一个矩形，因此这确实是 $\mathbb{Z}$的一个划分。对于 $j \in \{1,2,\ldots,N-1\}$的任意固定值，我们有

$$\sum_{\substack{|X|=j \\ X\subset \mathcal{V}_{\mathbb{Z}}\setminus\Lambda_\ell}} \exp\left(-\mu \min_{z\in\mathbb{Z}} \left(d_N(\mathcal{A}_{X,N}, R+z)\right)\right) \tag{6.2}$$

$$\leq \sum_{z\in M_1\sqcup M_2\sqcup M_3} \sum_{\substack{|X|=j \\ X\subset \mathcal{V}_{\mathbb{Z}}\setminus\Lambda_\ell}} \exp\left(-\mu d_N(\mathcal{A}_{X,N}, R+z)\right). \tag{6.3}$$

首先，考虑来自 $z \in M_1$的各项对总和的贡献。我们再次将 M_1划分为若干子集，M_1^r对应于 $r = 1$、2、.....，其中

$$M_1^r = \{z \in M_1 : (R+z) \cap L_r(\Lambda) \neq \emptyset, \text{ and } m < r \text{ implies } (R+z) \cap L_m(\Lambda) = \emptyset\}. \tag{6.4}$$

因此，如果 $z \in M_1^r$，那么 $R+z$，且 Λ 的 r^{th} 层集与其有非空交集，而 $R+z$ 与任意较低层的交集均为空。显然， $M_1 = \bigsqcup_{r=1}^{\infty} M_1^r$，并且 $|M_1^r| \leq 2$。注意，如果 $z \in M_1^r$，那么 $d(X \cup Z, R+z) \geq |Z|r$。

由此观察可得估计

$$\begin{aligned}
&\sum_{z\in M_1}\sum_{\substack{|X|=j\\ X\subset\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}\setminus\Lambda_\ell}} \exp\left(-\mu d_N(\mathcal{A}_{X,N},R+z)\right)\\
=&\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{z\in M_1^r}\sum_{\substack{|X|=j\\ X\subset\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}\setminus\Lambda_\ell}} \exp\left(-\mu d_N(\mathcal{A}_{X,N},R+z)\right) \qquad (6.5)\\
\le&\sum_{r=1}^{\infty}2e^{-\frac{\mu}{2}r(N-j)}\sum_{\substack{|X|=j\\ X\subset\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}\setminus\Lambda_\ell}} \exp\left(-\tfrac{\mu}{2}d(\mathcal{A}_{X,N},R+\hat{z}_r)\right) \qquad (6.6)\\
\le&\sum_{r=1}^{\infty}2e^{-\frac{\mu}{2}r(N-j)}f(R,\tfrac{\mu}{2})=2f(R,\tfrac{\mu}{2})\frac{e^{-\frac{\mu}{2}(N-j)}}{1-e^{-\frac{\mu}{2}(N-j)}} \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

在 (6.6) 中，我们估计了 $d_N(\mathcal{A}_{X,\ N},R+z)\ge\frac{1}{2}d_N(\mathcal{A}_{X,\ N},R+z)+\frac{1}{2}(N-j)r$。此外，$\hat{}z_r$ 表示 M_1^r 中使 $\exp(-\mu d_N(\mathcal{A}_{X,\ N},R+z))$ 取最大值的元素，并且由于 $|M_1^r|\le 2$，不等式 (6.6) 得证。

现在我们关注 $z\in M_2$ 的情形。我们立即得到 $|M_2|\le 2k$。我们进一步将 M_2 划分为互不相交的子集 M_2^r，如下所示

$$M_2^r:=\{z\in M_2:|(R+z)\cap(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}\setminus\Lambda)|=r\}. \qquad (6.8)$$

因此，如果 $z\in\mathcal{M}_2^r$，那么在 $R+z$ 中包含 r 个不属于 Λ 的元素，以及 $(N-r)$ 个也属于 Λ 的元素。显然，我们还有 $|M_2^\ell|\le 2$。通过与前面类似的推理，我们得到估计式

$$\begin{aligned}
\sum_{z\in M_2}\sum_{\substack{X\subset\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}\setminus\Lambda\\ |X|=j}}\exp\left(-\mu d(\mathcal{A}_{X,N},R+z)\right)&=\sum_{r=0}^{N-1}\sum_{z\in M_2^r}\sum_{\substack{|X|=j\\ X\subset\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}\setminus\Lambda}}\exp\left(-\mu d(\mathcal{A}_{X,N},R+z)\right)\\
&\le\sum_{\ell=0}^{N-1}2e^{-\frac{\mu}{2}|j-\ell|}f(R,\tfrac{\mu}{2})\le 2f(R,\tfrac{\mu}{2})\frac{2}{1-e^{-\frac{\mu}{2}}}\,.
\end{aligned}$$

我们可以完全类似于对 $z\in M_1$ 的处理方式来估计对 $z\in M_3$ 的求和。为此，根据 $R+z$ 非平凡相交的最高（负）层级对 M_3 进行划分，最终得到与 (6.7) 相同的估计。结合 (6.7) 和 (6.9)，我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{|X|=j\\ X\subset\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}\setminus\Lambda}}\exp\left(-\mu\min_{z\in\mathbb{Z}}\left(d(\mathcal{A}_{X,N},R+z)\right)\right)&\le 4f(R,\tfrac{\mu}{2})\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{\mu}{2}}}+\frac{e^{-\frac{\mu}{2}(N-j)}}{1-e^{-\frac{\mu}{2}(N-j)}}\right)\\
&\le\frac{8f(R,\frac{\mu}{2})}{1-e^{-\frac{\mu}{2}}}. \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

□

6.1. 定理 3.1 的证明。

证明。首先，注意到

$$L_R(e_n)\ge\frac{1}{2M}(n-N). \qquad (6.10)$$

这是因为对于 $n \le N$，我们有 $L_R(e_n) \le 0$。对于较大的 n，注意到每个层集的大小由 $L_n(R) = 2M$ 给出，这便推出了 (6.10)。

应用引理 5.3，我们得到不等式

$$\sum_{\substack{X\subset\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}\\|X|=N}} e^{-\mu d_N(X,R)} \le \sum_{j=0}^{N} \left(\sum_{N<x_1<\cdots<x_j} e^{-\mu\sum_k L_R(e_{x_k})} \right) \left(\sum_{0<y_1<\cdots<y_j\le N} e^{-\mu\sum_k |L_R(e_{y_k})|} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{N} (I)(II) \tag{6.11}$$

我们将应用 (6.10) 来估计 (I) 和 (II)。首先估计 (I)。

$$(I) \le \sum_{N<x_1<\cdots<x_j} e^{-\frac{\mu}{2M}\sum_{k=1}^{j}(x_k-N)} \tag{6.12}$$

$$= e^{\frac{\mu j N}{2M}} \sum_{N<x_1<\cdots<x_j} e^{-\frac{\mu}{2M}\sum_{k=1}^{j} x_k}.$$

通过积分来估计该和：

$$\sum_{N<x_1<\ldots x_j} e^{-\frac{\mu}{2M}\sum_k x_k} \le \int_N^\infty dx_1 e^{-\frac{\mu}{2M}x_1} \int_{x_1}^\infty dx_2 e^{-\frac{\mu}{2M}x_2} \cdots \int_{x_{j-1}}^\infty dx_j e^{-\frac{\mu}{2M}x_j} \tag{6.13}$$

$$= \left(\frac{2M}{\mu}\right)^j \int_{\frac{\mu N}{2M}}^\infty dt_1 e^{-t_1} \int_{t_1}^\infty dt_2 e^{-t_2} \cdots \int_{t_{j-1}}^\infty dt_j e^{-t_j}$$

$$= \frac{1}{j!}\left(\frac{2M}{\mu}\right)^j e^{-\frac{j\mu N}{2M}}. \tag{6.14}$$

接下来，我们估计 (II)。首先重新编号，$z_k = N - y_{j+1-k}$。

$$(II) \le \sum_{0<y_1<\cdots<y_j\le N} e^{-\frac{\mu}{2M}\sum_k (N-y_k)} = \sum_{0\le z_1<\cdots<z_j<N} e^{-\frac{\mu}{2M}\sum_k z_k}. \tag{6.15}$$

我们有

$$(II) \le \sum_{0\le z_1<\cdots<z_j<N} e^{-\frac{\mu}{2M}\sum_k z_k} \tag{6.16}$$

$$= \sum_{0<z_2<\cdots<z_j\le N} e^{-\frac{\mu}{2M}\sum_{k\ge 2} z_k} + \sum_{0<z_1<\cdots<z_j\le N} e^{-\frac{\mu}{2M}\sum_k z_k} = (A) + (B).$$

我们通过积分估计这两项（A）和（B）：

$$(A) \le \int_0^\infty dz_2 e^{-\frac{\mu}{2M}z_2} \int_{z_2}^\infty dz_3 e^{-\frac{\mu}{2M}z_3} \cdots \int_{z_{j-1}}^\infty dz_j e^{-\frac{\mu}{2M}z_j} = \frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{2M}{\mu}\right)^{j-1} \tag{6.17}$$

$$(B) \le \int_0^\infty dz_1 e^{-\frac{\mu}{2M}z_1} \int_{z_1}^\infty dz_2 e^{-\frac{\mu}{2M}z_2} \cdots \int_{z_{j-1}}^\infty dz_j e^{-\frac{\mu}{2M}z_j} = \frac{1}{j!}\left(\frac{2M}{\mu}\right)^j.$$

因此，我们得到

$$(II) \leq (A) + (B) \leq \frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{2M}{\mu}\right)^{j-1} + \frac{1}{j!}\left(\frac{2M}{\mu}\right)^{j} = \frac{1}{j!}\left(1+\frac{j\mu}{2M}\right)\left(\frac{2M}{\mu}\right)^{j}. \tag{6.18}$$

利用这些估计，我们得到

$$\sum_{j=0}^{N}(I)(II) \leq \sum_{j=0}^{N}\frac{1}{(j!)^2}\left(1+\frac{j\mu}{2M}\right)\left(\frac{2M}{\mu}\right)^{2j} e^{-\frac{j\mu N}{2M}} \tag{6.19}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N}\frac{1}{(j!)^2}\left(1+\frac{j\mu}{2M}\right)\left(\frac{2M}{\mu}\right)^{2j} \tag{6.20}$$

$$\leq \exp\left(\frac{4M}{\mu}\right) + \sum_{j=0}^{N}\frac{j\mu}{2M}\left(\frac{2M}{\mu}\right)^{2j}\frac{1}{(j!)^2} \tag{6.21}$$

$$\leq \exp\left(\frac{4M}{\mu}\right) + \frac{2M}{\mu}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2M}{\mu}\right)^{2j}\frac{1}{(j!)^2} \leq \left(1+\frac{2M}{\mu}\right)e^{\frac{4M}{\mu}}. \tag{6.22}$$

□

6.2. 定理 3.3 的证明。

证明。对于任意 $j \in \{1,2,\ldots,|\Lambda_\ell^c|-1\}$，我们使用命题 4.1 进行估计

$$\sum_{X\subset\Lambda_\ell^c:|X|=j}\|\chi_{\mathcal{A}_{X,N}}\psi\|^{2\alpha} = \sum_{X\subset\Lambda_\ell^c:|X|=j}\|\chi_{\mathcal{A}_{X,N}}Q_\delta^N\psi\|^{2\alpha} \tag{6.23}$$

$$\leq \sum_{X\subset\Lambda_\ell^c:|X|=j}\|\chi_{\mathcal{A}_{X,N}}Q_\delta^N\|^{2\alpha} \leq C^{2\alpha}\sum_{X\subset\Lambda_\ell^c:|X|=j}\exp(-2\alpha\mu d_N(\mathcal{A}_{X,N},\mathcal{R}^N)). \tag{6.24}$$

由于 $\Lambda_\ell^c \subset \mathcal{V}_\mathbb{Z}\setminus\Lambda_\ell$，我们得到

$$(6.24) \leq C^{2\alpha}\sum_{X\subset\mathcal{V}_\mathbb{Z}\setminus\Lambda_\ell:|X|=j}\exp(-2\alpha\mu d_N(\mathcal{A}_{X,N},\mathcal{R}^N)) \tag{6.25}$$

$$\leq \frac{8C^{2\alpha}f(R,\mu\alpha)}{1-e^{-\mu\alpha}} \leq \frac{8C^{2\alpha}}{1-e^{-\mu\alpha}}\left(1+\frac{2M}{\mu\alpha}\right)e^{\frac{4M}{\mu\alpha}}, \tag{6.26}$$

其中，倒数第二个估计用到了引理 6.1，最后一个估计用到了定理 3.1。结合 (4.4)，可得估计

$$\mathscr{E}(\psi;\ell) \leq \mathscr{E}_\alpha(\psi;\ell) = \frac{1}{1-\alpha}\log\left(\mathrm{tr}(\rho_{\psi;\ell}^\alpha)\right) \tag{6.27}$$

$$\leq \frac{1}{1-\alpha}\log\left(6+\frac{16C^{2\alpha}}{1-e^{-\mu\alpha}}\sum_{j=1}^{M\ell-1}\left(1+\frac{2M}{\mu\alpha}\right)e^{\frac{4M}{\mu\alpha}}\right) \tag{6.28}$$

$$\leq \frac{1}{1-\alpha}\log\left(6+\frac{16C^{2\alpha}}{1-e^{-\mu\alpha}}M\ell\left(1+\frac{2M}{\mu\alpha}\right)e^{\frac{4M}{\mu\alpha}}\right), \tag{6.29}$$

对任意归一化的 $\psi \in \mathcal{Q}_\delta^N$，以及任意 $N \in \mathfrak{N}$，因此可得

$$\limsup_{\ell\to\infty}\left(\frac{\sup_{N\in\mathfrak{N}}\sup\left\{\mathscr{E}(\psi;\ell):\psi\in\mathcal{Q}_\delta^N,\|\psi\|=1\right\}}{\log\ell}\right) \tag{6.30}$$

$$\leq \frac{1}{1-\alpha}\limsup_{\ell\to\infty}\frac{\log\left(6+\frac{16C^{2\alpha}}{1-e^{-\mu\alpha}}M\ell\left(1+\frac{2M}{\mu\alpha}\right)e^{\frac{4M}{\mu\alpha}}\right)}{\log\ell}=\frac{1}{1-\alpha}\,. \tag{6.31}$$

由于这对任意 $\alpha\in(0,1)$ 都成立，因此可得 (3.2)。 □

6.3. 定理 3.4 的证明。

证明。利用命题 4.1，我们估计

$$\sum_{j=1}^{|\Lambda_\ell^c|-1}\sum_{X\subset\Lambda_\ell^c:|X|=j}\|\chi_{\mathcal{A}_{X,N}}Q_\delta^N(V_\omega)\|^{2\alpha} \tag{6.32}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{|\Lambda_\ell^c|-1}\sum_{X\subset\Lambda_\ell^c:|X|=j}\|\chi_{\mathcal{A}_{X,N}}Q_\delta^N(V_\omega)\|^{\alpha}C^\alpha\exp(-\alpha\mu d_N(\mathcal{A}_{X,N},\mathcal{R}^N))\,. \tag{6.33}$$

由詹森不等式和引理 4.3 可得：

$$\mathbb{E}\left[\|\chi_{\mathcal{A}_{X,N}}Q_\delta^N(V_\omega)\|^{\alpha}C^\alpha\exp(-\alpha\mu d_N(\mathcal{A}_{X,N},\mathcal{R}^N))\right] \tag{6.34}$$

$$\leq C^\alpha\exp\left(-\alpha\mu d_N(\mathcal{A}_{X,N},\mathcal{R}^N)\right)\left[\mathbb{E}\left(\|\chi_{\mathcal{A}_{X,N}}Q_\delta^N(V_\omega)\|\right)\right]^\alpha \tag{6.35}$$

$$\leq C^\alpha\tilde{C}^\alpha(\lambda^\alpha)^{|X|}\exp\left(-\alpha\mu d_N(\mathcal{A}_{X,N},\mathcal{R}^N)\right)\,. \tag{6.36}$$

对 $6+2\times$ (6.33) 取期望（参见 (4.4)），并利用此估计，便得到

$$\mathbb{E}\left[\sup_{N\in\mathfrak{N}}\sup_{\psi}\mathrm{tr}(\rho_{\psi;\ell}^\alpha)\right]\leq 6+2\sum_{j=1}^{|\Lambda_\ell^c|-1}\sum_{X\subset\Lambda_\ell^c:|X|=j}C^\alpha\tilde{C}^\alpha(\lambda^\alpha)^j\exp\left(-\alpha\mu d_N(\mathcal{A}_{X,N},\mathcal{R}^N)\right), \tag{6.37}$$

其中，“$\sup_\psi$”表示对 $\mathcal{Q}_\delta(V_\omega)$ 的所有归一化元素取上确界。但求和 $\sum_X\exp\left(-\frac{N}{}\alpha\mu d_N(\mathcal{A}_{X,\ N},\mathcal{R}^N)\right)$ 可以用与定理 3.3 证明中相同的方法进行估计。因此我们得到

$$\mathbb{E}\left[\sup_{N\in\mathfrak{N}}\sup_{\psi}\mathrm{tr}(\rho_{\psi;\ell}^\alpha)\right]\leq 6+2(C\tilde{C})^\alpha\frac{8}{1-e^{-\frac{\mu\alpha}{2}}}\left(1+\frac{4M}{\mu\alpha}\right)e^{\frac{8M}{\mu\alpha}}\sum_{j=1}^{M\ell-1}(\lambda^\alpha)^j \tag{6.38}$$

$$\leq 6+2(C\tilde{C})^\alpha\frac{8}{1-e^{-\frac{\mu\alpha}{2}}}\left(1+\frac{4M}{\mu\alpha}\right)e^{\frac{8M}{\mu\alpha}}\frac{\lambda^\alpha}{1-\lambda^\alpha}=:K_\alpha \tag{6.39}$$

其中 $K_\alpha=K_\alpha(\Delta,\delta,\mathbb{P})$。

取 $\alpha=1/2$，可得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{N\in\mathfrak{N}}\sup_{\psi}\mathscr{E}(\psi;\ell)\right]\leq\mathbb{E}\left[\sup_{N\in\mathfrak{N}}\sup_{\psi}\mathscr{E}_{1/2}(\psi;\ell)\right]=2\mathbb{E}\left[\sup_{N\in\mathfrak{N}}\sup_{\psi}\log\mathrm{tr}(\rho_{\psi;\ell}^{1/2})\right] \tag{6.40}$$

$$=2\mathbb{E}\left[\log\left(\sup_{N\in\mathfrak{N}}\sup_{\psi}\mathrm{tr}(\rho_{\psi;\ell}^{1/2})\right)\right]\leq 2\log\left[\mathbb{E}\left(\sup_{N\in\mathfrak{N}}\sup_{\psi}\mathrm{tr}(\mathrm{tr}(\rho_{\psi;\ell}^{1/2}))\right)\right]=2\log(K_{1/2})\,. \tag{6.41}$$

由于 $K_{1/2}$ 不依赖于 ℓ，对 ℓ 取上确界即可完成证明。□

致谢。CF 衷心感谢西蒙斯基金会通过 AMS-Simons 旅行资助提供的经费支持。

References

[1] H. Abdul-Rahman、C. Fischbacher 和 G. Stolz，《XXZ 量子自旋链中的纠缠界》，*Annales Henri Poincaré* **21**, 2327–2366 (2020). [2] V. Beaud 和 S. Warzel，《无序中吸引性硬核粒子的低能福克空间局域化》，*Annales Henri Poincaré* **18**, 3143–3166 (2017). [3] V. Beaud 和 S. Warzel，《XXZ 自旋链液滴态的纠缠熵界》，*J. Math. Phys.* **59**, 012109–1–11 (2018). [4] A. Elgart、A. Klein 和 G. Stolz，《无序 XXZ 自旋链中动力学局域化的表现》，*Commun. Math. Phys.* **361**, 1083–1113 (2018). [5] A. Elgart、A. Klein 和 G. Stolz，《随机 XXZ 量子自旋链液滴谱中的多体局域化》，*J. Funct. Anal.* **275**, 211–258 (2018). [6] C. Fischbacher 和 O. Ogunkoya：《高自旋 XXZ 链中的纠缠熵界》，《数学物理杂志》62 (2021), 101901. [7] C. Fischbacher 和 R. Schulte：《XXZ 自旋环的纠缠熵下界》，*Annales Henri Poincaré, to appear*.[8] C. Fischbacher 和 G. Stolz，《重新审视无限 XXZ 量子自旋链：低位谱带与谱隙的结构》，*Math. Model. Nat. Phenom.* **9**, 44–72 (2014). [9] C. Fischbacher 和 G. Stolz，《一般图上的量子 XXZ 自旋系统液滴态》，*J. Math. Phys.* **59**, 051901 (2018). [10] L. Fisher，《随机 XXZ 自旋-J 链的局域化与缺陷周期量子图中的嵌入特征值》，博士论文，加州大学欧文分校，2023年。[11] P. M¨uller、L. Pastur 和 R. Schulte，《增强型纠缠熵面积定律需要多少离域？》，*Commun. Math. Phys.* **376**, 649–679 (2020). [12] P. M¨uller 和 R. Schulte，《纠缠熵增强型面积定律的稳定性》(2020)，《昂利·庞加莱年鉴》21, 3639–3658 (2020). [13] P. Pfeiffer：《朗道哈密顿量纠缠熵面积定律的稳定性》，*preprint available at: https://arxiv.org/abs/2102.07287* , P. Pfeiffer 和 W. Spitzer：《磁场中三维理想费米气体基态的纠缠熵》，*preprint, avilable at: https://arxiv.org/abs/2209.05320* [14] [15] G. Stolz，《无序量子自旋链数学理论的若干方面》，*Analytic trends in mathematical physics*, *Contemp. Math.* **741**, 163–197 (2020).

(C. Fischbacher) Department of Mathematics、 Baylor University、 Sid Richardson Bldg.、1410 S. 4th Street Waco TX 76706 USA 、,
Email address: c_fischbacher@baylor.edu

(L. Fisher) University of California、 Irvine; Department of Mathematics; Irvine、 CA 92697-3875, USA
Email address: lfisher2@uci.edu