arXiv:2305.00661v1 [math.AP] 1 May 2023

双重非线性分数阶 p-拉普拉斯方程的存在性

NOBUYUKI KATO、MASASHI MISAWA、KENTA NAKAMURA 和 YOSHIHIKO YAMAURA

摘要。我们证明了一个双重非线性抛物型分数阶p-拉普拉斯方程的弱解的存在性。该方程具有一般的双重非线性，不仅包括 Sobolev 亚临界、临界和超临界情形，还包括慢扩散和快扩散情形。我们的证明揭示了双重非线性分数阶 p-拉普拉斯算子的弱收敛方法。

目录

1. 引言与结果 1 2. 预备知识 5 2.1. 记号 5 2.2. 基本工具 7 2.3. 弱解 9 3. 近似解 10 4. 近似解的收敛性 16 4.1. 截断解的能量估计 17 4.2. 截断解的收敛结果 20 4.3. 近似解的收敛性 I 23 4.4. 近似解的收敛 II 24 5. 定理的证明 1.1 27 附录 A. 引理的证明 3.1 32 附录 B. 有界性 35 B.1. 有界性 35 B.2. 的正则性 $\partial_t \left(|u|^{q-1}u\right)$ 在情形 $q \geqq 1$ 37 附录 C. 时空分数阶 Sobolev 不等式 39 参考文献 41

1. 引言与结果

本文旨在研究以分数阶 p-拉普拉斯算子为主部的双重非线性抛物型非局部方程弱解的存在性。我们在一般情形下处理双重非线性，不仅涵盖 Sobolev 次临界、临界和超临界情形，也包括慢扩散和快扩散情形。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqq 1)$

Date: 20210825 版本。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：35B45、35B65；次要分类：35D30、35K61。*Key words and phrases.* 非局部双重非线性方程，分数阶 Sobolev 空间，时空分数阶 Sobolev 不等式。

为边界为 $\partial\Omega$ 的有界区域。我们固定指标 $s \in (0,1)$、$p > 1$ 和 $q > 0$。我们关注以下双重非线性非局部问题：

$$\begin{cases} \partial_t(|u|^{q-1}u) + (-\Delta)_p^s u = 0 & \text{in} \quad \Omega_\infty := \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{on} \quad (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，初始数据 u_0 同时属于分数阶 Sobolev 空间 $W^{s,p}_0(\Omega)$ 和勒贝格空间 $L^{q+1}(\Omega)$。这里说明，$W^{s,p}_0(\Omega)$ 由分数阶 Sobolev 空间 $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ 中在 Ω 外为零的函数组成。这些函数空间的精确定义将在第 2 节给出。分数阶 p-拉普拉斯算子 $(-\Delta)_p^s$ 定义为

$$\begin{aligned} (-\Delta)_p^s u(x,t) &:= \mathrm{P.V.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x,t)-u(y,t)|^{p-2}(u(x,t)-u(y,t))}{|x-y|^{n+sp}}\,dy \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x,t)-u(y,t)|^{p-2}(u(x,t)-u(y,t))}{|x-y|^{n+sp}}\,dy, \end{aligned} \tag{1.2}$$

这里，符号 P.V. 表示“在主值意义下”。

我们通过能量结构（参见 1.1）来引出我们对方程（ [7, 8, 17]1.1）的兴趣。为此，我们仅形式化地推导方程（）1。考虑积分泛函

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2p} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy$$

对于 $u \in W^{s,p}_0(\Omega)$。$\mathcal{E}(u)$沿方向 $\varphi \in W^{s,p}_0(\Omega)$的盖托微分为 e

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\mathcal{E}(u+\tau\varphi)\Big|_{\tau=0} &= \frac{1}{2p} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{d}{d\tau} \frac{|u(x)-u(y)+\tau(\varphi(x)-\varphi(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy \Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+sp}}(\varphi(x)-\varphi(y))\,dxdy \\ &= \langle (-\Delta)_p^s u,\, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

其中，符号 $\langle \cdot,\cdot \rangle$ 表示 $W^{s,p}_0(\Omega)$与其对偶空间 $W^{-s,p'}(\Omega)$之间的对偶配对。这意味着，$(-\Delta)_p^s u$ 是 $W^{s,p}_0(\Omega)$上的梯度向量场 $\nabla\mathcal{E}(u)$：

$$\nabla\mathcal{E}(u) = (-\Delta)_p^s u$$

因此，方程（1.1）1 可解释为通常梯度流方程 $\partial_t u(t) = -\nabla\mathcal{E}(u(t))$的一种非线性推广。我们还可参阅[21] 关于分数阶算子的各种有趣问题、相关结果及研究进展。

本文的主要结果是方程（1.1）的弱解整体存在性，如下所示：

定理 1.1 假设初始数据 u_0 属于 $W^{s,p}_0(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$。那么，存在一个弱解满足 (1.1)，其意义见定义 2.8。方程 u 的弱解 (1.1)满足以下正则性： $\partial_t(|u|^{\frac{q-1}{2}}u) \in L^2(\Omega_\infty)$。

如定理 1.1 所示，在一般双重非线性条件下，分数阶 Sobolev 空间中的弱解具有整体存在性。仅聚焦于原型方程，使我们能够清晰地阐述证明存在性的方法。证明通常基于弱紧性方法，并结合适当的近似。我们构造了一个时空分数阶 Sobolev 不等式，进而结合维塔利收敛定理，导出分数阶 p-拉普拉斯算子的弱收敛。本文所用的近似方程由所谓 Rothe 型差分积分微分方程给出，并与 (1.1) 相关（见 [27]）。通过应用变分法直接方法构造近似解，使我们能够处理方程中带有 $p > 1$, $q > 0$ 和 $s \in (0,1)$ 的一般双重非线性。我们将说明 (1.1) 中的边界条件。非局部狄利克雷边界条件 $(1.1)_2$,乍看之下或许显得奇怪，但它适用于分数阶算子的非局部特性，且与之相一致。这里我们不要求 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{s,p}_0(\Omega)$ 中稠密。事实上，对于边界不光滑的一般区域，这种稠密性并不一定成立（见 [11] 和 [24, 注 3.5，第 533]页）。这里，方程考虑在 $\mathbb{R}^n$ 中的任意有界区域 Ω 上，其边界不一定光滑。

对于常规形式的抛物型分数阶 p-拉普拉斯方程（式 (1.1)，其中 $q = 1$），在较弱的初始数据条件下，弱解的存在性已有研究（参见[26, 22, 28, 1]）。本文考虑相当一般形式的双重非线性抛物型分数阶 p-拉普拉斯方程（1.1），并如前所述，在分数阶 Sobolev 空间的能量类中研究解的存在性。我们关于能量类中存在性的证明发展了一种弱收敛方法，该方法基于某个时空分数阶 Sobolev 不等式和维塔利收敛定理。据我们所知，这为演化分数阶微分方程带来了新的内容。事实上，我们设计了一种截断技巧，并将其与时空分数阶 Sobolev 不等式结合，再运用维塔利收敛定理导出时空勒贝格强收敛。详见附录4.1、4.2、4.3 和 4.4 中的引理，以及附录 C.1 中的引理C。我们的截断论证或许在某种程度上较为技术化，但它显然克服了时间导数中幂非线性所带来的一些困难。勒贝格强收敛自然可用于在非线性积分量中取极限（详见引理 4.6 的证明）。我们还证明了初始数据在分数阶 Sobolev 空间中连续地取到，证明见 (D3) 的证明。

在今后的工作中，我们将研究与分数阶 Sobolev 不等式最佳常数相关的梯度流，而我们的方法需要将式（1.1）中的原型方程作为基本工具。关于分数阶 Sobolev 不等式的最佳常数及其极值函数的主题，参见 [4] 。在通常的局部情形下，我们研究了 p-Sobolev 流，它是关于通常 Sobolev 不等式的梯度流，并以原型双重非线性抛物方程为基础（参见 [23, 19, 20]）。有关偏微分方程的相关结果见 [2, 5, 9, 16]。文献 [3] 中采用了适用于双重非线性偏微分方程的变分不等式方法，并对相关方程作了精确阐述并提供了全面的参考文献。这里我们将从几何视角说明另一个动机：给定一个维数为 $n \geqq 2$、常数 $s \in (0, \frac{n}{2})$ 的紧黎曼流形（M^n, g_0），Graham 和 Zworski（[14]）在研究一族共形协变算子时，最初引入了非局部

度量 $g(t) = u^{\frac{4}{n-2s}}(t)g_0$ 在 M 上的演化方程，称为分数阶 Yamabe 流。当 $M = \mathbb{S}^n$ 时，特别地，通过立体投影 $\pi : \mathbb{S}^n \setminus \{\text{北极}\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$，分数阶 Yamabe 流可写为以下形式

$$\partial_t \left(u^{\frac{n+2s}{n-2s}}(t) \right) = -(-\Delta)^s u(t) + r_s^g u^{\frac{n+2s}{n-2s}}(t) \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

其中，$(-\Delta)^s u$ 表示通常的分数阶拉普拉斯算子，由 (1.2) 在 $p = 2$ 条件下定义。(1.3) 中的量 $r_s^g := \fint R_s^g \, dvol_g$ 是分数阶曲率 R_s^g 的平均值；当 $s = 1$ 时，它与经典标量曲率$_M$一致。特别地，若 $s = 1$，则分数阶 Yamabe 流 (1.3) 恰好变为 Hamilton ([15]) 引入的经典 Yamabe 流。分数阶 Yamabe 流的定常问题即为分数阶 Yamabe 问题；在假设 $s \in (0, 1)$ 且定义域流形 M 局部共形平坦并具有正 Yamabe 常数的条件下， [13] 证明了该问题存在解。Jing 和 Xiong ([18]) 成功证明了分数阶 Yamabe 流 (1.3) 的整体存在性，以及 (1.3) 收敛到定常解的渐近收敛性。最近，在定义域流形局部共形平坦且具有正 Yamabe 常数的条件下，Daskalopoulous、Sire 和 V´azquez 证明了分数阶 Yamabe 流存在光滑解，并证明当 $t \longrightarrow \infty$ 时，该解收敛到具有常标量曲率的度量（见 [6]）。在欧几里得空间中，度量是平坦的，上述曲率条件不成立，因此从偏微分方程的角度来看可能会遇到一些困难。在 [10], 的重要成果中，通过傅里叶分析和 L^1-半群理论，证明了更一般的分数阶多孔介质方程的存在性与唯一性。本文则必须考虑有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，并受上述能量 $\mathcal{E}$ 启发，依据分数阶p-拉普拉斯项的结构采用直接方法。本文给出的结果涵盖了欧几里得情形下的分数阶 Yamabe 流结果。

本文结构如下。在第 2 节中，我们固定记号，并概述分数阶 Sobolev 空间所涉及的一些基本事实。第 3 节致力于构造方程（1.1）的近似解，并为其建立一些一致能量估计。近似解由与方程（3.1）相关的时间差分积分微分方程（1.1）给出。在第 4 节中，我们基于前一节的能量估计，推导近似解的收敛性。在第 5 节中，我们通过弱收敛方法证明定理 1.1 。附录A 通过变分法直接方法证明方程（3.1）的近似解存在。在附录B中，我们在初始数据有界的假设下，证明近似解的有界性。作为应用，我们推导出在 $\partial_t \left(|u|^{q-1}u \right)$ 的情形下 $q \geqq 1$的正则性，见定理 B.3。这里我们强调，主要结果定理 1.1 并不要求近似解逐点有界。在最后的附录C 中，我们介绍关键思路——时空分数阶 Sobolev 不等式。

致谢

Masashi Misawa 感谢日本学术振兴会科学研究费助成事业（C类）项目（编号：21K03330，2021年）的部分资助。Kenta Nakamura 的研究也获得了日本学术振兴会青年科学家研究助成金项目（编号：21K13824，2021年）的部分资助。Yoshi- hiko Yamaura 的研究也获得了日本学术振兴会科学研究费助成事业（C类）项目的部分资助

（编号：18K03381，2018年），以及日本大学文理学部2020年度个人研究经费的资助。

2. 预备知识

我们将本节分为三个部分：首先介绍本文所用的记号，然后整理文中将用到的一些不等式，最后给出我们问题的弱解定义（1.1）。

2.1. 记号。本文中，设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqq 1)$ 是一个边界为 $\partial\Omega$ 的有界区域，并为简便起见，用 $\Omega^c := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 表示 Ω 的外部。对于 $T \in (0,\infty]$，令 $\Omega_T := \Omega \times (0,T)$ 表示一个时空柱。按照标准记法，我们将 $B_\varrho(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varrho\}$ 表示半径为 $\varrho > 0$ 、中心为 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 的开球。若球心为 $\mathbb{R}^n$ 的原点 0，或球心可由上下文明确，则约定用 B_ϱ 代替 $B_\varrho(x_0)$。对于可测集 $A \subset \mathbb{R}^k$， $k \in \mathbb{N}$，我们用 $|A|$ 表示 A 的通常 k 维勒贝格测度。

下文中，在具体语境下，我们用 C、 C_1、 C_2、 $\cdots$ 表示不同的正数常量。参数依赖关系将用括号强调，例如， $C \equiv C(n,p,\Omega)$ 表示 C 依赖于 n、 p 和 Ω。为便于阅读，在估计链中通常省略常数的依赖关系。此外，方程编号 $(\cdot)_\ell$ 表示方程（$\cdot$）的第 ℓ 行。

现在我们定义一些分数阶 Sobolev 空间（参见 [24]）。

对于任意 $p \in [1,\infty)$ 和 $s \in (0,1)$，分数阶 Sobolev 空间定义为

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) := \left\{ v \in L^p(\mathbb{R}^n) : \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \right\}$$

其范数有限

$$\|v\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} := \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + [v]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.1}$$

通常的 L^p-范数 $\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中所谓的 Gagliardo 半范数相结合，其中后者定义在 $\mathbb{R}^n$

$$[v]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} := \left(\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \, dxdy \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

类似地，区域 $K \subset \mathbb{R}^n$ 上的分数阶 Sobolev 空间定义为

$$W^{s,p}(K) := \left\{ v \in L^p(K) : \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(K \times K) \right\}$$

具有有限范数

$$\|v\|_{W^{s,p}(K)} := \|v\|_{L^p(K)} + [v]_{W^{s,p}(K)} \tag{2.3}$$

and

$$[v]_{W^{s,p}(K)} := \left(\iint_{K \times K} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \, dxdy \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.4}$$

我们还定义

$$W_0^{s,p}(K) := \{ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) : u = 0 \text{ a.e. in } \mathbb{R}^n \setminus K \}. \tag{2.5}$$

在关于非局部算子 $(-\Delta)^{\frac{s}{p}}$ 在 K中的狄利克雷边界条件的背景下，我们称函数 u属于 $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ 在 K的边界上取零值，如果 u属于 $W^{s,p}_0(K)$。根据定义（2.5）及 $K=\mathbb{R}^n$，可以自然地理解为 $W^{s,p}_0(\mathbb{R}^n)=W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$。

对于 $s\in(0,1)$ 和 $p\in[1,\infty)$，分数阶空间 $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$、$W^{s,p}(K)$ 和 $W^{s,p}_0(K)$ 分别是具有有限范数 (2.1)、(2.3) 和 $\|\cdot\|_{W^{s,p}_0(K)}:=\|\cdot\|_{L^p(K)}+[\cdot]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$ 的巴拿赫空间。$W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间记为 $(W^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*=W^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)$。类似地，$(W^{s,p}_0(K))^*=W^{-s,p'}(K)$ 表示 $W^{s,p}_0(K)$ 的对偶空间。此处 p' 表示指数 p的 H¨older 共轭。

我们还讨论时空函数空间。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域，且 $0\leqq t_1$、$t_2<\infty$。设 $1\leqq p$、$q\leqq\infty$。设 $\mathcal{X}$ 是由定义在 K 上的函数构成的巴拿赫空间。我们使用 Bochner $L^q(t_1,t_2)$ 可积函数 $v\colon(t_1,t_2)\ni t\mapsto v(t)\in\mathcal{X}$ 的空间，记作 $L^q(t_1,t_2;\mathcal{X})$。令 $\mathcal{X}$ 为勒贝格空间 $L^p(K)$，则 $L^q(t_1,t_2;L^p(K))$ 具有有限范数

$$\|v\|_{L^q(t_1,t_2;L^p(K))}:=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\|v(t)\|_p^q\,dt\right)^{1/q} & (1\leqq q<\infty)\\ \displaystyle\sup_{t_1<t<t_2}\|v(t)\|_p & (q=\infty),\end{cases}$$

其中，$\|v(t)\|_{L^p(K)}$ 简记为 $\|v(t)\|_p$，适用于 $1\leqq p\leqq\infty$；$\operatorname{ess\,sup}_{t_1<t<t_2}\|v(t)\|_p$ 则简记为 $\sup_{t_1<t<t_2}\|v(t)\|_p$。若 $p=q$，则有如下识别：$L^p(K\times(t_1,t_2))=L^p(t_1,t_2;L^p(K))$。

令 $s\in(0,1)$。取 $\mathcal{X}=W^{s,p}_0(K)$ 意味着 $L^q(t_1,t_2;W^{s,p}_0(K))$ 是具有有限范数的巴拿赫空间

$$\|v\|_{L^q(t_1,t_2;W^{s,p}_0(K))}:=\left(\int_{t_1}^{t_2}\|v(t)\|^q_{W^{s,p}(K)}\,dt\right)^{1/q}$$

当 $q<\infty$ 时，并且

$$\|v\|_{L^\infty(t_1,t_2;W^{s,p}_0(K))}:=\operatorname*{ess\,sup}_{t_1<t<t_2}\|v(t)\|_{W^{s,p}(K)}.$$

博赫纳空间 $L^q(t_1,t_2;W^{s,p}(\mathbb{R}^n))$ 和 $L^q(t_1,t_2;W^{s,p}_0(K))$ 的对偶空间分别记为 $L^q(t_1,t_2;W^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*$ 和 $L^q(t_1,t_2;W^{s,p}_0(K))^*$。这里，$L^q(t_1,t_2;W^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*$ 与 $L^{q'}(t_1,t_2;W^{-s,p'}(\mathbb{R}^n))$ 等同，其中 p' 和 q' 分别是 p 和 q 的 H¨older 共轭。类似地，我们将 $L^q(t_1,t_2;W^{s,p}(K))^*=L^{q'}$ 与 $t_1(t_2;W^{-s,p'}(K))$ 视为相同。

为研究（1.1）中的抛物型非局部方程，我们将利用时空分数阶索伯列夫空间。设 $p\in[1,\infty)$ 且 $s\in(0,1)$。对于区域 K属于 $\mathbb{R}^n$和 $0<T\leqq\infty$，令$K_T:=K\times(0,T)$。时空分数阶索伯列夫空间记为 $W^{s,p}(K_T)$，由满足有限半范数的函数 v 属于 $L^p(K_T)$ 构成

$$[v]_{W^{s,p}(K_T)}:=\left(\iint_{K_T\times K_T}\frac{|v(x,t)-v(x',t')|^p}{\left(\sqrt{|x-x'|^2+(t-t')^2}\right)^{n+1+sp}}\,dxdtdx'dt'\right)^{\frac{1}{p}},\tag{2.6}$$

它关于该范数也是一个巴拿赫空间

$$\|v\|_{W^{s,p}(K_T)}:=\|v\|_{L^p(K_T)}+[v]_{W^{s,p}(K_T)}.\tag{2.7}$$

2.2. 基本工具。我们整理了一些基本工具和事实。首先，以下引理中列出的三个不等式贯穿本文始终，尤其用于估计分数阶 p-拉普拉斯项。

引理 2.1（代数不等式）对于所有 $\alpha \in (1,\infty)$，存在正数常量 $C_j(\alpha)$、$j=1$、2，使得对于所有 ξ、$\eta \in \mathbb{R}$,

$$||\xi|^{\alpha-2}\xi - |\eta|^{\alpha-2}\eta| \leqq C_1(|\xi|+|\eta|)^{\alpha-2}|\xi-\eta|, \tag{2.8}$$

$$(|\xi|^{\alpha-2}\xi - |\eta|^{\alpha-2}\eta)(\xi-\eta) \geqq C_2(|\xi|+|\eta|)^{\alpha-2}|\xi-\eta|^2 \tag{2.9}$$

并且，特别是当 $\alpha \geqq 2$

$$(|\xi|^{\alpha-2}\xi - |\eta|^{\alpha-2}\eta)(\xi-\eta) \geqq C_2|\xi-\eta|^{\alpha}. \tag{2.10}$$

证明。(2.8) 和 (2.9 的证明可由以下内容的证明推导得出 [12, 引理 8.3，第266]。不等式 (2.10) 直接由闵可夫斯基不等式以及 2.9 中的 [9, 第一章中的引理 4.4，第13]。□

下面的引理将在后文中经常用到，并且是某些收敛性证明中的关键。其证明基于维塔利收敛定理。

引理 2.2 设 $a \in (1,\infty)$ 和 a' 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=1$。假设 $\{f_h\}_{h>0}$ 在 $L^a(K_T)$ 中有界，且 f_h 在 K_T 中几乎处处收敛到 f。那么

$$\iint_{K_T} f_h\psi\,dxdt \longrightarrow \iint_{K_T} f\psi\,dxdt \quad for\ \psi \in L^{a'}(K_T).$$

特别地，若 $\{f_h\}_{h>0}$ 在 $L^a(K_T)$ 中有界，且 f_h 在 K_T 中几乎处处收敛于 0，则对任意 $b \in [1,a)$,

$$\int_{K_T} |f_h|^b\,dxdt \longrightarrow 0 \quad as\ h \searrow 0.$$

证明。我们首先验证 $\{f_h\psi\}_{h>0}$ 在 K_T上一致可积。设 $\Lambda \subset K_T$ 是任意可测集。由 f_h 在 $L^a(K_T)$ 中的有界性以及 H¨older 不等式，我们得到

$$\iint_{\Lambda} |f_h\psi|\,dxdt \leqq \left(\iint_{K_T} |f_h|^a\,dxdt\right)^{\frac{1}{a}} \left(\iint_{\Lambda} |\psi|^{a'}\,dxdt\right)^{\frac{1}{a'}}$$

$$\leqq C\left(\iint_{\Lambda} |\psi|^{a'}\,dxdt\right)^{\frac{1}{a'}}.$$

由于右侧勒贝格积分的绝对连续性，对于每个 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$ 使得

$$\iint_{\Lambda} |\psi|^{a'}\,dxdt < \varepsilon \quad \text{whenever} \quad |\Lambda|<\delta$$

因此，$\{f_h\psi\}_{h>0}$ 在 K_T上一致可积。此外，由假设可得

$$f_h\psi \longrightarrow f\psi \quad \text{a.e. in } K_T.$$

因此，由维塔利收敛定理可知

$$\iint_{K_T} f_h\psi\,dxdt \longrightarrow \iint_{K_T} f\psi\,dxdt$$

如 $h \searrow 0$。第二个陈述的有效性可通过取 $\frac{a}{b}$ 为 a、$|f_h|^b$ 为 f_h、0 为 f 和 $\psi \equiv 1$ 得出。证明至此完成。□

现在我们陈述分数阶 Sobolev 嵌入定理，该定理已在 [24, 定理 6.7，第557], [25]页中证明。

引理 2.3（分数阶 Sobolev 连续嵌入）设 $s \in (0,1)$ 和 $p \in [1,\infty)$ 是满足 $sp < n$ 的数。设 $p_s^\star := \frac{np}{n-sp}$ 为 Sobolev 指数。那么 $W^{s,\,p}(\mathbb{R}^n)$ 嵌入到 $L^{p_s^\star}(\mathbb{R}^n)$ 中：

$$\|v\|_{L^{p_s^\star}(\mathbb{R}^n)} \leqq C[v]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{2.11}$$

对于 $v \in W^{s,\,p}(\mathbb{R}^n)$，其中 C 是仅依赖于 n、s 和 p 的正定常数。对于任意有界区域 K，$W^{s,\,p}(K)$ 嵌入到 $L^{p_s^\star}(K)$ 中：

$$\|v\|_{L^r(K)} \leqq C\|v\|_{W^{s,p}(K)}$$

对于 $v \in W^{s,\,p}(K)$ 以及所有 $r \in [1, p_s^\star]$，其中正定常数 C取决于 K，也取决于 n、s、p和 r。

下一个引理涉及分数阶 Sobolev 紧嵌入，其证明见 [24,推论 7.2，第 561] 页。

引理 2.4（分数阶 Sobolev 紧嵌入）设 $s \in (0,\ 1)$ 和 $p \in [1,\infty)$ 是满足 $sp < n$ 且 $p_s^\star$ 如引理 2.3所述的数。设 K 是$\mathbb{R}^n$中的 Lipschitz 有界区域。那么，对于任意 $r \in [1, p_s^\star)$，引理 2.3中给出的 Sobolev 嵌入 $W^{s,\,p}(K) \hookrightarrow L^r(K)$是紧的。换言之，若序列 $\{v_h\}_{h>0} \subset W^{s,\,p}(K)$ 有界，则对于任意 $r \in [1, p_s^\star)$，$\{v_h\}_{h>0}$ 在 $L^r(K)$ 中相对紧。

我们还需要时空分数阶 Sobolev 连续与紧嵌入。其证明与引理 2.4类似，在维数为 $n+1$ 的时空区域上进行。

引理 2.5（时空分数阶 Sobolev 嵌入）设 $s \in (0,\,1)$ 和 $p \in [1,\infty)$ 为满足 $sp < n+1$ 的数。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，且 $0 < T < \infty$。对于任意$v \in W^{s,\,p}(K_T)$，都有：对于任意满足 $\overline{p_s^\star}$ 的 $\gamma \in [1, \overline{p_s^\star}\,]$，有 $= (n+1)\frac{p}{n+1-sp}$,

$$\|v\|_{L^\gamma(K_T)} \leqq C\|v\|_{W^{s,p}(K_T)}, \tag{2.12}$$

其中正定常数 C 仅依赖于 K、T、s p 和 n。此外，若 K 是 Lipschitz 有界区域，则对于任意 $\gamma \in [1, \overline{p_s^\star})$，时空 Sobolev 嵌入 $W^{s,\,p}(K_T) \hookrightarrow L^\gamma(K_T)$ 是紧的。换言之，若序列 $\{v_h\}_{h>0} \subset W^{s,\,p}(K_T)$ 有界，则对于任意 $\gamma \in [1, \overline{p_s^\star})$，$\{v_h\}_{h>0}$在 $L^\gamma(K_T)$ 中预紧。

下面给出分数阶 Poincar´e 不等式，该不等式适用于分数阶 Sobolev 空间中的函数 $W_0^{s,\,p}(K)$。为完整起见，我们给出证明（参见 [24, 引理 8.1、定理 8.2，第 562–565]页）。

引理 2.6（分数阶 Poincar´é 不等式）设 $s \in (0,1)$， $p > 1$ 和 K 是 $\mathbb{R}^n$中的有界区域。那么对于任意 $u \in W^{s,p}_0(K)$，有

$$\|u\|_{L^p(K)} \leqq C(n,s,p)(\operatorname{diam} K)^{sp}[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.13}$$

证明。 首先，我们注意到，该结论可由引理2.11中的 Sobolev 不等式（2.3）和 H¨older 不等式直接推出。这里给出直接证明，该证明是对 [24, 第 562–565]页引理 8.1 证明中 Ca mpanato 半范数估计的修改。

由于 $u(x) = 0$ for $x \in K^c$，令 $d := \operatorname{diam} K$，可估计为

$$\begin{aligned}
[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} &= \iint\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy \geqq \iint\limits_{K\times K^c} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy \\
&\geqq \int\limits_K \left(\int\limits_{K^c\cap\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,|x-y|\geqq 2d\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx \right) dy \\
&= \int\limits_K \left(\int\limits_{K^c\cap\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,|x-y|\geqq 2d\}} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx \right) dy.
\end{aligned}$$

由于对于 $y \in K$，事实 $K \subset \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x-y| < 2d\}$ 表明上述表达式中积分区域为 $K^c \cap \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x-y| \geqq 2d\} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x-y| \geqq 2d\}$，因此，变量代换 $\varrho = |x-y|$ 可得。

$$\begin{aligned}
[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} &\geqq \int\limits_K \left(\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x-y|\geqq 2d\}} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx \right) dy \\
&= \int\limits_K \left(\int\limits_{2d}^{\infty} \frac{n\alpha_n}{\varrho^{1+sp}}\,d\varrho \right) |u(y)|^p\,dy \\
&= n\alpha_n \frac{(2d)^{-sp}}{sp} \int\limits_K |u(y)|^p\,dy = Cd^{-sp}\|u\|^p_{L^p(K)},
\end{aligned}$$

其中 α_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积，且 $C \equiv C(n,s,p)$。因此，证明完成。□

我 们通过列出从 [24, 命题 2.1，第 524 页，得到的结果来结束本小节。]. s

Lemma 2.7 设 $p \geqq 1$ 和 $0 < s \leqq s' < 1$，且 K 是 $\mathbb{R}^n$中的开集。则有

$$\|u\|_{W^{s,p}(K)} \leqq C\|u\|_{W^{s',p}(K)}$$

对于 K 上的可测函数 u，以及仅依赖于 n、s 和 p的适当正定常数 C。

2.3. 弱解。最后，我们在下文中引入弱解的概念。此后，我们简记

$$U(x,y) := |u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y)), \tag{2.14}$$

$$U(x,y,t) := |u(x,t)-u(y,t)|^{p-2}(u(x,t)-u(y,t)) \tag{2.15}$$

分别表示定义在 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 上的任意可测函数 u。由于空间限制，在分数阶算子中采用这种简写记号。

定义 2.8（弱解）设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域，且 $T \in (0, \infty]$。假设初始数据 u_0 属于 $W^{s,p}_0(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$。令 $\mathscr{T}$ 为由下式定义的测试函数类

$$\mathscr{T} := \left\{ \varphi \in L^p(0,T; W^{s,p}_0(\Omega)) : \begin{array}{c} \partial_t \varphi \in L^{q+1}(\Omega_T), \\ \varphi(x,0) = \varphi(x,T) = 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega \end{array} \right\}.$$

定义在时空区域 $u = u(x,t\, \mathbb{R}^n_T := \mathbb{R}^n \times (0,T)$ 上的一个可测函数称为弱解，若其满足1.1) 的以下条件：

(D1) $u \in L^\infty(0,T;\, W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^{q+1}(\mathbb{R}^n))$.

(D2) 有如下关系

$$-\iint_{\Omega_T} |u|^{q-1}u \cdot \partial_t \varphi \, dxdt + \frac{1}{2} \int_0^T \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{U(x,y,t)}{|x-y|^{n+sp}} (\varphi(x,t) - \varphi(y,t)) \, dxdydt = 0$$

对每个 $\varphi \in \mathscr{T}$。

(D3) u 满足狄利克雷边界条件，即

$$u(t) \in W^{s,p}_0(\Omega) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T),$$

并且在分数阶 Sobolev 空间中连续地取得初始数据 u_0：

$$\lim_{t \searrow 0} \|u(t) - u_0\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

3. 近似解

本节旨在构造（1.1）的近似解，并推导关于 h 的一致估计。继 [23, 第 3], 节之后，我们引入一族 Rothe 型非局部椭圆方程（3.1），其特征是时间变量中的差商（参见 [27]）。令 h 为一个固定的正数，稍后令其趋于零。从初始数据 u_0出发，在 $W^{s,p}_0(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$ 中，我们将归纳定义 $u_m \in W^{s,p}_0(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$，使其对于 $m \in \mathbb{N}$ 而言，作为（3.2）意义下的弱解，满足以下非局部积分方程

$$\begin{cases} \dfrac{|u_m|^{q-1}u_m - |u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}}{h} + (-\Delta)^s_p u_m = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \\ u_m = 0 & \text{in } \Omega^c. \end{cases} \tag{3.1}$$

这里，$C^\infty_0(\Omega)$ 分别是 $W^{s,p}_0(\Omega)$ 和 $L^{q+1}(\Omega)$ 中的子空间，因此，$W^{s,p}_0(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$ 非空。

方程弱解的存在性 u_m （3.1）由下述引理保证，其证明见附录A。

引理 3.1 (非局部差分方程解的存在性) 假设 (3.1) 有解 u_k 对于 $k = 1, 2, \ldots, m-1$。则存在一个弱解 $u_m \in W^{s,p}_0(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$ 满足 (3.1)。

令 $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset W^{s,p}_0(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$ 为由引理 3.1 构造的弱解序列。注意，弱解以如下弱形式满足（3.1）

$$\int_\Omega \frac{|u_m|^{q-1}u_m - |u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}}{h}\,\xi\,dx + \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{U_m(x,y)(\xi(x)-\xi(y))}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy = 0 \tag{3.2}$$

对于任意 $\xi \in W^{s,p}_0(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$，其中 $U_m(x,y)$ 按照（2.14）中的规则定义：

$$U_m(x,y) := |u_m(x)-u_m(y)|^{p-2}(u_m(x)-u_m(y)).$$

令 $h>0$ 为逼近参数，最终令其趋于零。对于方程（3.1）的解族 $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$，我们定义Ω上定义的六个函数∞：$\bar{u}_h$，u_h，$\bar{v}_h$，v_h，$\bar{w}_h$ 以及 w_h。令$t_m := mh$，$m=0,1,2,\ldots\ldots$。对于 $m=1,2,\ldots\ldots$，令

$$\begin{cases} \bar{u}_h(x,t) := \begin{cases} u_0(x), & (x,t)\in\Omega\times[-h,0] \\ u_m(x), & (x,t)\in\Omega\times(t_{m-1},t_m] \end{cases} \\ \bar{v}_h(x,t) := |\bar{u}_h(x,t)|^{q-1}\bar{u}_h(x,t), \qquad (x,t)\times\Omega\in[-h,\infty) \\ \bar{w}_h(x,t) := |\bar{u}_h(x,t)|^{\frac{q-1}{2}}\bar{u}_h(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega\times[-h,\infty) \end{cases} \tag{3.3}$$

且对于 $(x,t)\in\Omega\times[t_{m-1},t_m]$, $m=1,2,\ldots$,

$$\begin{cases} u_h(x,t) := \dfrac{t-t_{m-1}}{h}u_m(x) + \dfrac{t_m-t}{h}u_{m-1}(x), \\ v_h(x,t) := \dfrac{t-t_{m-1}}{h}|u_m(x)|^{q-1}u_m(x) + \dfrac{t_m-t}{h}|u_{m-1}(x)|^{q-1}u_{m-1}(x), \\ w_h(x,t) := \dfrac{t-t_{m-1}}{h}|u_m(x)|^{\frac{q-1}{2}}u_m(x) + \dfrac{t_m-t}{h}|u_{m-1}(x)|^{\frac{q-1}{2}}u_{m-1}(x). \end{cases} \tag{3.4}$$

我们将这六个函数 $\bar{u}_h$、$\bar{v}_h$、$\bar{w}_h$、u_h、v_h 和 w_h 称为近似解（1.1）的解。使用这些记号，（3.1）可形式化地改写为

$$\partial_t v_h + (-\Delta)^s_p \bar{u}_h = 0 \quad \text{in } \Omega_\infty,$$

它在分布意义下满足：

$$\iint_{\Omega_T} \partial_t v_h(x,t)\,\varphi(x,t)\,dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{\overline{U}_h(x,y,t)}{|x-y|^{n+sp}}(\varphi(x,t)-\varphi(y,t))\,dxdydt = 0 \tag{3.5}$$

对于任意正数 $T<\infty$ 以及所有测试函数 $\varphi \in L^1\left(0,T;\, W^{s,p}_0(\Omega)\cap L^{q+1}(\Omega)\right)$，其中 re

$$\overline{U}_h(x,y,t) := |\bar{u}_h(x,t)-\bar{u}_h(y,t)|^{p-2}(\bar{u}_h(x,t)-\bar{u}_h(y,t)).$$

我们首先汇总分段常值时间函数和时间上线性插值函数的基本估计。这些估计常用于后续收敛的证明。证明直接由 (3.3) 和 (3.4) 的定义得出。

引理 3.2 设 $\bar{u}_h$、u_h、$\bar{v}_h$、v_h、$\bar{w}_h$ 和 w_h 如(3.3)和(3.4)中所定义，使用函数族 $\{u_m\}$、$m=0$、1，……。记 $f_m(m=0,1,\cdots)$ 为每个 u_m、$|u_m|^{\frac{q-1}{2}}u_m$ 或

$|u_m|^{q-1}u_m$。进一步地，记 $\bar{f}_h$ 为 $\bar{u}_h$、$\bar{w}_h$ 或 $\bar{v}_h$ 中的任一个，记 f_h 为 u_h、w_h 或 v_h 中的任一个。则对于任意 $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_{m-1}, t_m]$ $(m = 1, 2, \ldots)$，均有

$$|f_h(x,t)| \leqq \frac{t - t_{m-1}}{h}|f_m(x)| + \frac{t_m - t}{h}|f_{m-1}(x)|; \tag{3.6}$$

$$\left|\bar{f}_h(x,t) - f_h(x,t)\right| \leqq \frac{t_m - t}{h}\left|f_m(x) - f_{m-1}(x)\right|. \tag{3.7}$$

特别地，对于任意 $(x,t \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$

$$|f_h(x,t)| \leqq \left|\bar{f}_h(x,t)\right| + \left|\bar{f}_h(x,t-h)\right|; \tag{3.8}$$

$$\left|\bar{f}_h(x,t) - f_h(x,t)\right| \leqq \left|\bar{f}_h(x,t) - \bar{f}_h(x,t-h)\right|. \tag{3.9}$$

接下来，我们推导如下能量估计。

引理 3.3（能量估计） 令 $\bar{u}_h$ 和 u_h 为 (1.1)的近似解，其定义见 (3.3) 和 (3.4)。那么，对于任意正数 $T < \infty$,

$$\sup_{0<t<T}\int_\Omega |\bar{u}_h(t)|^{q+1}\,dx \leqq \int_\Omega |u_0|^{q+1}\,dx, \tag{3.10}$$

$$\int_0^T [\bar{u}_h(t)]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\,dt \leqq \frac{2q}{q+1}\int_\Omega |u_0|^{q+1}\,dx, \tag{3.11}$$

$$\iint_{\Omega_T}\Big(|\bar{u}_h(x,t)| + |\bar{u}_h(x,t-h)|\Big)^{q-1}|\partial_t u_h(x,t)|^2\,dxdt \leqq C[u_0]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.12}$$

其中正定常数 C 仅取决于 p 和 q，并且

$$\sup_{0<t<T}[\bar{u}_h(t)]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqq [u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.13}$$

证明。 在整个证明过程中，我们取一个整数 N 使其满足 $t_{N-1} < T \leqq t_N$。用 3.2） $\xi = hu_m$ 测试（并从 $m = 1$ 到 $k\,(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$）求和，得到

$$\sum_{m=1}^k\int_\Omega \left(|u_m|^{q-1}u_m - |u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}\right)u_m\,dx + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^k h\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|u_m(x) - u_m(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy = 0$$

因此，

$$\sum_{m=1}^k\int_\Omega \left(|u_m|^{q-1}u_m - |u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}\right)u_m\,dx + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^k h[u_m]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{3.14}$$

根据杨氏不等式，(3.14)左端的第一项估计为 s

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^k\int_\Omega \left(|u_m|^{q-1}u_m - |u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}\right)u_m\,dx &\geqq \sum_{m=1}^k\frac{q}{q+1}\int_\Omega\left(|u_m|^{q+1} - |u_{m-1}|^{q+1}\right)dx\\ &= \frac{q}{q+1}\int_\Omega\left(|u_k|^{q+1} - |u_0|^{q+1}\right)dx.\end{aligned}$$

代入（3.14）后，得到

$$\frac{q}{q+1}\int_\Omega |u_k|^{q+1}\,dx + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^k h[u_m]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqq \frac{q}{q+1}\int_\Omega |u_0|^{q+1}\,dx. \tag{3.15}$$

接着，忽略（3.15）左端的第二项和第一项，得到

$$\sup_{1\leqq k\leqq N}\int_\Omega |u_k|^{q+1}\,dx \leqq \int_\Omega |u_0|^{q+1}\,dx,$$

and

$$\int_0^{t_N}[\bar{u}_h(t)]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\,dt \leqq \frac{2q}{q+1}\int_\Omega |u_0|^{q+1}\,dx,$$

分别。因此，这些不等式很容易推出

$$\sup_{0<t<T}\int_\Omega |\bar{u}_h(t)|^{q+1}\,dx \leqq \int_\Omega |u_0|^{q+1}\,dx$$

and

$$\int_0^{T}[\bar{u}_h(t)]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\,dt \leqq \frac{2q}{q+1}\int_\Omega |u_0|^{q+1}\,dx.$$

因此，估计式（3.10）和（3.11）成立。

另一方面，在（ $\xi = u_m - u_{m-1}$ 中取3.2），并将所得等式从$m=1$到 k求和，其中 $k=1$, 2, $\cdots$, N。于是得到

$$\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{h}\int_\Omega (|u_m|^{q-1}u_m - |u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1})(u_m-u_{m-1})\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{k}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{U_m(x,y)\big[(u_m(x)-u_{m-1}(x))-(u_m(y)-u_{m-1}(y))\big]}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy = 0. \tag{3.16}$$

根据引理2.9中的（2.1 ），取 $\alpha = q+1$，（3.16）左端第一项的被积函数可估计为

$$\begin{aligned}&\left(|u_m|^{q-1}u_m - |u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}\right)(u_m-u_{m-1})\\ &\geqq C(q)\big(|u_m|+|u_{m-1}|\big)^{q-1}|u_m-u_{m-1}|^2.\end{aligned} \tag{3.17}$$

再次根据杨氏不等式，我们注意到

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{U_m(x,y)\big[(u_m(x)-u_{m-1}(x))-(u_m(y)-u_{m-1}(y))\big]}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy$$

$$\geqq \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|u_m(x)-u_m(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy$$

$$-\frac{1}{p}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|u_{m-1}(x)-u_{m-1}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy - \frac{p-1}{p}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|u_m(x)-u_m(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{p}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|u_m(x)-u_m(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy - \frac{1}{p}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|u_{m-1}(x)-u_{m-1}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy. \tag{3.18}$$

将3.17和3.18代入3.16得到

$$\sum_{m=1}^{k} h \int_{\Omega} C\big(|u_m| + |u_{m-1}|\big)^{q-1} \left| \frac{u_m - u_{m-1}}{h} \right|^2 dx$$
$$+ \frac{1}{2p} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u_k(x) - u_k(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \, dxdy \leqq \frac{1}{2p} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u_0(x) - u_0(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \, dxdy. \tag{3.19}$$

忽略左侧任一项，可得

$$C(q) \int_0^{t_k} \int_{\Omega} \Big(|\bar{u}_h(x,t)| + |\bar{u}_h(x,t-h)| \Big)^{q-1} |\partial_t u_h(x,t)|^2 \, dxdt \leqq \frac{1}{2p} [u_0]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

and

$$\max_{1 \leqq k \leqq N} [\bar{u}_h(t)]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqq [u_0]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)},$$

分别。因此证明完毕。 □

引理 3.3 中的陈述根据定义对线性插值解自然也成立。由引理 3.6–(3.8) 中的（3.2）可清楚地证明：

引理 3.4（能量估计）设 u_h 为 (1.1) 的近似解，定义见 (3.4)。则对任意正数 $T < \infty$，均有

$$\sup_{0<t<T} \int_{\Omega} |u_h(t)|^{q+1} \, dx \leqq \int_{\Omega} |u_0|^{q+1} \, dx, \tag{3.20}$$

$$\int_0^T [u_h(t)]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \, dt \leqq 2^{p-1} \left(\frac{4q}{q+1} \int_{\Omega} |u_0|^{q+1} \, dx + h[u_0]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \right), \tag{3.21}$$

其中正定常数 C 仅取决于 p 和 q，并且

$$\sup_{0<t<T} [u_h(t)]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqq [u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.22}$$

证明。 不等式（3.20）和（3.22）分别由闵可夫斯基不等式、引理3.6中的（3.2）以及引理 3.10、（3.13）3.3得出。对于不等式（3.21），由引理3.8中的（3.2）以及闵可夫斯基不等式可得

$$\int_0^T [u_h(t)]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \, dt \leqq 2^{p-1} \left(\int_0^T [\bar{u}_h(t)]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \, dt + \int_0^T [\bar{u}_h(t-h)]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \, dt \right),$$

其中最后几项由引理3.11中的（3.3 ）应用得到，因此（3.21）成立 s. □

引理 3.5（时间导数估计）设 v_h 和 w_h 为(1.1)由(3.4)定义的近似解。则近似解的时间导数 $\{\partial_t w_h\}_{h>0}$ 在 $L^2(\Omega_T)$中对任意正数 $T < \infty$均有界，即：

$$\iint_{\Omega_T} |\partial_t w_h|^2 \, dxdt \leqq C[u_0]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{3.23}$$

并且，具体而言，若 $q \geqq 1$，近似解的时间导数 $\{\partial_t v_h\}$ 在$L^1(\Omega_T)$中对任意正数 $T < \infty$均有界，

$$\iint_{\Omega_T} |\partial_t v_h| \, dxdt \leqq C|\Omega_T|^{\frac{1}{q+1}} \|u_0\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{\frac{q-1}{2}} [u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{2}} \tag{3.24}$$

其中 $C = C(p, q)$ 是一个正定常数。

证明。 在整个证明过程中，我们选取一个整数 N 满足 $t_{N-1} < T \leqq t_N$。现在开始证明（3.23）。由引理 2.8中的（2.1 ），取 $\alpha = \frac{q+3}{2}$

$$\left| |u_m|^{\frac{q-1}{2}} u_m - |u_{m-1}|^{\frac{q-1}{2}} u_{m-1} \right|^2 \leqq C\big(|u_m| + |u_{m-1}|\big)^{q-1} |u_m - u_{m-1}|^2. \tag{3.25}$$

由引理 3.25）和（3.12）中的 3.3 可知，对于任意 $N = 1, 2, \ldots\ldots$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{N} h \int_{\Omega} |\partial_t w_h|^2 \, dx &= \sum_{m=1}^{N} h \int_{\Omega} \left| \frac{|u_m|^{\frac{q-1}{2}} u_m - |u_{m-1}|^{\frac{q-1}{2}} u_{m-1}}{h} \right|^2 dx \\
&\overset{(3.25)}{\leqq} C \sum_{m=1}^{N} h \int_{\Omega} \big(|u_m| + |u_{m-1}|\big)^{q-1} \left| \frac{u_m - u_{m-1}}{h} \right|^2 dx \\
&= C \int_0^{t_N} \int_{\Omega} \big(|\bar{u}_h(x,t)| + |\bar{u}_h(x,t-h)|\big)^{q-1} |\partial_t u_h(x,t)|^2 \, dxdt \\
&\overset{(3.12)}{\leqq} C[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p},
\end{aligned}$$

这意味着（3.23）。

我们将证明估计式（3.24）。假设 $q \geqq 1$。我们使用 H¨older 不等式两次，指数对分别为 $(2, 2)$ 和 $\left(\frac{q+1}{q-1}, \frac{q+1}{2}\right)$，以及引理 3.3 中的能量不等式（3.10）和（3.12），从而得到

$$\begin{aligned}
\|\partial_t v_h\|_{L^1(\Omega_T)} &\leqq \iint_{\Omega_T} \Big(|\bar{u}_h(t)| + |\bar{u}_h(t-h)|\Big)^{q-1} |\partial_t u_h| \, dxdt \\
&\leqq \left(\iint_{\Omega_T} \Big(|\bar{u}_h(t)| + |\bar{u}_h(t-h)|\Big)^{q-1} dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \times \left(\iint_{\Omega_T} \Big(|\bar{u}_h(t)| + |\bar{u}_h(t-h)|\Big)^{q-1} |\partial_t u_h|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqq |\Omega_T|^{\frac{1}{q+1}} \left(\iint_{\Omega_T} \Big(|\bar{u}_h(t)| + |\bar{u}_h(t-h)|\Big)^{q+1} dxdt \right)^{\frac{q-1}{2(q+1)}}
\end{aligned}$$

$$\times \left(\iint_{\Omega_T} \left(|\bar{u}_h(t)| + |\bar{u}_h(t-h)| \right)^{q-1} |\partial_t u_h|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{(3.10),\ (3.12)}{\leqq} C(p,q) |\Omega_T|^{\frac{1}{q+1}} \|u_0\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{\frac{q-1}{2}} [u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{2}},$$

至此完成了（3.24）的证明。 □

本节最后，我们推导 $\bar{u}_h$ 和 u_h的积分估计，后文第 4 节将用到。

引理 3.6 设 $\bar{u}_h$ 和 u_h 是由 (1.1)定义的近似解，其定义方式为 (3.3)和 (3.4)。那么，对于任意有界区域 K 中的 $\mathbb{R}^n$ 以及任意正数 $T < \infty$

$$\begin{aligned} &\|\bar{u}_h\|_{L^p(K_T)}^p \leqq C(\operatorname{diam} K)^{sp} \int_0^T [\bar{u}_h(t)]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p dt \leqq C(\operatorname{diam} K)^{sp} \|u_0\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1}; \\ &\|u_h\|_{L^p(K_T)}^p \leqq C(\operatorname{diam} K)^{sp} \left(\|u_0\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1} + h[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p \right) \end{aligned} \tag{3.26}$$

and

$$\begin{aligned} \sup_{0<t<T} \|\bar{u}_h(t)\|_{L^{p_s^\star}(K)} &\leqq \widetilde{C}[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}; \\ \sup_{0<t<T} \|u_h(t)\|_{L^{p_s^\star}(K)} &\leqq \widetilde{C}[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$其中， $C = C(n,p,q)$ 和 $C = C(n,s,p)$ 均为正数常量。

证明。 由引理 2.13 中的 (2.6) 以及引理 3.11 中的 (3.3)，可得 $(3.26)_1$。同理，由引理 3.21 中的 (3.4) 可得 $(3.26)_2$。由引理 2.11 中的 (2.3) 以及引理 3.13 中的 (3.3)，对任意$t > 0$

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_h(t)\|_{L^{p_s^\star}(K)} &\overset{(2.11)}{\leqq} \widetilde{C}(n,s,p)[\bar{u}_h(t)]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\overset{(3.13)}{\leqq} \widetilde{C}[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

它们共同 与 (3.6) 一起，根据引理 3.2 可得 $(3.27)_1$。估计式 $(3.27)_2$ 的证明类似 y. □

4. 近似解的收敛性

本节旨在推导由 (1.1) 的 (3.3) 和 (3.4) 定义的近似解的收敛性。假设初值 u_0 属于 $W^{s,p}_0(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$。

为实现 (1.1) 的近似解收敛性，如下文引理4.6 所述，我们需要引入以下截断函数：对于方程 ($\{u_m(x)\}$对应的 (3.1) 的近似解以及 $2 \leqq \ell \in \mathbb{N}$，定义如下

$$(u_m(x))_\pm^{(\ell)} := \min\left\{ \max\left\{ (u_m(x))_\pm, \frac{1}{\ell} \right\}, \ell \right\},$$

其中，$(u_m(x))_+ := \max\{u_m(x)\ 0\}$ 且 $(u_m(x))_- := (-u_m(x))_+$。

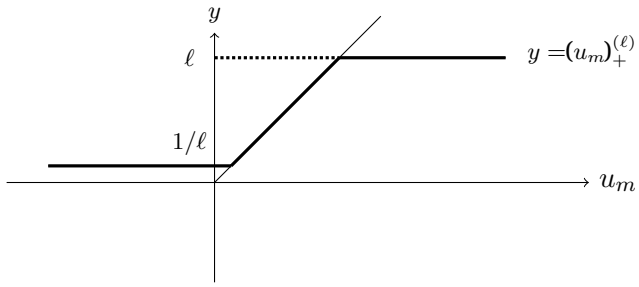

FIGURE 1. $(u_m(x))_+^{(\ell)}$ 的图像

Furt在此，对于 $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (t_{m-1}, t_m]\,(m=1,2,\cdots)$，我们定义 $\{(u_h)_\pm^{(\ell)}\}$ 和 $\{(\bar{u}_h)_\pm^{(\ell)}\}$ 如下:

$$(u_h)_\pm^{(\ell)}(x,t) := \frac{t-t_{m-1}}{h}(u_m(x))_\pm^{(\ell)} + \frac{t_m-t}{h}(u_{m-1}(x))_\pm^{(\ell)} \tag{4.1}$$

and

$$(\bar{u}_h)_\pm^{(\ell)}(x,t) := (u_m(x))_\pm^{(\ell)},$$

分别地。由 $u_m = u_{m-1} = 0$ 在 Ω $(m=1,2,\cdots)$ 之外，对于任意 $t \in [0,\infty)$,

$$(u_h)_\pm^{(\ell)}(x,t) \equiv \frac{1}{\ell} \quad \text{outside } \Omega. \tag{4.2}$$

令 $\ell \longrightarrow \infty$，对于 $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_{m-1}, t_m]\,(m=1,2,\ldots)$,

$$(u_h)_\pm^{(\ell)}(x,t) \longrightarrow \frac{t-t_{m-1}}{h}(u_m(x))_\pm + \frac{t_m-t}{h}(u_{m-1}(x))_\pm.$$

此外，$(u_h)_\pm^{(\ell)}$ 的时间导数为

$$\partial_t (u_h)_\pm^{(\ell)} = \frac{(u_m(x))_\pm^{(\ell)} - (u_{m-1}(x))_\pm^{(\ell)}}{h}$$

对于（x, t），$\in \mathbb{R}^n \times [t_{m-1}, t_m]$（$m=1$, 2, ...）。

4.1. 截断解的能量估计。首先，我们对上面（4.1）中定义的截断解推导能量估计。

引理 **4.1** 设（u_h）$_\pm^{(\ell)}$ 是由（4.1）定义的函数。则有

$$\iint_{\Omega_T} |\partial_t (u_h)_\pm^{(\ell)}|^2 \, dxdt \leqq C\ell^{q-1}[u_0]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{4.3}$$

当 $q \geqq 1$ 且,

$$\min\left\{ \iint_{\Omega_T} |\partial_t (u_h)_\pm^{(\ell)}|^2 \, dxdt, \iint_{\Omega_T} |\partial_t (u_h)_\pm^{(\ell)}|^{q+1} \, dxdt \right\} \leqq C\ell^{1-q}[u_0]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{4.4}$$

当 $0<q<1$时，其中正定常数 C 仅取决于 p 和 q。

证明。 证明基于一系列初等代数积分估计，这些估计分别在若干种情形下进行。我们仅证明 $\{(u_h)_+^{(\ell)}\}$ 的情形，因为另一种情形的处理方式类似。首先，在引理3.3的证明中，我们使用能量估计（3.19）

$$\sum_{m=1}^{N} h \int_\Omega \left(|u_m| + |u_{m-1}|\right)^{q-1} \left|\frac{u_m - u_{m-1}}{h}\right|^2 dx \leqq C(p,q)[u_0]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.5}$$

下文中我们使用简写记号 $[u_m \geqq L] \equiv \Omega \cap \{u_m \geqq L\}$。其他符号也采用类似的缩写。现在，我们区分 $q \geqq 1$ 和 $0 < q < 1$两种情形。

在第一种情况下 $q \geqq 1$，对于任意 $m = 1, \ldots, N$，

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(|u_m| + |u_{m-1}|\right)^{q-1} \left|\frac{u_m - u_{m-1}}{h}\right|^2 dx &\geqq \int_\Omega \left(|u_m| + |u_{m-1}|\right)^{q-1} \left|\frac{(u_m)_+^{(\ell)} - (u_{m-1})_+^{(\ell)}}{h}\right|^2 dx \\
&= \int_{[u_m > \frac{1}{\ell}] \cup [u_{m-1} > \frac{1}{\ell}]} \ldots dx + \int_{[u_m \leqq \frac{1}{\ell}] \cap [u_{m-1} \leqq \frac{1}{\ell}]} \ldots dx \\
&\geqq \int_{[u_m > \frac{1}{\ell}] \cup [u_{m-1} > \frac{1}{\ell}]} \left(\frac{1}{\ell}\right)^{q-1} \left|\frac{(u_m)_+^{(\ell)} - (u_{m-1})_+^{(\ell)}}{h}\right|^2 \\
&= \int_{[u_m > \frac{1}{\ell}] \cup [u_{m-1} > \frac{1}{\ell}]} \left(\frac{1}{\ell}\right)^{q-1} \left|\frac{(u_m)_+^{(\ell)} - (u_{m-1})_+^{(\ell)}}{h}\right|^2 dx \\
&\quad + \int_{[u_m \leqq \frac{1}{\ell}] \cap [u_{m-1} \leqq \frac{1}{\ell}]} \left(\frac{1}{\ell}\right)^{q-1} \left|\frac{(u_m)_+^{(\ell)} - (u_{m-1})_+^{(\ell)}}{h}\right|^2 dx \\
&= \left(\frac{1}{\ell}\right)^{q-1} \int_\Omega \left|\frac{(u_m)_+^{(\ell)} - (u_{m-1})_+^{(\ell)}}{h}\right|^2 dx, \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

其中，在上一行的（4.6）中，我们用到了以下事实：$\frac{(u_m)_+^{(\ell)} - (u_{m-1})_+^{(\ell)}}{h} = 0$在集合 $[u_m \leqq \frac{1}{\ell}] \cap [u_{m-1} \leqq \frac{1}{\ell}]$上。因此，由（4.5）和（4.6），我们得到所需的第一个估计式（4.3）。

在后一种情况下 $0 < q < 1$，我们需要证明

$$\left(|u_m| + |u_{m-1}|\right)^{q-1} \left|\frac{u_m - u_{m-1}}{h}\right|^2 \geqq 3^{q-1} \min\left\{\ell^{q-1} \left|\frac{(u_m)_+^{(\ell)} - (u_{m-1})_+^{(\ell)}}{h}\right|^2, \left|\frac{(u_m)_+^{(\ell)} - (u_{m-1})_+^{(\ell)}}{h}\right|^{q+1}\right\}. \qquad (4.7)$$

为证明（4.7），必须区分以下几种情况：首先，在集合 $\Omega_1 := [u_m \leqq \frac{1}{\ell}] \cap [u_{m-1} \leqq \frac{1}{\ell}]$ 或 $\Omega_2 := [u_m > \ell] \cap [u_{m-1} > \ell]$上，有 $\frac{(u_m)_+^{(\ell)} - (u_{m-1})_+^{(\ell)}}{h} = 0$，因此（4.7）显然成立。在集合 $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$上，我们区分四种情况（I）–（IV）。

情形 (I) $[u_m \leqq \frac{1}{\ell}] \cap [\frac{1}{\ell} < u_{m-1} \leqq \ell]$：在此区域，我们进一步分别讨论两种情况：对于情形 $u_m > 0$，仔细注意到 $u_m - u_{m-1} < 0$，可得

$$\begin{aligned}
|u_m| + |u_{m-1}| = u_m + u_{m-1} &= (u_m - u_{m-1}) + 2u_{m-1} \\
&\leqq 2u_{m-1} \leqq 2\ell < 3\ell.
\end{aligned}$$

在剩下的情形 $u_m \leqq 0$ 中，我们显然得到

$$|u_m| + |u_{m-1}| = -u_m + u_{m-1} \leqq |u_m - u_{m-1}|.$$

情形（II）$[u_m \leqq \frac{1}{\ell}] \cap [u_{m-1} > \ell]$：此外，我们区分两种情形 $u_m > 0$ 和$u_m \leqq 0$。在第一种情形 $u_m > 0$ 中，仔细注意到 $u_{m-1} - u_m \geqq \ell - \frac{1}{\ell} \geqq 2 - \frac{1}{2} \geqq \frac{1}{\ell}$，我们得到

$$\begin{aligned} |u_m| + |u_{m-1}| = (u_{m-1} - u_m) + 2u_m &\leqq (u_{m-1} - u_m) + \frac{2}{\ell} \\ &\leqq (u_{m-1} - u_m) + 2(u_{m-1} - u_m) \\ &= 3(u_{m-1} - u_m) \\ &\leqq 3|u_m - u_{m-1}|. \end{aligned}$$

在后一种情形 $u_m \leqq 0$下，我们再次有：

$$|u_m| + |u_{m-1}| = -u_m + u_{m-1} \leqq |u_m - u_{m-1}|.$$

情形（III）$[\frac{1}{\ell} < u_m \leqq \ell] \cap [\frac{1}{\ell} < u_{m-1} \leqq \ell]$：在此集合上，显然有

$$|u_m| + |u_{m-1}| = u_m + u_{m-1} \leqq 2\ell.$$

情形（IV） $[\frac{1}{\ell} < u_m \leqq \ell] \cap [u_{m-1} > \ell]$：在此区域内，我们进一步区分两种情形 $u_{m-1} - u_m \leqq \ell$ 和 $u_{m-1} - u_m > \ell$。在第一种情形 $u_{m-1} - u_m \leqq \ell$中，我们又可得

$$|u_m| + |u_{m-1}| = (u_{m-1} - u_m) + 2u_m \leqq \ell + 2\ell = 3\ell.$$

在后一种情形 $u_{m-1} - u_m > \ell$下，我们有

$$\begin{aligned} |u_m| + |u_{m-1}| = (u_{m-1} - u_m) + 2u_m &\leqq (u_{m-1} - u_m) + 2\ell \\ &\leqq (u_{m-1} - u_m) + 2(u_{m-1} - u_m) \\ &= 3(u_{m-1} - u_m) \\ &= 3|u_m - u_{m-1}|. \end{aligned}$$

交换 u_m（x）与 u_{m-1}（x）的角色后，我们可以分别在集合 $[\frac{1}{\ell} < u_m \leqq \ell] \cap [u_{m-1} \leqq \frac{1}{\ell}]$、$[u_m > \ell] \cap [u_{m-1} \leqq \frac{1}{\ell}]$和 $[u_m > \ell] \cap [\frac{1}{\ell} < u_{m-1} \leqq \ell]$上得到与情形（I）、（II）和（IV）相同的估计。综合所有情形可得

$$|u_m| + |u_{m-1}| \leqq \max\{3\ell,\, 3|u_m - u_{m-1}|\} \quad \text{in} \quad \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

注意到 $q - 1 < 0$，进而可得

$$\big(|u_m| + |u_{m-1}|\big)^{q-1} \geqq 3^{q-1} \min\big\{\ell^{q-1},\, |u_m - u_{m-1}|^{q-1}\big\} \quad \text{in} \quad \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2). \tag{4.8}$$

利用 $h^{q-1} \geqq 1$ 和（4.8），我们在集合 Ω 上得到 $\setminus$（$\Omega_1 \cup \Omega_2$），

$$\begin{aligned} \big(|u_m| + |u_{m-1}|\big)^{q-1} \Big|\tfrac{u_m - u_{m-1}}{h}\Big|^2 &\geqq 3^{q-1} \min\left\{\ell^{q-1} \Big|\tfrac{u_m - u_{m-1}}{h}\Big|^2,\, h^{q-1} \Big|\tfrac{u_m - u_{m-1}}{h}\Big|^{q+1}\right\} \\ &\geqq 3^{q-1} \min\left\{\ell^{q-1} \Big|\tfrac{(u_m)_+^{(\ell)} - (u_{m-1})_+^{(\ell)}}{h}\Big|^2,\, \Big|\tfrac{(u_m)_+^{(\ell)} - (u_{m-1})_+^{(\ell)}}{h}\Big|^{q+1}\right\}. \end{aligned}$$

接下来，我们实际上在整个区域 Ω 中都有 (4.7)，因此利用 (4.5) 和 (4.7)，进而得到 (4.4)。证明至此完成。 □

4.2. 截断解的收敛结果。 我们在此列出后续引理 4.2 和 4.4 中所用的 (4.1) 中截断解的收敛结果，相关内容将在引理 4.6中使用。

引理 4.2 设 u_h 为由 (1.1) 中 (3.3)定义的近似解。给定 $s \in (0,1)$，设 $s' < s$ 为正数。设 $\ell \geqq 2$ 为固定的自然数。设 K 为 $\mathbb{R}^n$中的 Lipschitz 有界区域。则存在子序列 $\{(u_h)_{\pm}^{(\ell)}\}$，仍记作同一符号，以及极限函数 $\omega_\ell^{\pm}$，使得对于任意满足 γ 且 $1 \leqq \gamma < \frac{n+1}{n+1-s'}$ 的幂，

$$(u_h)_+^{(\ell)} \longrightarrow \omega_\ell^{\pm} \quad \text{strongly in} \quad L^\gamma(K_T). \tag{4.9}$$

证明。 我们仅证明 $\{(u_h)_+^{(\ell)}\}$ 的情形，另一种情形的证明类似。设$2 \leqq \ell \in \mathbb{N}$ 和 $s \in (0,1)$ 任意给定并固定。首先，由引理 C.1中的 C.1，对于所有s'，$\bar{s}$ 满足 $0 < s' < \bar{s} < s < 1$ 的情形，有

$$\left[(u_h)_+^{(\ell)}\right]_{W^{s',1}(K_T)} \leqq C \left(\left\| \partial_t (u_h)_+^{(\ell)} \right\|_{L^1(K_T)} + \int_0^T \left[(u_h)_+^{(\ell)}(\cdot,t)\right]_{W^{\bar{s},1}(K)} dt \right). \tag{4.10}$$

由引理 4.1中的能量估计（4.3）和（4.4可知，（4.10）右端的第一项关于 h一致有界。（4.10）右端出现的 Gagliardo 半范数估计如下：

$$\begin{aligned}
\left[(u_h)_+^{(\ell)}(\cdot,t)\right]_{W^{\bar{s},1}(K)} &\leqq \iint_{K\times K} \frac{|(u_h)_+(x,t) - (u_h)_+(y,t)|}{|x-y|^{(n+sp)\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n+\bar{s}-(n+sp)\frac{1}{p}}} dxdy \\
&\leqq \left(\iint_{K\times K} \frac{|(u_h)_+(x,t) - (u_h)_+(y,t)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\iint_{K\times K} \frac{1}{|x-y|^{\frac{p}{p-1}\left(n+\bar{s}-(n+sp)\frac{1}{p}\right)}} dxdy \right)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

注意到 $\frac{p}{p-1}\left(n+\bar{s}-(n+sp)\frac{1}{p}\right) = n + \frac{p}{p-1}(\bar{s}-s) < n$，令 $R{:=}\operatorname{diam} K$，可得

$$\begin{aligned}
\iint_{K\times K} \frac{1}{|x-y|^{\frac{p}{p-1}\left(n+\bar{s}-(n+sp)\frac{1}{p}\right)}} dxdy &\leqq \int_K \left(\int_{B_R(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+\frac{p}{p-1}(\bar{s}-s)}} \right) dx \\
&= C(n)|K| \int_0^R \frac{d\varrho}{\varrho^{1+\frac{p}{p-1}(\bar{s}-s)}} \\
&= C(n)|K| \frac{p-1}{p(s-\bar{s})} R^{\frac{p}{p-1}(s-\bar{s})}
\end{aligned}$$

因此，右端的第二个积分（4.11）是有限的。因此，由引理 3.3 中的能量估计（3.11）可得

$$\left[(u_h)_+^{(\ell)}(\cdot,t)\right]_{W^{\bar{s},1}(K)} \leqq C(n,p,\bar{s},s) \left[(u_h)_+(\cdot,t)\right]_{W^{\bar{s},p}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leqq C(n,p,\bar{s},s)\,[u_0]_{W^{\bar{s},p}(\mathbb{R}^n)},$$

这与（4.10）以及 $\left\|(u_h)_+^{(\ell)}(\cdot,t)\right\|_{L^1}(K)\leqq \ell|K_T|$ 这一事实结合起来，进而得到 $\left\{(u_h)_+^{(\ell)}\right\}_{h>0}$ 在 $W^{s',1}(K_T)$ 中有界。因此，根据引理 2.5，对于所有满足 $1\leqq\gamma<\frac{n+1}{n+1-s'}$ 的 γ，存在一个子序列 $\{(u_h)_+^{(\ell)}\}_{h>0}$（也记作 h）以及一个极限函数 ω_ℓ^+，使得对每个 ℓ 都有

$$(u_h)_+^{(\ell)}\longrightarrow\omega_\ell^+\quad\text{strongly in}\quad L^\gamma(K_T)$$

因此，$h\searrow 0$引理 4.2 的证明至此完成。 □

我们将对截断解作切比雪夫型估计：

引理 4.3 设 $\{u_m\}$ 为方程 (3.1)的近似解。任取 $\ell\geqq 2$ 和 $\gamma\in[1,p_s^\star)$，则有

$$|K\cap\{(u_m)_+\geqq\ell\}|\leqq\frac{C}{\ell^{p_s^\star}}[u_0]^{p_s^\star}_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\tag{4.12}$$

and

$$\|(u_m)_+\|_{L^\gamma(K\cap\{(u_m)_+\geqq\ell\})}\leqq\frac{C}{\ell^{\frac{p_s^\star}{\gamma}-1}}[u_0]^{\frac{p_s^\star}{\gamma}}_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.\tag{4.13}$$

证明。 简要证明如下。由引理 3.27)$_1$ 中的 3.6，可得

$$\ell^{p_s^\star}|K\cap\{(u_m)_+\geqq\ell\}|\leqq\int_K(u_m)_+^{p_s^\star}\,dx\leqq\|u_m\|^{p_s^\star}_{L^{p_s^\star}(K)}\leqq C[u_0]^{p_s^\star}_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)},$$

这进而推出 (4.12)。由 H¨older 不等式，结合引理 4.12) 和 (3.27中的 3.6，可估计得到

$$\|(u_m)_+\|^\gamma_{L^\gamma(K\cap\{(u_m)_+\geqq\ell\})}\leqq\left(\int_{K\cap\{(u_m)_+\geqq\ell\}}|(u_m)_+|^{p_s^\star}\,dx\right)^{\frac{\gamma}{p_s^\star}}|K\cap\{(u_m)_+\geqq\ell\}|^{1-\frac{\gamma}{p_s^\star}}$$

$$\leqq C\frac{[u_0]^{p_s^\star}_{W^{s,p}(K)}}{\ell^{p_s^\star-\gamma}},$$

这正是（4.13）。 □

我们现在将在下一个引理中证明，$\{(u_h)_\pm\}_{h>0}$ 是 $L^\gamma(K_T)$中的柯西序列。

引理 4.4 $\{(u_h)_\pm\}_{h>0}$是 $L^\gamma(K_T)$中的柯西序列，其中 $1\leqq\gamma<\min\left\{p_s^\star,\frac{n+1}{n+1-s'}\right\}$且$0<s'<s$($<1$)。

证明。我们仅对 $\{(u_h)_+^{(\ell)}\}$ 的情形证明该结论，因为另一种情形的处理方法类似。首先将其分为三项：

$$\begin{aligned}&\|(u_h)_+-(u_{h'})_+\|_{L^\gamma(K_T)}\\&\leqq\left\|(u_h)_+-(u_h)_+^{(\ell)}\right\|_{L^\gamma(K_T)}+\left\|(u_h)_+^{(\ell)}-(u_{h'})_+^{(\ell)}\right\|_{L^\gamma(K_T)}+\left\|(u_{h'})_+^{(\ell)}-(u_{h'})_+\right\|_{L^\gamma(K_T)}\\&:=\mathbf{I}_{h,\ell}+\mathbf{I}_{h,h',\ell}+\mathbf{I}_{h',\ell}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

接下来，我们将估计$\mathbf{I}_{h、\ell}$、$\mathbf{I}_{h、h'、\ell}$和$\mathbf{I}_{h'、\ell}$在（4.14）中的各项。由于对于（x、 t） $\in$ $K \times$ （t_{m-1}、 t_m） （$m = 1$、2、 $\cdots$）

$$\begin{aligned}&(u_h)_+(x,t) - (u_h)_+^{(\ell)}(x,t)\\&= \frac{t-t_{m-1}}{h}\left((u_m)_+(x) - (u_m)_+^{(\ell)}(x)\right) + \frac{t_m - t}{h}\left((u_{m-1})_+(x) - (u_{m-1})_+^{(\ell)}(x)\right)\end{aligned}$$

由闵可夫斯基不等式，$\mathbf{I}_{h,\ \ell}$ 可估计为

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{h,\ell} &\leqq \left(h\sum_{m=1}^{N}\left\|(u_m)_+ - (u_m)_+^{(\ell)}\right\|_{L^\gamma(K)}^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(h\sum_{m=1}^{N}\left\|(u_{m-1})_+ - (u_{m-1})_+^{(\ell)}\right\|_{L^\gamma(K)}^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\\&=: I_1 + I_2.\end{aligned}$$

I_2 与 I_1的估计类似，因此我们将估计 I_1。由于 $(u_m)_+ - (u_m)_+^{(\ell)} = 0$ 在 $K \cap \left\{\frac{1}{\ell} < (u_m)_+ < \ell\right\}$ $(m = 1$、2、.....) 中，根据 (4.12) 和 (4.13) 可得

$$\begin{aligned}\left\|(u_m)_+ - (u_m)_+^{(\ell)}\right\|_{L^\gamma(K)} &\leqq \left\|(u_m)_+ - (u_m)_+^{(\ell)}\right\|_{L^\gamma(K\cap\{(u_m)_+\leqq\frac{1}{\ell}\})} + \left\|(u_m)_+ - (u_m)_+^{(\ell)}\right\|_{L^\gamma(K\cap\{(u_m)_+\geqq\ell\})}\\&\leqq \|(u_m)_+\|_{L^\gamma(K\cap\{(u_m)_+\leqq\frac{1}{\ell}\})} + \Big\|\underbrace{(u_m)_+^{(\ell)}}_{\equiv\frac{1}{\ell}}\Big\|_{L^\gamma(K\cap\{(u_m)_+\leqq\frac{1}{\ell}\})}\\&\quad + \|(u_m)_+\|_{L^\gamma(K\cap\{(u_m)_+\geqq\ell\})} + \Big\|\underbrace{(u_m)_+^{(\ell)}}_{\equiv\ell}\Big\|_{L^\gamma(K\cap\{(u_m)_+\geqq\ell\})}\\&\leqq \frac{1}{\ell}\left|K\cap\left\{(u_m)_+ \leqq \frac{1}{\ell}\right\}\right|^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{1}{\ell}\left|K\cap\left\{(u_m)_+ \leqq \frac{1}{\ell}\right\}\right|^{\frac{1}{\gamma}}\\&\quad + \|(u_m)_+\|_{L^\gamma(K\cap\{(u_m)_+\geqq\ell\})} + \ell\,|K\cap\{(u_m)_+ \geqq \ell\}|^{\frac{1}{\gamma}}\\&\overset{(4.12),\ (4.13)}{\leqq} \frac{2}{\ell}|K|^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{C}{\ell^{\frac{p_s^\star}{\gamma}-1}}[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p_s^\star}{\gamma}} + \ell\left(\frac{C}{\ell^{p_s^\star}}[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p_s^\star}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\\&= C\left(\frac{1}{\ell}|K|^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p_s^\star}{\gamma}}}{\ell^{\frac{p_s^\star}{\gamma}-1}}\right).\end{aligned}$$

由此可得

$$I_1 \leqq C(T+1)\left(\frac{1}{\ell^\gamma}|K| + \frac{[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p_s^\star}}{\ell^{p_s^\star-\gamma}}\right),$$

进而得到

$$\mathbf{I}_{h,\ell} \leqq C(T+1)\left(\frac{1}{\ell^\gamma}|K| + \frac{[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p_s^\star}}{\ell^{p_s^\star-\gamma}}\right) =: \zeta(\ell). \tag{4.15}$$

显然，$\mathbf{I}_{h',\ \ell}$ 的估计方法与$\mathbf{I}_{h,\ \ell}$类似。结合（4.15）和（4.14），再利用引理4.2，可得

$$\limsup_{h,h'\searrow 0}\|(u_h)_+-(u_{h'})_+\|_{L^\gamma(K_T)}\leqq \limsup_{h\searrow 0}\mathbf{I}_{h,\ell}+\limsup_{h,h'\searrow 0}\mathbf{I}_{h,h',\ell}+\limsup_{h'\searrow 0}\mathbf{I}_{h',\ell}$$

$$\leqq 2\zeta(\ell).$$

注意到 $p_s^\star>\gamma$ that $\lim_{\ell\longrightarrow\infty}\zeta(\ell)=0$，并将 $\ell\longrightarrow\infty$ 代入上式，我们最终得到

$$\lim_{h,h'\searrow 0}\|(u_h)_+-(u_{h'})_+\|_{L^\gamma(K_T)}=0.$$

同样地，由上述结果我们还可得到，

$$\lim_{h,h'\searrow 0}\|(u_h)_--(u_{h'})_-\|_{L^\gamma(K_T)}=0.$$

□

4.3. 近似解的收敛性 I. 在此我们将给出近似解 u_h 和 $\bar{u}_h$的收敛性。

引理 4.5（近似解的收敛性 I）对于任意 $\gamma\in[1,\max\{p_s^\star,q+1\})$，存在一个极限函数 $u\in L^\gamma(\Omega_T)$，使得对于任意 Lipschitz 有界区域 $K\subset\mathbb{R}^n$以及每个正数 $T<\infty$,

$$u_h,\ \bar{u}_h\longrightarrow u\quad a.e.\ in\ K_T, \tag{4.16}$$

$$u_h,\ \bar{u}_h\longrightarrow u\quad strongly\ in\ L^\gamma(K_T). \tag{4.17}$$

证明。注意到 $u_h=(u_h)_+-(u_h)_-$，根据引理 4.4，对于所有 γ，$1\leqq\gamma<\min\{p_s^\star,\frac{n+1}{n+1-s'}\}$，存在一个极限函数 $u\in L^\gamma(K_T)$，使得

$$u_h\longrightarrow u\quad \text{strongly in } L^\gamma(K_T) \tag{4.18}$$

当 $h\searrow 0$时。因此，我们有一个子序列 $\{u_h\}_{h>0}$（仍记作原记号）收敛到 u 在 K_T上几乎处处成立，即 (4.16) 的第一条结论。将这一事实与引理 3.4中的 (3.20)、引理 3.6中的 ($_2$ 3.27) 结合起来，通过 Fatou 引理可得，对于 $\gamma=p_s^\star$和 $\gamma=q+1$,

$$\sup_{0<t<T}\|u(t)\|_{L^\gamma(K)}\leqq C\max\left\{\|u_0\|_{L^{q+1}(\Omega)},\ [u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\right\}. \tag{4.19}$$

为证明 (4.16) 的第二条结论成立，我们采用引理 2.2 以及第 4.2节讨论的截断论证。为此，我们只需处理 $\{(\bar{u}_h)_+\}_{h>0}$，因为另一种情况的处理方法类似。由闵可夫斯基不等式可得

$$\begin{aligned}&\|(\bar{u}_h)_+-(u_h)_+\|_{L^1(K_T)}\\&\leqq\left\|(\bar{u}_h)_+-(\bar{u}_h)_+^{(\ell)}\right\|_{L^1(K_T)}+\left\|(\bar{u}_h)_+^{(\ell)}-(u_h)_+^{(\ell)}\right\|_{L^1(K_T)}+\left\|(u_h)_+^{(\ell)}-(u_h)_+\right\|_{L^1(K_T)}\\&=:\mathbf{I}_{h,\ell}+\mathbf{II}_{h,\ell}+\mathbf{III}_{h,\ell}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

仿照（4.15）中的论证，我们推得

$$\mathbf{I}_{h,\ell},\ \mathbf{III}_{h,\ell}\leqq C(T+1)\left(\frac{1}{\ell}|K|+\frac{[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p_s^\star}}{\ell^{p_s^\star-1}}\right)=:\zeta(\ell), \tag{4.21}$$

其中 $\zeta(\ell) \longrightarrow 0$ 当 $\ell \longrightarrow \infty$ 时。仿照引理 3.2 中的（3.7），我们有

$$\left|(\bar{u}_h)_+^{(\ell)} - (u_h)_+^{(\ell)}\right| \leqq h \left|\partial_t (u_h)_+^{(\ell)}\right|$$

因此，

$$\mathbf{II}_{h,\ell} = \left\|(\bar{u}_h)_+^{(\ell)} - (u_h)_+^{(\ell)}\right\|_{L^1(K_T)} \leqq h \left\|\partial_t (u_h)_+^{(\ell)}\right\|_{L^1(K_T)}.$$

注意到 $q+1>1$，由引理 4.1 中的（4.3）和（4.4）可得

$$\lim_{h \searrow 0} \mathbf{II}_{h,\ell} = 0. \tag{4.22}$$

由（4.20）、（4.21）和（4.22），我们得到

$$\limsup_{h \searrow 0} \|(\bar{u}_h)_+ - (u_h)_+\|_{L^1(K_T)} \leqq \limsup_{h \searrow 0} \mathbf{I}_{h,\ell} + \limsup_{h \searrow 0} \mathbf{II}_h + \limsup_{h \searrow 0} \mathbf{II}_h$$

$$\leqq 2\zeta(\ell)$$

并且，当 $\ell \longrightarrow \infty$ 趋于极限时，我们有

$$\lim_{h \searrow 0} \|(\bar{u}_h)_+ - (u_h)_+\|_{L^1(K_T)} = 0. \tag{4.23}$$

此外，我们得到不等式

$$\|(\bar{u}_h)_+ - u_+\|_{L^1(K_T)} \leqq \|(\bar{u}_h)_+ - (u_h)_+\|_{L^1(K_T)} + \|(u_h)_+ - u_+\|_{L^1(K_T)},$$

其收敛于零，当 $h \searrow 0$时，由收敛性（4.18）和（4.23）可知。因此，子序列$\{(\bar{u}_h)_+\}_{h>0}$ 收敛于 u_+ 中的几乎处处 K_T，当 $h \searrow 0$时。类似地，可验证收敛性 $(\bar{u}_h)_- \longrightarrow u_-$ 在 K_T 中几乎处处成立。因此，（4.16）的第二个断言得证。

对于证明（4.17），我们验证 $\{(\bar{u}_h)_+ - u_+\}_{h>0}$ 在 $L^\gamma(K_T)$ 中有界，其中 $\gamma = p_s^\star$ 且 $\gamma = q+1$。事实上，由引理 3.3中的（3.10）$_1$、引理 3.3中的（3.27）$_1$、引理 3.6 中的（4.19）

$$\|(\bar{u}_h)_+ - u_+\|_{L^\gamma(K_T)} \leqq C \max\left\{\|u_0\|_{L^{q+1}(\Omega)}, [u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\right\}.$$

因此，由引理 2.2 可知，对于任意 $\gamma \in [1,$最大值$\{p_s^*, q+1\})$，

$$\lim_{h \searrow 0} \|(\bar{u}_h)_+ - u_+\|_{L^\gamma(K_T)} = 0.$$

与上文类似，我们也有

$$\lim_{h \searrow 0} \|(\bar{u}_h)_- - u_-\|_{L^\gamma(K_T)} = 0.$$

结合上述两个等式，我们实际上得到了（4.17）的第二个结论。（4.17）的第一个结论可用与上述第二个结论相同的方法证明。证明至此完成。□

4.4. 近似解的收敛 II。以下收敛结果实际上成立：

引理 4.6（近似解的收敛 II）设 u_h、$\bar{u}_h$、$\bar{v}_h$、v_h、w_h 和 $\bar{w}_h$ 是由 (3.3)–(3.4) 定义的 (1.1) 的近似解。对于 $s \in (0,1)$，设 $s' < s$ 是一个正数。那么，$\{u_h\}_{h>0}$、$\{\bar{u}_h\}_{h>0}$、$\{v_h\}_{h>0}$、$\{\bar{v}_h\}_{h>0}$、$\{w_h\}_{h>0}$ 和 $\{\bar{w}_h\}_{h>0}$ 存在子序列（除非另有说明，仍记作原符号），以及一个极限函数 $u \in L^\infty(0,T;L^{q+1}(\Omega))$，使得对于任意有界区域 $K \subset \mathbb{R}^n$，对每个正数 $T<\infty$，以下收敛关系成立：

$$\bar{u}_h \longrightarrow u \quad *\text{-}weakly\ in\ L^\infty(0,\infty;L^{q+1}(\Omega)), \tag{4.24}$$

$$w_h, \bar{w}_h \longrightarrow |u|^{\frac{q-1}{2}}u \quad \textit{strongly in } L^{\beta}(K_T), \quad \forall \beta \in [1,2), \tag{4.25}$$

$$v_h,\ \bar{v}_h \longrightarrow |u|^{q-1}u \quad \textit{strongly in } L^{\alpha}(K_T), \quad \forall \alpha \in [1, \tfrac{q+1}{q}) \tag{4.26}$$

当 $h \searrow 0$时。

引理证明 **4.6**。 为证明陈述中的各项收敛性，我们将使用引理 3.3 和 3.5中的能量估计。下面按步骤证明引理 4.6 。

步骤 1：((4.24)的证明。 根据引理 3.10 中的 3.3，我们有

$$\{\bar{u}_h\}_{h>0}: \quad \text{bounded in } L^{\infty}(0,\infty; L^{q+1}(\Omega)). \tag{4.27}$$

于是存在一个子序列 $\{\bar{u}_h\}$ (仍用相同符号表示)以及极限函数$u \in L^{\infty}(0,\infty; L^{q+1}(\Omega))$，使得式(4.24)成立。注意，根据引理4.5中 u_h 和 $\bar{u}_h$的收敛，极限函数 u 与引理4.5中得到的极限函数相同。

步骤 2：方程 (4.25) 的证明。 我们进一步将此步骤分为两个步骤：

步骤 2.1. 我们将证明强收敛 $\bar{w}_h$至 $|u|^{\frac{q-1}{2}}u$在 $L^{\beta}(K_T)$ 对于 $\beta \in [1,2)$。由引理 3.10中的能量估计 (3.3，我们有

$$\iint_{K_T} \left||\bar{u}_h|^{\frac{q-1}{2}}\bar{u}_h - |u|^{\frac{q-1}{2}}u\right|^2 dxdt \leqq 2\iint_{\Omega_T} \left(|u_0|^{q+1} + |u|^{q+1}\right) dx$$

因此， $\{\bar{w}_h - |u|^{\frac{q-1}{2}}u\}_{h>0}$在 $L^2(K_T)$ 中有界。由 (4.16) $\bar{w}_h$几乎处处收敛至 $|u|^{\frac{q-1}{2}}u$于 K_T。由引理 2.2结合 $\psi \equiv 1$可得 $\iint \left||\bar{u}_h|^{\frac{q-1}{2}}\bar{u}_h - |u|^{\frac{q-1}{2}}u\right|^{\beta} dxdt \longrightarrow_{K_T}$

0，即

$$\bar{w}_h \longrightarrow |u|^{\frac{q-1}{2}}u \quad \text{strongly in } L^{\beta}(K_T). \tag{4.28}$$

这证明了 (4.25) 的第一个结论。

步骤 2.2. 现在考察 $\bar{w}_h$ 与 w之差。由引理 3.7中的式（3.2 可得，对于（x,t）$\in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$），

$$|w_h - \bar{w}_h| \leqq h\,|\partial_t w_h|$$

因此，由引理 3.23中的能量估计（3.5），

$$\|w_h - \bar{w}_h\|_{L^2(K_T)} \leqq h\,\|\partial_t w_h\|_{L^2(K_T)} \leqq Ch[u_0]^{\frac{p}{2}}_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

which 当 $h \searrow 0$时收敛于零。结合式（4.28），即可完成式（4.25）的证明。 .

步骤 3：式 (4.26的证明。与步骤 3 类似，我们继续进行证明。

步骤 3.1. 设 $\alpha \in [1, \frac{q+1}{q})$ 为任意数。利用引理 3.10中的能量估计（3.3，可得

$$\iint_{K_T} \left||\bar{u}_h|^{q-1}\bar{u}_h - |u|^{q-1}u\right|^{\frac{q+1}{q}} dxdt \leqq 2^{\frac{1}{q}}\iint_{\Omega_T} \left(|u_0|^{q+1} + |u|^{q+1}\right) dx \tag{4.29}$$

因此， $\{\bar{v}_h - |u|^{q-1}u\}_{h>0}$在 $L^{\frac{q+1}{q}}(K_T)$ 上有界。由（4.17） $\bar{v}_h$收敛于 $|u|^{q-1}u$在 K_T上几乎处处成立。由引理 2.2结合 $\psi \equiv 1$可得，对于$\alpha \in [1, \frac{q}{q+1})$ ，

$$\bar{v}_h \longrightarrow |u|^{q-1}u \quad \text{strongly in } L^{\alpha}(K_T).$$

步骤 3.2. 最后，我们将验证 v_h 在 $L^\alpha(K_T)$ 中收敛至 $|u|^{q-1}u$ （对于 $\alpha \in [1, \frac{q+1}{q}$ ）。为了完成证明，我们现在区分两种情况。每当 $q \geqq 1$ 时，均有：

$$\left||\bar{u}_h|^{q-1}\bar{u}_h - v_h\right| = |\bar{v}_h - v_h| \leqq h\,|\partial_t v_h|$$

因此，根据引理3.5中的能量估计（3.24）

$$\begin{aligned}\|\bar{v}_h - v_h\|_{L^1(K_T)} &\leqq h\,\|\partial_t v_h\|_{L^1(K_T)} \\ &\leqq Ch\,|K_T|^{\frac{1}{q+1}}\,\|u_0\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{\frac{q-1}{2}}[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{2}}.\end{aligned} \tag{4.30}$$

当 $0 < q < 1$时，根据引理3.2中的（3.8 ）和引理2.1中的（2.8 ），对任意（x， t）我们有 $\in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ ，

$$\begin{aligned}|v_h - \bar{v}_h| &\leqq C\left(|\bar{u}_h(t)| + |\bar{u}_h(t-h)|\right)^{q-1}|\bar{u}_h(t) - \bar{u}_h(t-h)| \\ &\leqq C\,|\bar{u}_h(t) - \bar{u}_h(t-h)|^q \\ &= Ch^q\left(|\bar{u}_h(t)| + |\bar{u}_h(t-h)|\right)^{\frac{q(1-q)}{2}}\left(|\bar{u}_h(t)| + |\bar{u}_h(t-h)|\right)^{\frac{q(q-1)}{2}}|\partial_t u_h|^q\end{aligned}$$

因此，接下来我们两次使用 H¨ölder 不等式，指数对分别为 $\left(\frac{2}{q}, \frac{2}{2-q}\right)$ 和 $\left(\frac{(2-q)(q+1)}{q\ 1-q}\right.$ $()$ ，$(2-q)($ $\left.{}_{2}^{q+1}\right))$ ，以及引理3.3中的能量不等式（3.10）和（3.12 ），得到

$$\begin{aligned}\iint_{K_T}|v_h - \bar{v}_h|\,dxdt &\leqq h^q\left(\iint_{K_T}\left(|\bar{u}_h(t)| + |\bar{u}_h(t-h)|\right)^{q-1}|\partial_t u_h|^2\,dxdt\right)^{\frac{q}{2}} \\ &\quad\times\left(\iint_{K_T}\left(|\bar{u}_h(t)| + |\bar{u}_h(t-h)|\right)^{\frac{q(1-q)}{2-q}}\,dxdt\right)^{\frac{2-q}{2}} \\ &\leqq h^q\left(\iint_{K_T}\left(|\bar{u}_h(t)| + |\bar{u}_h(t-h)|\right)^{q-1}|\partial_t u_h|^2\,dxdt\right)^{\frac{q}{2}} \\ &\quad\times\left(\iint_{K_T}\left(|\bar{u}_h(t)| + |\bar{u}_h(t-h)|\right)^{q+1}\,dxdt\right)^{\frac{q(1-q)}{2(q+1)}}|K_T|^{\frac{1}{q+1}} \\ &\leqq Ch^q\,|K_T|^{\frac{1}{q+1}}\,\|u_0\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{\frac{q(1-q)}{2}}[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{pq}{2}}.\end{aligned} \tag{4.31}$$

由第 3.2 步中的收敛，在 $h \searrow 0$ （4.30）和（4.31）中取极限，可推出 L^1（K_T）中 v_h 的收敛，从而在 K_T 中， v_h 的一个子序列几乎处处收敛到 $|u|^{q-1}u$。

与上面的（4.29）类似，我们也可以看出 $\left\{v_h - |u|^{q-1}u\right\}_{h>0}$ 在 $L^{\frac{q+1}{q}}$（K_T）中有界。因此，由引理2.2可知，这一点结合几乎处处收敛，证明了 v_h 在 $|u|^{q-1}u$ 中收敛到 L^α（K_T），其中 $\alpha \in [1, \frac{q+1}{q}$ ）。

最后，引理4.6 的证明完成。 □

由引理2.2 我们很容易推出以下收敛结果，后文将在第5节中使用。

引理 4.7 对于任意测试函数 $\varphi \in \mathscr{T}$，有

$$-\iint_{\Omega_T} w_h\, \partial_t\varphi\, dxdt \longrightarrow -\iint_{\Omega_T} |u|^{\frac{q-1}{2}} u\, \partial_t\varphi\, dxdt \tag{4.32}$$

and

$$-\iint_{\Omega_T} v_h\, \partial_t\varphi\, dxdt \longrightarrow -\iint_{\Omega_T} |u|^{q-1} u\, \partial_t\varphi\, dxdt \tag{4.33}$$

当 $h \searrow 0$ 时。

证明。 我们只证明（4.33），因为另一种情形（4.32）的处理方法类似。由引理 3.4中的（3.20

$$\iint_{\Omega_T} |v_h|^{\frac{q+1}{q}}\, dxdt \leqq C(T+1)\|u_0\|_{L^{q+1}}^{q+1}$$

因此， $\{v_h\}_{h>0}$ 在 $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega_T)$ 中有界。由引理 4.6中的（4.26

$$v_h\, \partial_t\varphi \longrightarrow |u|^{q-1} u\, \partial_t\varphi \quad \text{a.e. in } \Omega_T.$$

注意到 $\partial_t\varphi \in L^{q+1}(\Omega_T)$，因为 $\varphi \in \mathscr{T}$并在引理 $\psi = \partial_t\varphi$ 中取 2.2 可得

$$\iint_{\Omega_T} v_h\, \partial_t\varphi\, dxdt \longrightarrow \iint_{\Omega_T} |u|^{q-1} u\, \partial_t\varphi\, dxdt$$

如 $h \searrow 0$，完成证明。 □

5. 定理1.1的证明

现在，所有前提条件均已具备，我们可以证明主要定理1.1 。

定理**1.1**的证明。我们将证明，引理 u 4.6 中得到的极限函数 是方程（3.1）的弱解。为此，我们将验证 u满足定义2.8中的条件。首先，我们验证定义2.8中的条件（D1）。由引理4.16中的收敛（4.6），应用于引理3.13中的（3.3 ），并利用 Fatou 引理可得，对于任意正数 $t < \infty$,

$$[u(t)]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqq \liminf_{h\searrow 0} [\bar{u}_h(t)]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqq [u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.1}$$

此外，由引理2.13中的（2.6 ）和（5.1）可得，对于任意正数 $t < \infty$,

$$\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqq C[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.2}$$

因此，由（5.1）和（5.2）可知，极限函数 u 属于 $L^\infty(0,\ \infty;\ W^{s,}{}_0{}^{p}(\Omega))$。与（5.1）类似，由引理3.20中的（3.4）还可得，对于任意正数 $t < \infty$,

$$\|u(t)\|_{L^{q+1}(\Omega)} \leqq \|u_0\|_{L^{q+1}(\Omega)} \tag{5.3}$$

这意味着 $u \in L^\infty(0,\infty; L^{q+1}(\Omega))$，因此，(D1) 的证明完成。

由引理 3.23 中的 (3.5)， $\{\partial_t w_h\}_{h>0}$ 在 $L^2(\Omega_\infty)$ 中有界，因此存在一个子序列$\{\partial_t w_h\}_{h>0}$ (仍记作该记号)以及一个极限函数 $\omega \in L^2(\Omega_\infty)$，使得当 $h \searrow 0$ 时，

$$\partial_t w_h \longrightarrow \omega \quad \text{weakly in } L^2(\Omega_\infty). \tag{5.4}$$

利用引理 4.32 中的收敛性 (4.7 ，当 $h \searrow 0$ 时，在恒等式中令其取极限

$$\iint_{\Omega_\infty} \partial_t w_h \cdot \varphi \, dxdt = -\iint_{\Omega_\infty} w_h \, \partial_t \varphi \, dxdt \tag{5.5}$$

对每个 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\infty)$ 都有

$$\omega = \partial_t(|u|^{\frac{q-1}{2}}u) \quad \text{in } L^2(\Omega_\infty). \tag{5.6}$$

因此，由（5.4）和（5.6）可得

$$\partial_t w_h \longrightarrow \partial_t(|u|^{\frac{q-1}{2}}u) \quad \text{weakly in } L^2(\Omega_\infty) \tag{5.7}$$

因此，由引理 3.5中的收敛（5.7）和（3.23），对任意 $T < \infty$,

$$\left\| \partial_t(|u|^{\frac{q-1}{2}}u) \right\|^2_{L^2(\Omega_T)} \leqq C[u_0]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.8}$$

因此，定理 1.1 的正则性部分得证。

现在我们来证明定义 2.8中的条件 (D2)。设 $\varphi \in \mathscr{T}$，其定义见定义 2.8。根据（2.15）中的记号，我们首先设

$$\overline{U}_h(x,y,t) := |\bar{u}_h(x,t) - \bar{u}_h(y,t)|^{p-2}(\bar{u}_h(x,t) - \bar{u}_h(y,t)),$$

$$U(x,y,t) := |u(x,t) - u(y,t)|^{p-2}(u(x,t) - u(y,t)).$$

对于下面的估计，设 R 为任意一个正数，使得开球 B_R 以原点为球心、半径为 R 且紧含 Ω。为了验证定义 2.8中的 (D2)，我们将证明当 $h \searrow 0$时的收敛,

$$\int_0^T \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\overline{U}_h(x,y,t)\,(\varphi(x,t) - \varphi(y,t))}{|x-y|^{n+sp}} \, dxdydt \longrightarrow \int_0^T \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{U(x,y,t)\,(\varphi(x,t) - \varphi(y,t))}{|x-y|^{n+sp}} \, dxdydt. \tag{5.9}$$

现在令 $B \equiv B_R$, $B^c := \mathbb{R}^n \setminus B$ 以及 $D_B := (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus (B^c \times B^c)$。为使 (5.9) 成立，我们考虑 D_B上两个分数阶积分之差，随后将其分为以下三项:

$$\begin{aligned} I_h &:= \left| \int_0^T \iint_{D_B} \left[\frac{\overline{U}_h(x,y,t)\,(\varphi(x,t) - \varphi(y,t))}{|x-y|^{n+sp}} - \frac{U(x,y,t)\,(\varphi(x,t) - \varphi(y,t))}{|x-y|^{n+sp}} \right] dxdydt \right| \\ &\leqq \int_0^T \iint_{B \times B} \ldots \, dxdydt + \int_0^T \iint_{B \times B^c} \ldots \, dxdydt + \int_0^T \iint_{B^c \times B} \ldots \, dxdydt \\ &=: I_h^{(1)} + I_h^{(2)} + I_h^{(3)}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

现在我们继续估计各项 $I_h^{(1)}$ 、$I_h^{(2)}$ 和 $I_h^{(3)}$ 。对于 $I_h^{(1)}$ 的估计，我们将验证 $\left\{ \overline{U}_h(x,y,t) \right.$

$\left(\frac{\varphi(x,t) - \varphi(y,t)}{|x-y|^{n+sp}} \right\}_{h>0}$ 在 $B \times B \times (0,T)$ 上一致可积。令

$\Lambda \subset B\times B\times(0,T)$ 是任意可测集。由 Hölder 不等式以及引理 ¨ 中的能量估计（3.11）3.3，可得

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\Lambda}\left|\frac{\overline{U}_h(x,y,t)\,(\varphi(x,t)-\varphi(y,t))}{|x-y|^{n+sp}}\right|dxdydt\\
&\leqq\left(\iiint_{\Lambda}\frac{|\varphi(x,t)-\varphi(y,t)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdydt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^T\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|\bar{u}_h(x,t)-\bar{u}_h(y,t)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdydt\right)^{\frac{p-1}{p}}\\
&\overset{(3.11)}{\leqq}C\left(\iiint_{\Lambda}\frac{|\varphi(x,t)-\varphi(y,t)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdydt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Omega}|u_0|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

由于右侧第一个勒贝格积分的绝对连续性，对于每个正数 ε，存在一个正数 δ 使得

$$\iiint_{\Lambda}\left|\frac{\overline{U}_h(x,y,t)\,(\varphi(x,t)-\varphi(y,t))}{|x-y|^{n+sp}}\right|dxdydt<\varepsilon\quad\text{whenever}\quad|\Lambda|<\delta$$

因此，$\left\{\dfrac{\overline{U}_h(x,y,t)(\quad\varphi\ x\ t\ -\varphi\ y\ t}{|x-y|^{n+sp}}\right\}_{h>0}$ $(,)(,))$ 在 $B\times B\times(0,T)$ 上一致可积。由引理 4.6中的几乎处处收敛（4.16），可得

$$\frac{\overline{U}_h(x,y,t)\,(\varphi(x,t)-\varphi(y,t))}{|x-y|^{n+sp}}\longrightarrow\frac{U(x,y,t)\,(\varphi(x,t)-\varphi(y,t))}{|x-y|^{n+sp}}$$

几乎处处（x,y,t）$\in B\times B\times(0,T)$，其中我们注意到该集合

$$\{(x,y,t)\in B\times B\times(0,T):x=y\}$$

相对于 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 上的 $2n+1$ 维勒贝格测度可忽略。因此，Vitali 收敛定理得出，

$$\int_0^T\iint_{B\times B}\frac{\overline{U}_h(x,y,t)\,(\varphi(x,t)-\varphi(y,t))}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdydt\longrightarrow\int_0^T\iint_{B\times B}\frac{U(x,y,t)\,(\varphi(x,t)-\varphi(y,t))}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdydt,$$

作为 $h\searrow 0$，即，

$$\lim_{h\searrow 0}I_h^{(1)}=0.\tag{5.11}$$

我们将估计 $I_h^{(2)}$ 和 $I_h^{(3)}$。由于这两个积分关于 x 和 y 对称，$I_h^{(3)}$ 可以用与估计 $I_h^{(2)}$ 类似的方法进行估计，因此我们给出 $I_h^{(2)}$ 的估计。边界条件 $(3.1)_2$ 蕴含，对于 $\Omega^c\times$ 中的 $(0,T)$，有 $\bar{u}_h=u=0$，并且根据 $B^c\subset\Omega^c$，$\bar{u}_h(y,t)=u(y,t)=\varphi(y,t)=0$ 对于几乎处处的 $(y,t)\in B^c\times(0,T)$ 成立，因为 Ω 紧含于 B，且在 $\Omega^c\times(0,T)$ 中 $u_h=u=0$ 几乎处处成立。利用 H¨older 不等式，可将 $I_h^{(2)}$ 估计为

$$\begin{aligned}
I_h^{(2)}&\leqq\int_0^T\iint_{\Omega\times B^c}\frac{\left||\bar{u}_h(x,t)|^{p-2}\bar{u}_h(x,t)-|u(x,t)|^{p-2}u(x,t)\right|}{|x-y|^{n+sp}}|\varphi(x,t)|\,dxdydt\\
&\leqq\int_0^T\int_{\Omega}\left(\int_{B^c}\frac{dy}{|x-y|^{n+sp}}\right)\left||\bar{u}_h(x,t)|^{p-2}\bar{u}_h(x,t)-|u(x,t)|^{p-2}u(x,t)\right||\varphi(x,t)|\,dxdt
\end{aligned}$$

$$\leqq C(n,s,p)d^{-sp}\iint_{\Omega_T}\left||\bar{u}_h(x,t)|^{p-2}\bar{u}_h(x,t)-|u(x,t)|^{p-2}u(x,t)\right||\varphi(x,t)|\,dxdt, \tag{5.12}$$

其中，在第二行中，我们注意到：对于任意 $(x,y)\in\Omega\times B^c$，$|x-y|\geqq d:=\mathrm{dist}(\Omega,\partial B)$，并对 $(x,y)\in\Omega\times B^c$ 进行估计

$$\int_{B^c}\frac{dy}{|x-y|^{n+sp}}\leqq\int_{B_d(x)^c}\frac{dy}{|x-y|^{n+sp}}$$

$$=C(n)\int_d^\infty\frac{d\varrho}{\varrho^{1+sp}}=C(n)\frac{d^{-sp}}{sp}.$$

为进一步估计（5.12）右端的积分，我们将验证 $\left\{\left||\bar{u}_h|^{p-2}\bar{u}_h-|u|^{p-2}u\right|\right\}_{h>0}$ 在 $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega_T)$ 中有界。由引理 3.6 中的（3.26）

$$\iint_{\Omega_T}|\bar{u}_h(x,t)|^p\,dxdt\leqq C\int_0^T[\bar{u}_h(t)]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\,dt\leqq C\|u_0\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}. \tag{5.13}$$

B由引理 4.6中的几乎处处收敛（4.16）、（5.13）以及 Fatou 引理，我们得到

$$\iint_{\Omega_T}|u(x,t)|^p\,dxdt\leqq\liminf_{h\searrow0}\iint_{\Omega_T}|\bar{u}_h(x,t)|^p\,dxdt\leqq C\|u_0\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}.$$

结合（5.13），可得

$$\iint_{K_T}\left||\bar{u}_h(x,t)|^{p-2}\bar{u}_h(x,t)-|u(x,t)|^{p-2}u(x,t)\right|^{\frac{p}{p-1}}dxdt$$

$$\leqq 2^{\frac{1}{p-1}}\iint_{\Omega_T}\left(|\bar{u}_h(x,t)|^p+|u(x,t)|^p\right)dxdt$$

$$\leqq C\|u_0\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}$$

因此，$\left\{\left||\bar{u}_h|^{p-2}\bar{u}_h-|u|^{p-2}u\right|\right\}_{h>0}$ 在 $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega_T)$ 中有界。由此，结合（5.12）以及引理 4.6 中的（4.16），再应用引理 2.2，可得

$$\lim_{h\searrow0}I_h^{(2)}=0. \tag{5.14}$$

将前述估计式（5.11）和（5.14）合并，可得到关于I_h的如下最终估计：

$$\limsup_{h\searrow0}I_h\leqq\limsup_{h\searrow0}I_h^{(1)}+2\limsup_{h\searrow0}I_h^{(2)}=0,$$

因此，由（5.9）和引理4.7中的（4.33），令 $h\searrow0$ 在（3.5）中取极限，得到

$$-\iint_{\Omega_T}|u|^{q-1}u\,\partial_t\varphi\,dxdt+\frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{U(x,y,t)}{|x-y|^{n+sp}}\left(\varphi(x,t)-\varphi(y,t)\right)dxdydt=0$$

对所有 $\varphi\in\mathscr{T}$，这就得出了条件 (D2)。这里我们指出，定义 $\mathscr{T}$ 中的测试函数类 2.8 是 (3.5) 中测试函数类的子空间。

最后，我们验证条件 (D3)。如前所述，我们有 $\bar{u}_h(t) = 0$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 中几乎处处成立，对任意 $t \geqq 0$。因此，由引理 4.16中的收敛 (4.6)， $u = 0$ 在 $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \times (0, T)$ 中几乎处处成立，对任意 $T > 0$，这表明 (D3) 中的边界条件成立。

我们将逼近方程（3.5）作用于 $\mathbb{R}^n \times (t_1, t_2)$，其中任意 $t_2 > t_1 \geqq 0$，且 $\varphi(x)\sigma_{(t_1,t_2)}(t)$，其中 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，而 $\sigma_{(t_1,t_2)}(t)$ 是时间区间 (t_1, t_2) 特征函数的通常 Lipschitz 逼近。利用 H¨older 不等式以及引理 3.13）中的 3.3，可得，对于任意 $t_2 > t_1 \geqq 0$,

$$\left| \int_\Omega \big(v_h(t_2) - v_h(t_1)\big)\varphi \, dx \right| = \left| -\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\overline{U}_h(x,y,t)}{|x-y|^{n+sp}} \big(\varphi(x) - \varphi(y)\big) \, dxdydt \right|$$

$$\leqq \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [\bar{u}_h(t)]^{p-1}_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \, dt \cdot [\varphi]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\overset{(3.13)}{\leqq} \frac{1}{2} [u_0]^{p-1}_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} [\varphi]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} (t_2 - t_1), \tag{5.15}$$

由 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^{q+1}(\Omega)$ 中的稠密性可知， $v_h(t)$ 在 $t \in [0, \infty)$ 中关于 $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ 弱连续，并且关于逼近参数 h一致。由引理 3.2中的（3.2 ）和引理 3.10）中的 3.3， $\{v_h(t)\}_{h>0}$ 在 $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ 中有界。因此，由 Arzel`à–Ascoli 定理可得，当$h \searrow 0$,

$$v_h \longrightarrow |u|^{q-1}u$$

在 上一致局部地 $[0, \infty)$ 并且在 $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ 中弱收敛。这与将 (5.9) 应用于 (5.15) 的第一行一起表明，对于 $t_2 > t_1 = 0$,

$$\left| \int_\Omega \big(|u|^{q-1}u(t_2) - |u_0|^{q-1}u_0\big)\varphi \, dx \right| = \left| -\frac{1}{2} \int_0^{t_2} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{U(x,y,t)}{|x-y|^{n+sp}} \big(\varphi(x) - \varphi(y)\big) \, dxdydt \right|$$

从而 $|u(t)|^{q-1}u(t)$ 弱收敛于 $|u_0|^{q-1}u_0$ 在 $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ 中，当 $t \searrow 0$时。类似地，我们使用引理 2.1 中的代数不等式 (2.8) 得到

$$u(t) \longrightarrow u_0 \quad \text{weakly in} \quad L^{q+1}(\Omega) \tag{5.16}$$

当 $t \searrow 0$时。此外，不等式 (5.3) 给出

$$\limsup_{t \searrow 0} \|u(t)\|_{L^{q+1}(\Omega)} \leqq \|u_0\|_{L^{q+1}(\Omega)}. \tag{5.17}$$

由 (5.16) 和 (5.17) 可知

$$u(t) \longrightarrow u_0 \quad \text{strongly in } L^{q+1}(\Omega) \text{ as } t \searrow 0. \tag{5.18}$$

现在，我们已经具备验证初始条件 (D3) 所需的预备结果。鉴于收敛性 (5.18)，我们只需证明 $[u(t) - u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$ 当 $t \searrow 0$ 时成立。首先，由 (5.18) 和 Fatou 引理可得

$$[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqq \liminf_{t \searrow 0} [u(t)]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)},$$

结合 (5.1) 可得

$$\lim_{t\searrow 0}[u(t)]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = [u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.19}$$

根据收敛性（5.18）和有界性（5.1），我们可以应用维塔利收敛定理，得到

$$\frac{u(x,t)-u(y,t)}{|x-y|^{s+\frac{n}{p}}} \longrightarrow \frac{u_0(x)-u_0(y)}{|x-y|^{s+\frac{n}{p}}} \quad \text{strongly in } L^p(B_R\times B_R)$$

对于任意球 B_R。我们将考虑在（x，y）$\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的积分，其中测试函数取为上述两项之差，这对应于（5.10）对（5.9）的情形。仿照（5.10）的证明，我们得到

$$\frac{u(x,t)-u(y,t)}{|x-y|^{s+\frac{n}{p}}} \longrightarrow \frac{u_0(x)-u_0(y)}{|x-y|^{s+\frac{n}{p}}} \quad \text{weakly in } L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n). \tag{5.20}$$

将（5.19）与（5.20）结合，并应用拉东-里斯定理，我们得出结论$[u(t)-u_0]_{W^{s,\,p}(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$ 当 $t\searrow 0$ 时，因此，初始条件 (D3) 实际上得到了验证。

因此，证明完成。 □

附录 A. 引理3.1的证明

在本附录中，我们证明 (3.1) 的解的存在性，即引理 3.1。证明基于变分法直接方法。在本附录中，设 $s\in(0,1)$、$p>1$ 和 $q>0$ 已给定，并令 $\mathcal{X}:=W^{s,\,p}_{0}(\Omega)\cap L^{q+1}(\Omega)$。

引理 **3.1** 的证明。给定 $u_{m-1}\in\mathcal{X}$，我们在 $\mathcal{X}$ 上定义泛函:

$$\mathcal{X}\ni w\longmapsto \mathcal{F}(w):=\frac{1}{h}\int_\Omega\left(\frac{1}{q+1}|w|^{q+1}-|u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}w\right)dx+\frac{1}{2p}[w]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

证明分两步：首先，我们将证明泛函 $\mathcal{F}(w)$ 存在极小化子，然后证明 $\mathcal{F}(w)$ 的一阶变分；这两步均表明引理 3.1 成立。根据杨氏不等式，对于任意 $w\in\mathcal{X}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(w)&=\frac{1}{h}\int_\Omega\left(\frac{1}{q+1}|w|^{q+1}-|u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}w\right)dx+\frac{1}{2p}[w]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\\ &\geqq\frac{1}{h}\int_\Omega\left(\frac{1}{2(q+1)}|w|^{q+1}-C(q)|u_{m-1}|^{q+1}\right)dx+\frac{1}{2p}[w]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\\ &>-\infty.\end{aligned} \tag{A.1}$$

设 $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ 是一个极小化序列，使得

$$\inf\mathcal{F}\leqq\mathcal{F}(u_k)<\inf\mathcal{F}+\frac{1}{k}$$

对所有 $k\in\mathbb{N}$，其中下确界取于 $w\in\mathcal{X}:=W^{s,\,p}_{0}(\Omega)\cap L^{q+1}(\Omega)$。注意，对所有$w\in\mathcal{X}$,

$$-C\|u_{m-1}\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}\leqq\inf\mathcal{F}\leqq\mathcal{F}(v)<\infty$$

存在某个 $v \in \mathcal{X}$非空，因为 $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{X}$。接着我们注意到 $\sup \mathcal{F}(u_k) \leqq \inf \mathcal{F}+1 =: M < \infty$ 并且，根据 (A.1),

$$\frac{1}{h}\int_\Omega \frac{1}{2(q+1)}|u_k|^{q+1}\,dx + \frac{1}{2p}[u_k]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqq M + C\int_\Omega |u_{m-1}|^{q+1}\,dx, \tag{A.2}$$

这意味着

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{L^{q+1}(\Omega)} < \infty \quad ; \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} [u_k]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{A.3}$$

在不重新编号的子序列意义下，存在一个弱极限 $u \in L^{q+1}(\Omega)$，使得

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{weakly in} \quad L^{q+1}(\Omega) \tag{A.4}$$

因此，由巴拿赫–施泰因豪斯定理及（A.3），

$$\|u\|_{L^{q+1}(\Omega)} \leqq \liminf_{k\longrightarrow\infty} \|u_k\|_{L^{q+1}(\Omega)} < \infty. \tag{A.5}$$

由于 $u_k \in W^{s,p}_0(\Omega)$，由引理 2.6 中的分数阶庞加莱不等式（2.13），我们有 $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$，结合（A.3）即可得到

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{A.6}$$

令 $s' \equiv \min\{\frac{n}{2p}, s\}$ 蕴含 $0 < s' \leqq s < 1$。由引理 2.7,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{W^{s',p}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

并且，对于任意满足 $\Omega \subset B_R$ 的球 B_R

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{W^{s',p}(B_R)} < \infty.$$

由于 $s'p \leqq \frac{n}{2} < n$，我们可以应用引理 2.4 得到（如有必要，经过抽取一个子序列 y)

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{strongly in} \quad L^r(B_R)$$

对所有满足 $1 \leqq r < \frac{np}{n-s'p}$ 的 r，并且

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{a.e. in} \quad \Omega, \tag{A.7}$$

这尤其意味着 $u = 0$ 在 Ω^c。由 Fatou 引理结合（A.7）和（A.6），可得

$$\|u\|^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqq \liminf_{k\longrightarrow\infty} \|u_k\|^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{A.8}$$

因此，由（A.5）和（A.8），可验证 $u \in W^{s,p}_0(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega) = \mathcal{X}$。

最后，再次根据（A.5）和（A.8），可得

$$\begin{aligned}
\inf_{w\in\mathcal{X}} \mathcal{F}(w) &= \liminf_{k\longrightarrow\infty} \mathcal{F}(u_k) \\
&= \liminf_{k\longrightarrow\infty} \left[\frac{1}{h}\int_\Omega \left(\frac{1}{q+1}|u_k|^{q+1} - |u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}u_k\right)dx + \frac{1}{2p}[u_k]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\right] \\
&\geqq \frac{1}{h}\int_\Omega \left(\frac{1}{q+1}|u|^{q+1} - |u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}u\right)dx + \frac{1}{2p}[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&= \mathcal{F}(u),
\end{aligned}$$

这意味着 $u \in \mathcal{X}$ 实际上是 $\mathcal{F}$ 的极小化子。

现在我们来计算 $\mathcal{F}$ 的一阶变分。设 $u_m \in \mathcal{F}$ 为一个极小化子。对于 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ 和 $\varphi \in \mathcal{X}$，我们计算得

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{F}(u_m+\varepsilon\varphi)-\mathcal{F}(u_m)}{\varepsilon} &= \frac{1}{h}\frac{1}{q+1}\int_\Omega \frac{|u_m+\varepsilon\varphi|^{q+1}-|u_m|^{q+1}}{\varepsilon}\,dx \\ &\quad -\frac{1}{h}\int_\Omega \frac{|u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}(u_m+\varepsilon\varphi)-|u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}u_m}{\varepsilon}\,dx \\ &\quad +\frac{1}{2p}\frac{[u_m+\varepsilon\varphi]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}-[u_m]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}}{\varepsilon} \\ &=: I_1+I_2+I_3. \end{aligned} \tag{A.9}$$

显然有

$$I_2 = -\frac{1}{h}\int_\Omega |u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}\varphi\,dx \tag{A.10}$$

另一方面，利用微积分基本定理和 $u_m \in \mathcal{X}$ 的 Hölder 不等式，我们得到当 $\varepsilon \longrightarrow 0$ 时，

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{h}\frac{1}{q+1}\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^1 \frac{d}{d\theta}|u_m+\theta\varepsilon\varphi|^{q+1}\,d\theta\right)dx \\ &= \frac{1}{h}\int_\Omega\left(\int_0^1 |u_m+\theta\varepsilon\varphi|^{q-1}(u_m+\theta\varepsilon\varphi)\,d\theta\right)\varphi\,dx \longrightarrow \frac{1}{h}\int_\Omega |u_m|^{q-1}u_m\varphi\,dx. \end{aligned} \tag{A.11}$$

再次利用微积分基本定理，

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2p}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{1}{\varepsilon}\frac{|(u_m+\varepsilon\varphi)(x)-(u_m+\varepsilon\varphi)(y)|^p-|u_m(x)-u_m(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy \\ &= \frac{1}{2p}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\left(\int_0^1 \frac{d}{d\theta}\Big|(u_m+\theta\varepsilon\varphi)(x)-(u_m+\theta\varepsilon\varphi)(y)\Big|^p\,d\theta\right)dxdy \\ &= \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\left(\int_0^1 U_m^{(\theta)}(x,y)\,(\varphi(x)-\varphi(y))\,d\theta\right)dxdy \end{aligned} \tag{A.12}$$

以及简记法2.14)

$$U_m^{(\theta)}(x,y) := \Big|(u_m+\theta\varepsilon\varphi)(x)-(u_m+\theta\varepsilon\varphi)(y)\Big|^{p-2}\Big((u_m+\theta\varepsilon\varphi)(x)-(u_m+\theta\varepsilon\varphi)(y)\Big).$$

(A.12) 右端的被积函数估计为

$$\frac{1}{|x-y|^{n+sp}}\left|\int_0^1 U_m^{(\theta)}(x,y)\,(\varphi(x)-\varphi(y))\,d\theta\right|$$

$$\leqq 2^{p-1}\left(\frac{|u_m(x)-u_m(y)|^{p-1}\,|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{n+sp}}+\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\right)$$

并由 H¨older 不等式,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} C\left(\frac{|u_m(x)-u_m(y)|^{p-1}\,|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{n+sp}}+\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\right)dxdy$$

$$\leqq C\left([u_m]^{p-1}_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}[\varphi]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}+[\varphi]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\right)<\infty.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，我们令极限趋于 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 在（A.12）中，从而得到

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} I_3=\frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{U_m(x,y)}{|x-y|^{n+sp}}\left(\varphi(x)-\varphi(y)\right)\,dxdy, \tag{A.13}$$

其中 $U_m(x,y):=|u_m(x)-u_m(y)|^{p-2}\left(u_m(x)-u_m(y)\right)$ 如 (2.14) 所示。因此，将 (A.10)、(A.11) 和 (A.13) 代入 (A.9)，由 $\mathcal{X}$ 中 $\mathcal{F}$ 的 u_m 的极小性可得，对所有 $\varphi\in\mathcal{X}$,

$$\begin{aligned}0&=\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\frac{\mathcal{F}(u_m+\varepsilon\varphi)-\mathcal{F}(u_m)}{\varepsilon}\\&=\int\limits_{\Omega}\frac{|u_m|^{q-1}u_m-|u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}}{h}\,\varphi\,dx+\frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{U_m(x,y)}{|x-y|^{n+sp}}\left(\varphi(x)-\varphi(y)\right)\,dxdy,\end{aligned}$$

这就完成了引理 3.1 的证明。 □

附录 B. 有界性

在本附录中B，通过对初始数据有界性 u_0作出额外的更强假设，我们得出比上一节略强的结论（参见引理B.1 和B.2 以及定理B.3）。

B.1. 有界性。在本附录中B.1，我们证明（1.1）的近似解的有界性。此处的测试函数取自 [2]。

引理 B.1（有界性）假设 $u_0\in W^{s,p}_0(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$。设 $\bar{u}_h$，u_h，$\bar{w}_h$，w_h，v_h且 $\bar{v}_h$ 是 (1.1) 中定义于(3.3) 和(3.4)的一个近似解。这些解在Ω_∞中有界:

$$\begin{aligned}&\sup_{t>0}\|\bar{u}_h(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqq\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)},\\&\sup_{t>0}\|u_h(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqq\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)};\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\sup_{t>0}\|\bar{w}_h(t)\|_{L^\infty(\Omega)},\ \sup_{t>0}\|w_h(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqq\|u_0\|^{\frac{q+1}{2}}_{L^\infty(\Omega)}; \tag{B.2}$$

$$\sup_{t>0}\|\bar{v}_h(t)\|_{L^\infty(\Omega)},\ \sup_{t>0}\|v_h(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqq\|u_0\|^{q}_{L^\infty(\Omega)}. \tag{B.3}$$

证明。估计（B.1）$_2$，（B.2）以及（B.3）可直接由（B.1）$_1$ 和引理3.2推出。沿用[23, 引理3.3，第164], 页中给出的论证，我们将证明（B.1）$_1$。令 $M := \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ 以简化记号。在（3.2）中，取测试函数 $\xi_\delta(u_m)$ 使得

$$\xi_\delta(\sigma) = \frac{\sigma}{|\sigma|}\min\left\{1, \frac{(|\sigma| - M)_+}{\delta}\right\} \quad \text{for} \quad \delta > 0.$$

注意到，对于 $\sigma \in \mathbb{R}$，$\xi_\delta(\sigma)$ 显然是有界的利普希茨函数，因此，$\xi_\delta(u_m) \in W^{s,p}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$。

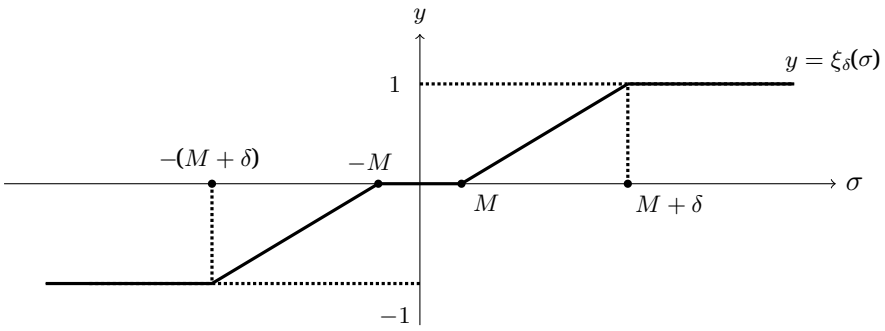

FIGURE B.1. $y = \xi_\delta(\sigma)$ 的图像

于是，对于 $m = 1,2,\ldots$，我们有

$$\frac{1}{h}\int_\Omega \left(|u_m|^{q-1}u_m - |u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}\right)\xi_\delta(u_m)\,dx + \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{U_m(x,y)}{|x-y|^{n+sp}}\left(\xi_\delta(u_m(x)) - \xi_\delta(u_m(y))\right)dxdy = 0. \tag{B.4}$$

分数阶积分中（B.4）的被积函数可按如下方式计算：由于 $\xi_\delta(u_m(x)) - \xi_\delta(u_m(y))$ 与 $u_m(x) - u_m(y)$ 符号相同（这是由 $\xi_\delta(\sigma)$ 的单调性得出的），因此我们得到

$$\begin{aligned} &U_m(x,y)\left(\xi_\delta(u_m(x)) - \xi_\delta(u_m(y))\right) \\ &= |u_m(x) - u_m(y)|^{p-2}\left(u_m(x) - u_m(y)\right)\left(\xi_\delta(u_m(x)) - \xi_\delta(u_m(y))\right) \geqq 0 \end{aligned}$$

在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上。

去掉（B.4）中的分数阶项可得

$$\int_\Omega \frac{|u_m|^q - |u_{m-1}|^q}{h}\min\left\{1, \frac{(|u_m| - M)_+}{\delta}\right\}dx \leqq 0. \tag{B.5}$$

由勒贝格控制收敛定理，并令 $\delta \searrow 0$ 在（B.5）中趋于极限，可得

$$\int_{\Omega\cap\{|u_m|>M\}} \frac{|u_m|^q - |u_{m-1}|^q}{h}\,dx \leqq 0, \tag{B.6}$$

这等价于

$$\int_\Omega (|u_m|^q - M^q)_+\,dx \leqq \int_{\Omega\cap\{|u_m|>M\}} (|u_{m-1}|^q - M^q)\,dx.$$

忽略满足 $|u_{m-1}| \leqq M \leqq |u_m|$ 的区域后，右端可进一步估计为

$$\int\limits_{\Omega\cap\{|u_m|>M\}} (|u_{m-1}|^q - M^q)\,dx \leqq \int\limits_{\Omega\cap\{|u_m|>M\}\cap\{|u_{m-1}|>M\}} (|u_{m-1}|^q - M^q)\,dx \leqq \int\limits_{\Omega} (|u_{m-1}|^q - M^q)_+\,dx.$$

综上所述，我们有

$$\int\limits_{\Omega} (|u_m|^q - M^q)_+\,dx \leqq \int\limits_{\Omega} (|u_{m-1}|^q - M^q)_+\,dx.$$

对 m 迭代上述表达式，我们得到

$$\int\limits_{\Omega} (|u_m|^q - M^q)_+\,dx \leqq \int\limits_{\Omega} (|u_0|^q - M^q)_+\,dx = 0$$

对所有 $m = 1,2,\ldots,$ 这反过来又意味着对于任意 $m = 1, 2, \ldots,$ $|u_m| \leqq M$ 属于 Ω，从而证明完毕。□

由有界性引理 B.1，引理 4.6 中的收敛结果可改进如下。

引理 B.2（近似解的收敛性）设 $\bar{u}_h$、u_h、$\bar{w}_h$、w_h、$\bar{v}_h$ 和 v_h是由 (3.3)和 (3.4)定义的 (1.1)的近似解，满足引理 *4.6*中的收敛性。对于任意有限指数 $\gamma \geqq 1$、任意有界区域 $K \subset \mathbb{R}^n$ 以及任意正数 $T < \infty$,

$$u_h,\, \bar{u}_h \longrightarrow u \quad \textit{strongly in } L^\gamma(K_T), \tag{B.7}$$

$$w_h, \bar{w}_h \longrightarrow |u|^{\frac{q-1}{2}}u \quad \textit{strongly in } L^\gamma(K_T), \tag{B.8}$$

$$v_h,\, \bar{v}_h \longrightarrow |u|^{q-1}u \quad \textit{strongly in } L^\gamma(K_T) \tag{B.9}$$

如 $h \searrow 0$。

证明。 由有界性（B.1）和（4.16可得

$$\sup_{0<t<T} \|u(t)\|_{L^\infty(K)} \leqq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{B.10}$$

有界性（B.1）、（B.10）以及利用 H¨older 不等式对收敛性（4.17）进行估计，可得（B.7）$_1$。其他结论（B.7）$_2$，（B.8）和（B.9）的有效性可利用有界性引理B.1、（4.25）和（4.26证明。□

B.2. 在 $\partial_t\left(|u|^{q-1}u\right)$ 情况下的正则性 $q \geqq 1$。 这里我们陈述由有界性引理 B.1得到的时间导数正则性。

定理 B.3 设 $q \geqq 1$。假设初始数据 $u_0 \in W^{s,\,p}_{0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$。那么，定理 u 1.1 中得到的方程(1.1) 的弱解满足 $\partial_t(|u|^{q-1}u) \in L^2(\Omega_\infty)$，且解$u$ 本身几乎处处满足 (1.1) 于Ω_∞，作为一个 L^2-函数。

我们首先推导时间导数的 L^2估计：

引理 B.4 设 $q \geqq 1$ 和 v_h 是由 (3.4) 定义的 (1.1) 的近似解。假设 ${}_0{}^{p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$。那么，近似解的时间导数 $\{\partial_t v_h\}$ 在 $L^2(\Omega_T)$ 中有界，对任意正的 $T < \infty$ 均成立，

$$\iint_{\Omega_T} |\partial_t v_h|^2 \, dxdt \leqq C\|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{q-1}[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p} \tag{B.11}$$

其中 $C = C(p, q)$ 为正定常数。

引理 **B.4** 的证明。由引理 3.3 中的能量估计（3.12 ）和引理 B.1中的（B.1），可得

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{N} h \int_{\Omega} |\partial_t v_h|^2 \, dx &\leqq C \sum_{m=1}^{N} h \int_{\Omega} (|u_m| + |u_{m-1}|)^{2(q-1)} \left| \frac{u_m - u_{m-1}}{h} \right|^2 dx \\
&\leqq C \sum_{m=1}^{N} h \left(\|u_m\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{q-1} + \|u_{m-1}\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{q-1} \right) \\
&\qquad \times \int_{\Omega} (|u_m| + |u_{m-1}|)^{q-1} \left| \frac{u_m - u_{m-1}}{h} \right|^2 dx \\
&\overset{(B.1)}{\leqq} C\|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{q-1} \int_0^{t_N} \int_{\Omega} (|\bar{u}_h(x,t)| + |\bar{u}_h(x,t-h)|)^{q-1} |\partial_t u_h(x,t)|^2 \, dxdt \\
&\overset{(3.12)}{\leqq} C\|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{q-1}[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p},
\end{aligned}$$

这就完成了（B.11）的证明。 □

下面给出定理 B.3 的证明。

定理 **B.3** 的证明。设 $q \geqq 1$。由引理 B.11）中的（B.4， $\{\partial_t v_h\}_{h>0}$ 在 $L^2(\Omega_\infty)$ 中有界，因此存在一个子序列 $\{\partial_t v_h\}_{h>0}$ （也记作 h）以及一个极限函数 $\vartheta \in L^2(\Omega_\infty)$，使得当 $h \searrow 0$ 时，

$$\partial_t v_h \longrightarrow \vartheta \quad \text{weakly in } L^2(\Omega_\infty). \tag{B.12}$$

B利用引理 B.2 中的收敛性 (B.9)，令 $h \searrow 0$ 趋于极限，可得恒等式

$$\iint_{\Omega_\infty} \partial_t v_h \cdot \varphi \, dxdt = -\iint_{\Omega_\infty} v_h \, \partial_t \varphi \, dxdt$$

对每个 $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega_\infty$，由 (4.33) 可得

$$\vartheta = \partial_t(|u|^{q-1}u) \quad \text{in } L^2(\Omega_\infty). \tag{B.13}$$

因此，利用引理 B.2 中的收敛性 (B.9 以及引理 B.4中的 (B.11，可得

$$\left\|\partial_t(|u|^{q-1}u)\right\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leqq C\|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{q-1}[u_0]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p},$$

从而完成了定理B.3的证明。

□

附录 C. 时空分数阶 Sobolev 不等式

在本附录中，我们在引理C.1 中证明了一个一般不等式，该不等式通过时空域上的 Gagliardo 半范数进行插值，适用于函数沿时间方向弱可微的特殊情形。引理C.1 中的不等式是引理4.6的关键要素。

下面的不等式给出了分数阶 Sobolev 半范数与时间导数积分之间的插值关系。

引理 C.1（时空分数阶 Sobolev 不等式）设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域，且 $I := (0,T)$，其中 $0 < T < \infty$。设 s'、$\bar{s}$ 是满足 $0 < s' < \bar{s} < 1$ 的两个指数。则有

$$[f]_{W^{s',1}(K_T)} \leqq C(n,n,s',\bar{s}) \left(\|\partial_t f\|_{L^1(K_T)} + \int_I [f(\cdot,t)]_{W^{\bar{s},1}(K)}\, dt \right), \tag{C.1}$$

其中，假设右侧函数 f 的积分有限。

证明。首先，我们将 Gagliardo 半范数拆分为两项:

$$\begin{aligned}
[f]_{W^{s',1}(K_T)} \leqq & \iint_{I\times I} \iint_{K\times K} \frac{|f(x,t)-f(x,t')|}{\left(\sqrt{|x-x'|^2+(t-t')^2}\right)^{(n+1)+s'}}\, dxdx'dtdt' \\
& + \iint_{I\times I} \iint_{K\times K} \frac{|f(x,t')-f(x',t')|}{\left(\sqrt{|x-x'|^2+(t-t')^2}\right)^{(n+1)+s'}}\, dxdx'dtdt' \\
& =: I + II.
\end{aligned} \tag{C.2}$$

根据假设，显然有 $1+(s'-\bar{s}) > 0$。在此条件下，积分 I 可简单估计为

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{I\times I} \iint_{K\times K} \frac{|f(x,t)-f(x,t')|}{\left(\sqrt{|x-x'|^2+(t-t')^2}\right)^{1+\bar{s}}} \times \frac{dxdx'dtdt'}{\left(\sqrt{|x-x'|^2+(t-t')^2}\right)^{n+(s'-\bar{s})}} \\
&\leqq \int_K \left(\iint_{I\times I} \frac{|f(x,t')-f(x,t')|}{|t-t'|^{1+\bar{s}}}\, dtdt' \right) \left(\int_{K_{x'}} \frac{dx'}{|x-x'|^{n+(s'-\bar{s})}} \right) dx \\
&= \int_K \left[\int_I \left(\int_{\{\tau\in(-T,T)\,:\, t+\tau\in I\}} \frac{|f(x,t')-f(x,\tau+t)|}{|t-t'|^{1+\bar{s}}}\, d\tau \right) dt' \right] \left(\int_{K_{x'}} \frac{dx'}{|x-x'|^{n+(s'-\bar{s})}} \right) dx.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

由于微积分基本定理,

$$\left|f(x,t)-f(x,\tau+t)\right| = \left| \int_0^1 \frac{d}{d\sigma} f(x,t+\sigma\tau)\, d\sigma \right| \leqq |\tau| \int_0^1 \left|\partial_t f(x,t+\sigma\tau)\right| d\tau,$$

这与（C.2）以及富比尼定理结合起来，进而意味着

$$I \leqq \int_K \int_0^1 \left[\int_{-T}^{T} \frac{1}{|\tau|^{\bar{s}}} \left(\int_{\{t\in I\,:\,t+\tau\in I\}} \left|\partial_t f(x,t+\sigma\tau)\right| dt \right) d\tau \right] \left(\int_{K_{x'}} \frac{dx'}{|x-x'|^{n+(s'-\bar{s})}} \right) d\sigma dx$$

$$\leqq \left(\int_{-T}^{T} \frac{1}{|\tau|^{\bar{s}}} d\tau \right) \int_K \|\partial_t f(x,\cdot)\|_{L^1(I)} \left(\int_{K_{x'}} \frac{dx'}{|x-x'|^{n+(s'-\bar{s})}} \right) dx. \tag{C.4}$$

通过变量代换 $\varrho = |x-x'|$ 我们有

$$\int_{K_{x'}} \frac{dx'}{|x-x'|^{n+(s'-\bar{s})}} \leqq C(n) \int_0^{\operatorname{diam} K} \frac{d\varrho}{\varrho^{1+(s'-\bar{s})}}$$

$$= \frac{(\operatorname{diam} K)^{\bar{s}-s'}}{\bar{s}-s'} < \infty. \tag{C.5}$$

类似地，根据条件 $0<\bar{s}<1$，积分 $\int_{-T}^{T} \frac{1}{|\tau|^{\bar{s}}} d\tau$ 出现在（C.4）中，其值为有限值，仅取决于 T。将此与（C.4）和（C.5）结合可得

$$I \leqq C(n,s',\bar{s},T) \int_K \|\partial_t f(x,\cdot)\|_{L^1(I)}\, dx$$

$$= C(n,s',\bar{s},T) \|\partial_t f\|_{L^1(K\times I)}. \tag{C.6}$$

现在我们来计算 II。积分 II 估计为

$$II \leqq \iint_{I\times I} \iint_{K\times K} \frac{|f(x,t')-f(x',t')|}{\left(\sqrt{|x-x'|^2+(t-t')^2}\right)^{n+\bar{s}}} \times \frac{dxdx'dtdt'}{\left(\sqrt{|x-x'|^2+(t-t')^2}\right)^{1+s'-\bar{s}}}$$

$$\leqq \iint_{I\times I} \iint_{K\times K} \frac{|f(x,t')-f(x',t')|}{|x-x'|^{n+\bar{s}}} \times \frac{dxdx'dtdt'}{|t-t'|^{1+(s'-\bar{s})}}$$

$$= \int_I \left(\int_{I_t} \frac{dt}{|t-t'|^{1+(s'-\bar{s})}} \right) [f(\cdot,t')]_{W^{\bar{s},1}(K)}\, dt'$$

$$\leqq C \int_I \left(\int_{-T}^{T} \frac{d\tau}{|\tau|^{1+(s'-\bar{s})}} \right) [f(\cdot,t')]_{W^{\bar{s},1}(\mathbb{R}^n)}\, dt'$$

$$= C(n,s,\bar{s},T) \int_I [f(\cdot,t')]_{W^{\bar{s},1}(K)}\, dt', \tag{C.7}$$

其中，在第四行使用了 $\int_{-T}^{T} \frac{d\tau}{|\tau|^{1+(s'-\bar{s})}} = \frac{2T^{\bar{s}-s'}}{\bar{s}-s'}$。

合并式C.6）和（C.7）于（C.3，可得结论（C.1）。 □

参考文献

[1] B. Abdellaoui、A. Attar、R. Bentifour 和 I. Peral，关于一般数据下的分数阶 p-拉普拉斯抛物型问题，Ann. Mat. Pura Appl. (4) 197 (2018)，第 2 期，329–356 页。[2]H.W. Alt 和 S. Luckhaus，《拟线性椭圆-抛物型微分方程》，Math. Z. 183 (1983)，311–341 页。[3] V. B¨ogelein、F. Duzaar、P. Marcellini 和 C. Scheven，多孔介质型双重非线性方程，Arch. Ration. Mech. Anal., 229 (2018)，第 2 期，503–545 页。[4] L. Brasco、S. Mosconi 和 M. Squassina，分数阶 Sobolev 不等式极值函数的最优衰减，Calc. Var. Partial Differential Equations 55 (2016)，第 2 期，文章编号 23，共 32 页。[5] Y. Chen、M.-C. Hong 和 N. Hungerb¨uler，取值于球面的 p-调和映射热流，Math. Z., 215 (1994)，25–35 页。[6] P. Daskalopoulos、Y. Sire 和 J.L. V´azquez，分数阶 Yamabe 流的弱解与光滑解：一般紧致局部共形平坦流形的情形，Comm. Partial Differential Equations 42 (2017)，第 9 期，1481–1496 页。[7] A. Di Castro、T. Kuusi 和 G. Palatucci，非局部 Harnack 不等式，J. Funct. Anal. 267 (2014)，第 6 期，1807–1836 页。[8] A. Di Castro、T. Kuusi 和 G. Palatucci，分数阶 p-极小化子的局部性质，Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire 33 (2016)，第 5 期，1279–1299 页。[9] E. DiBenedetto，《退化抛物型方程》，Universitext，Springer-Verlag，纽约，1993。[10] A. de Pablo、F. Quir´os、A. Rodr´ıguez 和 J.L. V´azquez，一般分数阶多孔介质方程，Comm. Pure Appl. Math. 65 (2012)，第 9 期，1242–1284 页。[11] A. Fiscella、R. Servadei 和 E. Valdinoci，分数阶 Sobolev 空间的稠密性，Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 40 (2015)，第 1 期，235–253 页。[12] E. Giusti，《变分法中的直接方法》，世界科学出版公司，新加坡 Tuck Link，2003。[13] M. del Mar Gonz´alez 和 J. Qing，分数阶共形拉普拉斯算子与分数阶 Yamabe 问题，Anal. PDE 6 (2013)，第 7 期，1535–1576 页。[14] C.R. Graham 和 M. Zworski，共形几何中的散射矩阵，Invent. Math. 152(2003)，第 1 期，89–118 页。[15] R.S. Hamilton，曲面上的 Ricci 流。载于《数学与广义相对论》（加利福尼亚州圣克鲁斯，1986），Contemp. Math.，71，237–262 页，Amer. Math. Soc.，罗得岛州普罗维登斯，1988。[16] N. Hungerb¨uler，具有弱单调性的散度形式拟线性抛物型系统，Duke Math. J. 107 (2001)，第 3 期，497–520 页。[17] A. Iannizzotto、S. Mosconi 和 M. Squassina，分数阶 p-拉普拉斯算子的整体 Hölder 正则性，Rev. Mat. Iberoam 32 (2016)，第 4 期，1353–1392 页。[18] T. Jin 和 J.Xiong，分数阶 Yamabe 流及其若干应用，J. Reine Angew. Math., 696 (2014)，187–223 页。[19] T. Kuusi、M. Misawa 和 K. Nakamura， p-Sobolev 流的正则性估计，Journal of Geometric Analysis 30 (2020)，1918–1964 页。[20] T. Kuusi、M. Misawa 和 K. Nakamura， p-Sobolev 流的整体存在性，J. Differential Equations 279 (2021)，245–281 页。[21]T. Kuusi 和 G. Palatucci（编），《非局部理论近期进展》，De Gruyter，柏林/波士顿，2018。[22] J.M. Maz´on、J.D. Rossi 和 J. Toledo，分数阶 p-拉普拉斯演化方程，J. Math. Pures Appl. (9)105 (2016)，第 6 期，810–844 页。[23] K. Nakamura 和 M. Misawa， p-Sobolev 流弱解的存在性，Nonlinear Anal. TMA 175C (2018)，157–172 页。

[24] E. Di Nezza、G. Palatucci 和 E. Valdinoci，《分数阶 Sobolev 空间漫游指南》，数学科学通报 136（2012），第 5 期，521–573。[25] A.C. Ponce，《椭圆型偏微分方程、测度与容量》，数学专著丛书 23。欧洲数学会（EMS），苏黎世（2016）。[26] D. Puhst，《关于演化型分数阶 p-Laplacian》，应用数学研究快报 AMRX 2015，第 2 期，253–273。.[27] E. Rothe，《关于空间情形下系数非常数的热传导方程》（德文），数学年刊 104（1931），第 1 期，340–362。[28] J.L. V´azquez，《分数阶 p-Laplacian 演化方程的 Dirichlet 问题》，J. Differential Equations，260（2016），第 7 期，6038–6056。（Nobuyuki Kato）

Department of Mathematics, Nippon Institute of Technology, Saitama, Japan*Email address*: nbykkato@nit.ac.jp（Masashi Misawa） Faculty of Advanced Science and Technology, Kumamoto University, Kumamoto860-8555, Japan*Email address*: mmisawa@kumamoto-u.ac.jp（Kenta Nakamura） Headquarters for Admissions and Education, Kumamoto University, Kumamoto 860-8555, Japan*Email address*: kntkuma21@kumamoto-u.ac.jp（Yoshihiko Yamaura）

Department of Mathematics, College of Humanities and Sciences, NihonUniversity, Tokyo, Japan*Email address*: yamaura@math.chs.nihon-u.ac.jp