arXiv:2305.00670v3 [math.AC] 9 Jun 2024

[1]

线图路径理想幂的正则性

JIAWEN SHAN 和 DANCHENG LU*

Dedicated to the memory of Professor Jürgen Herzog

ABSTRACT. 令 I 为 L_n 的 t-路径理想，其中 L_n 是具有 n 个顶点的线图。我们证明，对于某个 $s \geq 1$ （或等价地，对于所有 $s \geq 1$），I^s具有线性分解，当且仅当对于某个 $s \geq 1$ （或等价地，对于所有 $s \geq 1$），I^s 具有线性商，当且仅当 $t \leq n \leq 2t$。此外，我们给出了 I^s 对所有 $s \geq 1$ 的正则度的显式公式。结果表明，从一开始，它关于 s 就是线性的。

1. INTRODUCTION

令 $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ 为域 $\mathbb{K}$ 上以 $x_1, \ldots, x_n$ 为变量的多项式环。对于齐次理想 $I \subset R$，I 的 Castelnuovo-Mumford 正则度（简称正则度）是一种重要的代数不变量，用于衡量其复杂性。对齐次理想幂的正则度的研究始于一项著名结果，该结果由 Cutkosky-Herzog-Trung 和 Kodiyalam 分别于 [11] 和 [17] 独立证明。该结果指出，R/I^s 的正则度渐近地是关于 s 的线性函数，即存在整数 d、e 和 s_0，使得对所有 $s \geq s_0$，reg $R/I^s = ds + e$。学者们在这方面的研究大致可分为两类。一类是针对某些特殊或一般的理想 I，理解常数 e 以及使 reg R/I^s 成为线性函数的最小幂 s_0，参见例如[9, 14]。另一类是为某些特殊理想的 reg R/I^s 给出界或显式公式，参见例如 [20, 8]。

边理想由 Villarreal 在 [22] 中定义并加以研究。设 G 是一个有限简单图，其顶点集为 $V = \{x_1, \cdots, x_n\}$，边集为 E。由所有满足 $\{x_i, x_j\} \in E$ 的二次单项式 $x_i x_j$ 生成的理想称为 G 的边理想，记作 $I(G)$。边理想幂的正则度已得到广泛研究，并涌现出许多令人振奋的结果，参见例如 [2, 3, 4, 8, 16] 及其中的参考文献。

1999 年，Conca 和 De Negri 在其著作 [10]，中引入了 t-路径理想的概念，将边理想的定义推广了。对于整数 $2 \leq t \leq n$，G 的 t-路径是由 $t-1$ 条互不相同的边 $\{x_{i_1}, x_{i_2}\}$、$\{x_{i_2}, x_{i_3}\}$、$\cdots$、$\{x_{i_{t-1}}, x_{i_t}\}$ 组成的序列，这些边属于 G，且顶点 x_{i_1}、x_{i_2}、.....、x_{i_t} 两两不同。为简便起见，这样的路径也记作 $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\}$。与 G 相关联的 t-路径理想 $I_t(G)$ 定义为平方自由单项式理想

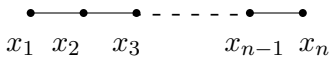
$$I_t(G) = (x_{i_1} \cdots x_{i_t} \mid \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\} \text{ is a } t\text{-path of } G)$$

[1]通讯作者2010 *Mathematics Subject Classification.* 主类号 13D02；次类号 05E40。

Key words and phrases. 正则性；线性分解；路径理想；幂；线图。1

在多项式环中 R。近年来，路径理想的一些代数性质得到了广泛研究，例如参见 [1, 6, 7, 15, 18, 19]。

然而，对于 t-路径理想的幂在 $t \geq 3$中的情况，人们所知甚少。在本文中，我们将具体研究线图的路径理想的幂。长度为$n-1$的线图，记为 L_n，是一个顶点集为 $\{x_1, \ldots, x_n\}$、边集为 $\{\{x_j, x_{j+1}\} \mid j = 1, \ldots, n-1\}$的图。也就是说， L_n 具有以下形式：



最近，B˘al˘anescu-Cimpoeaş [5] 推导出了一个显式公式，用于计算与线图相关的路径理想的幂的深度。相比之下，本文深入研究了决定线图的-路径理想的所有幂或部分幂是否具有线性分解的条件，详见定理2.2。此外，我们还为同类理想的幂建立了正则度公式，如定理3.6所示。

在本文中，我们将 L_n 记为长度为 $n-1$ 的线图，并将 $I_t(L_n)$记为 L_n的 t-路径理想。令 $G(I_t(L_n))$表示 $I_t(L_n)$的最小单项式生成集。也就是说，$G(I_t(L_n)) = \{u_1, \ldots, u_{n-t+1}\}$，其中 $u_i = x_i x_{i+1} \cdots x_{i+t-1}$ 适用于 $i = 1$， ....., $n-t+1$。

2. When powers of $I_t(L_n)$ have a linear resolution?

本节中，我们研究 $I_t(L_n)$的幂何时具有线性分解，并计算这类理想的分次贝蒂数。

设 I 为一个由同一次数的单项式生成的单项式理想，并用 $G(I)$表示 I的最小单项式生成集。回顾 [21] ，若对每个$u \in G(I)$，冒号理想 $I_{\setminus u} : u$ 都由变量生成，则称 I 为拟线性的。这里，$I_{\setminus u}$ 是由 $G(I)$中的单项式$\setminus\{u\}$.生成的理想。[21]证明了，若 I具有线性分解，则 I是拟线性的。因此，我们有以下推论：

$$I \text{ 有线性商} \implies I \text{ 在任意域上都有线性分解 } \mathbb{K}$$
$$\implies I \text{ 在某个域上有线性分解 } \mathbb{K} \implies I \text{ 是拟线性的。}$$

当研究线图的 t-路径理想的幂时，我们可以证明上述蕴含关系的逆命题也成立。

W我们需要组合理论中一个众所周知的公式：

$$|\{(a_1, \cdots, a_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k \mid a_1 + \cdots + a_k = s\}| = \binom{s+k-1}{k-1}. \tag{1.1}$$

由于我们找不到这个公式的出处，因此给出一个运用“星号与隔板”方法的简短证明。我们将这个问题设想为在 s 个星号之间放置 $k-1$ 个隔板。例如， $s = 7$ 和 $k = 3$ 的一种可能排列是 $**|*|****$，这对应于$a_1 = 2$、 $a_2 = 1$ 和 $a_3 = 4$。为了计算这类排列的数量，我们考虑选取 $k-1$

个位置，在 $s+k-1$ 个位置（由 s 个星号和 $k-1$ 个隔板组成）中放置隔板。这可以用二项式系数 $\binom{s+k-1}{k-1}$ 来计算。

引理 2.1. 设 $\alpha = u_1^{a_1}u_2^{a_2}\cdots u_{n-t+1}^{a_{n-t+1}}$ 和 $\beta = u_1^{b_1}u_2^{b_2}\cdots u_{n-t+1}^{b_{n-t+1}}$ 是 $G(I_t(L_n)^s)$ 中的单项式。那么 $\alpha=\beta$ 当且仅当对于 $i=1,\ldots,n-t+1$，有 $a_i=b_i$。因此，我们有

$$|G(I_t(L_n)^s)| = \binom{s+n-t}{s}.$$

证明. 为证明第一个断言，只需证明：若 $\alpha=\beta$，则对所有 i，都有 $a_i=b_i$。我们对 s 使用归纳法。当 $s=1$ 时，基础情形显然成立。现在，假设 $s>1$。令 k 为满足 x_i 整除 α 的最小 i（由于 $\alpha=\beta$，它也整除 β）。那么，对于 $i=1,\cdots,k-1$，有 $a_k>0$, $b_k>0$ 和 $a_i=b_i=0$。由此可得

$$\frac{\alpha}{u_k} = u_k^{a_k-1}u_{k+1}^{a_{k+1}}\cdots u_{n-t+1}^{a_{n-t+1}} = \frac{\beta}{u_k} = u_k^{b_k-1}u_{k+1}^{b_{k+1}}\cdots u_{n-t+1}^{b_{n-t+1}}.$$

因此，根据归纳假设，对于 $i=k+1,\ldots,n-t+1$，我们有 $a_k-1=b_k-1$ 和 $a_i=b_i$。这就完成了第一个断言的证明。

第二个结论可直接由公式 1.1 得出。 □

为便于证明后续结果，我们引入一些额外的记号。设 α,β 是 R 中的单项式。定义

$$\deg_k\alpha := \max\{i \mid x_k^i \text{ divides } \alpha\} \text{ for } k=1,\ldots,n, \text{ and } \deg\alpha := \sum_{k=1}^{n}\deg_k\alpha.$$

此外，我们用 α/β 表示单项式 $^{\alpha}/_{(\alpha,\beta)}$。这里，$(\alpha,\beta)$ 是 α 和 β 的最大公因子。现在我们给出本文的第一个主要结果。

定理 2.2. 设 $I = I_t(L_n)$ 是 L_n 的 t-路径理想。那么以下陈述等价：

(1) 对某个 $s\geq 1$，I^s 有线性分解；(2) 对所有 $s\geq 1$，I^s 都有线性分解；(3) $t\leq n\leq 2t$；(4) 对某个 $s\geq 1$，I^s 有线性商；(5) 对所有 $s\geq 1$，I^s 有线性商；(6) 对某个 $s\geq 1$，I^s 是拟线性的；(7) 对所有 $s\geq 1$，I^s 是拟线性的。

证明。(2) ⇒ (1)、(5) ⇒(4) 和 (7) ⇒(6) 的蕴含关系是自动成立的。

蕴含关系 (4) ⇒ (1) 和 (5) ⇒(2) 由 [12, 命题 8.21] 推出。蕴含关系 (1) ⇒ (6) 和 (2) ⇒(7) 是 [21, 定理 23] 的推论。因此，我们只需证明 (6) ⇒(3) ⇒(5)。

(6) $\Rightarrow$ (3) 反设 $n \geq 2t+1$。固定 $s \geq 1$。我们的目标是证明 I^s 不是拟线性的。为此，记 $\alpha = u_{n-t+1}^s$，并令 J 为由 $G(I^s) \setminus \{\alpha\}$ 中的单项式生成的理想。取 $k \in [n]$，使得变量 x_k 属于 J： α。于是，存在$\beta \in G(I^s) \setminus \{\alpha\}$ 使得 $x_k = \beta/\alpha =$ $^{\beta}(\alpha,\beta)$。由于 $\deg\ \beta = st$，可知 (α, β) 的次数为 $ts-1$。注意到 $\alpha = u_{n-t+1}^s = x_{n-t+1}^s \dots x_n^s$。因此， β 具有如下形式： $x_k x_{n-t+1}^{a_1} \dots x_n^{a_t}$，其中恰有一个 a_i 等于 $s-1$，而其余全部等于 s。然而，如果$a_t = s$，则 β 将等于 α，这就产生了矛盾。这意味着，对于某个 $1 \leq i \leq n-t$，有 $a_t = s-1$ 和 $\beta = u_i u_{n-t+1}^{s-1}$。由于 $x_{n-t+1}x_{n-t+2}\cdots x_{n-1}$ 整除 u_i，我们可以推得 $i = n-t$，从而 $\beta = u_{n-t}u_{n-t+1}^{s-1}$。因此， $x_k = x_{n-t}$，结果是 x_{n-t} 是 J 中唯一的变量： α。注意到 x_{n-t} 不整除 u_1^s，由此可得 J： α 不是仅由变量生成的。因此，我们已经证明 I^s 不是拟线性的，得证。

(3) $\Rightarrow$ (5) 通过简单计算，我们有 $(u_1, \dots, u_{i-1})$： u_i 由唯一变量x_{i-1} 生成，其中 $i = 2, \dots, n-t+1$。因此， I^s 对 $s = 1$具有线性商。至于$s \geq 2$的情况，我们首先注意以下由条件 $n \leq 2t$ 得出的观察结果：

事实（$\diamond$）： 如果 $1 \leq k \leq n-t$，那么 $\deg_k u_1 = \deg_k u_2 = \cdots = \deg_k u_k = 1$ 且 $\deg_k u_{k+1} = \cdots = \deg_k u_{n-t+1} = 0$。

根据引理 2.1，我们有

$$G(I^s) = \{u_1^{a_1} \cdots u_{n-t+1}^{a_{n-t+1}} \mid a_1 + \cdots + a_{n-t+1} = s, a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ for all } i = 1, \dots, n-t+1\}.$$

我们在 $G(I^s)$ 上定义如下线性序：如果 $\alpha = u_1^{a_1} \cdots u_{n-t+1}^{a_{n-t+1}}$ 和 $\beta = u_1^{b_1} \cdots u_{n-t+1}^{b_{n-t+1}}$ 是 $G(I^s)$的元素，那么

$$\alpha < \beta \iff \text{ if there exists } i > 0 \text{ such that } a_1 = b_1, \dots, a_{i-1} = b_{i-1} \text{ and } a_i < b_i.$$

按照此顺序， u_{n-t+1}^s 和 u_1^s 分别是 $G(I^s)$的最小元和最大元。

用 q 表示 $G(I^s)$的基数，并令 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ 为 $G(I^s)$中满足 $\alpha_q > \alpha_{q-1} > \cdots > \alpha_1$的所有元素。我们要证明，对于每个 $1 \leq j \leq q-1$，冒号理想$C_j := (\alpha_q, \dots, \alpha_{j+1}) : \alpha_j$ 由变量生成。

固定 $1 \leq j < q$ 并假设$\alpha_j = u_1^{a_1} \cdots u_{n-t+1}^{a_{n-t+1}}$。我们可以将 $\{1 \leq \lambda \leq n-t+1 \mid a_\lambda > 0\}$ 写为 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_g\}$，其中 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_g$。我们断言 $C_j = (x_{\lambda_1 - 1}, \dots, x_{\lambda_g - 1})$。这里采用约定 $x_0 = 0$。也就是说，如果 $\lambda_1 = 1$，那么 $C_j = (x_{\lambda_2 - 1}, \dots, x_{\lambda_g - 1})$。

任取 $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_g\}$，满足 $\lambda \geq 2$。由于 $\alpha := u_1^{a_1} \cdots u_{\lambda-1}^{a_{\lambda-1}+1} u_\lambda^{a_\lambda - 1} \cdots u_{n-t+1}^{a_{n-t+1}} > \alpha_j$，我们有 $\alpha/\alpha_j = x_{\lambda-1} \in C_j$。这证明了包含关系 $(x_{\lambda_1 - 1}, \dots, x_{\lambda_g - 1}) \subseteq C_j$。反之，设 $\beta = u_1^{b_1} \cdots u_{n-t+1}^{b_{n-t+1}}$ 满足 $\beta > \alpha_j$。则存在 $1 \leq \ell < \lambda_g$，使得 $a_1 = b_1, \dots, a_{\ell-1} = b_{\ell-1}$ 且 $a_\ell < b_\ell$。如果 $\ell < \lambda_1$，则根据事实 ($\diamond$)，有 $\deg_{(\lambda_1 - 1)} \beta \geq b_\ell > \deg_{(\lambda_1 - 1)} \alpha_j = 0$。因此 $\beta/\alpha_j \in (x_{\lambda_1 - 1}) \subseteq (x_{\lambda_1 - 1}, \dots, x_{\lambda_g - 1})$。接下来，假设对于某个 $\lambda_f \leq \ell < \lambda_{f+1}$

$f \in \{1, 2, \ldots, g-1\}$。然后，考虑到事实 (⋄)，我们有

$$\deg_{(\lambda_{f+1}-1)} \beta = b_1 + \cdots + b_{(\lambda_{f+1}-1)} > a_1 + \cdots + a_{(\lambda_{f+1}-1)} = \deg_{(\lambda_{f+1}-1)} \alpha_i,$$

因此，$x_{(\lambda_{f+1}-1)}$ 整除 β/α_j。由此可得 $\beta/\alpha_j \in (x_{(\lambda_{f+1}-1)}) \subseteq (x_{\lambda_1-1}, \ldots, x_{\lambda_g-1})$，于是结论得证。证明完毕。□

众所周知，若理想 I 具有线性分解，则 reg I 等于 I的极小生成元的次数。因此，下面的结果显然成立。

推论 2.3。 设 $I = I_t(L_n)$ 为 L_n的 t-路径理想。若 $t \le n \le 2t$，则 reg $R/I^s = ts -$ 1.

现在我们利用 $I_t(L_n)^s$ 计算 $t \le n \le 2t$ 的贝蒂数，所用工具为 [12, 推论 8.2.2。]根据该推论，若 I由一列 $f_1,\ldots, f_p$单项式生成，且它们的次数相同，并且冒号理想 $(f_1,\ldots, f_{j-1}) : f_j$ 对每个 r_j 都由 $j = 2,\ldots, p$个变量生成，那么贝蒂数 $\beta_i(I)$ 可由下式确定：$\sum_{j=2}^{p} \binom{r_j}{i}$。

推论 2.4. 设 $I = I_t(L_n)$ 是 L_n 的 t-路径理想。若 $t \le n \le 2t$，则

$$\beta_i(I^s) = \beta_{i,i+st}(I^s) = \sum_{k=i}^{n-t} \binom{n-t}{k} \binom{s}{k} \binom{k}{i}.$$

特别地，pd $R/I^s = \min\{n-t+1, s+1\}$。

证明。 对于 $1 \le j < q$，令 C_j 表示与定理 ⇒ (5) 中定理 2.2 的证明中定义的相同理想，并令 r_j 为 C_j 中变量的个数。根据定理 (3) ⇒(5) 中定理 2.2 的证明，若 $\alpha_j = u_1^{a_1} \cdots u_{n-t+1}^{a_{n-t+1}}$，则 C_j 由满足 $x_{\lambda-1}$且 $a_\lambda > 0$的变量 $\lambda \ge 2$生成。因此，r_j 等于 $\{2 \le \lambda \le n-t+1 \mid a_\lambda > 0\}$ 的个数。显然，r_j 处于范围 $1 \le r_j \le n-t$。

对于每个 $1 \le k \le n-t$，令 S_k 表示 $\{1 \le j < q \mid r_j = k\}$ 的数量。注意到 $\alpha_q = u_1^s$。由此可得， S_k 等于集合 A_k 中元素的数量。根据定义，该集合由所有满足以下条件的元组 $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-t+1})$ 组成： $a_1 + \cdots + a_{n-t+1} = s$、 $a_1 \ne s$， 且 $|\{2 \le \lambda \le n-t+1 \mid a_\lambda > 0\}| = k.$。由于 $k \ge 1$，可以省略条件 $a_1 \ne s$。为了计算 S_k，我们先计算集合 $A_{k,e}$ 的元素数量：$= \{(a_1, \ldots, a_{n-t+1}) \in A_k \mid a_1 = e\}$， 其中 $e = 0, \ldots, s-k$。不难看出，$|A_{k,e}|$ 等于 $\binom{n-t}{k}$ 乘以方程 $b_1 + \cdots + b_k = s - e$ 的正整数解的数量。此外，根据公式 1.1，该数量等于 $\binom{s-e-1}{k-1}$。这意味着

$$S_k = \sum_{e=0}^{s-k} |A_{k,e}| = \binom{n-t}{k} \left(\binom{s-1}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1} \right) = \binom{n-t}{k} \binom{s}{k}.$$

由 [12, 推论 8.2.2.] 可得

$$\beta_i(I^s) = \sum_{j=1}^{q-1} \binom{r_j}{i} = S_i \binom{i}{i} + S_{i+1} \binom{i+1}{i} + \cdots + S_{n-t} \binom{n-t}{i}.$$

最后一个 该结论由 pd $R/I^s =$ pd $I^s + 1$ 和 pd $I^s = \max\{i \mid \beta_i(I^s) \ne 0\}$ 得出 . □

3. Regularity of powers of $I_t(L_n)$

在本 本节我们给出 $I_t(L_n)$ 的幂的正则性的显式公式。

我们首先回顾 [1] Alilooee 和 Faridi 的一个结果。在此之前，我们定义一个函数 Γ 在 $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 上如下：

$$\Gamma(n,t) := \begin{cases} p(t-1), & \text{if } n = p(t+1)+d \text{ and } 0 \leq d < t; \\ (p+1)(t-1), & \text{if } n = p(t+1)+t. \end{cases}.$$

根据这一记号， [1, 推论 4.15] 的第二部分可改述如下。

引理 3.1. 设 n,t,p,d 为正整数，使得 $n = p(t+1)+d$ 且 $0 \leq d \leq t$。则 reg $R/I_t(L_n) = \Gamma(n,t)$。

值得注意的是， [1, 推论 4.15] 指出，当 $n \geq t \geq 2$ 时，正则性 $R/I_t(L_n) = \Gamma(n,t)$。然而，正如引理 3.1 所述，对于所有 $n \geq 1$ 和 $t \geq 1$，这一等式实际上都成立。事实上，当 $n < t$ 或 $t = 1$ 成立时，我们观察到正则性 $R/I_t(L_n) = \Gamma(n,t) = 0$。下面的引理总结了关于函数 $\Gamma(n,t)$ 的一些简单但有用的观察结果。

引理 3.2. 设 n,t,a,b 为满足 $n \geq t+1$ 的整数 ≥ 0。则有
(1) $\Gamma(n-t-1,t) = \Gamma(n,t) - (t-1)$; (2) $\Gamma(a,t)$
$+\Gamma(b,t) \leq \Gamma(a+b+1,t)$，对所有 $a,b \geq 1$ 均成立。

证明。（1）显然。

设 $a = p_1(t+1)+d_1$ 和 $b = p_2(t+1)+d_2$，其中 $p_1,p_2 \geq 0$ 和 $0 \leq d_1,d_2 \leq t$。因此我们有 $a+b+1 = (p_1+p_2)(t+1)+(d_1+d_2+1)$。

如果 d_1 和 d_2 都等于 t。那么 $\Gamma(a,t) = (p_1+1)(t-1)$， $\Gamma(b,t) = (p_2+1)(t-1)$。注意 $a+b+1 = (p_1+p_2+1)(t+1)+t$。那么 $\Gamma(a+b+1,t) = (p_1+p_2+2)(t-1) = \Gamma(a,t)+\Gamma(b,t)$。

如果 d_1 和 d_2 中恰有一个等于 t。我们可以假设 $d_1 = t$ 和 $d_2 \neq t$。那么$\Gamma(a,t) = (p_1+1)(t-1)$， $\Gamma(b,t) = p_2(t-1)$。注意， $a+b+1 = (p_1+p_2+1)(t+1)+d_2$。那么$\Gamma(a+b+1,t) = (p_1+p_2+1)(t-1) = \Gamma(a,t)+\Gamma(b,t)$。

如果两者都不 d_1 也不等于 d_2，那么 $\Gamma(a,t) = p_1(t-1)$，且 $\Gamma(b,t) = p_2(t-1)$。注意 t

$$a+b+1 = \begin{cases} (p_1+p_2)(t+1)+(d_1+d_2+1), & d_1+d_2+1 \leq t \\ (p_1+p_2+1)(t+1)+(d_1+d_2-t), & d_1+d_2+1 \geq t+1 \end{cases},$$

由此可得

$$\Gamma(a+b+1,t) = \begin{cases} (p_1+p_2)(t-1), & d_1+d_2+1 < t \\ (p_1+p_2+1)(t-1), & d_1+d_2+1 \geq t \end{cases}.$$

因此 $\Gamma(a,t)+\Gamma(b,t) \leq \Gamma(a+b+1,t)$。证明至此完成。 □

我们记录以下已知结果，以备后用。

引理 3.3。 [13, 引理 3。1] 设 $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ 是有限生成分次 S-模的短正合序列。则

(1) reg $N \leq \max\{\text{reg } M, \text{ reg } P\}$。当 reg $P \neq$ reg $M-1$ 时，等号成立。
(2) reg $M \leq \max\{\text{reg } N, \text{ reg } P+1\}$。当 reg $N \neq$ reg P 时，等号成立。
(3) reg $P \leq \max\{\text{reg } M-1, \text{ reg } N\}$。当 reg $M \neq$ reg N 时，等号成立。

引理 3.4. [13, 引理 3.2] 设 $A = \mathbb{K}[\mathrm{x}] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, $B = \mathbb{K}[\mathrm{y}] = \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_N]$ 和 $S = \mathbb{K}[\mathrm{x},\mathrm{y}]$ 为多项式环。那么对于非零齐次理想 $I \subset A$ 和 $J \subset B$，有

(1) 正则性 $S/(I+J)$ = 正则性 A/I + 正则性 B/J;
(2) 正则性 $S/(IJ)$ = 正则性 A/I + 正则性 $B/J+1$.

设 R 是域上的多项式环。对于单项式 $u \in R$, u的支集记为 supp(u)，它是 R 中所有整除 u的变量构成的集合。设 I 是 R的一个单项式理想。那么， I的支集记为 supp(I)，它是 I的极小单项式生成元的支集之并。根据引理 3.4，若 I和 J是 R 的单项式理想，且 supp(I) $\cap$ supp(J) $= \emptyset$，则 reg $R/(I+J)$ =reg R/I +reg R/J。

引理 3.5. [5, 引理 2.1] 设t、 n 和 s 是整数，满足 $1 \leq t \leq n$ 和 $s \geq 2$。那么

$$I_t(L_n)^s : u_{n-t+1} = I_t(L_n)^{s-1}.$$

设 I、 J和 K是单项式理想。众所周知，$(I+J) : K = I : K + J : K$。在接下来的讨论中，我们将使用这一结果而不再明确引用。现在我们可以证明本文的第二个主要结果。

定理 3.6. 假设 $n \geq t \geq 2$。令 $I_t(L_n)$ 为 L_n 的 t-路径理想。那么，对于所有 $s \geq 1$, $I_t(L_n)^s$ 的正则性由下式给出

$$\text{reg } R/I_t(L_n)^s = \Gamma(n,t) + t(s-1).$$

证明。 我们对 s 进行归纳。若 $s=1$，则结论由引理 3.1 （即 [1, 推论 4。15]）给出。现在设 $s \geq 2$。由于在 $t \leq n \leq 2t$ 的情形下结论可由推论 2.3 直接得到，因此从现在起可假设 $n \geq 2t+1$ 。

与之前一样，我们记

$$I_t(L_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-t+1}),$$

其中 u_i 表示当 $1 \leq i \leq n-t+1$ 时的单项式 $x_i x_{i+1} \cdots x_{i+t-1}$。我们考虑以下短正合序列:

$$0 \longrightarrow \frac{R}{(I_t(L_n)^s : u_{n-t+1})}[-t] \xrightarrow{\cdot u_{n-t+1}} \frac{R}{I_t(L_n)^s} \longrightarrow \frac{R}{(I_t(L_n)^s, u_{n-t+1})} \longrightarrow 0.$$

根据归纳假设和引理 3.5，我们有

$$\text{reg } \frac{R}{(I_t(L_n)^s : u_{n-t+1})} = \text{reg } \frac{R}{I_t(L_n)^{s-1}} = \Gamma(n,t) + t(s-2).$$

因此

$$\operatorname{reg} \frac{R}{(I_t(L_n)^s : u_{n-t+1})}[-t] = \operatorname{reg} \frac{R}{(I_t(L_n)^s : u_{n-t+1})} + t = \Gamma(n,t) + t(s-1).$$

We 结论是，正则性 $\operatorname{reg} \frac{R}{(I_t(L_n)^s, u_{n-t+1})} = \Gamma(n,t) + t(s-1)$。为证明这一结论，我们设

$$A_0 = (I_t(L_n)^s, u_{n-t+1}),$$

然后，对于 $1 \le j \le n-t$，我们设

$$A_j = (A_{j-1}, u_{n-t-j+1}) \text{ and } B_j = A_{j-1} : u_{n-t-j+1}$$

递归地。由此可得

$$A_j = (A_0, u_{n-t}, \dots, u_{n-t-j+1}) = (I_t(L_n)^s, u_{n-t+1}, \dots, u_{n-t-j+1}). \tag{3.1}$$

特别地，我们有 $A_{n-t} = (I_t(L_n)^s, u_{n-t+1}, \dots, u_1) = I_t(L_n)$，因此

$$\operatorname{reg} \frac{R}{A_{n-t}} = \Gamma(n,t). \tag{3.2}$$

根据引理 3.5，对于任意 $1 \le j \le n-t$，我们有

$$\begin{aligned} B_j &= (I_t(L_n)^s, u_{n-t+1}, \dots, u_{n-t-j+2}) : u_{n-t-j+1} \\ &= ((u_1, \dots, u_{n-t-j+1})^s, u_{n-t+1}, \dots, u_{n-t-j+2}) : u_{n-t-j+1} \\ &= ((u_1, \dots, u_{n-t-j+1})^{s-1}, u_{n-t+1}, \dots, u_{n-j+2}, x_{n-j+1}) \\ &= I_t(L_{n-j})^{s-1} + (u_{n-t+1}, \dots, u_{n-j+2}) + (x_{n-j+1}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

根据归纳假设，我们有正则性 $\operatorname{reg} \frac{R}{I_t(L_{n-j})^{s-1}} = \Gamma(n-j,\ t) + t(s-2)$. 另一方面，值得注意的是，理想 $(u_{n-t+1}, \dots, u_{n-j+2})$ 同构于长度为 t 的线图的 $j-1$-路径理想。由于单项式理想 $I_t(L_{n-j})^{s-1}$、$(u_{n-t+1}, \dots, u_{n-j+2})$ 和 (x_{n-j+1}) 的支集两两不相交，应用引理 3.4(1) 和引理 3.2(2)，我们可以得出结论：

$$\begin{aligned} \operatorname{reg} \frac{R}{B_j}[-t] &= \operatorname{reg} \frac{R}{I_t(L_{n-j})^{s-1}} + \operatorname{reg} \frac{R}{I_t(L_{j-1})} + t \\ &= \Gamma(n-j,t) + t(s-2) + \Gamma(j-1,t) + t \\ &\le \Gamma(n,t) + t(s-1). \end{aligned} \tag{3.4}$$

现在我们证明，当 3.4) 在 $j = n-t$ 时实际上取等号。事实上，我们有

$$B_{n-t} = I_t(L_t)^{s-1} + I_t(L_{n-t-1}) + (x_{t+1}).$$

由此可得

$$\begin{aligned} \operatorname{reg} \frac{R}{B_{n-t}}[-t] &= \operatorname{reg} \frac{R}{I_t(L_t)^{s-1}} + \operatorname{reg} \frac{R}{I_t(L_{n-t-1})} + t \\ &= t(s-1) - 1 + \Gamma(n-t-1,t) + t \\ &= t(s-1) - 1 + \Gamma(n,t) - (t-1) + t \\ &= \Gamma(n,t) + t(s-1). \end{aligned} \tag{3.5}$$

这里，第三个等式由引理3.2(1) 得出。现在，我们考虑以下循环分次 R-模的短正合序列：

$$0\longrightarrow\frac{R}{B_1}[-t]\xrightarrow{\cdot u_{n-t}}\frac{R}{A_0}\longrightarrow\frac{R}{A_1}\longrightarrow 0;$$
$$0\longrightarrow\frac{R}{B_2}[-t]\xrightarrow{\cdot u_{n-t-1}}\frac{R}{A_1}\longrightarrow\frac{R}{A_2}\longrightarrow 0;$$
$$\vdots$$
$$0\longrightarrow\frac{R}{B_{n-t}}[-t]\xrightarrow{\cdot u_1}\frac{R}{A_{n-t-1}}\longrightarrow\frac{R}{A_{n-t}}\longrightarrow 0.$$

考虑3.2）与（3.5），并对上文提到的最后一个短正合序列应用引理 3.3(1)，可得

$$\operatorname{reg}\frac{R}{A_{n-t-1}}=\Gamma(n,t)+t(s-1). \tag{3.6}$$

结合（3.6）与（3.4），可得 $\operatorname{reg}\frac{R}{B_{n-t-1}}[-t]\leq\Gamma(s,t)+t(s-1)=\operatorname{reg}\frac{R}{A_{n-t-1}}$。特别地，$\operatorname{reg}\frac{R}{A_{n-t-1}}\neq\operatorname{reg}\frac{R}{B_{n-t-1}}[-t]-1$。考虑这些事实，并对上文倒数第二个短正合序列应用引理3.3(1)，可得

$$\operatorname{reg}\frac{R}{A_{n-t-2}}=\Gamma(n,t)+t(s-1).$$

如此继续下去，最终得到

$$\operatorname{reg}\frac{R}{A_0}=\Gamma(n,t)+t(s-1).$$

这证明了该结论，证明至此完成。 □

注 3.7. 检查定理 3.6 的证明可知，我们不仅得到了 $I_t\overset{R}{L_n()^s}$ 的正则性，还得到了以下公式：

$$\operatorname{reg}\frac{R}{(I_t(L_n)^s,u_{n-t+1},\ldots,u_j)}=\Gamma(n,t)+t(s-1),$$

对所有 $s\geq 1$ 和 $2\leq j\leq n-t+1$。

致谢：本研究得到国家自然科学基金（编号：11971338）的资助。我们衷心感谢审稿人认真审阅本文，并提出了许多意见，大大改善了本文的表达。

References

[1] A. Alilooee 和 S. Faridi, *Graded Betti numbers of path ideals of cycles and lines*, 代数与应用杂志**17(2018)**, 1850011, 1 17 2, 6, 7 – 。

[2] A. Alilooee 和 A. Banerjee, *Powers of edge ideals of regularity three bipartite graphs*, 《交换代数杂志》 **9** 2017 441 454 1 ( ), – 。

[3] A. Banerjee、S. K. Beyarslan 和 H. T. H`a, *Regularity of edge ideals and their powers*, 《代数进展》, 17 52, **277**, 2019 1 – 《施普林格数学与统计学会议录》。Springer，查姆，。A. Banerjee、

[4] S. K. Beyarslan 和 H. T. Ha, *bounds* **3** 2020 839 854 。*Regularity of powers of edge ideals: from local properties to global* 1

《代数组合》( ), – 。[5] S. Balanescu, M. Cimpoeas, *Depth and Stanley depth of powers of the path ideal of a path graph*, 预印本, 2023。2, 7

[6] R. R. Bouchat、H. T. H`a 和 A. O'Keefe, *Path ideals of rooted trees and their graded Betti numbers*, 组合理论杂志 A 辑 **118** 2011 2411 2425 2 ( ) – 。R. R. Bouchat、H. T. Ha 和 A. O'Keefe, [7] ` *Corrigendum to "Path ideals of rooted trees and their graded Betti numbers" [J. Combin. Theory Ser. A **118**(2011) 2411–2425]* **119** 2012 , 组合理论杂志 A 辑 ( ) 1610–1611.2[8] S. K. Beyarslan、H. T. H`a 和 T. N. Trung, *Regularity of powers of forests and cycles*, 代数组合杂志 **42** 2015 1077 1095 1 ( ), – 。M. Chardin, *Regularity stabilization for the powers of graded M-primary ideals*, 美国数学会会[9] 刊 **143** 2015 3343 3349 1 ( ), – 。A. Conca、E. De Negri, *M-sequences, graph ideals and ladder ideals of linear types*, 代数[10] 杂志 211(1999), 599–624.1[11] S. D. Cutkosky、J. Herzog、N. V. Trung, *Asymptotic Behaviour of the Castelnuovo-Mumford Regularity*, 数学合成 **118** 1999 243 261 1 ( ), – 。J. [12] *Monomial Ideals* Herzog、T. Hibi, , 数学研究生教材, 第 260 2011 3, 5 卷。Springer, 柏林, 。[13] *On some invariants of a mixed product of ideals* **94** 2010 327 337 L. T. Hoa、N. D. Tam, , 数学档案 ( ), – 。 7 [14] *Regularity of powers of cover ideals of unimodular hypergraphs* **513** 2018N. T. Hang、T. N. Trung, , 代数杂志 ( ), 159–176.1 [15] *Algebraic properties of the path ideal of a tree* **38** 2010 1725 1742 2 J. He、A. Van Tuyl, , [16] *Regularity of powers of bipartite graphs* 代数通讯 ( ), – 。A. V. Jayanthan、N. Narayanan 和 S. Selvaraja, , 代数组合杂志 **47** 2018 17 38 1 ( ), – 。V. [17] Kodiyalam, *Asymptotic behaviour of Castelnuovo-Mumford regularity*, 美国数学会会刊 128(2000), 407–411.1[18] M. Kubitzke、A. Olteanu, *Algebraic properties of classes of path ideals of posets*, 纯粹与应用代数杂志 **218** 2014 1012 1033 2 ( ), – 。D. [19] Kiani、S. Saeedi Madani, *Betti numbers of path ideals of trees* **44** 2016 5376 5394 2 , 代数通讯 ( ) – 。D. [20] *Geometric regularity of powers of two-dimensional squarefree monomial ideals* Lu, , 代数组合杂志 **53** 2021 991 1014 1 ( ), – 。D. Lu, *Linear resolutions and quasi-linearity of monomial ideals*, 斯堪的纳[21] 维亚数学杂志, 129(2023) 189– 208 2, 3 。R. H. Villarreal, *Cohen-Macaulay graphs*, 数学手稿 66(1990), 277–293.1 [22]

School of Mathematical Sciences, Soochow University, 215006 Suzhou, P.R.China
Email address: ShanJiawen826@outlook.com

School of Mathematical Sciences, Soochow University, 215006 Suzhou, P.R.China
Email address: ludancheng@suda.edu.cn