arXiv:2305.00683v1 [math.AG] 1 May 2023

Levi子群中的牛顿分层

Felix Schremmer

2023年5月2日

约化群环群中的某些 Iwahori 双陪集称为 P-仿射室或 $(J,\ w,\ \delta)$-仿射室，在仿射 Deligne-Lusztig 簇的研究中发挥着重要作用。对于这样的 Iwahori 双陪集，其牛顿分层与 Levi子群中某个 Iwahori 双陪集的牛顿分层相关。我们证明，这种关系比此前所知的更为密切。

设 G 是局部域 F 上的约化群，我们将其最大$^\smile$非分歧扩张的完备化记为 F。在朗兰兹纲领的语境下，通常取 F 为 p-进有理数域的有限扩张；而在 shtuka 模空间的语境下， F 则是有限域上的形式洛朗级数域。无论哪种情形，伽罗瓦群 $\Gamma = \mathrm{Gal}(\breve{F}/F)$ 都由 Frobenius σ 生成。此外，我们选取一个 σ-稳定的 Iwahori子群 $I \subseteq G(\breve{F})$。由两个元素 $x,\ b \in G(\breve{F})$ 关联的仿射戴利涅-吕斯蒂格簇定义为

$$X_x(b) = \{g \in G(\breve{F})/I \mid g^{-1} b \sigma(g) \in IxI\}.$$

显然， $X_x(b)$ 的同构类型仅取决于 σ-共轭类

$$[b] = \{g^{-1} b \sigma(g) \mid g \in G(\breve{F})\} \subseteq G(\breve{F})$$

以及 Iwahori 双陪集 IxI。后者通常用扩张仿射魏尔群 W进行编号，使得每个陪集都由一个唯一确定的元素 $x \in W$给出 $I\dot{x}I$。 σ- [共轭类的集合 $B(G)$ 有一个由 Kottwitz 提出的重要参数化方法97], ： 该方法通过牛顿点 $\nu(b)$ 和 Kottwitz 点 $\kappa(b)$刻画每个 $[b] \in B(G)$ 。

按照 [GHN15 第 2], 节，我们不失一般性地假设群 G 在 F 上拟分裂。我们选取一个极大环面 T，其唯一的抛物型子群 $T_0(\breve{F})$ 包含于 I 中，并选取一个 σ-稳定的 Borel子群 $T \subset B$ ，使得在 $G_{\breve{F}}$ 的 Bruhat-Tits建筑的相应公寓中，由 I 固定的仿射室与由 B 定义的主导锥相对。采用上述记号， $b \in G(\breve{F})$ 的 Kottwitz点 $\kappa(b)$ 位于 $(X_*(T)/\mathbb{Z}\Phi^\vee)_\Gamma$, 中，其中 $\Phi^\vee$ 是余根集。支配的牛顿点 $\nu(b)$ 是 $X_*(T)_{\Gamma_0} \otimes \mathbb{Q}$ 的一个元素，其中 $\Gamma_0 \subset \Gamma$ 是 $\breve{F}$ 的绝对伽罗瓦群。我们

$\widetilde{}$将扩张仿射魏尔群 W 识别为有限魏尔群 $W = N_G(T)/T$ 与 $X_*(T)_{\Gamma_0}$ 的半直积。

仿射戴利涅-吕斯蒂格簇 $X_x(b)$ 的几何性质与相应 Newton 分层 $[b] \cap IxI \subset G(\breve{F})$ 的几何性质密切相关。显然，其中一个为空，当且仅当另一个也为空。更多性质可参见 [MV20 第 3 节 1]。

研究哪些仿射 Deligne-Lusztig 簇非空是一个重要问题，即确定集合

$$B(G)_x = \{[b] \in B(G) \mid [b] \cap IxI \neq \varnothing\}.$$

Görtz-He-Nie [GHN15] 的一项重要突破性成果是刻画了所有$\widetilde{}$元素 $x \in W$，其中 $B(G)_x$ 包含基本 σ-共轭类。为此，他们引入了 (J, w, σ)-仿射室的概念，将此前已知的分裂群的P-仿射室概念加以推广。记 $\Delta \subseteq \Phi$ 为简单根集合。

$\widetilde{}$**定义 1.** 设 $x \in W$，$w \in W$和 $J \subseteq \Delta$满足 $J = \sigma(J)$。若同时满足以下条件，则称 x 为 (J, w, σ)-仿射室元素：

(a) 元素 $\tilde{x} = w^{-1}x\sigma(w)$ 属于由 J 定义的标准列维子群 $M = M_J \supseteq T$ 的扩张仿射魏尔群 $\widetilde{W}_M$。

(b) 对于所有不属于由 J 生成的根系 Φ_J 的正根 $\alpha \in \Phi^+$，相应的根子群 $U_\alpha \subseteq G(\breve{F})$ 满足

$$U_{w\alpha} \cap {}^xI \subseteq U_{w\alpha} \cap I.$$

注意，如果对于任意$w' \in wW_J$，x是一个 (J, w, σ)-仿射室元素，即它是一个 (J, w', σ)-仿射室元素，其中 W_J 是由来自 J 的简单反射生成的 W 的子群（或等价地，M_J的有限魏尔群）。沿用 Viehmann [Vie21，第 4], 节的说法，如果 w 在其陪集 wW_J中具有最小长度，我们称 x 为一个规范化的 (J, w, σ)-仿射室元素。

现假设 x 是一个标准化的 (J, w, σ)-仿射室元素，并记 $\tilde{x} = w^{-1}x\sigma(w) \in \widetilde{W}_M$。如果 $[b] \in B(G)_x$，则根据 Görtz-He-Nie [GHN15, Theorem 3.3.1]，Newton 分层 $IxI \cap [b]$ 中的每个元素都具有 $i^{-1}wm\sigma(w^{-1}i)$ 的形式，其中 $i \in I$ 且

$$m \in \bigcup_{[b']} \Big((I \cap M)\tilde{x}(I \cap M) \cap [b'] \Big) \subseteq M,$$

其中并集是对所有包含于 $[b]$ 的 $[b'] \in B(M)$ 取的。我们的主要结果表明，这个并集是多余的。

定理 2. 设 x 是一个规范化的 $(J、w、\sigma)$-仿射室元素，且 $\tilde{x} = w^{-1}x\sigma(w) \in \widetilde{W}_M$。那么我们得到一个双射

$$B(M)_{\tilde{x}} \to B(G)_x,$$

将一个 σ-共轭类 $[b]_M \in B(M)_{\tilde{x}}$ 映射到唯一满足 $[b]_M \subseteq [b]_G$ 的 σ-共轭类 $[b]_G \in B(G)$。在这种情况下，支配的牛顿点 $\nu_M(b)$ 和 $\nu_G(b)$ 作为 $X_*(T)_{\Gamma_0} \otimes \mathbb{Q}$ 的元素相等。

遗憾的是，过去这里讨论的关系曾引起混淆。尽管映射 $B(M)_{\tilde{x}} \to B(G)_x$ 的满射性可由 [GHN15，定理 3.3.1], 推出，但应注意，自然映射 $B(M) \to B(G)$ 既不是单射，也不是满射。尤其是，对于 $[b]_G \in B(G)_x$，交集 $[b]_G \cap M$ 可能包含多个 σ-共轭类的 M。这一点在 [GHN15] 的勘误[1]以及 [Vie21，例 5.4]中有进一步讨论。后一个例子还表明，假设存在一个标准化 $(J,\ w,\ \delta)$-仿射室元素，对于定理 2 成立至关重要。

我们的定理结合 [GHN15, Theorem 3.3.1] ，给出了一个典范同构$X_{\tilde{x}}(b) \to X_x(b)$, 将 $g(I \cap M) \in X_{\tilde{x}}(b)$ 映到 $gw^{-1}I \in X_x(b)$。这一几何对应关系与 He-Nie [HN15, Theorem C], 中相应的表示论结果相呼应，该结果比较了 x 和 $\tilde{x}$的类多项式。这些是某些结构常数$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$，用于描述 W 与 W_M的 Iwahori-Hecke 代数的余中心。若已知给定元素 $x \in W$的全部类多项式$\widetilde{\quad}$，便可利用它们确定 $[b] \in B(G)$对应的仿射 Deligne-Lusztig 簇 $X_x(b)$ 的许多几何性质，参见 [He14, Theorem 6.1]。这些性质包括维数，以及在 σ-中心化子 $b \in G(L)$的作用下最高维不可约分支的数量。此外，在某种意义上，Newton 分层 $IxI \cap [b]$ 的有理点数可以用这些类多项式表示 [HNY22, Proposition 3.7]。从这个意义上说，由 [HN15] 已可推出，这些数值不变量对于 $X_{\tilde{x}}(b)$ 和 $X_x(b)$是一致的。

定理 *2* 的证明。我们采用 Görtz-He 提出的 Deligne-Lusztig 约化方法[GH10], ，即对 $\ell(x)$ 使用归纳法。

如果 x 在其 σ-共轭类中具有最小长度，那么 $B(G)_x$ 只包含一个元素，即由 x 定义的 σ-共轭类。此外，He-Nie [HN15，命题 4.5]$\widetilde{\quad}$证明，在这种情况下， $\tilde{x}$ 在 W_M 中的 σ-共轭类里具有最小长度。因此，我们只需证明 $\nu_M(\tilde{x})$ 与 $\nu_G(x)$一致。

根据牛顿点的定义，我们考虑 σ-扭曲幂

$$x^{\sigma,n} = x\sigma(x)\cdots\sigma^{n-1}(x) \in \widetilde{W}.$$

注意，每个 $x^{\sigma,\ n}$ 都是一个 $(J,\ w,\ \sigma^n)$-仿射室元素。令 n 充分大，使得 $x^{\sigma,\ n}$ 是一个纯平移元素，即等于某个 $\mu \in X_*(T)_{\Gamma_0}$ 在 $\sim$ $\widetilde{\quad}$ W 中的像，并且 σ^n 是 W 上的恒等映射。于是，牛顿点 $\nu_G(x)$ 是 W-轨道中的唯一支配元素。类似地，牛顿点 $\nu_M(\tilde{x})$ 是 W_J-轨道中相对于 $B \cap M$ 的唯一支配元素 $w^{-1}\mu/n$。

$x^{\sigma,\ n}$是一个 $(J,\ w,\ 1)$-仿射室元素这一事实意味着 $\langle w^{-1}\mu,\ \alpha\rangle \geqslant 0$ 对所有 $\alpha \in \Phi^+ \backslash \Phi_J$都成立。因此， $\nu_M(\tilde{x})$ 相对于 B已经是支配的，从而 $\nu_G(x) = \nu_M(\tilde{x})$。如果 x 在其 σ-共轭类中具有最小长度，这就完成了证明。

如果 x 在其 σ-共轭类中不是最小长度，我们可以使用 [HN14，定理 A]得到一个序列

$$x = x_1 \xrightarrow{s_1} \cdots \xrightarrow{s_n} x_{n+1},$$

[1]参见 https://www.esaga.uni-due.de/f/ulrich.goertz/pdf/Erratum-GHN.pdf 。

$\widetilde{}$简单仿射反射 $s_i \in W$和元素 $x_{i+1} = s_i x_i \sigma(s_i)$，使得 $\ell(x_1) = \cdots = \ell(x_n) > \ell(x_{n+1})$。根据 [HN15，引理 7.1]，，我们找到元素 w_1，…，$w_n \in W$，使得每个 x_i 都是一个标准化的 (J, w_i, σ)-仿射室元素。将相应的元素记为$\tilde{x}_i = w_i^{-1} x_i \sigma(w_i) \in \widetilde{W}_M$，于是 [HN15，推论 4.4] 的证明表明

$$\ell_{\widetilde{W}_M}(\tilde{x}_1) = \cdots = \ell_{\widetilde{W}_M}(\tilde{x}_n) > \ell_{\widetilde{W}_M}(\tilde{x}_{n+1}).$$

上述证明还表明，每个 $\tilde{x}_{i+1}$ 都可通过 W_M 中的一个简单仿射$\widetilde{}$反射，或通过 W_M中的一个零长度元素，共轭到 $\tilde{x}_i$。

Görtz-He 的 Deligne-Lusztig 约化方法 [GH10] 给出

$$\begin{aligned} B(G)_x &= \cdots = B(G)_{x_n} = B(G)_{x_{n+1}} \cup B(G)_{s_n x_n}, \\ B(M)_{\tilde{x}} &= \cdots = B(M)_{\tilde{x}_n}. \end{aligned}$$

此外，我们从 He-Nie 的上述文章中得知，对于某个 M中的简单仿射反射 $\tilde{s} = w_n s_n w_n^{-1} \in \widetilde{W}_M$，有 $\tilde{x}_{n+1} = \tilde{s} \tilde{x}_n \sigma(\tilde{s})$。因此

$$B(M)_{\tilde{x}_n} = B(M)_{\tilde{x}_{n+1}} \cup B(M)_{\tilde{s}\tilde{x}_n}.$$

由归纳法，我们得到双射且保持牛顿点的映射

$$B(M)_{\tilde{x}_{n+1}} \to B(G)_{x_{n+1}}, \qquad B(M)_{\tilde{s}\tilde{x}_n} \to B(G)_{s_n x_n}.$$

我们得出结论，映射 $B(M)_{\tilde{x}} \to B(G)_x$ 定义良好、满射且保持牛顿点。若 $[b_1]_M$，$[b_2]_M \in B(M)_{\tilde{x}}$在此映射下的像相同，即 $[b]_G \in B(G)_x$，则 $\nu_M(b_1) = \nu_G(b) = \nu_M(b_2)$ 且 $\kappa_M(b_1) = \kappa_M(\tilde{x}) = \kappa_M(b_2)$，因此 $[b_1]_M = [b_2]_M$。至此，归纳和证明均告完成。□

我们注意到定理 2 的以下推论。

推论 3. 如果 x 是一个 (J, w, σ)-仿射室元素，且 $[b_1], [b_2] \in B(G)_x$，那么

$$\nu_G(b_1) \equiv \nu_G(b_2) \pmod{\Phi_J^\vee}.$$ □

作为此推论的一个应用，我们证明了 Dong-Gyu Lim [Lim23], 的一个猜想 [GHN15]，由此为判定 IxI中的基本牛顿分层非空提供了另一种标准。

$\widetilde{}$**定义 4**。设 $x \in W$可写为 $x = \omega s_1 \cdots s_{\ell(x)}$，其中 $\omega$$\widetilde{}$是一个零长度元素，$s_1$、……、$s_{\ell(x)} \in W$是简单仿射反射。我们将 x 的 σ-支撑 定义为包含 s_1、……、$s_{\ell(x)}$ 且在复合自同构 $\sigma \circ \omega$ 的作用下封闭的$\widetilde{}$最小子集。记为 $\mathrm{supp}_\sigma(x)$。如果由 $\mathrm{supp}_\sigma(x)$ 生成的 W 子群是有限的，我们称 x 是球面$\backsim$$\sigma$-支撑的。

这可由 [GHN19, 命题 5.6] 推出：x 具有球形 σ-支撑，当且仅当$B(G)_x = \{[b]\}$ 对于某个基本的 σ-共轭类 $[b]$。

命题 5。 假设 Φ 的 *Dynkin* 图是 σ-连通的，即 *Frobenius* σ 在根系 Φ 的不可约分支上作用传递。

令 $x \in \widetilde{W}$，记 $[b] \in B(G)$ 为满足 $\kappa(b) = \kappa(x)$的唯一基本 σ-共轭类。那么，当且仅当以下两个条件同时满足时， $X_x(b) = \varnothing$：

(a) 元素 x 不具有球面 σ-支撑，即 $B(G)_x$ 包含一个非基本的σ-共轭类。

(b) 存在 $J \subsetneq \Delta$ 和 $w \in W$，使得 x 是一个 $(J、 w、 \sigma)$-仿射室元素。

证明。 如果 x 具有球面 σ-支撑，则得到 $IxI \subseteq [b]$，因此确实有 $X_x(b) \neq \varnothing$。若对于任意 $J \subsetneq \Delta$，x 都不是一个 $(J、 w、 \sigma)$-仿射室元素，则由 [GHN15，定理 A]，可立即得到 $X_x(b) \neq \varnothing$。

现在反过来假设 (a) 和 (b) 均成立，因此我们需要证明 $X_x(b) = \varnothing$。令 $(J、 w)$ 如 (b) 中所述，并进一步令 x 为一个标准化的 $(J、 w、 \sigma)$-仿射室元素。记 σ-共轭类的泛点为 $[b_x] \in B(G)_x$。

假设 $[b] \in B(G)_x$。由 (b) 结合推论 3，我们看到

$$\nu(b) \equiv \nu(b_x) \pmod{\Phi_J^\vee}.$$

特别地

$$\langle \nu_G(b_x) - \nu_G(b), 2\rho - 2\rho_J \rangle = 0.$$

由于 $\nu_G(b_x)$ 是支配的且 b 是基本的，我们得出对所有 $\alpha \in \Phi^+ \backslash \Phi_J$， $\langle \nu_G(b_x), \alpha \rangle = 0$。因此 $\Phi = \Phi_J \cup \Phi_{J'}$，其中 $J' \subseteq \Delta$ 是 $\nu(b_x)$的稳定子。根据 σ-不可约性，并考察不可约分支的最高根，我们得到 $J = \Delta$ 或 $J' = \Delta$。

我们假设 $J \neq \Delta$ in (b)，因此得出 $\nu_G(b_x)$ 必须是中心的。所以 $[b_x]$ 本身是基本的。这与 (a) 矛盾。 □

致谢。 我们感谢 Dong-Gyu Lim 对其猜想所作的解释，感谢 Eva Viehmann、Xuhua He 和 Quingchao Yu 进行的有益讨论，特别感谢 X. He 指出了论文 [HN15]，以及 Q. Yu 指出了 [GHN19]。我们感谢 Sian Nie 和 Xuhua He 对本文初稿提出的意见。

参考文献

[GH10] U. Görtz 和 X. He。仿射旗簇中仿射 *Deligne-Lusztig* 簇的维数。Documenta Mathematica 15（2010）。[GHN15] U. Görtz、X. He 和 S. Nie。 P-仿射室与仿射 *Deligne-Lusztig* 簇的非空性。法国高等师范学院科学年刊 48（2015）。[GHN19] U. Görtz、X. He 和 S. Nie。完全 *Hodge–Newton* 可分解 *Shimura* 簇。北京数学杂志 2.2（2019），第 99–154 页。

[He14] X. He。仿射 *Deligne-Lusztig* 簇的几何与同调性质。数学年刊 179.1（2014），第 367–404 页。[HN14] X. He 和 S. Nie。扩张仿射魏尔群的最小长度元素。数学汇编 150.11（2014），第 1903–1927 页。[HN15] X. He 和 S. Nie。 P-仿射室、抛物子代数与仿射赫克代数的余中心。Sel. Math. New. Ser. 21.3（2015），第 995–1019 页。[HNY22] X. He、S. Nie 和 Q. Yu。具有有限考克斯特部分的仿射 *Deligne–Lusztig* 簇（2022）。[Kot85] R. E. Kottwitz。具有附加结构的等晶体。Compositio Mathematica 56.2（1985），第 201–220 页。[Kot97] R. E. Kottwitz。具有附加结构的等晶体。*II*。Compositio Mathematica 109.3（1997），第 255–339 页。[Lim23] D. G. Lim。单个仿射 *Deligne-Lusztig* 簇的非空性。arXiv（2023）。预印本：2302.04976。[MV20] E. Milićević 和 E. Viehmann。伊*wahori*双陪集中一般牛顿点与牛顿偏序集。Forum of Mathematics, Sigma 8（2020）。[Vie21] E. Viehmann。伊*wahori*双陪集中的最小牛顿分层。International Mathematics Research Notices 2021.7（2021），第 5349–5365 页。