arXiv:2305.00687v1 [math.MG] 1 May 2023

欧氏球上线性插值下投影算子的最小范数

Mikhail Nevskii*

2023年5月1日

摘要

我们证明如下命题。在 n维欧氏 B球上线性插值时，其节点与内接于边界球面的正则单纯形顶点重合的插值投影算子具有最小 C范数。该最小范数为 $\theta_n(B) = \max\{\psi(a_n)\ \psi(a_n+1)\}$，其中 $\psi(t) = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}\Big(t(n+1-t)\Big)^{1/2} + \left|1-\frac{2t}{n+1}\right|$、$0 \le t \le n+1$以及 $a_n = \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor$。对于任意 n，$\sqrt{n} \le \theta_n(B) \le \sqrt{n+1}$. 此外，$\theta_n(B) =$仅当 $n=1$ 且 $\theta_n(B) = \sqrt{n+1}$ 当且仅当 $\sqrt{n+1}$ 为整数。

关键词： n维球， n维单纯形，线性插值，投影算子，范数

MSC：41A05，52B55，52C07

1 主要定义

进一步地， $n \in \mathbb{N}$。元素 $x \in \mathbb{R}^n$ 写作 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 的形式。设 K是 $\mathbb{R}^n$中的一个凸体，即具有非空内部的紧凸子集。用 $C(K)$表示连续函数 $f\colon K \to \mathbb{R}$ 构成的空间，其范数为一致范数

$$\|f\|_{C(K)} := \max_{x \in K} |f(x)|.$$

我们用 $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ 表示由 n 个变量构成的 ≤ 1 次多项式集合，即 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数集合。对于 $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$、$R > 0$，我们用 $B(x^{(0)}; R)$ 表示由不等式 $\|x - x^{(0)}\| \le R$ 所定义的 n 维欧氏球。这里

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

*数学系，P.G. Demidov雅罗斯拉夫尔国立大学，Sovetskaya街14号，雅罗斯拉夫尔，150003，俄罗斯，mnevsk55@yandex.ru，
orcid.org/0000-0002-6392-7618

根据定义，$B_n := B(0;1)$。

设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中顶点为 $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$、$1 \le j \le n+1$. 的非退化单纯形。考虑该单纯形的 顶点矩阵：

$$\mathbf{S} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

假设 $\mathbf{S}^{-1} = (l_{ij})$。线性多项式 $\lambda_j(x) := l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$具有性质 $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$。我们称 λ_j 对应的基本拉格朗日多项式。对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) x^{(j)}, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1.$$

这意味着 $\lambda_j(x)$ 是 x 的重心坐标（例如参见 [1]– [2]）。

如果插值投影算子 $P\colon C(K) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ 对应于单纯形 $S \subset K$，则称它为该单纯形的插值投影算子；若 P 的节点与 S 的顶点重合，则该条件成立。此投影算子由等式 $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$. 定义。下面的拉格朗日插值公式的类似结论成立:

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f\left(x^{(j)}\right) \lambda_j(x). \tag{1}$$

记 $\|P\|_K$ 为 P 作为从 $C(K)$ 到 $C(K)$ 的算子范数。由 (1) 可得,

$$\|P\|_K = \max_{x \in K} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|. \tag{2}$$

如果 K 是一个凸多面体，那么式 (2) 中的最大值也可以仅在 K 的顶点集上取到。不过，在本文中， K 始终是一个球或椭球。

我们用 $\theta_n(K)$ 表示插值投影算子 $P\colon C(K) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ 的最小范数，其中其节点属于 K。

假设 $K = B := B(x^{(0)}; R)$。在 [3] 中证明了

$$\|P\|_B = \max_{f_j = \pm 1} \left[R \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} + \left| \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x^{(0)}) \right| \right]. \tag{3}$$

若 S 是内接于球的正则单纯形，则 $\|P\|_B$ 既不取决于球的中心 $x^{(0)}$，也不取决于球的半径 R，也不取决于此类单纯形的选择。在这种情况下， $\|P\|_B = \max\{\psi(a_n)\ \psi(a_n+1)\}$ （见 [3, 定理 2]）。这里

$$\psi(t) := \frac{2\sqrt{n}}{n+1}\Big(t(n+1-t)\Big)^{1/2} + \left|1 - \frac{2t}{n+1}\right|, \quad 0 \le t \le n+1, \tag{4}$$

$$a_n := \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor. \tag{5}$$

2 单纯形及其最小椭球上的定理

设 S 是一个非退化的 n 维单纯形， E 是包含 S的最小体积椭球，且 m 是一个自然数， $1 \le m \le n$。对于 S的任意一组 m个顶点，我们对应一个点 $y \in E$，定义如下。设 g为包含所选顶点的 S 的（$m-1$）维面的重心， h 为包含其余 $n+1-m$ 个顶点的（$n-m$）维面的重心。那么， y 是直线（gh）与椭球边界的交点，方向从 g 指向 h。

定理1. 对于任意非退化单纯形 $S \subset B_n$，存在这样一组 m 顶点，使得 $y \in B_n$。

证明. 设 $x^{(j)}$ 为 S的顶点。该单纯形的重心以及其最小椭球 E 的重心均为点 $c = \frac{1}{n+1}\sum x^{(j)}.$。记 r 为正则单纯形的重心与其 $(m-1)$ 维面重心之间的距离和外接球半径之比。容易看出，

$$r = \frac{1}{m}\sqrt{m - \frac{m(m-1)}{n}}.$$

用 N表示 n维单纯形的 $(m-1)$ 维面的数量： $N = \binom{n+1}{m}$。

考虑任意由 m个指标 $j.$组成的集合 J。顶点为 $x^{(j)}$、 $j \in J$ 的 $(m-1)$ 维面的重心为点 $g_J = \frac{1}{m}\sum_{j\in J} x^{(j)}$。假设对于这组顶点， y_J与点 y 重合。那么

$$y_J = c + \frac{1}{r}\left(c - g_J\right),$$

即， $y_J = (1/r)((r+1)c - g_J)$。对所有集合 J 求和，可得

$$\sum_J \|y_J\|^2 = \sum_J \langle y_J, y_J\rangle =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(N\|c\|^2(r+1)^2 + \sum_J \|g_J\|^2 - 2(r+1)\langle\sum_J g_J, c\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(N\|c\|^2(r^2-1) + \sum_J \|g_J\|^2\right). \tag{6}$$

我们考虑了等式 $\sum g_J = Nc.$此外，我们声称

$$\sum_J \|g_J\|^2 = \frac{1}{mn}\binom{n}{m}\sum_{j=1}^{n+1}\|x^{(j)}\|^2 + \frac{(m-1)(n+1)}{mn}\binom{n+1}{m}\|c\|^2. \tag{7}$$

为得到 (7)，我们注意以下几点。对于每个 j，数值 $\sum \|g_J\|^2$ 恰好包含 $\binom{n}{m-1}$ 个系数为 $1/m^2$的数 $\|x^{(j)}\|^2$，以及对于每个 $i \neq j$，恰好包含 $\binom{n-1}{m-2}$ 个数 $2\langle x^{(i)}$、$x^{(j)}\rangle$，其系数均为 $1/m^2$。（后者仅在 $m \geq 2$的情况下存在；当 $m = 1$ 时，不存在两两乘积。）表达式 $\|c\|^2$ 包含任意 j对应的所有数 $\|x^{(j)}\|^2$，以及当 $i \neq j$ 时，系数为 $1/(n+1)^2$.的数 $2\langle x^{(i)}$、$x^{(j)}\rangle$。(7) 右侧部分中 $\|c\|^2$ 的系数保证了含有两两乘积 $\langle x^{(i)}$、$x^{(j)}\rangle$的表达式相等； $\sum \|x^{(j)}\|^2$ 处的系数则经过选择，使得 (7) 左侧部分与右侧第二项之差等于第一项。由于

$$N(r^2-1) = -\frac{(m-1)(n+1)}{mn}\binom{n+1}{m},$$

将 (6) 中的 $\sum \|g_J\|^2$ 替换为 (7) 右侧的部分后，我们注意到，含有 $\|c\|^2$ 的项相互抵消。经过这些变换，我们得到

$$\frac{1}{N}\sum_J \|y_J\|^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} \|x^{(j)}\|^2. \tag{8}$$

包含关系 $S \subset B_n$ 意味着 $\|x^{(j)}\| \leq 1.$。因此，数$\|y_J\|^2$的平均值也为 $\leq 1.$。于是，对于某个集合 J，我们有 $\|y_J\| \leq 1$，即该点 y_J属于 $B_n.$。定理1得证。□

作为一个猜想，作者在 [4]中提出了定理1。此外，在 [4],中，还以另一种方式证明了定理1在 $m = 1$ 情形下的结论。

3 球 θ_n（B_n）的值

本文的主要结果涉及具有节点的 n维球上的插值投影算子的最小范数。

定理 2. 函数 ψ（t）和数 a_n 由等式(4)–(5)定义。对于任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$\theta_n(B_n) = \max\{\psi(a_n), \psi(a_n+1)\}. \tag{9}$$

插值投影算子 P： $C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当插值节点与内接于边界球面的正则单纯形的顶点重合时，满足等式 $\|P\|_{B_n} = \theta_n(B_n)$。

证明。 首先，设 P 是与正则内接单纯形 S 对应的一个插值投影算子，设 $\lambda_j(x)$ 为该单纯形的基本拉格朗日多项式。记 $p_n := \|P\|_{B_n}$。 文献 [3] 中已证明，$p_n = \max\{\psi(a_n)\ \psi(a_n+1)\}$. 满足条件的点$y \in B_n$

$$\sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(y)| = p_n \tag{10}$$

在 [4] 中找到了。也就是说，假设 k_n 与数值 a_n 和 a_n+1 的取值相同，而这使得 $\psi(t)$ 达到最大值。固定 $m=k_n$。那么，对于在情况 $E=B_n$ 下定理1上方构造的每个点 y，等式 (10) 都成立。这些点 y 的数量为 $N=\binom{n+1}{m}$。

现在设 $P:\ C(B_n)\to\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ 是一个任意的投影算子，其节点为$x^{(j)}\in B_n$，S 是顶点为 $x^{(j)}$ 的单纯形，而 E 是包含于 S中的最小体积椭球。我们也可以将 P 视为一个从 $C(E)$ 出发作用的投影算子。于是

$$\|P\|_E=p_n=\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(y)|$$

对于 $m=k_n$，以及上一节开头提到的每个点 y（现在相对于最小椭球 E）。根据定理1，这些点中至少有一个，记作 y^*，属于 B_n。因此，

$$\|P\|_{B_n}=\max_{x\in B_n}\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(x)|\geq\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(y^*)|=p_n.$$

因此，$\theta_n(B_n)=p_n=\max\{\psi(a_n)\ \psi(a_n+1)\}=\psi(k_n)$。

我们来证明，若 $\|P\|_{B_n}=\theta_n(B_n)$，则以插值节点为顶点的单纯形内接于 B_n 且为正则单纯形。对于这个单纯形 S，为 $m=k_n$构造的某个点$y\in E$落在边界球面上——否则我们就有$\|P\|_{B_n}>p_n=\theta_n(B_n)$。这是因为，当 x 沿着从 c 指向 y的方向在直线上移动时，$\sum|\lambda_j(x)|$ 单调递增。由于 $\|y\|=1$，其余 y_J 对应的 $\|y_J\|$ 的平均值也为 ≤ 1（见（8））。因此，另一个这样的点也位于球的边界上。由此可得，对所有由 $m=k_n$ 个指标 j组成的集合 J，都有 $\|y_J\|=1$。现在由（8）可得 $\|x^{(j)}\|=1$，即该单纯形内接于球。由于所有点 y_J 都属于边界球面，函数 $\sum|\lambda_j(x)|$ 在球内的 $N=\binom{n+1}{m}$ 个不同点处取得最大值。因此，单纯形 S是正则的。证明完毕。□

对于 $1\leq n\leq 4$，等式 (9) 及极小投影算子的刻画通过其他方法在 [3] 和 [4] 中得到了。

推论。始终有 $\sqrt{n}\ \leq\ \theta_n(B_n)\ \leq\ \sqrt{n+1}$. 此外，$\theta_n(B_n)=\sqrt{n}$ 仅当 $n=1$ 且 $\theta_n(B_n)=\sqrt{n+1}$ 当且仅当 $\sqrt{n+1}$ 是整数时成立。

事实上，[3] 中证明了，对于取值 $p_n=\max\{\psi(a_n)\ \psi(a_n+1)\}$，上述关系均成立。还需考虑定理 2。

注意，定理 2 的证明中得到的数列 k_n 随着 n 增大，但并非严格单调递增。若 $n\geq 2$, 则 $k_n\leq n/2.$。数值 a_n、k_n 和 $\theta_n(B_n)=\psi(k_n)$列于表 1；我们采用了 [3] 中的结果。

4 致谢

T作者感谢 Arseniy Akopyan 在证明定理1时给予的帮助。

表 1：数字 a_n、k_n 和 $\theta_n(B_n) = \psi(k_n)$

n	a_n	a_n+1	$\psi(a_n)$	$\psi(a_n+1)$	k_n	$\theta_n(B_n) = \psi(k_n)$
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	1	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3} = 1.6666\ldots$
3	1	2	2	$\sqrt{3}$	1	2
4	1	2	$\frac{11}{5}$	$\frac{1+4\sqrt{6}}{5}$	1	$\frac{11}{5} = 2.2$
5	1	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{1+2\sqrt{10}}{3}$	2	$\frac{1+2\sqrt{10}}{3} = 2.4415\ldots$
6	2	3	$\frac{3+4\sqrt{15}}{7}$	$\frac{1+12\sqrt{2}}{7}$	2	$\frac{3+4\sqrt{15}}{7} = 2.6417\ldots$
7	2	3	$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{105}}{4}$	3	$\frac{1+\sqrt{105}}{4} = 2.8117\ldots$
8	3	4	3	$\frac{1+8\sqrt{10}}{9}$	3	3
9	3	4	$\frac{2+3\sqrt{21}}{5}$	$\frac{1+6\sqrt{6}}{5}$	3	$\frac{2+3\sqrt{21}}{5} = 3.1495\ldots$
10	3	4	$\frac{5+8\sqrt{15}}{11}$	$\frac{3+4\sqrt{70}}{11}$	4	$\frac{3+4\sqrt{70}}{11} = 3.3151\ldots$
11	4	5	$\frac{1+2\sqrt{22}}{3}$	$\frac{1+\sqrt{385}}{6}$	4	$\frac{1+2\sqrt{22}}{3} = 3.4602\ldots$
12	4	5	$\frac{5+24\sqrt{3}}{13}$	$\frac{3+8\sqrt{30}}{13}$	5	$\frac{3+8\sqrt{30}}{13} = 3.6013\ldots$
13	5	6	$\frac{2+3\sqrt{65}}{7}$	$\frac{1+4\sqrt{39}}{7}$	5	$\frac{2+3\sqrt{65}}{7} = 3.7409\ldots$
14	5	6	$\frac{1+4\sqrt{7}}{3}$	$\frac{1+4\sqrt{21}}{5}$	6	$\frac{1+4\sqrt{21}}{5} = 3.8660\ldots$
15	6	7	4	$\frac{1+3\sqrt{105}}{8}$	6	4
50	21	22	$\frac{3+20\sqrt{35}}{17}$	$\frac{7+20\sqrt{319}}{51}$	22	$\frac{7+20\sqrt{319}}{51} = 7.1414\ldots$
100	45	46	$\frac{11+120\sqrt{70}}{101}$	$\frac{9+20\sqrt{2530}}{101}$	45	$\frac{11+120\sqrt{70}}{101} = 10.0494\ldots$
1000	484	485	$\frac{3+40\sqrt{5170}}{91}$	$\frac{31+200\sqrt{25026}}{1001}$	485	$\frac{31+200\sqrt{25026}}{1001} = 31.6385\ldots$

参考文献

[1] M. V. Nevskii. 关于 n维单纯形的一个性质，《数学札记》，**87**:4 (2010年)，543–555。[2] M. V. Nevskii. 多项式插值中的几何估计，雅罗斯拉夫尔：雅罗斯拉夫尔国立大学，2012年（俄文）。[3] M. V. Nevskii 和 A. Yu. Ukhalov. $\mathbb{R}^n$中的欧氏球上线性插值，信息系统建模与分析，**26**:2 (2019年)，279–296。[4] M. V. Nevskii. 内接于球的正则单纯形的性质，信息系统建模与分析，**28**:2 (2021年)，186–197。