arXiv:2305.00698v1 [math.AP] 1 May 2023

关于纳维–斯托克斯方程无压力项内部正则性判据的若干评述

李帅、WENDONG WANG 和周道国

Abstract. 本文研究三维纳维–斯托克斯方程适当弱解的内部正则性判据，并证明：若速度的$L_t^pL_x^q(Q_1)$范数足够小，则解在内部正则。该结果改进了 Kwon $p,q>2$ 近期的结果 [15]（《微分方程杂志》357（2023年）, 1–31），同时推广了 Chae-Wolf 的 $L_t^\infty L_x^{\frac{3}{2}+}$判据 [3]（《数学分析与力学档案》225（2017），第1期，549–572）。

1. Introduction

考虑描述 $\mathbb{R}^3\times(0,T)$ 中黏性不可压缩流体的三维纳维–斯托克斯方程：

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla\pi=0,\\ \operatorname{div}u=0\end{cases}\tag{1.1}$$

设无散初始向量场 $u(x,0)=u_0(x)$ 属于 $\mathbb{R}^3$，且光滑并快速衰减。这里，$u(x,t)$ 表示流体的速度，标量函数 $\pi(x,t)$ 表示压力。

在一篇开创性论文中，[18], Leray 证明了三维纳维–斯托克斯方程有限能量弱解的整体存在性。另见 Hopf [13] 关于有界区域上弱解整体存在性的结果。然而，弱解的正则性仍是数学流体力学中一个悬而未决的重要问题。一类保证正则性的条件是

$$\|u\|_{L^p((0,T);L^q(\mathbb{R}^3))}<+\infty,\quad \frac{2}{p}+\frac{3}{q}=1,\quad q\in[3,+\infty],\tag{1.2}$$

相关研究可参见 Ladyzenskaja [16], Prodi [19], Serrin [23] Struwe [24] 及其中的参考文献。$p=\infty,q=3$ 的端点情形极具挑战性，最终由 Escauriaza- Seregin-ˇSverˊak 在 [6]中解决。

在一系列论文中，[20, 21], Scheffer 开创了纳维-斯托克斯方程的部分正则性理论。Caffarelli、Kohn 和 Nirenberg [2] 通过证明适当弱解可能存在的内部奇异点集合 $\mathcal{S}$ 的抛物豪斯多夫维数为一的测度为零，改进了 Scheffer 的结果，即 $\mathcal{P}^1(\mathcal{S})=0$；这一结果基于以下两个 ε–适用于方程 (1.1) 的适当弱解的正则性判据。存在一个绝对常数 $\varepsilon>0$，使得若满足以下任一条件，u 在 (0, 0) 处正则：

$$\|u\|_{L^3(Q_1)}+\|u\pi\|_{L^1(Q_1)}+\|\pi\|_{L^{\frac{5}{4}}L^1(Q_1)}\le\varepsilon,\tag{1.3}$$

日期：2023年5月2日。2010年数学学科分类：主要分类 76D03；76D05；次要分类 35B33；35Q35。关键词和短语：纳维–斯托克斯方程、内部正则性、适当弱解。

$$\limsup_{r\to 0^+} r^{-1}\int_{Q_r}|\nabla u(y,s)|^2 dyds \le \varepsilon. \tag{1.4}$$

回顾一下，适当弱解定义如下：

定义 1.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个区域，且 $Q_T := \Omega \times (-T, 0)$。若一对函数 (u, π) 满足以下条件，则称其为 Q_T 中纳维–斯托克斯方程的适当弱解：

(i) $u \in L^\infty_{loc}(-T, 0; L^2_{loc}(\Omega)) \cap L^2(-T, 0; W^1_{,loc}{}^2(\Omega))$ $\pi \in L^{\frac{3}{2}}(-T, 0; L^{\frac{3}{2}}_{loc}(\Omega))$;

(ii) u 和 π 在 Q_T 中以分布的意义满足纳维–斯托克斯方程 (1.1)；(iii) 对于 $Q(z_0, R) \subset Q_T$，局部能量不等式

$$\int\limits_{B(x_0,R)} \varphi|u(x,t)|^2dx + 2\int\limits_{t_0-R^2}^{t}\int\limits_{B(x_0,R)} \varphi|\nabla u|^2 dxd\tau$$

$$\le \int\limits_{t_0-R^2}^{t}\int\limits_{B(x_0,R)} \Big(|u|^2(\partial_t\varphi + \Delta\varphi) + u\cdot\nabla\varphi(|u|^2 + 2\pi)\Big)dxd\tau$$

对几乎处处的 $t \in (t_0 - R^2, t_0)$ 以及所有非负测试函数 $\varphi \in C_0^\infty(B(x_0, R) \times (t_0 - R^2, t_0 + R^2))$ 成立。

许多研究致力于改进局部正则性判据 (1.3) 和 (1.4)。例如，我们可以参考 Tian-Xin [25], Ladyzhenskaya-Seregin [17], Seregin [22], Gustafson-Kang- Tsai [11] 以及其中的参考文献。在 [11], 中，证明了如果 u，则其在 (0, 0) 处是正则的。

$$\limsup_{r\to 0} r^{1-\frac{2}{p}-\frac{3}{q}}\|u-\bar{u}\|_{L^p_tL^q_x(Q_r)} \le \varepsilon, \quad 1 \le \frac{2}{p}+\frac{3}{q} \le 2,\ 1 \le p, q \le \infty, \tag{1.5}$$

or

$$\limsup_{r\to 0} r^{2-\frac{2}{p}-\frac{3}{q}}\|\nabla u\|_{L^p_tL^q_x(Q_r)} \le \varepsilon, \quad 1 \le \frac{2}{p}+\frac{3}{q} \le 2,\ 1 \le p, q \le \infty. \tag{1.6}$$

在单尺度下，Vasseur [26] 证明了 $u \in L^\infty(Q_{\frac{1}{2}})$，如果

$$\sup_{-1<t<0}\int_{B_1}|u|^2dx + \int_{Q_1}|\nabla u|^2dxdt + \int_{-1}^{0}\left(\int_{B_1}|\pi|dx\right)^p dt \le \varepsilon, \quad p > 1.$$

Wang-Zhang [27]将其改进为

$$\sup_{-1<t<0}\int_{B_1}|u|^2dx + \int_{-1}^{0}\left(\int_{B_1}|u|^4dx\right)^{\frac{1}{2}}dt + \int_{Q_1}|\pi|dxdt \le \varepsilon.$$

何、Wang 和 Zhou [12] 将 (1.3) 扩展为： $u \in L^\infty(Q_{\frac{1}{2}})$，如果

$$\|u\|_{L^p_tL^q_x(Q_1)} + \|\pi\|_{L^1(Q_1)} \le \varepsilon, \quad 1 \le \frac{2}{p}+\frac{3}{q} < 2, \quad 1 \le p, q \le \infty.$$

近年来，基于斯托克斯投影的压力分解方法建立了一些无压力项的局部正则性判据。Wolf 在 [29, 30] 给出了适当弱解的另一种形式，称为局部适定弱解，并证明若存在一个绝对常数 $\varepsilon_0 > 0$，则 u 在 $Q_{\frac{r_0}{2}}$ 中具有某些 $r_0 > 0$ 时是正则的

$$r_0^{-2}\int_{Q_{r_0}}|u|^3dxdt \le \varepsilon_0. \tag{1.7}$$

Wolf 的结果由 Wang、吴和 Zhou 在 [28] 中进一步推广，他们证明了

$$\|u\|_{L^q(Q_1)} \le \varepsilon_0, \quad q > \frac{5}{2}. \tag{1.8}$$

Chae-Wolf 在 [3] 中也证明了， $u \in L_t^\infty L_x^{\frac{3}{2}+}$ 的范数蕴含正则性。最近，Kwon[15] 在假设

$$\|u\|_{L_t^r L_x^m(Q_2)} \le \varepsilon_0, \quad \text{with} \quad \frac{2}{r} + \frac{3}{m} < 2, \quad r, m \in (2, +\infty].$$

的条件下，利用紧性方法证明了耗散弱解的内部正则性；该方法最早由 Duchon-Robert 在 [5] 中引入。关于更多结果，参见 [1, 4, 10, 28] 等。

有趣的是， p、 q 的范围是否可以放宽到 [11] 中的范围？也就是说，

$$1 \le \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \le 2, \ 1 \le p, q \le \infty.$$

本文将研究这一问题，并证明当 $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 2-$ 时， $p \ge 2$ 就足够了。我们的主要结果如下。

定理 1.2. 假设 (u, π) 是 Q_1 中方程 (1.1) 的适当弱解。对于满足 $1 \le 2/p + 3/q < 2$、 $2 \le p \le \infty$ 的任意 (p, q)，存在一个正数 ε_0，使得若

$$\|u\|_{L^p L^q(Q_1)} \le \varepsilon_0,$$

那么 u 在 (0, 0) 处是正则的。

注 1.3. 我们称 u 在某一点处正则，是指该点存在一个邻域，使得 u 在其中有界。上述定理通过考虑临界情形 $p = 2$ 且 q 任意，改进了 Kwon[15] 的结果，也推广了 Chae-Wolf 在 [3] 中的 $u \in L_t^\infty L_x^{\frac{3}{2}+}$。

注 1.4. 定理 1.2 中的限制 $p \ge 2$ 似乎是尖锐的，这源于压力投影的调和部分。例如，证明中的项 $\int_{Q_\rho} \nabla \pi_h \cdot \nabla \nabla \pi_h \cdot v_B$（见 (4.57) 中的 M_5 项）意味着 $p \ge 2$，因为调和部分 $\nabla \pi_{h,\, B}$ 和 $\nabla \nabla \pi_{h,\, B}$ 由于迭代只能由 $\|u\|_{L_t^p L_x^q}$ 控制。

本文结构安排如下：第 2 节介绍一些定义和技术引理，尤其包括压力的斯托克斯分解。第 3 节证明一个 Cacciopolli 不等式，该不等式在我们的证明中发挥重要作用。定理 1.2 在第 4 节证明。

本文中， C 表示一个与 u无关的绝对常数，其值可能在不同位置有所不同。

2. Preliminaries: some technical lemmas

2.1. 局部压力投影。我们引入 [29,30] 中的 Wolf 的压力分解。对于有界的 C^2-区域 $G \subset \mathbb{R}^n$ 和 $1 < s < \infty$，对任意 $F \in W^{-1,\, s}(G)$，存在唯一的一对 $(v, \pi) \in W^{1,\, s}_{0} \times L^s_0(G)$，根据 L^p- 稳态 Stokes 系统的理论（例如参见 [7]），该对在弱意义下满足稳态 Navier–Stokes 方程。

$$\begin{cases} -\Delta v + \nabla \pi = F, & \text{in} \quad G, \\ \operatorname{div} v = 0, & \text{in} \quad G, \\ v = 0, & \text{on} \quad \partial G, \end{cases} \tag{2.9}$$

其中 $\pi \in L_0^s(G)$ 表示

$$\pi \in L^s(G) \quad \text{with} \quad \int_G \pi dx = 0.$$

定义算子 E_G 如下:

$$E_G : W^{-1,s}(G) \to W^{-1,s}(G), \quad E_G(F) = \nabla\pi,$$

其中, $\nabla\pi$ 表示在 $W^{-1,\,s}(G)$中定义的梯度泛函,

$$< \nabla p, \phi >= -\int_G p\nabla\cdot\phi dx, \quad \phi \in W_0^{1,s'}(G).$$

算子 E_G 从 $W^{-1,s}(G)$ 到其自身有界, 且 $E_G(\nabla\pi) = \nabla\pi$ 对所有 $\pi \in L_0^s(G)$ 成立, 并

$$\|\nabla\pi\|_{L^s(G)} \le C\|F\|_{W^{-1,s}(G)}. \tag{2.10}$$

E_G 的范数仅取决于 s 和 G的几何性质。特别地, 如果 G 是一个球或圆环, 则E_G 的范数与G无关, 这是由斯托克斯方程的缩放性质导致的。此外, 如果 $F \in L^s$（G）, 由嵌入 L^s（G）$\hookrightarrow W^{-1,\,s}$（$G$）以及椭圆方程的正则性, 可得如下估计。

$$\|\pi\|_{L^s(G)} \le C\|F\|_{L^s(G)}. \tag{2.11}$$

2.2. 局部适定弱解。在本小节中, 我们按照 [29, 30] 定义局部适定弱解。

定义 2.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个区域, 且 $Q_T := \Omega \times (-T, 0)$。若满足 (i), 则称 u 是纳维-斯托克斯方程 (1.1) 在 Q_T 中的局部适定弱解: $u \in L^\infty_{\rm loc}(-T, 0; L^2_{\rm loc}(\Omega)) \cap L^2_{\rm loc}(-T, 0; W^{1,}$ $_{2\,\rm loc}(\Omega))$; (ii). u 是 (1.1) 的分布解, 即对每个 $\mathbb{R}^3$ (Ω $Q_T(=, 0))$, 满足 $\times$

..... （1.1）的解, 即对于每个 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times (-T, 0))$, 满足 $\nabla\cdot\varphi = 0$ ’

$$\int\int_{\Omega\times(-T,0)} -u\cdot\partial_t\varphi - u\otimes u : \nabla\varphi + \nabla u : \nabla\varphi = 0;$$

(iii). 对每个球 $B \subset \Omega$, 以下能量不等式成立: 对几乎所有 $s \in (-T, 0)$ 以及所有非负的 $\phi \in C_c^\infty(B \times (-T, 0))$,

$$\begin{aligned}
&\int |v_B(x,s)|^2\phi(x,s)dx + 2\int\int |\nabla v_B(x,\tau)|^2\phi(x,\tau)dxd\tau \\
\le\ &\int\int |v_B(x,\tau)|^2(\partial_t\phi + \Delta\phi)dxd\tau + \int\int |v_B|^2(v_B - \nabla\pi_{h,B})\cdot\nabla\phi dxd\tau \\
&+2\int\int v_B\cdot\nabla\nabla\pi_{h,B}\cdot v_B\phi dxd\tau - 2\int\int \nabla\pi_{h,B}\cdot\nabla\nabla\pi_{h,B}\cdot v_B\phi dxd\tau \\
&+2\int\int (\pi_{1,B} + \pi_{2,B})v_B\cdot\nabla\phi dxd\tau,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 $v_B = u + \nabla\pi_{h,B}$. 这里,

$$\nabla\pi_{h,B} = -E_B(u), \quad \nabla\pi_{1,B} = -E_B(u\cdot\nabla u), \quad \nabla\pi_{2,B} = E_B(\Delta u). \tag{2.13}$$

注意到投影算子的性质并利用 (2.10)、(2.11), 可得

$$\|\nabla\pi_{h,B}\|_{L^s(B)} \le C\|u\|_{L^s(B)} \quad \text{for} \quad s > 1, \tag{2.14}$$

$$\|\pi_{1,B}\|_{L^{s'}(B)} \le C\|u\|^2_{L^{2s'}(B)}, \quad \text{for} \quad s' > 1, \tag{2.15}$$

and

$$\|\pi_{2,B}\|_{L^2(B)} \le C\|\nabla u\|_{L^2(B)}. \tag{2.16}$$

备注 2.2。Wolf [29] 证明了纳维–斯托克斯方程 (1.1) 的局部适定弱解的存在性。Chae 和 Wolf [3] 证明，如果 (u,π) 是纳维–斯托克斯方程 (1.1) 的适当弱解，那么 u 是按照定义 2.1 意义下的局部适定弱解。

我们还需要以下 Riesz 势估计（例如，参见 [9, p159]）。

引理2.3. 设 Ω 为有界区域，$\mu \in (0,1]$, $1 \le q \le \infty$, $0 \le \delta = 1/p - 1/q < \mu$ 且$V_\mu f(x) = \int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)} f(y)dy$，则有

$$\|V_\mu f(x)\|_{L^q(\Omega)} \le \Big(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\Big)^{1-\delta} w_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_{L^p(\Omega)},$$

其中 w_n 是 $\mathbb{R}^n$中单位球的体积。

3. Cacciopolli's inequality

在本节中，我们针对 $[2,\infty]$ 中 p 的取值范围，建立一个仅用速度表示的纳维–斯托克斯方程的 Caccioppoli 不等式。

命题 3.1. 假设 (u,π) 是 Q_1 中方程 (1.1) 的一个适当弱解。对于任意满足 $1 \le 2/p + 3/q < 2$ 且具有 $2 \le p \le \infty$, $u \in L_t^p L_x^q(Q_1)$ 的 (p,q)。则以下 Caccioppoli 不等式成立：

$$\|u\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_{\frac34})} + \|\nabla u\|^2_{L^2L^2(Q_{\frac34})} \le C\|u\|^2_{L^pL^q(Q_1)} + C\|u\|^4_{L^pL^q(Q_1)} + C\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_1)}.$$

其中 $\alpha = \frac{2}{\frac{2}{p}+\frac{3}{q}}$。

注 3.2。情况 $2 \le p < 3$ 比较特殊，因为 $\|u\|_{L^3L^3}$ 无法通过 $\|u\|_{L^pL^q}$和关于时间方向 t 的 $p \in [2,3$ 能量范数来控制。值得一提的是，$v_B = u + \nabla\pi_h$ 的能量范数包含了关于时间方向 t 的 $p \ge 2$ 的所有指标，但它并未被纳入迭代过程，因为 $\nabla\pi_h$ 与区域 B_ρ 有关。

3.1. 命题 3.1 的证明：$p > 3$的情形。首先，对于 $\frac34 \le \varrho < \rho \le 1$，令$Q_\rho = (-\rho^2, 0) \times B_\rho$，并且 $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| \le \rho\}$。写作 $B = B_\rho$并定义 $v_B = u + \nabla\pi_{h,\ B}$，其中 $\nabla\pi_{h,\ B} = -E_B(u)$。选取一个截断函数作为

$$\phi = 1 \quad \text{in} \quad Q_{\sigma_1} \quad \text{with} \quad \sigma_1 = \frac{2\varrho+\rho}{3},$$

$$\phi = 1 \quad \text{on} \quad Q^c_{\sigma_2} \quad \text{with} \quad \sigma_2 = \frac{\varrho+2\rho}{3},$$

并满足

$$|\nabla\phi| \le C(\rho-\varrho)^{-1}, \quad |\partial_t\phi| + |\nabla^2\phi| \le C(\rho-\varrho)^{-2}. \tag{3.17}$$

其次，在局部能量不等式 (2.12) 中选取 $\varphi = \phi^2$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\rho} |v_B(x,s)|^2\phi^2 dx + \int_{Q_\rho} |\nabla v_B(x,\tau)|^2\phi^2 dxd\tau \\
\leq\ & C(\rho-r)^{-2}\int_{Q_\rho} |v_B(x,\tau)|^2 dxd\tau + C(\rho-r)^{-1}\int_{Q_\rho} |v_B|^2|v_B - \nabla\pi_{h,B}|dxd\tau \\
&+C\int_{Q_{\sigma_2}} |v_B|^2|\nabla\nabla\pi_{h,B}|dxd\tau + C\int_{Q_{\sigma_2}} |\nabla\pi_{h,B}||\nabla\nabla\pi_{h,B}||v_B|dxd\tau \\
&+C(\rho-r)^{-1}\int_{Q_\rho} |\pi_{1,B}+\pi_{2,B}||v_B|dxd\tau \\
:=\ & I_1+I_2+I_3+I_4+I_5, \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

其中

$$\nabla\pi_{1,B} = -E_B(u\cdot\nabla u), \quad \text{and} \quad \nabla\pi_{2,B} = E_B(\triangle u).$$

步骤 I: 通过$\|u\|_{L^3(Q_\rho)}$估计局部能量不等式。由 (2.14)，对于任意 $s \in$ (1,6)，有

$$\|v_B\|_{L^s(B_\rho)} = \|u+\nabla\pi_{h,B}\|_{L^s(B_\rho)} \leq C\|u\|_{L^s(B_\rho)}, \qquad (3.19)$$

由此可得

$$I_1 \leq C(\rho-\varrho)^{-2}\int_{Q_\rho} |u|^2 dxd\tau.$$

类似地，由 (3.19) 和 (2.14)，I_2 的估计为

$$I_2 \leq C(\rho-\varrho)^{-1}\int_{Q_\rho} |u|^3 dxd\tau.$$

对于 $\nabla\nabla\pi_{h,B}$这一部分，注意到 $-\Delta v_h + \nabla\pi_h = -u$，这意味着 $\Delta\pi_h = 0$，且π_h 是调和的。回顾调和函数的估计（例如参见 [14]）：对于任意$1 \leq p$、$q \leq \infty$、$0 < \varrho < \rho$以及任意调和函数 h，有

$$\|\nabla^k h\|_{L^q(B_\varrho)} \leq \frac{C\varrho^{\frac{3}{q}}}{(\rho-\varrho)^{\frac{3}{p}+k}}\|h\|_{L^p(B_\rho)}. \qquad (3.20)$$

利用 (3.19)、(2.14)、(3.20) 和 H¨older 不等式，对于项 I_3，有

$$\begin{aligned}
I_3 &= C\int_{Q_{\sigma_2}} |v_B|^2|\nabla\nabla\pi_{h,B}|dxd\tau \\
&\leq C\left(\int_{Q_\rho} |v_B|^3 dxd\tau\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_{Q_{\sigma_2}} |\nabla\nabla\pi_{h,B}|^3 dxd\tau\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq C\left(\int_{Q_\rho} |u|^3 dxd\tau\right)^{\frac{2}{3}}\left(C\sigma_2^3(\rho-\varrho)^{-6}\int_{Q_\rho} |\nabla\pi_{h,B}|^3 dxd\tau\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq C\rho(\rho-\varrho)^{-2}\int_{Q_\rho} |u|^3 dxd\tau.
\end{aligned}$$

同理,

$$I_4 = C\int_{Q_{\sigma_2}} |v_B||\nabla\pi_h||\nabla\nabla\pi_h|dxd\tau \leq C\rho(\rho-r)^{-2}\int_{Q_\rho} |u|^3 dxd\tau.$$

对于项 I_5，利用 (3.19)、(2.15) 和 (2.16)，我们推得

$$\begin{aligned}
I_5 &= C(\rho-\varrho)^{-1}\int_{Q_\rho}|\pi_{1,B}+\pi_{2,B}||v_B|dxd\tau \\
&\le C(\rho-\varrho)^{-1}\left(\int_{Q_\rho}|v_B|^3dxd\tau\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_{Q_\rho}|\pi_{1,B}|^{\frac{3}{2}}dxd\tau\right)^{\frac{2}{3}} \\
&\quad +C(\rho-\varrho)^{-1}\left(\int_{Q_\rho}|v_B|^2dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{Q_\rho}|\pi_{2,B}|^2dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C(\rho-\varrho)^{-1}\int_{Q_\rho}|u|^3dxd\tau+C(\rho-\varrho)^{-1}\left(\int_{Q_\rho}|u|^2dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{Q_\rho}|\nabla u|^2dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C(\rho-\varrho)^{-1}\int_{Q_\rho}|u|^3dxd\tau+C(\rho-\varrho)^{-2}\int_{Q_\rho}|u|^2dxd\tau+\frac{1}{16}\int_{Q_\rho}|\nabla u|^2dxd\tau.
\end{aligned}$$

整理 I_1-I_5 项后，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\rho}|v_B(x,s)|^2\phi dx+\int_{Q_\rho}|\nabla v_B(x,\tau)|^2\phi dxd\tau \\
\le\ & C(\rho-\varrho)^{-2}\int_{Q_\rho}|u|^2+C\left((\rho-\varrho)^{-1}+\rho(\rho-\varrho)^{-2}\right)\int_{Q_\rho}|u|^3+\frac{1}{16}\|\nabla u\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)} \\
:=\ & J_1+J_2+J_3. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

步骤 II ：估计项$\|u\|_{L^3(Q_\rho)}$。由 H¨older 不等式可得，

$$J_1\le C\rho^{\frac{5}{3}}(\rho-\varrho)^{-2}\|u\|^2_{L^3(Q_\rho)}\le C(\rho-\varrho)^{-2}\|u\|^2_{L^3(Q_\rho)},$$

自从 $\rho\le 1$ 以来。

接下来我们处理项$\|u\|_{L^3(Q_\rho)}$。对于满足$\frac{2}{\tau}+\frac{3}{\kappa}=3$的任意$1\le\tau\le\frac{p}{2}$和 $\frac{3p}{3p-4}\le\kappa\le 3$，由插值不等式可知，对于任意 f，

$$\|f^2\|_{L^\tau L^\kappa(Q_\rho)}=\|f\|^2_{L^{2\tau}L^{2\kappa}(Q_\rho)}\le C\left(\|f\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}+\|f\|^2_{L^2L^6(Q_\rho)}\right). \qquad (3.22)$$

对于固定的 $p>3$，设 $q\in\left(\frac{3}{2-\frac{2}{p}}、\frac{3}{\frac{2}{p-2}-\frac{2}{p}}\right]$和 $\alpha\left(\frac{2}{p}+\frac{3}{q}\right)=2$，则 $1<\alpha\le p-2$。

对于$1<\alpha\le\min\{2,p-2\}$，设

$$r=\frac{p}{\alpha}=\frac{p}{2}(\frac{2}{p}+\frac{3}{q}),\quad s=\frac{q}{\alpha}=\frac{q}{2}(\frac{2}{p}+\frac{3}{q}),$$

then

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1,\quad \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1,\quad \frac{2}{r'}+\frac{3}{s'}=3,$$

其中，s'、r'是 s、r的共轭指标。注意到

$$\iint_{Q_\rho}|u|^3dxdt=\iint_{Q_\rho}|u|^\alpha|u|^{3-\alpha}dxdt\le\||u|^\alpha\|_{L^rL^s(Q_\rho)}\||u|^{3-\alpha}\|_{L^{r'}L^{s'}(Q_\rho)},$$

由（3.22）可得

$$\begin{aligned}\int_{Q_\rho}|u|^3dxdt &\le C\|u\|^\alpha_{L^{\alpha r}L^{\alpha s}(Q_\rho)}\Big(\||u|^{\frac{3-\alpha}{2}}\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}+\||u|^{\frac{3-\alpha}{2}}\|^2_{L^2L^6(Q_\rho)}\Big)\\ &\le C\|u\|^\alpha_{L^{\alpha r}L^{\alpha s}(Q_\rho)}\Big(\|u\|^{3-\alpha}_{L^{\frac{3-\alpha}{2}p}L^{\frac{3-\alpha}{2}\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}+\|u\|^{3-\alpha}_{L^{3-\alpha}L^{9-3\alpha}(Q_\rho)}\Big),\end{aligned}$$

由于 $\frac{p}{p-2}\le r\le\infty$ 和 $r'\in[1,p/2]$，这是由 $\alpha\le p-2$导致的。于是，H¨older 不等式表明

$$\|u\|^{3-\alpha}_{L^{\frac{3-\alpha}{2}p}L^{\frac{3-\alpha}{2}\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}+\|u\|^{3-\alpha}_{L^{3-\alpha}L^{9-3\alpha}(Q_\rho)}\le C\rho^{\frac{3}{2}(\alpha-1)}\left(\|u\|^{3-\alpha}_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}+\|\nabla u\|^{3-\alpha}_{L^2(Q_\rho)}\right),$$

这意味着

$$\int_{Q_\rho}|u|^3dxdt\le C\|u\|^\alpha_{L^pL^q(Q_\rho)}\Big(\|u\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}+\|\nabla u\|^2_{L^2(Q_\rho)}\Big)^{\frac{3-\alpha}{2}}.\tag{3.23}$$

此外，对于 $q>\frac{3}{\frac{2}{p-2}-\frac{2}{p}}$ 的情形，由于 H¨older's inequality，估计式 (3.23) 仍然成立。

利用 (3.23) 和 Young 不等式，可得

$$J_1\le\frac{1}{32}\left(\|u\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}+\|\nabla u\|^2_{L^2(Q_\rho)}\right)+C(\rho-\varrho)^{-\frac{6}{\alpha}}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}.\tag{3.24}$$

类似地,

$$J_2\le\frac{1}{32}\left(\|u\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}+\|\nabla u\|^2_{L^2(Q_\rho)}\right)+C(\rho-\varrho)^{-\frac{4}{\alpha-1}}\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_\rho)}.\tag{3.25}$$

结合 (3.21)、(3.24) 和 (3.25)，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{B_\rho}|v_B|^2\phi^2+\int_{Q_\rho}|\nabla v_B|^2\phi^2\le\frac{1}{8}\left(\|u\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}+\|\nabla u\|^2_{L^2(Q_\rho)}\right)\\ &+C(\rho-\varrho)^{-\frac{6}{\alpha}}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}+C(\rho-\varrho)^{-\frac{4}{\alpha-1}}\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_\rho)}.\end{aligned}\tag{3.26}$$

步骤 III：估计包含 v_B 的项。注意到 $\frac{2}{p}+\frac{3}{\frac{6p}{3p-4}}=\frac{3}{2}$，利用 Young 不等式和 Sobolev 嵌入，可得

$$\|v_B\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\varrho)}\le C\int_{B_\varrho}|v_B(t)|^2dx+C\int_{Q_\varrho}|\nabla v_B|^2dxdt.\tag{3.27}$$

由于 $\nabla\pi_{h,\ B}$ 是调和函数，由 (3.20) 可得

$$\begin{aligned}\|\nabla\pi_h\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_{\sigma_1})} &\le C\rho^{3-\frac{4}{p}}(\rho-\varrho)^{-\frac{6}{q}}||\nabla\pi_h||^2_{L^pL^q(Q_{\sigma_2})}\\ &\le C\rho^{3-\frac{4}{p}}(\rho-\varrho)^{-\frac{6}{q}}||u||^2_{L^pL^q(Q_\rho)}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

利用 (3.26)、(3.27) 和 (3.28)，由三角不等式可得

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\varrho)} &\le 2\|v_B\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\varrho)} + 2\|\nabla\pi_{h,B}\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\varrho)} \\
&\le C\|v_B\phi\|^2_{L^\infty L^2(Q_\rho)} + C\|\nabla v_B\phi\|^2_{L^2(Q_\rho)} + 2\|\nabla\pi_{h,B}\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_{\sigma_1})} \\
&\le \frac{1}{4}\left(\|u\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(Q_\rho)}\right) + C(\rho-\varrho)^{-\frac{6}{\alpha}}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)} \\
&\quad + C\left((\rho-\varrho)^{-1} + (\rho-\varrho)^{-2}\right)^{\frac{2}{\alpha-1}}\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_\rho)} \\
&\quad + C(\rho-\varrho)^{-\frac{6}{q}}||u||^2_{L^pL^q(Q_\rho)}. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

类似地，注意到 $\nabla u = \nabla v_B - \nabla\nabla\pi_{h,\ B}$，对于几乎所有的 $t \in I_\rho$，由 (3.20) 和 (3.19) 可得

$$\begin{aligned}
&\|\phi(t)\nabla u(t)\|^2_{L^2(B_\rho)} \\
=& \int_{B_\rho} |\phi(t)\nabla v_B(t)|^2dx - \int_{B_\rho} (\nabla v_B(t) + \nabla u(t)) : (\nabla v_B(t) - \nabla u(t))\phi^2(t)dx \\
=& \int_{B_\rho} |\phi(t)\nabla v_B(t)|^2dx - \int_{B_\rho} (\nabla v_B(t) + \nabla u(t)) : \nabla\nabla\pi_{h,B}\phi^2(t)dx \\
=& \int_{B_\rho} |\phi(t)\nabla v_B(t)|^2dx + \int_{B_\rho} (v_B(t) + u(t)) \cdot \nabla\nabla\pi_{h,B} \cdot \nabla\phi^2(t)dx \\
\le& \int_{B_\rho} |\phi(t)\nabla v_B(t)|^2dx + C(\rho-r)^{-1}\left(\int_{B_\rho} |v_B + u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_{\sigma_2}} |\nabla^2\pi_h|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
\le& \int_{B_\rho} |\phi(t)\nabla v_B(t)|^2dx + C(\rho-r)^{-2}\int_{B_\rho} |u|^2dx.
\end{aligned}$$

对 t 积分，得

$$\int_{Q_\rho} |\nabla u\phi|^2 \le \int_{Q_\rho} |\phi\nabla v_B|^2dx + C(\rho-r)^{-2}\int_{Q_\rho} |u|^2dx. \qquad (3.30)$$

那么，对于 $\frac{3}{4} \le \varrho < \rho \le 1$, $\alpha = \frac{2}{\frac{2}{q}+\frac{3}{p}}$，结合 (3.29)、(3.30)、(3.26) 和 (3.24)，可得

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\varrho)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(Q_\varrho)} &\le \frac{3}{4}(\|u\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(Q_\rho)}) \\
&\quad + C(\rho-\varrho)^{-\frac{6}{\alpha}}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)} + C(\rho-\varrho)^{-\frac{6}{q}}||u||^2_{L^pL^q(Q_\rho)} \\
&\quad + C(\rho-\varrho)^{-\frac{4}{\alpha-1}}\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_\rho)}.
\end{aligned}$$

Ap应用迭代引理（见 [8, Lemma V.3.1, p.161]），最终得到 h

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\varrho)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(Q_\varrho)} &\le C(\rho-\varrho)^{-\frac{6}{\alpha}}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)} + C(\rho-\varrho)^{-\frac{6}{q}}||u||^2_{L^pL^q(Q_\rho)} \\
&\quad + C(\rho-\varrho)^{-\frac{4}{\alpha-1}}\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_\rho)},
\end{aligned}$$

这就推出

$$\|u\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_{\frac{3}{4}})} + \|\nabla u\|^2_{L^2(Q_{\frac{3}{4}})} \le C||u||^2_{L^pL^q(Q_1)} + C||u||^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_1)}.$$

证明完毕。

3.2. 命题 3.1 的证明： $2 \le p \le 3$的情形。令 $\frac{3}{4} \le \varrho < \rho \le 1$，并仍使用上一小节中的截断函数 ϕ。在局部能量不等式 (2.12) 中取测试函数 $\varphi = \phi^{2\beta}$，得到

$$\begin{aligned}
&\|v_B\phi^\beta\|^2_{L^\infty L^2(Q_\rho)} + 2\|\nabla(v_B\phi^\beta)\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)} \\
\le\ & C\left|\int_{Q_\rho} |v_B|^2(\partial_t(\phi^{2\beta}) + \Delta(\phi^{2\beta}) + (\nabla\phi)^2\phi^{2\beta-2})\right| + \int_{Q_\rho} u\cdot\nabla(\phi^{2\beta})|v_B|^2 \\
&+2\int_{Q_\rho} u\cdot\nabla\nabla\pi_{h,B}\cdot v_B\phi^{2\beta} + 2\int_{Q_\rho}\pi_{1,B}v_B\cdot\nabla(\phi^{2\beta}) + 2\int_{Q_\rho}\pi_{2,B}v_B\cdot\nabla(\phi^{2\beta}) \\
:=\ & K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5.
\end{aligned}$$

K_1的估计。注意到，对于 $p \in [2,3]$，由于 $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 2$，有 $q > \frac{9}{4}$；利用 (3.19) 和 (3.17)，可得

$$K_1 \le C(\rho-\varrho)^{-2}\int_{Q_\rho}|u|^2dxdt \le C(\rho-\varrho)^{-2}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}. \tag{3.31}$$

K_2的估计。取 $\beta = \beta_0$充分大，使得 $2\beta_0 - 1 \ge (3-\alpha)\beta_0$，其中$\alpha = \frac{2}{\frac{2}{p}+\frac{3}{q}}$；利用 H¨older 不等式，可得

$$\begin{aligned}
K_2 &\le C(\rho-\varrho)^{-1}\iint_{Q_\rho}|u||v_B|^2\phi^{2\beta-1}dxdt \\
&\le C(\rho-\varrho)^{-1}\|u\|_{L^pL^q(Q_\rho)}\||v_B|^{\alpha-1}\|_{L^{\frac{p}{\alpha-1}}L^{\frac{q}{\alpha-1}}(Q_\rho)}\||v_B\phi^\beta|^{3-\alpha}\|_{L^rL^s(Q_\rho)}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

这里,

$$r = \frac{p}{p-\alpha},\quad s = \frac{q}{q-\alpha},\quad \alpha = \frac{2}{\frac{2}{p}+\frac{3}{q}}.$$

断言：对于 $q \in \left(\frac{3}{2-\frac{2}{p}}, \frac{7}{2-\frac{2}{p}}\right]$，$r(3-\alpha) \ge 2$且 $2 \le s(3-\alpha) \le 6$。首先，由于 $p \le 3$，可得

$$r(3-\alpha) \ge 3.$$

其次，由于 $q \le \frac{7}{2-\frac{2}{p}}$，有

$$s(3-\alpha) = (3-\alpha)\frac{q}{q-\alpha} \ge 2,$$

and

$$s(3-\alpha) \le 6,$$

由于 $q > \frac{9}{4}$.

注意到

$$\frac{2}{r(3-\alpha)} + \frac{3}{s(3-\alpha)} = \frac{3}{3-\alpha} > \frac{3}{2},$$

结合 $\frac{2}{r} + \frac{3}{s} = 3$，再次利用何尔德不等式和 (3.19)，可得

$$\begin{aligned}
K_2 &\le C(\rho-r)^{-1}\rho^{\frac{3}{2}(\alpha-1)}\|u\|_{L^pL^q}\|v_B\|^{\alpha-1}_{L^pL^q(Q_\rho)}\left(\|v_B\phi^\beta\|^2_{L^\infty L^2(Q_\rho)} + \|\nabla(v_B\phi^\beta)\|^2_{L^2(Q_\rho)}\right)^{\frac{3-\alpha}{2}} \\
&\le \frac{1}{8}\left(\|v_B\phi^\beta\|^2_{L^\infty L^2(Q_\rho)} + \|\nabla(v_B\phi^\beta)\|^2_{L^2(Q_\rho)}\right) + C(\rho-\varrho)^{-\frac{2}{\alpha-1}}\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_\rho)}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

此外，对于 $q > \frac{7}{2-\frac{2}{p}}$ 的情形，可以取 $q_0 = \frac{7}{2-\frac{2}{p}}$，且 (3.33) 对 q_0 成立。然后适用 $_p$H¨older 不等式，且 (3.33) 对 和 $q > q_0$ 成立。

K_3的估计。注意到 $q > \frac{9}{4}$，由于 $p \in [2,3]$ 且 $\rho \le 1$，利用（3.20）、（3.19）和 H¨older 不等式，我们知道，

$$\begin{aligned} K_3 &\le C\rho^{\frac{7}{2}-\frac{3}{q}-\frac{4}{p}}\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|u\|_{L^pL^q(Q_\rho)}\|\nabla\nabla\pi_{h,B}\|_{L^pL^\infty(Q_{\sigma_2})} \\ &\le C(\rho-\varrho)^{-1-\frac{3}{q}}\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|u\|_{L^pL^q(Q_\rho)}\|u\|_{L^pL^q(Q_\rho)} \\ &\le \frac{1}{8}\Big(\|v_B\phi^\beta\|^2_{L^\infty L^2(Q_\rho)} + \|\nabla(v_B\phi^\beta)\|^2_{L^2(Q_\rho)}\Big) \\ &\quad + C(\rho-\varrho)^{-2-\frac{6}{q}}\|u\|^4_{L^pL^q(Q_\rho)}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

K_4 的估计。回忆一下。

$$K_4 = -4\beta\int_{Q_\rho} v_B\phi^\beta\cdot\nabla\phi\ \pi_{1,B}\phi^{\beta-1}dxds.$$

现在我们将（1.1）中的第一方程改写为

$$\partial_t v_B - \Delta v_B + u\cdot\nabla u + \nabla\pi_{1,B} + \nabla\pi_{2,B} = 0,$$

其中，$v_B = u + \nabla\pi_{h,\ B}$ 且 $\nabla\pi_{h,\ B} = -E_{B_\rho}(u)$。利用压力的表示公式$\pi_{1,\ B}$，我们得到

$$\begin{aligned} \pi_{1,B}\xi &= R_iR_j(\xi u_iu_j) - N*(\partial_{ij}\xi u_iu_j) + \partial_jN*(u_iu_j\partial_i\xi) \\ &\quad + \partial_iN*(u_iu_j\partial_j\xi) - N*(\pi_{1,B}\Delta\xi) + 2\partial_jN*(\partial_j\xi\pi_{1,B}), \end{aligned} \tag{3.35}$$

其中 ξ 是截断函数，$N = -\frac{1}{4\pi|x|}$ 是泊松方程的核，$R_i = \frac{\partial_i}{\sqrt{-\Delta}}$ 是Riesz变换。重写 $K_4 = -4\beta(K_{41}+\cdots+K_{46})$。

选择 $\xi = \phi^{\beta-1}$，并注意到满足 $\beta_0 - 1 \ge (2-\alpha)\beta_0$ 的 $\beta = \beta_0$。那么

$$\begin{aligned} K_{41} &= \int_{Q_\rho} v_B\phi^\beta\cdot\nabla\phi R_iR_j(\xi u_iu_j)dxdt \\ &= \int \big(R_iR_j(\xi u_i(v_B)_j) - R_iR_j(\xi u_i(\nabla\pi_{h,B})_j)\big)\phi^\beta v_B\cdot\nabla\phi dxdt \end{aligned}$$

使用 L彩票开户 emma 2.3 中，与 K_2 在 (3.32) 和 K_3 在 (3.34) 相同的估计得出 tha t

$$\begin{aligned} K_{41} &\le C(\rho-r)^{-1}\|v_B\phi^\beta\|_{L^{(3-\alpha)r}L^{(3-\alpha)s}(Q_\rho)}\|u\|_{L^pL^q(Q_\rho)}\|v_B\|^{\alpha-1}_{L^pL^q(Q_\rho)}\|v_B\phi^\beta\|^{2-\alpha}_{L^{(3-\alpha)r}L^{(3-\alpha)s}(Q_\rho)} \\ &\quad + C(\rho-r)^{-1}\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|u\|_{L^pL^q(Q_\rho)}\|\nabla\pi_{h,B}\|_{L^pL^\infty(Q_{\sigma_2})} \\ &\le \frac{1}{8}\Big(\|v_B\phi^\beta\|^2_{L^\infty L^2(Q_\rho)} + \|\nabla(v_B\phi^\beta)\|^2_{L^2(Q_\rho)}\Big) + C(\rho-r)^{-\frac{2}{\alpha-1}}\rho^3\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_\rho)} \\ &\quad + C(\rho-r)^{-2-\frac{6}{q}}\|u\|^4_{L^pL^q(Q_\rho)}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

对于 K_{42}，利用 H¨older 不等式和卷积型Young不等式，有以下结论。

$$\begin{aligned} K_{42} &\le C(\rho-r)^{-1}\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|N*(\partial_{ij}\xi u_iu_j)\|_{L^1L^2(Q_{\sigma_2})} \\ &\le C(\rho-r)^{-1}\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}(\rho-r)^{-2}\|N\|_{L^\infty L^2(Q_*)}\||u|^2\|_{L^1L^1(Q_{\sigma_2})} \end{aligned}$$

其中 $Q_* = (-\rho^2, 0)\times B_*$, $B_* = \{x:\ |x|\le 2\sigma_2\}$。由此可得

$$\|N\|_{L^\infty L^2(Q_*)} \le C\rho^{\frac{1}{2}} \le C. \tag{3.37}$$

注意到，由于 $p\in[2,3]$，$q\in(\frac{9}{4},+\infty)$，利用（3.37），可推得

$$\begin{aligned} K_{42} &\le C\rho^{\frac{1}{2}}(\rho-\varrho)^{-3}\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|u\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)} \\ &\le C(\rho-\varrho)^{-3}\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

对于 K_{43} 项，我们有

$$K_{43}\le C(\rho-\varrho)^{-2}\left(\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}+\|\nabla(v_B\phi^\beta)\|_{L^2L^2(Q_\rho)}\right)\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}. \tag{3.39}$$

首先，当 $p=2$ 时，由于 $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}<2$，可得 $q>3$。利用 Hölder 不等式和 Young 不等式，可得

$$\begin{aligned} K_{43} &\le C(\rho-\varrho)^{-1}\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|\partial_j N*(u_iu_j\partial_i\xi)\|_{L^1L^2(Q_{\sigma_2})} \\ &\le C(\rho-\varrho)^{-2}\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|\partial_j N\|_{L^\infty L^{\frac{2q}{3q-4}}(Q_*)}\||u|^2\|_{L^1L^{\frac{q}{2}}(Q_\rho)} \\ &\le C(\rho-\varrho)^{-2}\left(\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}+\|\nabla(v_B\phi^\beta)\|_{L^2L^2(Q_\rho)}\right)\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}, \end{aligned}$$

其中，项 $\|\partial_j N\|_{L^\infty_t L^{\frac{2q}{3q-4}}_x(Q_\rho)}$ 可积，因为当 $q\in(3,4]$ 时，$\frac{2q}{3q-4}<\frac{3}{2}$。当 $q>4$ 时，上述不等式对 $q_0=4$ 成立，因此根据 Hölder 不等式，对 $q>4$ 仍然成立。其次，对于 $2<p\le 3$ 的情形，再次利用 Hölder 不等式和 Young 不等式，可得

$$\begin{aligned} K_{43} &\le C(\rho-\varrho)^{-1}\|v_B\phi^\beta\|_{L^{\frac{p}{p-2}}L^{\frac{6p}{8-p}}(Q_\rho)}\|\partial_j N*(u_iu_j\partial_i\xi)\|_{L^{\frac{p}{2}}L^{\frac{6p}{7p-8}}(Q_{\sigma_2})} \\ &\le C(\rho-\varrho)^{-2}\|v_B\phi^\beta\|_{L^{\frac{p}{p-2}}L^{\frac{6p}{8-p}}(Q_\rho)}\|\partial_j N\|_{L^\infty L^{\frac{1}{\frac{13}{6}-\frac{2}{3}(\frac{2}{p}+\frac{3}{q})}}(Q_*)}\||u|^2\|_{L^{\frac{p}{2}}L^{\frac{q}{2}}(Q_\rho)}. \end{aligned}$$

显然，项 $\|\partial_j N\|_{L^\infty L^{\frac{1}{\frac{13}{6}-\frac{2}{3}(\frac{2}{p}+\frac{3}{q})}}(Q_*)}$ 可积，因为

$$1\le\frac{1}{\frac{13}{6}-\frac{2}{3}(\frac{2}{p}+\frac{3}{q})}<\frac{3}{2},\quad q\le\frac{3}{\frac{7}{4}-\frac{2}{p}}$$

注意到 $\frac{2(p-2)}{p}+\frac{8-p}{2p}=\frac{3}{2}$，其中 $\frac{p}{p-2}\ge 2$ 和 $2\le\frac{6p}{8-p}\le 6$。因此，

$$\|v_B\phi^\beta\|_{L^{\frac{p}{p-2}}L^{\frac{6p}{8-p}}(Q_\rho)}\le C\left(\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(B_\rho)}+\|\nabla(v_B\phi^\beta)\|_{L^2L^2(B_\rho)}\right)$$

因此，(3.39) 对 $q\le\frac{3}{\frac{7}{4}-\frac{2}{p}}$ 得证。当 $q>\frac{3}{\frac{7}{4}-\frac{2}{p}}$ 时，上述不等式对 $q_0=\frac{3}{\frac{7}{4}-\frac{2}{p}}$ 成立；由 Hölder 不等式，对 $4<p<\frac{14}{3}$，$q>\frac{3}{\frac{7}{4}-\frac{2}{p}}$ 仍可推出其对 $q>\frac{3}{\frac{7}{4}-\frac{2}{p}}$ 成立。(3.39) 的证明完成。

类似地，

$$K_{44}\le C(\rho-\varrho)^{-2}\left(\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(B_\rho)}+\|\nabla(v_B\phi^\beta)\|_{L^2L^2(B_\rho)}\right)\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}. \tag{3.40}$$

对于 K_{45}，注意到 $q>\frac{9}{4}$ 并利用 (3.37)，有

$$\begin{aligned} K_{45} &\le C(\rho-\varrho)^{-1}\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|N*(\pi_{1,B}\Delta\xi)\|_{L^1L^2(Q_\rho)} \\ &\le C(\rho-\varrho)^{-1}\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}(\rho-r)^{-2}\|N\|_{L^\infty L^2(Q_*)}\|\pi_{1,B}\|_{L^1L^1(Q_\rho)} \\ &\le C\rho^{\frac{1}{2}}\rho^{5-\frac{6}{q}-\frac{4}{p}}(\rho-\varrho)^{-3}\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|\pi_{1,B}\|_{L^{\frac{p}{2}}L^{\frac{q}{2}}(Q_\rho)} \\ &\le C(\rho-\varrho)^{-3}\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

对于 K_{46}，根据 Hölder 不等式和 Young 不等式，我们可推得

$$\begin{aligned} K_{46} &\le C(\rho-\varrho)^{-1}\|v_B\phi^\beta\|_{L^{\frac{p}{p-2}}L^{\frac{6p}{8-p}}(Q_\rho)}\|\partial_j N*(\pi_{1,B}\partial_j\xi)\|_{L^{\frac{p}{2}}L^{\frac{6p}{7p-8}}(Q_\rho)} \\ &\le C(\rho-\varrho)^{-1}\|v_B\phi^\beta\|_{L^{\frac{p}{p-2}}L^{\frac{6p}{8-p}}(Q_\rho)}\|\partial_j N\|_{L^\infty L^{\frac{1}{\frac{13}{6}-\frac{2}{3}(\frac{2}{p}+\frac{3}{q})}}(Q_*)}\|\pi_{1,B}\partial_j\xi\|_{L^{\frac{p}{2}}L^{\frac{q}{2}}(Q_\rho)}, \end{aligned}$$

这与 $K43$ 和 $\frac{p}{p-2}=\infty$ 对于 $p=2.$ 的情形类似。同样的论证可得

$$K_{46}\le C(\rho-\varrho)^{-2}\left(\|v_B\phi^\beta\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}+\|\nabla(v_B\phi^\beta)\|_{L^2L^2(Q_\rho)}\right)\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}. \tag{3.42}$$

结合 (3.36)、(3.38)、(3.39)、(3.40)、(3.41) 和 (3.42)，选取 $\beta=\beta_0$ 并使用 Young 不等式，可得

$$\begin{aligned}K_4\le\tfrac{1}{16}\Big(\|v_B\phi^\beta\|^2_{L^\infty L^2(Q_\rho)}+\|\nabla(v_B\phi^\beta)\|^2_{L^2(Q_\rho)}\Big)+C(\rho-\varrho)^{-\frac{2}{\alpha-1}}\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_\rho)}\\ +C(\rho-\varrho)^{-6}\|u\|^4_{L^pL^q(Q_\rho)}.\end{aligned} \tag{3.43}$$

K_5 的估计。利用 (2.16) 和分部积分，有

$$\begin{aligned}K_5&\le C\rho^{\frac52-\frac2p-\frac3q}(\rho-\varrho)^{-1}\|v_B\|_{L^pL^q(Q_\rho)}\|\pi_{2,B}\|_{L^2L^2(Q_\rho)}\\ &\le C(\rho-\varrho)^{-2}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}+\tfrac14\|\nabla u\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)}.\end{aligned} \tag{3.44}$$

结合 (3.31)、(3.33)、(3.34)、(3.43) 和 (3.44)，可得

$$\begin{aligned}\|v_B\phi^\beta\|^2_{L^\infty L^2(Q_\rho)}+\|\nabla(v_B\phi^\beta)\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)}&\le C(\rho-r)^{-\frac{2}{\alpha-1}}\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_\rho)}\\ +C(\rho-r)^{-8}\|u\|^4_{L^pL^q(Q_\rho)}+C(\rho-r)^{-2}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}&+\frac14\|\nabla u\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

注意到 $\frac2p+\frac{3}{\frac{6p}{3p-4}}=\frac32$，其中 $p\ge2$ 且 $q>\frac94$，可得

$$\begin{aligned}\|v_B\phi^\beta\|_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}+\|\nabla(v_B\phi^\beta)\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)}&\le C(\rho-r)^{-\frac{2}{\alpha-1}}\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_\rho)}\\ +C(\rho-r)^{-8}\|u\|^4_{L^pL^q(Q_\rho)}+C(\rho-r)^{-2}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}&+\frac14\|\nabla u\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)}.\end{aligned} \tag{3.46}$$

另一方面，由 (2.14)、(3.19) 和 (3.20) 可得

$$\begin{aligned}\|u\phi^\beta\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}&\le\|v_B\phi^\beta\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}+\|\nabla\pi_{h,B}\phi^\beta\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_{\sigma_2})}\\ &\le\|v_B\phi^\beta\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}+C(\rho-\varrho)^{-\frac3q}\|\nabla\pi_{h,B}\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}\\ &\le\|v_B\phi^\beta\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}+C(\rho-\varrho)^{-\frac3q}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)},\end{aligned} \tag{3.47}$$

and

$$\begin{aligned}\|\nabla u\phi^\beta\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)}&\le\|\nabla v_B\phi^\beta\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)}+\|\nabla\nabla\pi_{h,B}\phi^\beta\|^2_{L^2L^2(Q_{\sigma_2})}\\ &\le\|\nabla(v_B\phi^\beta)\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)}+\|v_B\nabla\phi^\beta\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)}\\ &\quad+C(\rho-\varrho)^{-\frac3q-1}\|\nabla\pi_{h,B}\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}\\ &\le\|\nabla(v_B\phi^\beta)\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)}+C(\rho-\varrho)^{-2}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}\\ &\quad+C(\rho-\varrho)^{-\frac3q-1}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)},\end{aligned} \tag{3.48}$$

结合 (3.46)、(3.47) 和 (3.48)，我们得到

$$\begin{aligned}&\|u\phi^\beta\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_\rho)}+\|\nabla u\phi^\beta\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)}\\ \le\;&C(\rho-r)^{-\frac{2}{\alpha-1}}\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_\rho)}+C(\rho-r)^{-8}\|u\|^4_{L^pL^q(Q_\rho)}\\ &+C(\rho-r)^{-2}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_\rho)}+\frac34\|\nabla u\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)}.\end{aligned}$$

最后，利用迭代引理（参见 [8, 引理 V.3.1，第161]页），可得以下卡乔波利不等式

$$\|u\|^2_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_{\frac{3}{4}})}+\|\nabla u\|^2_{L^2L^2(Q_{\frac{3}{4}})}\le C\|u\|^2_{L^pL^q(Q_1)}+C\|u\|^4_{L^pL^q(Q_1)}+C\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_1)}.$$

对于 $2\le p\le 3$。证明完毕。

4. Proof of Theorem 1.2

4.1. 情形 I: $2\le p<3$。证明分为三个步骤。

步骤 I：由局部能量不等式得到的衰减估计。

按 [2] 中所述选取一个截断函数。令 $G(x,t)=(4\pi t)^{-\frac{3}{2}}\exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ 为高斯核。对于 $r>0$, 记

$$\Phi(x,t)=r^2G(x,r^2-t),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times(-\infty,0),$$

通过直接计算，对于任意 $0<4r<\rho\le\frac{1}{2}$，有

$$\begin{aligned}&\Phi(x,t)\ge Cr^{-1},\quad (x,t)\in Q_r;\\&\Phi(x,t)\le Cr^{-1},\quad |\nabla\Phi(x,t)|\le Cr^{-2},\quad (x,t)\in Q_\rho;\\&\Phi(x,t)\le Cr^2\rho^{-3},\quad |\nabla\Phi(x,t)|\le Cr^2\rho^{-4},\quad (x,t)\in Q_\rho\setminus Q_{\frac{\rho}{2}}.\end{aligned}\tag{4.49}$$

令 $\eta:\ \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to[0,1]$ 在 $Q_\rho\setminus Q_{\frac{\rho}{2}}$ 上取一个适当的光滑截断函数，使得 $|\partial_t\eta|+|\nabla^2\eta|\le C\rho^{-2}$ 和 $|\nabla\eta|\le C\rho^{-1}$。将 $\phi=\Phi\eta$ 代入局部能量不等式。显然,

$$\partial_t\phi+\Delta\phi=(\partial_t\Phi+\Delta\Phi)\eta+\Phi\partial_t\eta+2\nabla\Phi\cdot\nabla\eta+\Phi\Delta\eta.$$

注意到 $\partial_t\Phi+\Delta\Phi=0$，我们得到

$$|\partial_t\phi+\Delta\phi|\le Cr^2\rho^{-5}.\tag{4.50}$$

类似地,

$$|\nabla\phi|=|\nabla\phi\eta+\phi\nabla\eta|\le Cr^{-2}+Cr^2\rho^{-4}\le Cr^{-2}.\tag{4.51}$$

取一个固定的球 $B=B_{\frac{3}{4}}$，其中 v_B。记 $v=v_B=u+\nabla\pi_h$，$\nabla\pi_h=-E_{B_{\frac{3}{4}}}(u)$、$\nabla\pi_1=-E_{B_{\underline{3}}}(u\cdot\nabla u)$ 以及 $\nabla\pi_2=E_{B_{\underline{3}}}(\Delta u)$。由局部能量不等式 (2.12) 可得：

$$\begin{aligned}&\int_{B_{\frac{3}{4}}}|v(x,s)|^2\phi(x,s)dx+2\int_{Q_{\frac{3}{4}}}|\nabla v(x,\tau)|^2\phi(x,\tau)dxd\tau\\\le\ &\int_{Q_{\frac{3}{4}}}|v(x,\tau)|^2(\partial_t\phi+\Delta\phi)dxd\tau+\int_{Q_{\frac{3}{4}}}|v_B|^2(v-\nabla\pi_h)\cdot\nabla\phi dxd\tau\\&+2\int_{Q_{\frac{3}{4}}}v_B\cdot\nabla\nabla\pi_h v\phi dxd\tau-2\int_{Q_{\frac{3}{4}}}\nabla\pi_h\cdot\nabla\nabla\pi_h v\phi dxd\tau\\&+2\int_{Q_{\frac{3}{4}}}(\pi_1+\pi_2)v_B\cdot\nabla\phi dxd\tau,\end{aligned}\tag{4.52}$$

利用 (4.49)$_1$, (4.50) 和 (4.51)，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\|v\|^2_{L^\infty L^2(Q_r)}+\frac{1}{r}\|\nabla v\|^2_{L^2L^2(Q_r)}\\
\le\ & C\left(\frac{r}{\rho}\right)^2\frac{1}{\rho^3}\int_{Q_\rho}|v|^2dxdt+C\frac{1}{r^2}\int_{Q_\rho}|v|^3dxdt+C\frac{1}{r^2}\int_{Q_\rho}|v|^2|\nabla\pi_h|dxdt\\
&+C\frac{1}{r}\int_{Q_\rho}|v|^2|\nabla\nabla\pi_h|dxdt+C\frac{1}{r}\int_{Q_\rho}|\nabla\pi_h||\nabla\nabla\pi_h||v|dxdt\\
&+C\frac{1}{r^2}\int_{Q_\rho}|v\pi_2|dxdt+C\frac{1}{r^2}\int_{Q_\rho}|v(\pi_1-(\pi_1)_{B_\rho})|dxdt\\
:=\ & M_1+M_2+\cdots+M_7.
\end{aligned}$$

记

$$I(r)=r^{-1}\|v\|^2_{L^\infty L^2(Q_r)}+r^{-1}\|\nabla v\|^2_{L^2L^2(Q_r)}+r^{-\frac{9}{4}}\|\pi_1-(\pi_1)_{B_r}\|^{\frac{3}{2}}_{L^1L^2(Q_r)},$$

其中 $(\pi_1)_{B_r}=|B_r|^{-1}\int_{B_r}\pi_1$。然后我们逐项估计 M_1-M_7。

步骤 II： $I(r)$ 的增长估计。

M_1 的估计：

$$M_1\le C\left(\frac{r}{\rho}\right)^2\rho^{-1}\sup_{t\in(-\rho^2,0)}\int_{B_\rho}|v|^2dx\le C\left(\frac{r}{\rho}\right)^2I(\rho). \tag{4.53}$$

M_2 的估计：利用 H¨older 不等式和嵌入定理，我们有

$$M_2\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\rho^{-\frac{3}{2}}\|v\|^3_{L^{\frac{10}{3}}L^{\frac{10}{3}}(Q_\rho)}\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^2I(\rho)^{\frac{3}{2}}. \tag{4.54}$$

M_3的估计：注意到 $\rho<\frac{1}{2}$，将（3.20）代入 $B_{\frac{3}{4}}$，由 H¨older 不等式可得定位胆

$$\begin{aligned}
M_3\ &\le\ Cr^{-2}\|v\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|v\|_{L^2L^6(Q_\rho)}\|\nabla\pi_h\|_{L^2L^3(Q_\rho)}\\
&\le\ C\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\left(\rho^{-1}\|v\|^2_{L^\infty L^2(Q_\rho)}+\rho^{-1}\|\nabla v\|^2_{L^2L^2(Q_\rho)}\right)\rho^{-1}\|\nabla\pi_h\|_{L^2L^3(Q_\rho)}\\
&\le\ C\left(\frac{\rho}{r}\right)^2I(\rho)\|\nabla\pi_h\|_{L^2L^q(Q_{\frac{3}{4}})}\\
&\le\ C\|u\|_{L^pL^q(Q_1)}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2I(\rho).
\end{aligned} \tag{4.55}$$

M_4 的估计：根据相似性， M_4 可由控

$$M_4\le C\|u\|_{L^pL^q(Q_1)}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2I(\rho). \tag{4.56}$$

M_5的估计：对于项 M_5， $\nabla\pi_h$ 的各部分可由 u 控制。然后由 H¨older 不等式，再次利用（3.20），得到

$$\begin{aligned}
M_5\ &\le\ Cr^{-1}\|v\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|\nabla\pi_h\|_{L^2L^6(Q_\rho)}\|\nabla\nabla\pi_h\|_{L^2L^3(Q_\rho)}\\
&\le\ C\frac{\rho}{r}I(\rho)^{\frac{1}{2}}\|\nabla\pi_h\|_{L^2L^q(Q_{\frac{3}{4}})}\|\nabla\nabla\pi_h\|_{L^2L^3(Q_\rho)}\\
&\le\ C\frac{\rho}{r}I(\rho)^{\frac{1}{2}}\|\nabla\pi_h\|_{L^2L^q(Q_{\frac{3}{4}})}\rho\|\nabla\pi_h\|_{L^2L^q(Q_{\frac{3}{4}})}\\
&\le\ \delta I(\rho)+C(\delta)\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\|u\|^4_{L^pL^q(Q_1)},
\end{aligned} \tag{4.57}$$

其中 $\delta>0$ 待定，且我们使用了 $p\ge2$.

M_6 的估计：注意到 $\nabla\pi_2 = -E_{B_{\frac{3}{4}}}(\Delta u)$ 是调和函数，且 $\|\pi_2\|_{L^2(B_{\frac{3}{4}})} \le C\|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{3}{4}})}$根据 (2.16) 和 (3.20)，有

$$\begin{aligned} M_6 &\le Cr^{-2}\|v\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|\pi_2\|_{L^1L^2(Q_\rho)} \le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 I(\rho)^{\frac{1}{2}}\|\pi_2\|_{L^1L^2(Q_{\frac{3}{4}})} \\ &\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 I(\rho)^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^1L^2(Q_{\frac{3}{4}})} \le \delta I(\rho) + C(\delta)\left(\frac{\rho}{r}\right)^4 \|\nabla u\|^2_{L^2L^2(Q_{\frac{3}{4}})}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

M_7的估计：由 H¨older 不等式、Young 不等式和 (2.15) 可得

$$\begin{aligned} M_7 &\le Cr^{-2}\|v\|_{L^\infty L^2(Q_\rho)}\|\pi_1 - (\pi_1)_{B_\rho}\|_{L^1L^2(Q_\rho)} \\ &\le C(\delta)\left(\frac{\rho}{r}\right)^6 I(\rho)^{\frac{3}{2}} + \delta\left(\rho^{-\frac{3}{2}}\|\pi_1 - (\pi_1)_{B_\rho}\|_{L^1L^2(Q_\rho)}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &\le C(\delta)\left(\frac{\rho}{r}\right)^6 I(\rho)^{\frac{3}{2}} + \delta I(\rho). \end{aligned} \tag{4.59}$$

$r^{-\frac{3}{2}}\|\pi_1 - (\pi_1)_{B_r}\|_{L^1L^2(Q_r)}$的估计：注意到函数 π_1满足

$$-\Delta v_1 + \nabla\pi_1 = -u\cdot\nabla u, \quad \nabla\cdot v_1 = 0 \quad \text{in} \quad B_{\frac{3}{4}},$$

我们有 $-\Delta\pi_1 = \partial_i\partial_j(u_iu_j)$ 属于 $B_{\frac{3}{4}}$。令 ζ为一个截断函数，它在 $Q_{\frac{\rho}{2}}$上等于 1，并在 Q_ρ之外为 0，且满足 $0 < 4r < \rho < \frac{1}{2}$。设 $\pi_1 - (\pi_1)_{B_r} = p_1 - (p_1)_{B_r} + p_2 - (p_2)_{B_r}$，其中

$$p_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}\partial_i\partial_j(u_iu_j\zeta)(y)dy,$$

且 $p_2-(p_2)_{B_r}$在 $Q_{\frac{\rho}{2}}$中是调和函数。对于任意 $p' > 1$，根据 Calder´on-Zygmund 不等式，我们可得

$$\int_{B_{\frac{\rho}{2}}}|p_1|^{p'}dx \le C\int_{B_\rho}|u|^{2p'}dx. \tag{4.60}$$

对于调和部分，有

$$\begin{aligned} &\int_{B_r}|p_2 - (p_2)_{B_r}|^{p'}dx \le C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{3+p'}\int_{B_{\frac{\rho}{2}}}|p_2 - (p_2)_{B_{\frac{\rho}{2}}}|^{p'}dx \\ \le\ & C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{3+p'}\int_{B_{\frac{\rho}{2}}}|p_1 - (p_1)_{B_{\frac{\rho}{2}}}|^{p'}dx + C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{3+p'}\int_{B_{\frac{\rho}{2}}}|\pi_1 - (\pi_1)_{B_{\frac{\rho}{2}}}|^{p'}dx \\ \le\ & C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{3+p'}\int_{B_\rho}|u|^{2p'}dx + C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{3+p'}\int_{B_{\frac{\rho}{2}}}|\pi_1 - (\pi_1)_{B_{\frac{\rho}{2}}}|^{p'}dx. \end{aligned} \tag{4.61}$$

特别地，对于 $p' = 2$，由 (4.60) 和 (4.61) 可得

$$\|\pi_1 - (\pi_1)_{B_r}\|_{L^2(B_r)} \le C\|u\|^2_{L^4(B_\rho)} + C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{5}{2}}\|\pi_1 - (\pi_1)_{B_\rho}\|_{L^2(B_\rho)}.$$

对上述不等式关于 t从 $-r^2$ 积分至0，可得

$$\|\pi_1 - (\pi_1)_{B_r}\|_{L^1L^2(Q_r)} \le C\|u\|^2_{L^2L^4(Q_\rho)} + C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{5}{2}}\|\pi_1 - (\pi_1)_{B_\rho}\|_{L^1L^2(Q_\rho)}.$$

利用 H¨older 不等式及 (3.19) 和 (3.20)，我们得到

$$\begin{aligned} r^{-\frac{3}{2}}\|\pi_1-(\pi_1)_{B_r}\|_{L^1L^2(Q_r)} &\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{3}{2}}\rho^{-\frac{3}{2}}\|\nabla\pi_h\|^2_{L^2L^4(Q_\rho)} \\ &\quad +C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{3}{2}}\rho^{-\frac{3}{2}}\|v\|^2_{L^2L^4(Q_\rho)}+C\frac{r}{\rho}I(\rho)^{\frac{2}{3}} \\ &\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{3}{2}}\|u\|^2_{L^pL^q(Q_1)}+C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{3}{2}}I(\rho)+C\frac{r}{\rho}I(\rho)^{\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

这意味着

$$r^{-\frac{9}{4}}\|\pi_1-(\pi_1)_{B_r}\|^{\frac{3}{2}}_{L^1L^2(Q_r)}\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{9}{4}}I(\rho)^{\frac{3}{2}}+C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{3}{2}}I(\rho)+C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{9}{4}}\|u\|^3_{L^pL^q(Q_1)}. \tag{4.62}$$

综合 (4.53) – (4.59) 和 (4.62)，可得

$$\begin{aligned} I(r) &\le C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{3}{2}}I(\rho)+C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{6}I(\rho)^{\frac{3}{2}}+C\|u\|_{L^pL^q(Q_1)}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2}I(\rho) \\ &\quad +3\delta I(\rho)+C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2}\|u\|^4_{L^pL^q(Q_1)}+C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{4}\|\nabla u\|^2_{L^2(Q_{\frac{3}{4}})} \\ &\quad +C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{9}{4}}\|u\|^3_{L^pL^q(Q_1)}. \end{aligned} \tag{4.63}$$

步骤 III：迭　代论证。将 $r=\theta\rho$ 代入 (4.63)，其中任意 $\theta\in(0,\frac{1}{4})$，可得

$$\begin{aligned} I(r) &\le C\left(\theta^{\frac{3}{2}}+\theta^{-2}\|u\|_{L^pL^q(Q_1)}+3\delta\right)I(\rho)+C\theta^{-6}I(\rho)^{\frac{3}{2}} \\ &\quad +C\theta^{-2}\|u\|^4_{L^pL^q(Q_1)}+C\theta^{-4}\|\nabla u\|^2_{L^2L^2(Q_{\frac{3}{4}})}+C\theta^{-\frac{9}{4}}\|u\|^3_{L^pL^q(Q_1)} \end{aligned}$$

利用命题 3.1，可得

$$\begin{aligned} I(r) &\le C\left(\theta^{\frac{3}{2}}+\theta^{-2}\|u\|_{L^pL^q(Q_1)}+3\delta\right)I(\rho)+C\theta^{-6}I(\rho)^{\frac{3}{2}}+C\theta^{-2}\|u\|^4_{L^pL^q(Q_1)} \\ &\quad +C\theta^{-4}\left(\|u\|^2_{L^pL^q(Q_1)}+\|u\|^4_{L^pL^q(Q_1)}+\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_1)}\right)+C\theta^{-\frac{9}{4}}\|u\|^3_{L^pL^q(Q_1)}. \end{aligned}$$

选择足够小但从现在起固定不变的 $\delta=\delta_0$ 和 $\theta=\theta_0\in(0,\frac{1}{4})$，并取足够小的 ε_0，使得

$$C\theta^{\frac{3}{2}}+C\theta^{-2}\|u\|_{L^pL^q(Q_1)}+3\delta\le C\theta_0^{\frac{3}{2}}+C\theta_0^{-2}\varepsilon_0+3\delta_0\le\frac{1}{4},$$

and

$$C\theta_0^{-2}\varepsilon_0^4+C\theta_0^{-\frac{9}{4}}\varepsilon_0^3+C\theta_0^{-4}(\varepsilon_0^2+\varepsilon_0^4+\varepsilon_0^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}})\le C\varepsilon_0^2.$$

于是我们得到

$$I(\theta_0\rho)=I(r)\le\frac{1}{4}I(\rho)+CI(\rho)^{\frac{3}{2}}+C\varepsilon_0^2. \tag{4.64}$$

通过缩放或选择不同的区域（例如，对于 $B=B_{\frac{3}{4}}$），我们可以得到与(3.45)类似的估计。

$$\begin{aligned} &\|v\phi^\beta\|^2_{L^\infty L^2(Q_{\frac{3}{4}})}+\|\nabla(v\phi^\beta)\|^2_{L^2L^2(Q_{\frac{3}{4}})}\le C\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_{\frac{3}{4}})}+C\|u\|^4_{L^pL^q(Q_{\frac{3}{4}})} \\ &+C\|u\|^2_{L^pL^q(Q_{\frac{3}{4}})}+\frac{1}{4}\|\nabla u\|^2_{L^2L^2(Q_{\frac{3}{4}})}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

并且此时 $\phi=1$ 在 $Q_{1/2}$中。然后

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{L^\infty L^2(Q_{\frac14})}+\|\nabla v\|^2_{L^2L^2(Q_{\frac14})} &\le C\|u\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_1)}+C\|u\|^4_{L^pL^q(Q_1)}\\ &\quad +C\|u\|^2_{L^pL^q(Q_1)}+\frac14\|\nabla u\|^2_{L^2L^2(Q_{\frac34})}.\end{aligned}$$

再次使用命题 3.1，可得

$$\|v\|^2_{L^\infty L^2(Q_{\frac14})}+\|\nabla v\|^2_{L^2L^2(Q_{\frac14})}\le C\left(\varepsilon_0^2+\varepsilon_0^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}+\varepsilon_0^4\right). \tag{4.66}$$

对于 $I(\frac14)$的压力部分，若 $q\ge4$，注意到$\|\pi_1-\bar\pi_1\|_{L^1L^2(Q_{\frac14})}\le C\|u\|^2_{L^2L^4(Q_{\frac34})}$由 (2.15) 可知，可得

$$\|\pi_1-\bar\pi_1\|_{L^1L^2(Q_{\frac14})}\le C\|u\|^2_{L^2L^4(Q_{\frac34})}\le C\|u\|^2_{L^pL^q(Q_{\frac34})}. \tag{4.67}$$

若 $\frac94<q<4$，由嵌入不等式可得

$$\|\pi_1-\bar\pi_1\|_{L^1L^2(Q_{\frac14})}\le C\|u\|^2_{L^2L^4(Q_{\frac34})}\le C\left(\|\nabla u\|^2_{L^2(Q_{\frac34})}+\|u\|^2_{L^pL^q(Q_{\frac34})}\right). \tag{4.68}$$

结合 (4.66)、(4.67) 和 (4.68)，并使用命题 3.1，可得

$$I(\frac14)\le C\left(\varepsilon_0^2+\varepsilon_0^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}+\varepsilon_0^4\right)\le\varepsilon_0^{\frac32}:=\varepsilon_1.$$

不失一般性，设 $I(\rho_0)\le\varepsilon_1$，其中 $\rho_0>0$。假设对任意 $s\in\mathbb{N}_+$、$s<n$，

$$I(\theta_0^{s-1}\rho_0)\le\varepsilon_1,$$

那么对于 $s=n$，由 (4.64) 可得

$$\begin{aligned}I(\theta_0^n\rho_0) &\le \frac14 I(\theta_0^{n-1}\rho_0)+CI(\theta_0^{n-1}\rho_0)^{\frac32}+C\varepsilon_0^2\\ &\le \left(\frac14+C\varepsilon_1^{\frac12}+C\varepsilon_1^{\frac13}\right)\varepsilon_1.\end{aligned}$$

$_1$ $_1$选取一个足够小但固定的 ε_1，它依赖于 ε_0，使得 $\frac14+C\varepsilon_1^{\frac12}+C\varepsilon_1^{\frac13}\le1$，于是得到 $I(\theta_0^n\rho_0)\le\varepsilon_1$。由数学归纳法，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，

$$I(\theta_0^n\rho_0)\le\varepsilon_1.$$

那么对于 任意 $r\in(0,\frac14)$，都存在常数 n_0，使得 $\theta_0^{n_0}\rho_0<r\le\theta_0^{n_0-1}\rho_0$。该 n

$$\begin{aligned}&r^{-1}\|v\|^2_{L^\infty L^2(Q_r)}+r^{-1}\|\nabla v\|^2_{L^2L^2(Q_r)}\\ \le\ &\theta_0^{-n_0}\rho_0^{-1}\|v\|^2_{L^\infty L^2(Q_{\theta_0^{n_0-1}\rho_0})}+\theta_0^{-n_0}\rho_0^{-1}\|\nabla v\|^2_{L^\infty L^2(Q_{\theta_0^{n_0-1}\rho_0})}\\ \le\ &C\theta_0 I(\theta_0^{n_0-1}\rho_0)\le C\varepsilon_1.\end{aligned}$$

由纳维–斯托克斯方程的平移不变性可得

$$\sup_{z_0\in Q_{1/4}}\sup_{r\in(0,1/4)}\{r^{-1}\|v\|^2_{L^\infty L^2(Q_r)}+r^{-1}\|\nabla v\|^2_{L^2L^2(Q_r)}\}\le C\varepsilon_1. \tag{4.69}$$

接下来我们证明正则性。由三角不等式可得

$$r^{-2}\|u\|^3_{L^3(Q_r)}\le r^{-2}\|v\|^3_{L^3(Q_r)}+r^{-2}\|\nabla\pi_h\|^3_{L^3(Q_r)}.$$

只需估计项 $r^{-2}\|\nabla\pi_h\|^3_{L^3(Q_r)}$，因为 (4.69) 意味着项 $r^{-2}\|v\|^3_{L^3(Q_r)}$ 足够小，并且

$$\begin{aligned} r^{-2}\|\nabla\pi_h\|^3_{L^3(Q_r)} &= r^{-2}\int_{I_r}\|\nabla\pi_h\|^3_{L^3(B_r)} \le r^{-2}\int_{I_r} r^3\|\nabla\pi_h\|^3_{L^2(B_{\frac{3}{4}})} \\ &\le Cr^{-2}\int_{I_{\frac{3}{4}}} r^3\|u\|^3_{L^2(B_{\frac{3}{4}})} \le Cr\|u\|^3_{L^\infty L^2(Q_{\frac{3}{4}})}. \end{aligned}$$

注意， u 是局部适定弱解，这意味着 $\|u\|^3_{L^\infty L^2(Q_{\frac{3}{4}})} < +\infty$。于是存在 $r_0 > 0$ 使得 $Cr_0\|u\|^3_{L^\infty L^2(Q_{\frac{3}{4}})} \le C\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}$，并且我们有

$$r^{-2}\|u\|^3_{L^3(Q_r)} \le C\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}, \quad \forall\ 0 < r \le r_0,$$

这意味着　　对于所有 $z_0 \in Q_{\frac{r_0}{2}}$，由 Wolf 的结果 (1.5) 或 Wang-Wu-Zhou 的结果 (1.8) 可知 .

4.2. 情形 II： $p \ge 3$。此时，有 $\frac{3}{2} < q \le 9$，因为 $1 \le \frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 2$。考虑 $3 \le q \le 9$ 的情形。由此可得

$$\|u\|_{L^3L^3(Q_{\frac{1}{2}})} \le C\|u\|_{L^pL^q(Q_{\frac{1}{2}})}$$

这意味着根据 (1.5) 或 (1.8)，解是正则的。

$\frac{3}{2} < q < 3$的情形。由命题 3.1 可知

$$\|u\|_{L^pL^{\frac{6p}{3p-4}}(Q_{\frac{1}{2}})} + \|\nabla u\|_{L^2L^2(Q_{\frac{1}{2}})} \le C\left(\|u\|_{L^pL^q(Q_1)} + \|u\|^2_{L^pL^q(Q_1)} + \|u\|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}_{L^pL^q(Q_1)}\right)$$

其中 $\alpha = \frac{2}{\frac{2}{p}+\frac{3}{q}}$。因此

$$\|u\|_{L^3L^3(Q_{\frac{1}{2}})} \le C\|u\|_{L^3L^{\frac{18}{5}}(Q_{\frac{1}{2}})} \le C\left(\|u\|_{L^pL^q(Q_{\frac{1}{2}})} + \|\nabla u\|_{L^2L^2(Q_{\frac{1}{2}})}\right).$$

再次应用 Wolf 的结果。证明完成。

致谢。W. Wang 得到了国家自然科学基金项目（批准号：12071054）、国家青年拔尖人才支持计划以及大连市高层次人才创新项目（项目编号：2020RD09）的资助。D. Zhou 得到了国家自然科学基金项目（批准号：12071113）的资助。

References

[1] Albritton, Dallas；Barker, Tobias；Prange, Christophe，《通过弱解–强解唯一性证明纳维–斯托克斯方程的ε正则性》。arXiv:2211.16188。2022年。[2] Caffarelli, L.；Kohn, R.；Nirenberg, L.，《纳维–斯托克斯方程适当弱解的部分正则性》。《纯粹与应用数学通讯》35（1982），第6期，771–831。[3] Chae, Dongho；Wolf, J¨org，《关于纳维–斯托克斯方程自相似解的李乌维尔型定理》。（英文摘要）《数学分析与力学档案》225（2017），第1期，549–572。[4] Chamorro, Diego；Lemari´e-Rieusset, Pierre-Gilles；Mayoufi, Kawther，《压力在纳维–斯托克斯方程弱解部分正则性理论中的作用》。《数学分析与力学档案》228（2018），第1期，237–277。[5] Duchon, Jean；Robert, Raoul，《不可压缩欧拉方程和纳维–斯托克斯方程弱解的能量耗散》。（法文；英文、法文摘要）[不可压缩欧拉方程和纳维–斯托克斯方程弱解的能量耗散]《巴黎科学院报告·第一辑·数学》329（1999），第3期，243–248。[6] Iskauriaza, L.；Ser¨egin, G. A.；Shverak, V.，《$L_{3,\infty}$–纳维–斯托克斯方程的解与反向唯一性》。（俄文）《数学科学进展》58（2003），第2期（350），3–44；俄文数学评论译本《Russian Math. Surveys》58（2003），第2期，211–250

[7] Galdi, G. P.；Simader, C. G.；Sohr, H.，《Lipschitz区域中的斯托克斯问题》。《纯粹与应用数学年刊》（第4辑）167（1994），147–163。[8] Giaquinta, Mariano，《变分法中的多重积分与非线性椭圆系统》。《数学研究年刊》第105卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1983年。vii +297 页。[9] Gilbarg, David；Trudinger, Neil S.，《二阶椭圆偏微分方程》。1998年版重印本。《数学经典》。施普林格出版社，柏林，2001年。xiv+517 页。[10] Guevara, Cristi；Phuc, Nguyen Cong，《三维纳维–斯托克斯系统的局部能量界与 ϵ–正则性判据》。（英文摘要）《变分法与偏微分方程》56（2017），第3期，论文编号68，16页。[11] Gustafson, Stephen；Kang, Kyungkeun；Tsai, Tai-Peng，《适当弱解的内部正则性判据：纳维–斯托克斯方程》。《数学物理通讯》273（2007），第1期，161–176。[12] He, Cheng；Wang, Yanqing；Zhou, Daoguo，《三维纳维–斯托克斯方程适当弱解在单尺度下的新 ε–正则性判据》。《非线性科学杂志》29（2019），第6期，2681–2698。.[13] Hopf Eberhard，《关于流体动力学基本方程的初值问题》。（德文）《数学通讯》4（1951），213–231。[14] Jiu, Quansen；Wang, Yanqing；Zhou, Daoguo，《关于纳维–斯托克斯方程适当弱解的Wolf正则性判据》。《数学与流体力学杂志》21（2019），第2期，论文编号22，16页。[15] Kwon, Hyunju，《压力在纳维–斯托克斯方程正则性理论中的作用》。《微分方程杂志》357（2023），1–31。[16] Ladyˇzenskaja, O. A.，《纳维–斯托克斯方程广义解的唯一性与光滑性》。（俄文）《列宁格勒数学研究所斯捷克洛夫分所科学论文集》（LOMI）5，1967，169–185。[17] O. A. Ladyzhenskaya and G. A. Seregin，《三维纳维–斯托克斯方程适当弱解的部分正则性》，《数学与流体力学杂志》1（1999），356–387。[18] Leray, Jean，《充满整个空间的黏性流体的运动》。（法文）《数学学报》63（1934），第1期，193–248。[19] Prodi, Giovanni，《纳维–斯托克斯方程唯一性定理》。（意大利文）《纯粹与应用数学年刊》（第4辑）48（1959），173–182。[20] Scheffer, Vladimir，《纳维–斯托克斯方程解的部分正则性》。《太平洋数学杂志》66（1976），第2期，535–552。[21]Scheffer, Vladimir，《豪斯多夫测度与纳维–斯托克斯方程》。《数学物理通讯》55（1977），第2期，97–112。[22] G. A. Seregin，《临界莫雷空间中纳维–斯托克斯方程适当解的估计》，《数学科学杂志》143（2007），2961–2968。[23] Serrin, James，《纳维–斯托克斯方程弱解的内部正则性》。《理性力学与分析档案》9（1962），187–195。[24] Struwe, Michael，《纳维–斯托克斯方程部分正则性结果》。《纯粹与应用数学通讯》41（1988），第4期，437–458。[25] Tian, Gang；Xin, Zhouping，《纳维–斯托克斯方程的梯度估计》。《分析与几何通讯》7（1999），第2期，221–257。[26] A. Vasseur，《纳维–斯托克斯方程解部分正则性的新证明》，《非线性微分方程及其应用》14（2007），753–785。[27] Wang, Wendong；Zhang, Zhifei，《纳维–斯托克斯方程的内部正则性判据与奇点数》。《数学分析杂志》123（2014），139–170。[28] Wang, Yanqing；Wu, Gang；Zhou, Daoguo，《纳维–斯托克斯方程适当弱解的无压力项单尺度正则性判据》。《微分方程杂志》267（2019），第8期，4673–4704。[29] Wolf, J¨org，《纳维–斯托克斯方程适当弱解部分正则性的新判据》。《数学流体力学进展》，613–630，施普林格，柏林，2010年。[30] Wolf, J¨org，《广义纳维–斯托克斯方程适当弱解的局部正则性》。《费拉拉大学年刊：第七辑数学科学》61（2015），第1期，149–171。

无压力 Navier–Stokes 方程正则性判据 21School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian, 116024, PRChina电子邮箱: leeshy@mail.dlut.edu.cnSchool of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian, 116024, PRChina电子邮箱：wendong@dlut.edu.cnSchool of Mathematics, Hangzhou Normal University, Hangzhou,311121, PR China电子邮箱：daoguozhou@qq.com