arXiv:2305.00701v1 [nlin.SI] 1 May 2023

由非局部常数得到的非线性微分方程首次积分

Mattia Scomparin

mattia.scompa@gmail.com

Abstract. 本文提出了一种求解雅可比型形式非线性微分方程第一积分的新方法。我们方法的基本思想是利用单参数扰动运动，找到沿解保持不变的恰当非局部常数。借助这一非局部框架，我们推导出一组定理，并将其用于寻找若干重要情形的第一积分；此外，还求得了一个解。应用还包括 Painlev´e-Gambier 分类中的一些方程。

1. 引言

许多现象可用二阶非线性常微分方程（ODE）进行数学描述。一般而言，非线性常微分方程代表行为复杂的模型，其中一些源自欧拉-拉格朗日方程

$$\big[\partial_{\dot{x}} L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\big]^{\cdot} - \partial_x L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = 0\,, \tag{1}$$

对于适当的拉格朗日函数 $L(t, x, \dot{x})$。在我们的记号中，∂ 表示偏导数，例如 $\partial_{\dot{x}} = \partial/\partial\dot{x}$；而上方的点表示关于 t 的全导数。

文献中有许多方法可用于求解方程 (1) 的精确解；其中，求得首次积分便可通过求积的形式获得解 [17]。根据定义，第一积分是一个光滑的点函数 $\mathcal{I}(t, x, \dot{x})$，对所有 t，它在方程 (1) 的解上始终保持为常数，即 $\mathcal{I}(t, x, \dot{x}) = 0$ 沿解保持不变。对于线性常微分方程，已有多种成熟的方法可用于求第一积分。然而，对于非线性情形则不能如此，通常其直接求解仍是一个开放问题。在这方面，著名的 Noether 定理确立了拉格朗日函数的不变性性质与首次积分之间的联系 [12]。不过，在许多情况下，找到非平凡的对称性并非易事。

在适当情况下，通过检查所考虑的拉格朗日量，可以找到一些特殊情形：此时，称为非局部常数的特殊函数无需借助 Noether 对称性，便能构成真正的第一积分。具体而言，非局部常数是一个在方程 (1) 下守恒的函数，其值不仅取决于状态 $(t, x(t)\ \dot{x}(t))$，还取决于运动自 t_0 开始以来的整个历史。在参考文献 [6] 中，Gorni 和 Zampieri 提出了一种理论，利用单参数扰动运动的概念，为二阶常微分方程拉格朗日量生成非局部常数：

THEOREM 1.1. 设 $t \to x(t)$ 是欧拉-拉格朗日方程 (1) 的一个解，并设 $x_\varepsilon(t)$，$\varepsilon \in \mathbb{R}$ 是一族满足 $x_0(t) = x(t)$ 的光滑扰动运动。则下列函数为常数：

$$I = \partial_{\dot{x}} L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) \cdot \partial_\varepsilon x_\varepsilon(t)\big|_{\varepsilon=0} - \int_{t_0}^{t} \partial_\varepsilon L\big(s, x_\varepsilon(s), \dot{x}_\varepsilon(s)\big)\big|_{\varepsilon=0}\, ds\,. \tag{2}$$

Gorni 和 Zampieri 在参考文献 [6, 5, 7] 中应用这一结果研究了一些非线性力学系统，包括：(i) 次数为 $k = -2$的齐次势，(ii) 具有黏性流体阻力的力学系统，(iii) 具有液压（平方）流体阻力的力学系统，(iv) 激光动力学中的保守与耗散麦克斯韦-布洛赫方程，以及 (v) 庞加莱′半平面的测地线。此外，作者还将定理 1.1 及相关应用推广到高阶理论 [15, 4] 和相对论标量场理论 [16] 的框架中。

研究二阶非线性常微分方程的一种可行参数化形式是所谓的雅可比型形式（或雅可比方程）[10, 13, 8]。它是关于 $\dot{x}$ 的二次多项式，形式如下

$$\ddot{x} + \tfrac{1}{2}\partial_x \varphi(t,x)\, \dot{x}^2 + \partial_t \varphi(t,x)\, \dot{x} + B(t,x) = 0\,, \tag{3}$$

其中，两个自由函数 $\varphi(t,x)$ 和 $B(t,x)$ 关于 t 和 x均为解析函数。有趣的是，通过适当地选取 $\varphi(t,x)$ 和 $B(t,x)$，可以得到种类繁多的非线性常微分方程。其中，我们回顾 Painlev´e-Gambier 分类中的一些二阶方程（例如参见参考文献 [14, 3, 2]）。

近年来，Painlev´e-Gambier 方程正受到越来越多的关注，因为一些与其解（即 Painlev´ 超越函数）相关的问题已经在讨论之中 [1, 11]。特别是，众所周知，这些方程唯一的可动奇点是极点。

在参考文献 [8, 9] 中，Guha 等人研究了这类方程的一个子集，指出可以利用广义 Sundman 变换求得某些新的首次积分和特定解。为此，他们从 (3) 出发，针对每个 Painlev´e-Gambier 方程，推导出一些形如 $p_1(t, \dot{x}, x)\, e^{\int_t p_2 (\tau,\ x(\tau))^{d\tau}}$的守恒函数。显然，这类函数

由于存在一个指数因子，其自变量是 $p_2(t,x)$ 的积分，因此它们“看起来”是非局部的。

因此，自然可以推测，定理 1.1 与方程 (3) 之间还存在尚未探明的关联。这种关联的发现是本文的主要成果。值得注意的是，得益于非局部常数（如 (2)）背后的基于拉格朗日量的方法，我们的分析得以将 Guha 等人的结果恢复并推广为统一的公式，而这些公式的优点是适用于整个参数化 (3)。

如前所述，定理 1.1 仅适用于欧拉-拉格朗日方程，因此，要继续研究，我们需要为方程 (3) 找到合适的拉格朗日量。Nucci 和 Tamizhmani 在文献 [13]中得出的一个结果对此有所帮助。在该文中，他们介绍了 Jacobi 设计的一种方法，用于推导许多二阶常微分方程的拉格朗日量。在给出的示例中，他们证明方程 (3) 可以作为以下拉格朗日量对应的欧拉-拉格朗日方程

$$L(t,x,\dot{x}) \equiv \tfrac{1}{2}e^{\varphi(t,x)}\dot{x}^2 + \delta_1(t,x)\dot{x} + \delta_2(t,x)\,, \tag{4}$$

其中，函数 δ_1 和 δ_2 满足条件 $\partial_t\delta_1 - \partial_x\delta_2 = e^{\varphi}B$。表达式 (4) 补全了应用定理 1.1 并开展分析所需的信息。

本文的结构安排如下。出于教学上的考虑，第 2 节讨论自治 Jacobi 方程 (3) 的最简单情形，即 $\partial_t\varphi = \partial_t B = 0$。我们通过定理 1.1 证明真第一积分 (17) 的存在，并在第 2.1 小节中用它重新得到参考文献 [8, 9]中给出的若干 Painlev´e-Gambier 常数和解。在第 3.2 节，我们通过区分两种情形，将自治情形推广到完整的 Jacobi 方程 (3)：(i) $\partial_t\varphi = 0$, $\partial_t B \neq 0$ 和 (ii) $\partial_t\varphi \neq 0$, $\partial_t B \neq 0$。在这里，定理 3.1（第 3.1 小节）和定理 3.5（第 3.2 小节）导出了非局部常数，其被积函数仅依赖于 t 和 x （而不依赖于 $\dot{x}$）。在这两种情形下，我们最后都研究了这些定理的有效势，从而为一些非自治 Painlev´e-Gambier 方程 [8, 9] 及更一般的方程求得常数和解。

本研究的主要结果表明，基于拉格朗日量的非局部常数（如（2））在研究非线性常微分方程（如（3））时具有有趣的应用。我们认为，原则上，只需付出少量额外努力，我们的方法就能进一步推广到许多其他情形。

2. 自治 Jacobi 方程

在本节的预备部分中，我们将应用定理 1.1，为自治 Jacobi 方程求得非局部常数及相关的首次积分。

$$\ddot{x} + \tfrac{1}{2}\varphi'\dot{x}^2 + B = 0\,, \tag{5}$$

其中，$\varphi = \varphi(x)$ 和 $B = B(x)$ 不显式依赖时间变量t。这里，撇号表示关于 x 的全导数。

如引言中所述，一般的 Jacobi 型形式 (3) 可由拉格朗日量 (4) 的欧拉-拉格朗日方程 (1) 推导得到。因此，(5) 的自治拉格朗日量可表示为

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2} e^{\varphi} \dot{x}^2 + \delta_2 \,, \tag{6}$$

对于某个 $\delta_2 = \delta_2(x)$，使得

$$\delta_2' = -e^{\varphi} B \,. \tag{7}$$

因此，将非局部常数 (2) 用 (6) 表示，我们得到

$$I = e^{\varphi} \dot{x} \cdot \partial_\varepsilon x_\varepsilon \big|_{\varepsilon=0} - \int_{t_0}^{t} \Big\{ \big(\tfrac{1}{2} \varphi' e^{\varphi} \dot{x}^2 + \delta_2' \big) \cdot \partial_\varepsilon x_\varepsilon \big|_{\varepsilon=0} + e^{\varphi} \dot{x} \cdot \partial_\varepsilon \dot{x}_\varepsilon \big|_{\varepsilon=0} \Big\} \, ds \,, \tag{8}$$

其中，扰动族 x_ε 尚未纳入。由于假设 x_ε 是一个光滑函数，我们可以方便地将 $\partial_\varepsilon \dot{x}_\varepsilon^{\pm}|_{\varepsilon=0} = (\partial_\varepsilon x_\varepsilon^{\pm}|_{\varepsilon=0})^{\cdot}$ 重写为。

在相关文献中，关于自治 Painlevé-Gambier 方程的一些结果给出了非局部常数，这是由于指数因子 [8] 的自变量中含有积分。受此启发，我们很自然地考虑将 x-平移参数化作为扰动族

$$x_\varepsilon^{\pm} = x + \varepsilon a e^{\pm \int_t b d\tau} \,, \tag{9}$$

其中 $a = a(x)$ 和 $b = b(x)$ 是自由函数。$\pm$ 形式体系表明，我们同时考虑指数函数自变量中带正号和负号的两族函数。结合函数族 (9) 和约束条件 (7)，非局部常数 (8) 可简化为

$$I_\pm = a \dot{x} e^{\varphi} e^{\pm \int_t b d\tau} - \int_{t_0}^{t} \Big\{ \big(\tfrac{1}{2} a \varphi' + a' \big) \, e^{\varphi} \dot{x}^2 \pm a b e^{\varphi} \dot{x} - a B e^{\varphi} \Big\} \, e^{\pm \int_s b d\tau} ds \,. \tag{10}$$

从形式上看，表达式 (10) 包含一个我们希望消去的二重积分。此外，我们还希望避免被积函数对 $\dot{x}$ 的依赖。一种可行的方法是：(i) 通过施加 $\frac{1}{2} a \varphi' + a' = 0$，消去与 $\dot{x}^2$ 成正比的项，从而得到

$$a = e^{-\varphi/2} \,, \tag{11}$$

以及 (ii) 将关于 ds 的被积函数改写为全导数。

为证明要求（ii），我们假设 $B \equiv bB$ 对某个 $B = B(x)$成立。根据上述定义，表达式（10）可化简为

$$I_\pm = a \dot{x} e^{\varphi} e^{\pm \int_t b d\tau} - \int_{t_0}^{t} \Big\{ (\pm a b \dot{x} e^{\varphi}) \, e^{\pm \int_s b d\tau} + (\mp a \bar{B} e^{\varphi}) \big(e^{\pm \int_s b d\tau} \big)^{\cdot} \Big\} \, ds \,. \tag{12}$$

¯因此，将 $\pm ab\dot{x}e^{\varphi} = (\mp aBe^{\varphi})^{\cdot}$ 作为约束条件后，表达式（12）的被积函数便如所需成为一个全导数

$$I_{\pm} = a\dot{x}e^{\varphi}e^{\pm\int_t bd\tau} \pm \int_{t_0}^{t} \left(a\bar{B}e^{\varphi}e^{\pm\int_s bd\tau}\right)^{\cdot} ds\,. \tag{13}$$

不难验证，上述约束条件可以改写为

$$b = -\tfrac{1}{2}\varphi'\bar{B} - \bar{B}'\,. \tag{14}$$

根据 (13)，我们可以计算表达式第二项中的积分，结果相差一个加法积分常数，我们假定该常数为零。然后，可以利用 (11) 和 (14) 进一步化简，得到

$$I_{\pm} = (\dot{x} \pm \bar{B})\, e^{\varphi/2}e^{\mp\int_t(\varphi'\bar{B}/2+\bar{B}')d\tau}\,. \tag{15}$$

注意，表达式 (15) 是自治 Jacobi 方程 (5) 的一个非局部常数，但仍依赖于 B。根据构造，方程 (14) 将 $\bar{B}$ 约束为 b 和 φ 的函数。因此，将方程 (14) 乘以 $\bar{B}$ 并定义 $y \equiv \bar{B}^2$，可得 $y' + \varphi' y + 2B = 0$。这是一个一阶线性常微分方程，其解为

$$\bar{B} = \sqrt{-2e^{-\varphi}\textstyle\int_x e^{\varphi}B\,dx} = \sqrt{2\delta_2 e^{-\varphi}}\,. \tag{16}$$

THEOREM 2.1. 设 $e^{\varphi}B = -\delta_2'$，其中 δ_2。那么，$\mathcal{I}$ 是自治 Jacobi 方程 $\ddot{x} + \frac{1}{2}\varphi'\dot{x}^2 + B = 0$ 的一个第一积分，其中

$$\mathcal{I} = \tfrac{1}{2}\dot{x}^2e^{\varphi} - \delta_2\,. \tag{17}$$

证明。使用表达式 (15) 计算 $\mathcal{I} \equiv \frac{1}{2}I_+I_- = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \bar{B}^2)\, e^{\varphi}$。然后，将表达式 (16) 代入 $\mathcal{I}$。 □

2.1. 应用：自治 Painlev´e-Gambier 方程

Painlev´e-Gambier 分类中有若干方程属于自主参数化形式 (5)（参见例如参考文献 [8, 2]）。

EXAMPLE 2.2: 正如我们将在下文详细展示的，上一节中找到的常数有助于研究一些 Painlev´e-Gambier 方程。Painlev´e-Gambier 方程XVIII、XXI和XXII 可参数化为

$$\ddot{x} - \tfrac{1}{2}\alpha x^{-1}\dot{x}^2 + \beta x^n = 0\,, \tag{18}$$

具有 $\{\alpha, \beta, n\} \equiv \chi$ 组常参数

$$\chi_{\text{XVIII}} = \{1, -4, 2\} \quad \chi_{\text{XXI}} = \{\tfrac{3}{2}, -3, 2\} \quad \chi_{\text{XXII}} = \{\tfrac{3}{2}, 1, 0\}. \tag{19}$$

首先，比较方程 (5) 和方程 (18) 可得$\varphi = -\alpha \ln x$和 $B = \beta x^n$。然后，根据定义 (16)，我们推得$\bar{B} = \sqrt{\beta\gamma}\, x^{(n+1)/2}$，其中 $\gamma = 2/(\alpha - n - 1)$。

因此，经过一些简单的计算，我们的非局部常数 (15) 变为

$$I_\pm = \left\{ \dot{x} x^{-\alpha/2} \pm \sqrt{\beta\gamma}\, x^{-1/\gamma} \right\} e^{\mp\sqrt{\beta/\gamma}\int_t x^{(n-1)/2} d\tau}\,, \tag{20}$$

相应地，第一积分 (17) 可得

$$\mathcal{I} = \dot{x}^2 x^{-\alpha} - \beta\gamma x^{-2/\gamma}\,. \tag{21}$$

我们指出，若将范围限制在 $\mathcal{I} = 0$ 超曲面上，方程 (21) 可直接求解。具体而言，积分后可得

$$x(t) = A\,(t + c_1)^\sigma\,, \tag{22}$$

其中 $A \equiv (\sqrt{\beta\gamma}/\sigma)^\sigma$ 以及 $c_1 \equiv c/\sqrt{\beta\gamma}$, $c \in \mathbb{R}$，且 $\sigma \equiv (1/\gamma - \alpha/2 + 1)^{-1}$。

与系数 (19) 结合后，我们的结果 (20)、(21) 和 (22) 与参考文献 [8, 9]中利用广义 Sundman 变换逐一提出的某些常数和解完全一致。我们的方法的优势在于找到了一个适用于所有这些情形的统一公式。

3. 非自治 Jacobi 方程

我们在上一节讨论的过程展示了如何在雅可比方程的一个简化情形下应用定理 1.1 所需的关键要素。明确了这一处理方法后，在本文接下来的部分中，我们将转向研究一大类非自治雅可比方程。

$$\ddot{x} + \tfrac{1}{2}\partial_x\varphi\, \dot{x}^2 + \partial_t\varphi\, \dot{x} + B = 0\,, \tag{23}$$

其参数 $\varphi = \varphi(t,x)$ 和 $B = B(t,x)$ 显式依赖于时间变量 t。正如引言中所预期的，这类方程可以作为拉格朗日量的欧拉-拉格朗日方程 (1) 推导出来

$$L(t,x,\dot{x}) \equiv \tfrac{1}{2} e^{\varphi}\dot{x}^2 + \delta_1\dot{x} + \delta_2\,, \tag{24}$$

其中 $\delta_1 = \delta_1(t,x)$ 和 $\delta_2 = \delta_2(t,x)$ 满足

$$\partial_t\delta_1 - \partial_x\delta_2 = e^{\varphi} B\,. \tag{25}$$

考虑到上述讨论，我们现在开始计算拉格朗日量 (24) 上的表达式 (2)。展开 L 关于 x 和 $\dot{x}$ 的导数后，我们得到一个如下形式的非局部常数。

$$I = \left(e^{\varphi}\dot{x} + \delta_1\right) \cdot \partial_\varepsilon x_\varepsilon\big|_{\varepsilon=0} - \int_{t_0}^{t} \xi\, ds\,, \tag{26}$$

其中，被积函数 $\xi = \xi(s, x(s))$ 是

$$\xi \equiv \left(\tfrac{1}{2}\partial_x\varphi\, e^{\varphi}\dot{x}^2 + \partial_x\delta_1\dot{x} + \partial_x\delta_2\right)\cdot\partial_\varepsilon x_\varepsilon\big|_{\varepsilon=0} + \left(e^{\varphi}\dot{x} + \delta_1\right)\cdot\partial_\varepsilon\dot{x}_\varepsilon\big|_{\varepsilon=0}\,. \tag{27}$$

受自治情形的启发，我们选择 x-平移族

$$x_\varepsilon^{\pm} = x + \varepsilon a e^{\pm\int_t b_\pm d\tau}\,, \tag{28}$$

作为扰动运动，其中 $a = a(t,x)$ 和 $b_\pm = b_\pm(t,x)$ 是自由函数。

利用表达式 (28)，以及性质 $\partial_\varepsilon\dot{x}_\varepsilon^{\pm}|_{\varepsilon=0} = (\partial_\varepsilon x_\varepsilon^{\pm}|_{\varepsilon=0})^{\cdot}$ 并结合条件 (25)，可得被积函数 (27) 可表示为

$$\begin{aligned}\xi_\pm = \left(a\delta_1 e^{\pm\int_s b_\pm d\tau}\right)^{\cdot} + (\tfrac{1}{2}a\partial_x\varphi + \partial_x a)e^{\varphi}\dot{x}^2 e^{\pm\int_s b_\pm d\tau} \\ + \left\{\left[(\partial_t a \pm a b_\pm)\, e^{\varphi}\dot{x}\right]e^{\pm\int_s b_\pm d\tau} - (a e^{\varphi} B)\, e^{\pm\int_s b_\pm d\tau}\right\}.\end{aligned} \tag{29}$$

与自治情形相比，上述表达式看起来更难积分，因为它现在 (i) 显式依赖于时间，且 (ii) 出现了新的附加项。然而，注意到只要适当选择 a 和 $b_\pm$，各项便会归并为全导数，问题就会简化。

为此，表达式 (29) 的结构首先提示我们通过施加 $\frac{1}{2}a\partial_x\varphi + \partial_x a = 0$，忽略与 $\dot{x}^2$ 成正比的项，从而得到

$$a = e^{-\varphi/2}\,. \tag{30}$$

继续推导时，与其直接处理 $b_\pm$，不如引入一个新变量 $B_\pm = B_\pm(t,x)$，使得 $B \equiv b_\pm B_\pm$。因此，表达式（29）变为

$$\xi_\pm = \left(a\delta_1 e^{\pm\int_s b_\pm d\tau}\right)^{\cdot} + \left\{\left[(\partial_t a \pm a b_\pm)\, e^{\varphi}\dot{x}\right]e^{\pm\int_s b_\pm d\tau} + (\mp a e^{\varphi}\bar{B}_\pm)\left(e^{\pm\int_s b_\pm d\tau}\right)^{\cdot}\right\}. \tag{31}$$

然后，若进一步要求 $b_\pm$ 满足

$$(\partial_t a \pm a b_\pm)\, e^{\varphi}\dot{x} = (\mp a e^{\varphi}\bar{B}_\pm)^{\cdot}\,, \tag{32}$$

显然可以验证，正如先前所预期的那样，$\xi_\pm$ 变成了一个全导数

$$\xi_\pm = \left[a\delta_1 e^{\pm\int_s b_\pm d\tau} \mp (a e^{\varphi}\bar{B}_\pm)e^{\pm\int_s b_\pm d\tau}\right]^{\cdot}\,. \tag{33}$$

根据（33），我们可以求出表达式（26）第二项中的积分，并将一个假设为零的积分常数加项略去。更具体地说，我们得到

$$I_\pm = (\dot{x} \pm \bar{B}_\pm)\, a e^{\varphi} e^{\pm\int_t b_\pm d\tau}\,, \tag{34}$$

该结果取决于 $b_\pm$ 和 $B_\pm$，其显式表达式目前尚未知。为了揭示它们的形式，让我们考虑条件（32），并将其展开如下

$$\mp(\partial_t a \pm a b_\pm)e^\varphi \dot{x} = \partial_t(a e^\varphi \bar{B}_\pm) + \partial_x(a e^\varphi \bar{B}_\pm)\dot{x}\,. \tag{35}$$

由于方程（35）必须对所有解均成立，因此可以按照 $\dot{x}$ 进行分解。通过这种方式，该方程可以很容易地改写如下。

$$\begin{cases} \partial_t(a e^\varphi \bar{B}_\pm) = 0\,, \\ \partial_x(a e^\varphi \bar{B}_\pm) = \mp(\partial_t a \pm a b_\pm)e^\varphi\,. \end{cases} \tag{36}$$

不难验证，(36) 的第一个方程由以下函数满足。

$$k_\pm \equiv a e^\varphi \bar{B}_\pm\,, \tag{37}$$

其中，$k_\pm = k_\pm(x)$ 是一个与时间无关的函数。另一方面，利用混合偏导数相等关系 $\partial_x\partial_t k_\pm = \partial_t\partial_x k_\pm$，方程 (36) 的第二个方程给出了如下关系

$$\partial_t\big[(\partial_t a \pm a b_\pm)e^\varphi\big] = 0\,, \tag{38}$$

可展开为关于 $b_\pm$ 的一阶（线性）微分方程，如下所示

$$a\,\partial_t b_\pm + (\partial_t\varphi\, a + \partial_t a)\, b_\pm \pm (\partial_t\varphi\partial_t a + \partial_t\partial_t a) = 0\,. \tag{39}$$

采用标准方法求解方程 (39)，并施加条件 (36) 以确定积分常数。因此，经过若干步计算，我们最终得到

$$b_\pm = \mp\,\partial_t a - e^{-\varphi}a^{-1}\partial_x k_\pm\,. \tag{40}$$

由于 $B \equiv b_\pm B_\pm$，我们将表达式 (40) 乘以 B，并利用定义 (37) 代入 $k_\pm$。因此，表达式可简化为

$$\bar{B}_\pm\partial_x\bar{B}_\pm + \partial_x(\ln a + \varphi)\bar{B}_\pm^2 \pm (\partial_t \ln a)\bar{B}_\pm = -B\,, \tag{41}$$

最终得到仅用原函数 B 和 φ 表示的约束条件 $B_\pm$。根据定义，一旦求出解 $B_\pm$，就会自动确定 $b_\pm(B,\varphi) = B/B_\pm(B,\varphi)$。

与自治情形不同，方程 (41) 是关于 $B_\pm$ 的非线性微分方程。因此，不失一般性，我们将研究分为 $\partial_t\varphi \sim \partial_t \ln a$ 等于零和不等于零两种情形。

3.1. ∂ tφ = 0 的情形

如果 $\partial_t\varphi = 0$，方程 (41) 变为

$$\bar{B}_\pm \partial_x \bar{B}_\pm + \partial_x(\ln a + \varphi)\bar{B}_\pm^2 = -B\,. \tag{42}$$

与自治情形一样，将定义 (30) 代入方程 (42)，并假设 $y_\pm \equiv \bar{B}_\pm^2$，我们得到

$$\partial_x y_\pm + (\partial_x\varphi) y_\pm + 2B = 0\,. \tag{43}$$

这是一个一阶线性常微分方程，其解为

$$\bar{B} = \sqrt{-2e^{-\varphi}\int_{x_0}^{x}(e^{\varphi}B)|_t\,dx} = \sqrt{2e^{-\varphi}\int_{x_0}^{x}(\partial_x\delta_2 - \partial_t\delta_1)|_t\,dx}\,. \tag{44}$$

另一方面，由于 $\partial_t\varphi = 0$，方程 (40) 可替换为

$$b_\pm = e^{-\varphi}a^{-1}\partial_x k_\pm\,. \tag{45}$$

考虑到定义 (37) 和表达式 (44)，最终得到

$$b \equiv b_\pm = -\tfrac{1}{2}\partial_x\varphi - \partial_x\bar{B}\,. \tag{46}$$

请注意，在这种情况下，扰动族 $x_\varepsilon^\pm$ 对于 $b_\pm$ 返回相同的值。因此，我们已经获得了计算非局部常数 (34) 所需的所有关键要素，更具体地说，我们得到

$$.I_\pm = (\dot{x} \pm \bar{B})\, e^{\varphi/2} e^{\mp\int_t(\partial_x\varphi/2 + \partial_x\bar{B})d\tau}\,. \tag{47}$$

¯其中 B 由（44）给出。

THEOREM 3.1. 设 $\lambda = -\int e^{\varphi}B\,dx$ 满足 $\partial_t\varphi = 0$。那么， I 在雅可比方程 $\ddot{x} + \frac{1}{2}\partial_x\varphi\,\dot{x}^2 + B = 0$ 的解上保持常数，并且

$$I \equiv \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 e^{\varphi} + \lambda - \int_{t_0}^{t}\partial_t\lambda\,dt\,. \tag{48}$$

证明。使用表达式（47）计算 $I \equiv \frac{1}{2}I_+I_- = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \bar{B}^2)\ e^{\varphi}$。定义$\delta_1 \equiv \partial_x\eta$ 并考虑表达式（44），该表达式可改写为

$$\begin{aligned}\bar{B}^2 &= 2e^{-\varphi}\textstyle\int_{x_0}^{x}\partial_x\big(\delta_2 - \partial_t\eta\big)|_t\,dx\,,\\ &= 2e^{-\varphi}\big[\delta_2 - \partial_t\eta - \textstyle\int_{t_0}^{t}\partial_t\big(\delta_2 - \partial_t\eta\big)\,dt\big]\,,\\ &= 2e^{-\varphi}\big(\lambda - \textstyle\int_{t_0}^{t}\partial_t\lambda\,dt\big)\,.\end{aligned} \tag{49}$$

其中我们定义了 $\lambda \equiv \delta_2 - \partial_t\eta$。最后，将表达式 (49) 代入 I。由 (25) 可得 $e^{\varphi}B = -\partial_x\lambda$。 □

注意，正如预期的那样，(48) 的被积函数仅依赖于 x 和 t。此外，正如我们将在接下来的注 3.2 中看到的，在自治情形下求值时，表达式 (48) 恰好重现了我们先前的结果 (17)。

REMARK 3.2: 有人可能会想知道，在什么条件下，表达式 (48) 才能成为真正的第一积分，即关于 t的局部函数。为此，只需要求，对于某个 $\psi = \psi(t)$，有 $\partial_t \lambda = \psi$。对该条件关于 x 求导，得到 $0 = \partial_x \partial_t \lambda$。交换偏导数，并利用定理 3.1 的假设 $\partial_x \lambda = -e^{\varphi} B$，最终可写为 $0 = \partial_t (e^{\varphi} B) = e^{\varphi} \partial_t B$，由此推出 $\partial_t B = 0$。由于本小节中我们还假设 $\partial_t \varphi = 0$，因此只有转到自治情形，表达式 (48) 才会给出真正的第一积分。

3.1.1. 应用：非自治 Painlev´e-Gambier 方程

Painlev´e-Gambier 分类中有若干方程属于 Jacobi 参数化 (23)（例如参见参考文献 [8, 2]）。

EXAMPLE 3.3: Painlev´e-Gambier 方程 IV 是

$$\ddot{x} - (6x^2 + t) = 0\,. \tag{50}$$

首先，我们通过比较方程 (50) 与定理 3.1，推导出 $\varphi = 0$ 和 $B = -(6x^2 + t)$。由于 $e^{\varphi} B = -(6x^2 + t)$，因此有 $\lambda = -x(2x^2 + t)$。随后，表达式 (48) 给出了非局部常数。

$$I = \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 - 2x^3 - xt + \textstyle\int_{t_0}^{t} x\, dt\,. \tag{51}$$

EXAMPLE 3.4: Painlev´e-Gambier 方程 XX 是

$$\ddot{x} - \tfrac{1}{2} x^{-1} \dot{x}^2 - 4x^2 - 2tx = 0\,. \tag{52}$$

对方程 (52) 与定理 3.1 进行比较可得 $\varphi = -\ln x$ 和 $B = -2x(2x + t)$。由于 $e^{\varphi} B = -2(2x + t)$，我们有 $\lambda = -2x(x + t)$。然后，表达式 (48) 得出

$$I = \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 x^{-1} - 2x(x + t) + 2\textstyle\int_{t_0}^{t} x\, dt\,. \tag{53}$$

3.2. $\partial_t \varphi \neq 0$ 情形

当 $\partial_t \varphi \neq 0$ 时，方程 (41) 的数学结构更为复杂，难以分析。我们首先将方程 (41) 乘以 $e^{2(\ln a + \varphi)}$，并利用定义 (37) 写成

$$\partial_x k_{\pm}^2 \pm 2\partial_t a e^{\varphi} k_{\pm} = -2B a^2 e^{2\varphi}\,. \tag{54}$$

我们对方程 (54) 求 ∂_t 阶导数，并交换 $\partial_t\partial_x k_\pm^2 = \partial_x\partial_t k_\pm^2$。因此，上述方程可写为

$$\partial_x\partial_t k_\pm^2 \pm 2\partial_t(\partial_t a e^\varphi)k_\pm \pm 2\partial_t a e^\varphi(\partial_t k_\pm) = -2\partial_t(Ba^2e^{2\varphi})\,. \tag{55}$$

此外，由于 $\partial_t k_\pm^2 = 2k_\pm\partial_t k_\pm = 0$ （请记住，表达式 (36) 确定了 $\partial_t k_\pm = 0$），根据方程 (55) 可知

$$\partial_t(\partial_t a\, e^\varphi)k_\pm = \mp\partial_t(Ba^2e^{2\varphi})\,, \tag{56}$$

该式可关于 $k_\mp$ 求解。更准确地说，我们得到

$$k_\pm = \mp\frac{\partial_t(Ba^2e^{2\varphi})}{\partial_t(\partial_t a\, e^\varphi)}\,. \tag{57}$$

它必须满足条件组 (36)。

上述结果的一个直接推论是对 B 的求值。事实上，将 (57) 和 (30) 代入 (37) 的右侧，我们得到

$$\bar B_\pm = \pm 4\frac{\partial_t B + B\partial_t\varphi}{2\partial_t\partial_t\varphi + (\partial_t\varphi)^2}\,. \tag{58}$$

另一方面，我们可以利用表达式 (58) 计算 $b_\pm = B/B_\pm$。因此，

$$b_\pm = \pm\frac{1}{4}\frac{2\partial_t\partial_t\varphi + (\partial_t\varphi)^2}{\partial_t\ln B + \partial_t\varphi}\,. \tag{59}$$

THEOREM 3.5. 令 $\partial_t\varphi \neq 0$ 和 $Be^\varphi = \rho_1 e^{\varphi/2} + \rho_2$ 满足某个 $\rho_{1,\ 2} = \rho_{1,\ 2}(x)$，使得

$$\rho_1' = \partial_t(\ln\partial_t\varphi)\big(e^{\varphi/2} + \rho_2/\rho_1\big)\,. \tag{60}$$

那么， I 沿雅可比方程 $\ddot x + \frac{1}{2}\partial_x\varphi\,\dot x^2 + \partial_t\varphi\,\dot x + B = 0$ 的解保持为常数，其中

$$I = \left(\dot x e^{\varphi/2} + \frac{2\rho_1}{\partial_t(2\ln\partial_t\varphi + \varphi)}\right)\exp\left\{\frac{1}{2}\int_t \partial_t\big(2\ln\partial_t\varphi + \varphi\big)\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}e^{-\varphi/2}\right)d\tau\right\}. \tag{61}$$

证明。我们先将 (30) 代入 (57)，并施加条件 $\partial_t k_\pm = 0$ （见 (36) 的第一个条件）。因此得到 $\partial_t(Be^\varphi) = \rho_1\partial_t e^{\varphi/2}$，其解为 $B = \rho_1 e^{-\varphi/2} + \rho_2 e^{-\varphi}$ （这是我们的第一个假设）。我们将 B 代入 (58) 和 (59)，以求得 $B_\pm$ 和 $b_\pm$；再结合定义 (34)，得到最终结果 (61)。注意， $I_+ = I_-$，因此 $I = I_\pm$。由于 $k_\pm = \pm\rho_1$，我们的第二个假设 (60) 由 $\partial_x k_\pm = 0$ （(36) 的第二个条件）得到。 □

注意，在这种情况下，(61) 的被积函数也只依赖于 x 和 t.REMARK 3.6: 人们可能会想知道，在什么条件下，表达式 (61) 才能成为真正的第一积分，即 t的局部函数。为此，由于被积函数只依赖于 t 和 x，只需要求，对于某个 $\psi = \psi(t)$，$\partial_t(2\ln\partial_t\varphi + \varphi)\big(1 + \rho_2/\rho_1 e^{-\varphi/2}\big) = \dot\psi(t)$。

3.2.1. 应用：非自治 Jacobi 方程

EXAMPLE 3.7: 考虑以下雅可比型方程

$$\ddot{x} + \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + \dot{x} + \varrho\, e^{-(t+x)/2} = 0\,, \tag{62}$$

其中 ϱ 是一个常参数。由于 $B = \varrho\, e^{-(t+x)/2}$ 和 $\partial_x\varphi = \partial_t\varphi = 1$，我们有 $\varphi = t + x$。因此，方程 (62) 满足定理 3.5 的假设，其中 $\rho_1 = \varrho$ 和 $\rho_2 = 0$。注意，注记 3.6 对 $\psi = t$ 也成立。因此，表达式 (61) 给出了如下真正的第一积分

$$\mathcal{I} = e^{\,t/2}\big\{\dot{x}e^{(t+x)/2} + 2\varrho\big\}. \tag{63}$$

$\dot{x}$ 关于 $\mathcal{I}$ 线性这一性质，结果证明是寻找方程 (62) 的一个解的宝贵工具。事实上，表达式 (63) 可以改写为 $\mathcal{J}(t,x) = 0$，其中

$$\mathcal{J} = 2\, e^{\,x/2} + \tilde{\mathcal{I}} e^{-t} - 4\varrho\, e^{-t/2}\,. \tag{64}$$

因此，$\mathcal{J}$ 也是一个第一积分。经过一些计算，可以轻松验证表达式 (64) 直接满足方程 (62)，其中

$$x(t) = 2\ln\big\{2\varrho\, e^{-t/2} - \tfrac{1}{2}\,\tilde{\mathcal{I}}\, e^{-t} + \tfrac{1}{2}\tilde{\mathcal{J}}\big\}\,. \tag{65}$$

˜ ˜这里，$\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 参数均为常数。

EXAMPLE 3。8: 当 $\rho_2(x)$ =0时，定理 3.5有一个有趣的应用。在这种条件下，我们定理的假设变为

$$\begin{cases} \rho_1'(x) = \partial_t \ln \partial_t\varphi(t,x)\, e^{\varphi(t,x)/2}, \\ B(t,x)e^{\varphi(t,x)} = \rho_1(x)\, e^{\varphi(t,x)/2}\,. \end{cases} \tag{66}$$

根据上述约束条件，第一个微分方程很容易求解。更确切地说，我们得到

$$\varphi(t,x) = 2\ln\left\{\frac{2\rho_1'(x) + e^{\frac{1}{2}c_1(x)[t+c_2(x)]}}{c_1(x)}\right\}. \tag{67}$$

其中，$c_1(x) \neq 0$ 和 $c_2(x)$为积分函数。

另一方面，利用表达式 (67)，方程 (66) 的第二个方程给出

$$B(t,x) = \frac{c_1(x)\rho_1(x)}{2\rho_1'(x) + e^{\frac{1}{2}c_1(x)[t+c_2(x)]}}\,. \tag{68}$$

由上述公式可知，一旦确定了 $c_1(x)$、$c_2(x)$ 和 $\rho_1(x)$，便可推导出一类雅可比方程 (23)，其特征是具有类似 (61) 的第一积分，其中 $\rho_2(x) = 0$。这是以下命题的结论。

PROPOSITION 3.9. 设 $c_{1,2,3} = c_{1,2,3}(x)$ 是 x 的三个自由函数，并定义 $\vartheta(t,x) \equiv c_1(c_2+t)$。那么， $\mathcal{I}$ 是该方程的一个第一积分

$$\ddot{x} + \frac{4c_1c_3'' - 4c_3'c_1' + e^{\frac{1}{2}\vartheta}\left[c_1'(\vartheta-2) + c_1^2c_2'\right]}{2c_1\left(2c_3' + e^{\frac{1}{2}\vartheta}\right)}\dot{x}^2 + \frac{c_1e^{\frac{1}{2}\vartheta}}{2c_3' + e^{\frac{1}{2}\vartheta}}\dot{x} + \frac{c_1c_3}{2c_3' + e^{\frac{1}{2}\vartheta}} = 0\,, \quad (69)$$

with

$$\mathcal{I} = e^{\frac{1}{2}c_1t}\left[2\left(c_3' + c_3\right) + \dot{x}e^{\frac{1}{2}\vartheta}\right]c_1^{-1}\,. \quad (70)$$

证明。定义 $\vartheta \equiv 2\ln\partial_t\varphi + \varphi$。在上述定义中选取表达式 (67)，可得 $\vartheta = c_1(t+c_2)$。因此，方程 (69) 及其第一积分 (70) 直接由 (23) 和 (61) 得出，其中 φ 和 B具有 (67) 和 (68) 的形式。这里，我们假设 $\rho_2 = 0$ ，并定义了 $c_3 \equiv \rho_1$。 □

设 $\bar{c}_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ 和 $\omega_{1,2} \in \mathbb{R}$ 为一些常参数。有趣的是，若取 $c_1 = \bar{c}_1$、$c_2 = \omega_1\bar{c}_1^{-1}x + \bar{c}_2$ 和 $c_3 = \omega_2\bar{c}_1 + \bar{c}_3e^{-x}$，则可以将表达式 (70) 改写成另一条第一积分的守恒律形式。事实上，对 (70) 关于时间取原函数，我们得到

$$\mathcal{K} = 2\omega_1^{-1}e^{\frac{1}{2}(\omega_1x+\bar{c}_1)} + \tilde{\mathcal{I}}e^{-\bar{c}_1t} - 4\omega_2e^{-\frac{1}{2}\bar{c}_1t}\,, \quad (71)$$

其中 $\mathcal{K}(t,x) = 0$。表达式 (71) 等价于一个具有分离变量的一阶微分方程的柯西问题。容易看出，该方程的通解为

$$x(t) = 2\omega_1^{-1}\ln\left\{\omega_1e^{-\frac{1}{2}\bar{c}_1\bar{c}_2}\left[2\omega_2e^{-\frac{1}{2}\bar{c}_1t} - \tfrac{1}{2}\tilde{\mathcal{I}}e^{-\bar{c}_1t} + \tfrac{1}{2}\tilde{\mathcal{K}}\right]\right\}\,. \quad (72)$$

~ ~在此， $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{K}$ 参数为常数。

方程（69）这一类包含方程（62）这一特例，即例 3.7 中的方程，其中 $c_1 = 1$、$c_2 = x$ 和 $c_3 = \varrho$。这种情形也对应于我们的结果（71）和（72），其中 $\bar{c}_1 = \omega_1 = 1$、$\bar{c}_2 = \bar{c}_3 = 0$ 和 $\omega_2 = \varrho$。

4. 致谢

作者谨向 Gaetano Zampieri 教授致谢，感谢他给予的宝贵讨论。

REFERENCES

[1] PETER ALAN CLARKSON, *Open problems for Painlevé equations*, 《对称性、可积性与几何：方法与应用》15（2019年），1–20。

[2] Giuseppe D'ambrosi and Maria Clara Nucci, *Lagrangians for equations of Painlevé type by means of the Jacobi last multiplier*, 《非线性数学物理学报》16（2021年），61–71。[3] Bertrand Gambier, *Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est a points critiques fixes*, 《数学学报》33（1910年），1–55。[4] Gianluca Gorni, Mattia Scomparin, and Gaetano Zampieri, *Nonlocal constants of motion in Lagrangian Dynamics of any order*, 《应用数学中的偏微分方程》5（2022年），100262。[5] Gianluca Gorni, and Gaetano Zampieri, *Lagrangian dynamics by nonlocalconstants of motion*, 《离散与连续动力系统》13（2020年），2751-2759。[6] Gianluca Gorni and Gaetano Zampieri, *Revisiting Noether's Theorem onconstants of motion*, 《非线性数学物理学报》21（2014年），43–73。

[7] Gianluca Gorni and Gaetano Zampieri *The geodesics for Poincaré's half-plane: a nonstandard derivation* ，，2023《美国数学月刊》（），即将发表。[8] Partha Guha, Barun Khanra, and A. Ghose Choudhury, *On generalizedSundman transformation method, first integrals, symmetries and solutions ofequations of Painlevé-Gambier type*, 《非线性分析：理论、方法与应用》72（2010年），第7期，3247–3257。[9] Partha Guha, Barun Khanra, and A. Ghose Choudhury, P. G. L. Leach *Nonlocal Constants of Motions of Equations of Painlevé-Gambier Type and Generalized Sundman Transformation* ，，**18** 2022《俄罗斯非线性动力学杂志》（），第1期，103–118。[10] Jacobi Carl Gustav Jacob, *Theoria novi multiplicatoris systemati quationum differentialium vulgarium applicandi*, 《纯粹与应用数学杂志》29（1845年），213–279和333–376。[11] Nikolai A. Kudryashov and Dmitry I. Sinelshchikov, *On connections ofthe Lienard equation with some equations of Painlevé-Gambier type*, 《数学分析与应用杂志》449（2017年），1570-1580。[12] Emmy Noether, *Invariante Variationsprobleme*, 《哥廷根皇家科学学会通报》，第235-257页。

[13] Maria Clara Nucci and K. M. Tamizhmani, *Using an old method of Jacobi to derive Lagrangians: a nonlinear dynamical system with variable coefficients*, arXiv: Exactly Solvable and Integrable Systems 125（2008年），255–269。

[14] Paul Painlevé, *Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme*, 《数学学报》25（1902年），1–85。

[15] Mattia Scomparin, *Nonlocal constants of motion and first integrals in higher-order Lagrangian Dynamics*, 的里雅斯特大学数学研究所汇刊：国际数学期刊53（2021年），1–17。[16] Mattia Scomparin, *Conserved currents from nonlocal constants in relativistic scalar field theories* 2023 ，《数学物理报告》（），即将发表。[17] Furta, Stanislav D., *On non-integrability of general systems of differen-*

tial equations, 《应用数学与物理学杂志》ZAMP 47（1996），112–131。