arXiv:2305.00703v1 [math.CA] 1 May 2023

一般测度相关一维极大函数的重排不等式

XUDONG NIE、DI WU 和 PANWANG WANG

Abstract. 我们证明了一个关于与一般测度 μ 相关的非居中 Hardy-Littlewood 极大函数 M_μ 的重排不等式。该不等式类似于 Stein 的结果 $cf^{**}(t) \leq (Mf)^*(t) \leq Cf^{**}(t)$，其中 f^* 是 f的对称递减重排函数，而 $f^{**}(t) = \int_0^t f^*(x)dx$。此外，我们计算了 M_μ 在 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\mu)$上的最佳常数。

1. Introduction

实值可测函数 f 的递减重排，是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的唯一径向单调递减函数 f^*，它上半连续且与 $|f|$等测。通常，等测度重排用于分析和数理物理中的极值问题研究。我们可以将涉及高维空间上函数的极值问题，化为单变量函数的问题。此外，在许多常用函数空间中，f 和 f^* 的范数等价，包括 Lebesgue空间 L^p、Lorentz空间 $L^{p,q}$ 以及 Orlicz空间 L^ϕ，因此重排是一种非常有用的工具。

重排函数最早由 Hardy、Littlewood 和 Pólya 引入。在该书 [9], 的最后一章中，他们提出了两个不等式：Hardy-Littlewood 不等式。

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} f^*(x)g^*(x)dx, \tag{1.1}$$

以及Riesz重排不等式

$$\int_{\mathbb{R}} f * g(x)h(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} f^* * g^*(x)h^*(x)dx, \tag{1.2}$$

其中 $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$。Hardy-Littlewood不等式（1.1）由 Bennett在 [2]推广为 $\mathbb{R}^n$。不等式（1.2）由Sobolev在 [16], 推广为 $\mathbb{R}^n$，该不等式也称为Riesz-Sobolev不等式。在 [3],，Brascamp、Lieb和Luttinger发现了Riesz-Sobolev不等式的一个推广

推广到三个以上正函数的乘积:

$$\int_{(\mathbb{R}^n)^p}\prod_{j=1}^{k}f_j\left(\sum_{m=1}^{p}a_{jm}x_m\right)dx\le\int_{(\mathbb{R}^n)^p}\prod_{j=1}^{k}f_j^*\left(\sum_{m=1}^{p}a_{jm}x_m\right)dx,\tag{1.3}$$

其中 a_{jm} 为正常数，$dx=dx_1\dots dx_p$ 且每个 $x_i\in\mathbb{R}^n$。M. Christ [4] 和 R. E. Pfiefer [14] 进一步推广了 (1.3)。此外，C. Draghici [5] 研究了其他度量空间上的重排不等式。

受 (1.2) 启发，我们研究了极大卷积算子的重排不等式。设 Φ 为非负对称递减函数，且满足 $\|\Phi\|_{L^1}=1$。定义 $M_\Phi f(\cdot)=\sup_{|y-\cdot|\le t}\Phi_t*g(y)$，其中 $\Phi_t(\cdot)=\frac{1}{t^n}\Phi(\frac{\cdot}{t})$。一个自然的问题是，类比 Riesz-Sobolev 不等式，

$$\int_{\mathbb{R}^n}M_\Phi f(x)g(x)dx\le\int_{\mathbb{R}^n}M_\Phi f^*(x)g^*(x)dx\tag{1.4}$$

是否成立。当 $n=1$ 且 $\Phi=\chi_{[-\frac12,\frac12]}$ 时，我们已证明不等式 (1.4) 在 [13]中成立。在这种情况下，函数 $M_\Phi f$ 成为 f的非中心 Hardy-Littlewood极大函数。

本文将研究与一般正博雷尔测度相关的非中心极大算子。设 μ 是一个正博雷尔测度。令 f 为一个 μ-可测的非负函数。相对于测度 μ，函数 f 的非中心 Hardy-Littlewood极大函数定义为

$$M_\mu f(x)=\sup_{x\in B,\mu(B)\neq0}\frac{1}{\mu(B)}\int_B f(y)d\mu(y),$$

其中 B 是欧几里得球。若 μ 是勒贝格测度，我们将 M_μ 简记为 M。当 $n=1$ 时，Grafakos [8] 证明，与测度 μ 相关的非中心极大算子将函数从 L^p 映射到 L^p，其上界为C_p，其中 C_p 是方程解的唯一正值

$$(p-1)x^p-px^{p-1}-1=0.$$

此外，Grafakos [7] 证明，当 μ 为勒贝格测度时，C_p 是尖锐的。本文将计算与一般测度相关的极大算子的最佳弱-L^p 常数。

我们研究的另一个动机是 Stein 给出的极大函数重排不等式。记 $f^{**}(t)=\frac1t\int_0^t f^*(s)ds$。Stein [2] 证明了重排不等式

$$cf^{**}(t)\le(M_\mu f)^*(t)\le Cf^{**}(t)$$

对每个 $t>0$ 都成立，其中 c 和 C 是与 f 和 t 无关的正常数。Pick [15] 将这一结果推广到了分数阶极大算子

$$(M_\gamma)f(x)=\sup_{x\in B}|B|^{\frac{\gamma}{n}-1}\int_B|f(y)|dy,$$

并证明了

$$c \sup_{t\le\tau\le\infty} \tau^{\gamma/n} f^{**}(\tau) \le (M_\gamma f)^*(t) \le C \sup_{t\le\tau\le\infty} \tau^{\gamma/n} f^{**}(\tau)$$

对 $0 < \gamma \le n$ 成立。

我们的主要结果如下。

定理 1.1. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上满足 (2.1) 的正 μ-可测函数。则有

$$(M_\mu f)^*(x) \le M f^*(x) \tag{1.5}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均成立。

作为定理 1.1 的应用，我们给出 M_μ 从 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\mu)$ 到自身的最佳常数。

定理 1.2. 设 C_p 是该方程的唯一正解

$$(p-1)x^p - px^{p-1} - 1 = 0.$$

则有

$$\|M_\mu f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R},d\mu)} \le C_p \|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R},d\mu)}.$$

2. Preliminaries and Lemmas

设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的正博雷尔测度，且 f 是满足以下条件的 μ-可测函数

$$\mu(\{|f| > t\}) < \infty \tag{2.1}$$

对每个 $t > 0$，其中记

$$\{|f| > t\} = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}.$$

我们将 f 的分布函数定义为

$$\lambda_f(t) = \mu(\{|f| > t\}).$$

定义 2.1. 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的正博雷尔测度，且 f 是满足 (2.1) 的 μ-可测函数。f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的对称递减重排函数定义为满足下式的函数 f^*：

$$f^*(x) = \inf\{t : \lambda_f(t) \le \mu(B(0, |x|))\}.$$

由此可得，f^* 满足

(i) 对每个 $t > 0$，$\mu(\{|f| > t\}) = |\{f^* > t\}|$，其中 $|\cdot|$ 表示勒贝格测度，

(ii) 当 $|x| = |y|$ 时，$f^*(x) = f^*(y)$;

(iii) 当 $|x| \le |y|$ 时，$f^*(y) \le f^*(x)$。

设 E 是 $\mathbb{R}$ 上一个有限的 μ-可测集。集合 E 的对称重排定义为以原点为中心、长度等于 E 的测度的开区间，记为 E^*。因此，

$$E^* = \left(-\frac{\mu(E)}{2}, \frac{\mu(E)}{2}\right).$$

假设 f 是 $\mathbb{R}$ 上满足 (2.1) 的 μ-可测函数。Lieb [10] 证明了

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi^*_{\{|f|>t\}}(x)dt, \tag{2.2}$$

这称为 f^* 的蛋糕表示。

设 E 是有限的 μ-可测集。取 $g = \chi_E$，(1.1) 推出以下引理。

引理 2.2。（见 [11]）假设 f 是 $\mathbb{R}$ 上满足 (2.1) 的正 μ-可测函数。设 E 是 $\mathbb{R}$ 中有限的 μ-可测集。那么有

$$\int_E f(x)d\mu(x) \leq \int_{E^*} f^*(x)dx. \tag{2.3}$$

我们的结果依赖于 $\mathbb{R}$ 的特殊几何结构，该结构见于 [6]。我们在此证明这一结果。

引理 2.3. 假设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有限个开区间集合。那么存在两个子族 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$，使得

$$I \cap J = \emptyset \quad \textit{if } I, J \in \mathcal{F}_i \textit{ and } I \neq J$$

and

$$\left(\cup_{I_1\in\mathcal{F}_1}\right) I_1 \cup \left(\cup_{I_2\in\mathcal{F}_2}\right) I_2 = \cup_{I\in\mathcal{F}} I.$$

定义在 $\mathbb{R}$ 上的正函数 f 称为分布对称函数，如果

$$|\{x : x > 0 \text{ and } f(x) > t\}| = |\{x : x < 0 \text{ and } f(x) > t\}|$$

对于每个 $t > 0$。

引理 2.4. 假设 a、$b \geq 0$ 和 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的分布对称函数。那么我们有

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx \leq \int_{-a}^{b} f^*(x)dx.$$

证明。记 $f_a = f\chi_{[-a,0]}$和 $f_b = f\chi_{[0,b]}$。显然，我们有 $|\{f_a \geq t\}| \leq a$。注意，f 是一个分布对称函数。由此可得 $|\{f_a \geq t\}| \leq \frac{1}{2}|\{f^* > t\}|$。因此，

$$|\{f_a \geq t\}| \leq \min\left\{a, \frac{1}{2}|\{f^* > t\}|\right\}. \tag{2.4}$$

由于 f^* 是一个对称递减函数，因此可以推出

$$|\{x:-a<x<0 \text{ and } f^*(x)>t\}| = \begin{cases} a, & \text{if } \quad t<f^*(a), \\ \frac{1}{2}|\{f^*>t\}|, & \text{if } t\geq f^*(a). \end{cases} \tag{2.5}$$

由 (2.4) 和 (2.5) 可得

$$|\{f_a \geq t\}| \leq |\{x:-a<x<0 \text{ and } f^*(x)>t\}|. \tag{2.6}$$

利用 Fubini 引理,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{0} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} f_a(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{0}^{f_a(x)} dsdx \\ &= \int_{0}^{\infty} |\{f_a>t\}|dt \end{aligned} \tag{2.7}$$

由 (2.6) 和 (2.7) 可知

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx \leq \int_{-a}^{0} f^*(x)dx. \tag{2.8}$$

类似地，我们可以得到

$$\int_{0}^{b} f(x)dx \leq \int_{0}^{b} f^*(x)dx. \tag{2.9}$$

利用 (2.8) 和 (2.9)，可以推得

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx \leq \int_{-a}^{b} f^*(x)dx.$$

证明完成。 □

3. The proof of the two Theorems

3.1. 定理 1.1. 根据（$M_\mu f$）*和 Mf^*的层蛋糕表示，不等式（1.5）等价于

$$\int_{0}^{\infty} \chi_{\{x:(M_\mu f)^*(x)>\lambda\}}(x)d\lambda \leq \int_{0}^{\infty} \chi_{\{x:Mf^*(x)>\lambda\}}(x)d\lambda. \tag{3.1}$$

由于 $|\{x:\ (M_\mu f)^*(x)\ >\lambda\}| = \mu(\{x:\ \ M_\mu f(x)\ >\lambda\})$，因此只需证明

$$\mu\left(\{x:M_\mu f(x)>\lambda\}\right) \leq |\{x:Mf^*(x)>\lambda\}| \tag{3.2}$$

对所有 $\lambda>0$均成立。

记 $E_\lambda^\mu(f)$ 为 $=\{x\in\mathbb{R}:\ \ M_\mu f(x)\ >\lambda\}$。当 μ 为勒贝格测度时，为简便起见，记作 $E_\lambda(f)$。选取 $x\in E_\lambda^\mu(f)$，存在一个开区间 I_x，使得

$$\frac{1}{\mu(I_x)}\int_{I_x} f d\mu > \lambda. \tag{3.3}$$

由此可得

$$E_\lambda^\mu(f) = \bigcup_{x\in E_\lambda^\mu(f)} I_x.$$

根据林德勒夫定理，我们可以找到一个可数子集族 $I_j, j = 1, 2, \ldots,$ 使得

$$E_\lambda^\mu(f) = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j.$$

记 $F(N) = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$.利用引理 2.3，存在 $\{I_1, I_2, \cdots, I_N\}$ 的两个子集族 $\mathcal{A}_1(N)$、$\mathcal{A}_2(N)$，使得

$$I \cap J = \emptyset \quad \text{if } I, J \in \mathcal{A}_i(N) \text{ and } I \neq J \tag{3.4}$$

and

$$F(N) = \bigcup_{i=1}^{2} \left(\bigcup_{I\in\mathcal{A}_i(N)} I \right). \tag{3.5}$$

令 $F_i = \bigcup_{I\in\mathcal{A}_i} I, i = 1, 2$。由 (3.3) 和 (3.4) 可推得

$$\mu(F_i) = \sum_{I\in\mathcal{A}_i} \mu(I) < \frac{1}{\lambda} \sum_{I\in\mathcal{A}_i} \int_I f d\mu = \frac{1}{\lambda} \int_{F_i} f d\mu. \tag{3.6}$$

令 $a = \frac{1}{2}\mu(F_1 \cup F_2)$、$b = \frac{1}{2}\mu(F_1 \cap F_2)$、$b_{12} = \frac{1}{2}\mu(F_1\backslash F_2)$ 和 $b_{21} = \frac{1}{2}\mu(F_2\backslash F_1)$。显然，我们有

$$\mu(F_1 \cup F_2) = \mu(F_1 \cap F_2) + \mu(F_1\backslash F_2) + \mu(F_2\backslash F_1)$$
$$\mu(F_1) = \mu(F_1 \cap F_2) + \mu(F_1\backslash F_2)$$

and

$$\mu(F_2) = \mu(F_1 \cap F_2) + \mu(F_2\backslash F_1).$$

因此

$$a = b + b_{12} + b_{21}, \tag{3.7}$$
$$\mu(F_1) = 2(b + b_{12}), \tag{3.8}$$

and

$$\mu(F_2) = 2(b + b_{21}). \tag{3.9}$$

Set

$$f_1 = f\chi_{F_1\cap F_2}, \quad f_{12} = f\chi_{F_1\backslash F_2} \quad \text{and} \quad f_{21} = f\chi_{F_2\backslash F_1}.$$

将 f_1、f_{12} 和 f_{21} 重新排列后，分别得到对应的对称递减函数 f_1^*、f_{12}^* 和 f_{21}^*。由引理 2.2 可得

$$\int_{F_1\cap F_2} f(x)d\mu(x) \leq \int_{(F_1\cap F_2)^*} f_1^*(x)dx, \tag{3.10}$$

$$\int_{F_1\backslash F_2} f(x)d\mu(x) \leq \int_{(F_1\backslash F_2)^*} f_{12}^*(x)dx, \tag{3.11}$$

and

$$\int_{F_2\backslash F_1} f(x)d\mu(x) \leq \int_{(F_2\backslash F_1)^*} f_{21}^*(x)dx. \tag{3.12}$$

由于 $F_1 = (F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \backslash F_2)$ 且 $F_2 = (F_2 \cap F_1) \cup (F_2 \backslash F_1)$，利用 (3.6) 可得

$$\mu(F_1) \leq \frac{1}{\lambda}\left(\int_{F_1\cap F_2} f_1(x)dx + \int_{F_1\backslash F_2} f_{12}(x)dx\right), \tag{3.13}$$

and

$$\mu(F_2) \leq \frac{1}{\lambda}\left(\int_{F_1\cap F_2} f_1(x)dx + \int_{F_2\backslash F_1} f_{21}(x)dx\right). \tag{3.14}$$

结合（3.9）、（3.10）、（3.11）和（3.13），我们得到

$$2(b+b_{12}) < \frac{1}{\lambda}\left(\int_{-b}^{b} f_1^*(x)dx + \int_{-b_{12}}^{b_{12}} f_{12}^*(x)dx\right) \tag{3.15}$$

结合 (3.8)、(3.10)、(3.12) 和 (3.14)，我们得到

$$2(b+b_{21}) < \frac{1}{\lambda}\left(\int_{-b}^{b} f_1^*(x)dx + \int_{-b_{21}}^{b_{21}} f_{21}^*(x)dx\right). \tag{3.16}$$

由于 f_1^*、f_{12}^* 和 f_{21}^* 是偶函数，可以推知的是

$$b+b_{12} < \frac{1}{\lambda}\left(\int_{0}^{b} f_1^*(x)dx + \int_{0}^{b_{12}} f_{12}^*(x)dx\right) \tag{3.17}$$

and

$$b+b_{21} < \frac{1}{\lambda}\left(\int_{-b}^{0} f_1^*(x)dx + \int_{0}^{b_{21}} f_{21}^*(x)dx\right). \tag{3.18}$$

将等式 (3.17) 和 (3.18) 两边相加，我们得到

$$2b+b_{12}+b_{21} < \frac{1}{\lambda}\left(\int_{-b}^{b} f_1^*(x)dx + \int_{0}^{b_{12}} f_{12}^*(x)dx + \int_{0}^{b_{21}} f_{21}^*(x)dx\right). \tag{3.19}$$

定义一个新函数:

$$f^\diamond(x) = \begin{cases} f_1^*(x) & 0 \leq |x| < b \\ f_{12}^*(x-b) & b \leq |x| < b+b_{12} \\ f_{21}^*(x-b-b_{12}) & b+b_{12} \leq |x| < b+b_{12}+b_{21} \\ 0 & others \end{cases}$$

因此，由（3.19）可得

$$2b+b_{12}+b_{21} < \frac{1}{\lambda}\left(\int_{-b}^{b+b_{12}+b_{21}} f^\diamond(x)dx\right). \tag{3.20}$$

通过与 (3.20) 的证明类似的论证可知,

$$2b+b_{12}+b_{21} < \frac{1}{\lambda}\left(\int_{-b-b_{12}-b_{21}}^{b} f^\diamond(x)dx\right). \tag{3.21}$$

根据定义， $f^{\diamond}$ 是一个分布对称函数，并且

$$(f^{\diamond})^{*} \leq f^{*}. \tag{3.22}$$

。由 (3.20)、(3.22) 和引理 2.4 可推得

$$2b + b_{12} + b_{21} \leq \frac{1}{\lambda}\left(\int_{-b}^{b+b_{12}+b_{21}} f^{*}(x)dx\right). \tag{3.23}$$

另一方面，由 (3.21)、(3.22) 和引理 2.4 可得

$$2b + b_{12} + b_{21} \leq \frac{1}{\lambda}\left(\int_{-(b+b_{12}+b_{21})}^{b} f^{*}(x)dx\right). \tag{3.24}$$

因此，由 (3.23) 和 (3.24) 可推得

$$\frac{1}{2b + b_{12} + b_{21}}\int_{-b}^{b+b_{12}+b_{21}} f^{*}(x)dx > \lambda, \tag{3.25}$$

and

$$\frac{1}{2b + b_{12} + b_{21}}\int_{-(b+b_{12}+b_{21})}^{b} f^{*}(x)dx > \lambda. \tag{3.26}$$

现在很容易得知

$$(-b, b + b_{12} + b_{21}) \subset \{x : Mf^{*}(x) > \lambda\}$$

and

$$(-(b + b_{12} + b_{21}), b) \subset \{x : Mf^{*}(x) > \lambda\}.$$

因此我们有

$$(-(b + b_{12} + b_{21}), b + b_{12} + b_{21}) \subset \{x : Mf^{*}(x) > \lambda\}. \tag{3.27}$$

这意味着

$$\mu\left(F^{N}\right) = \mu\left(F_1 \cup F_2\right) = 2(b + b_{12} + b_{21}) \leq |\{x : Mf^{*}(x) > \lambda\}|.$$

由于 F^N 是由 μ-可测集组成的递增序列，且其并集为 $\{x : M_{\mu}f(x) > \lambda\}$，令 $N \to \infty$，即可得出结论。

3.2. 定理 1.2. 不失一般性，我们假设 $\|f\|_{L^{p,\,\infty}(R,\ d\mu)} = 1$。因此我们有

$$\|f^{*}\|_{L^{p,\infty}(R,dm)} = \|f\|_{L^{p,\infty}(R,d\mu)} = 1,$$

因为 f和 f^{*}是等测的。根据$\|f\|_{L^{p,\,\infty}(R,\ d\mu)}$的定义，我们有

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R},d\mu)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |2t|^{\frac{1}{p}} f^{*}(t). \tag{3.28}$$

由此可得 $f^{*}(t) \leq |2t|^{-\frac{1}{p}}$。记 $a(t) = |2t|^{-\frac{1}{p}}$。因此，

$$Mf^{*}(t) \leq Ma(t). \tag{3.29}$$

接下来，计算 $Ma(t)$。固定 $t>0$，注意到 $a(t)$ 是径向递减的。因此，存在 $s>0$ 使得

$$Ma(t)=\sup_{a>0}\frac{1}{a+s}\int_{-s}^{t}a(u)du.$$

令 $b(s)=\frac{1}{a+s}\int_{-s}^{t}a(u)du$。因此，$b(s)$ 的导函数为

$$\frac{db(s)}{ds}=-\frac{1}{(s+t)^2}\int_{-s}^{t}a(u)du+\frac{a(s)}{s+t}.$$

那么，最大点 s_0 of $b(s)$ 满足

$$\frac{1}{s_0+t}\int_{-s_0}^{t}a(u)du=a(s_0). \tag{3.30}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\int_{-s}^{t}a(u)du &= \int_{-s}^{0}(-2u)^{-\frac{1}{p}}du+\int_{0}^{t}(2u)^{-\frac{1}{p}}du\\ &= \frac{p}{p-1}2^{-\frac{1}{p}}\left(s^{1-\frac{1}{p}}+t^{1-\frac{1}{p}}\right)\end{aligned} \tag{3.31}$$

设 $w=\frac{s_0}{t}$。结合 (3.30) 和 (3.31)，w 满足方程

$$\frac{1}{p-1}w^{1-\frac{1}{p}}-w^{-\frac{1}{p}}+\frac{p}{p-1}=0.$$

这说明 w 为正且唯一，并且等于 c_p^{-p}。由于 w 唯一，由 (3.2) 可得

$$Ma(t)=\frac{1}{t+s_0}\int_{-s}^{t}a(u)du=|2s_0|^{-\frac{1}{p}}=c_p|2t|^{-\frac{1}{p}}.$$

因此

$$\|Ma\|_{L^{p,\infty},(\mathbb{R},dm)}\le c_p.$$

由（3.29）可推得

$$\|M_\mu f\|_{L^{p,\infty},(\mathbb{R},d\mu)}\|\le\|Mf^*\|_{L^{p,\infty},(\mathbb{R},d\mu)}\|\le c_p.$$

证明完成。

Acknowledgments

本研究获河北省引进海外留学人员支持项目（项目编号：C20190365）、中国浙江省自然科学基金（项目编号：LQ18A010002）和中国国家自然科学基金（项目编号：12001488）资助。

References

[1] Bernal, A.，关于一维极大函数的一则注记。《爱丁堡皇家学会会刊》：A辑 数学 111(3-4)(1989), 329-334。[2] Bennett, C. 和 Sharpley, R. C.，《算子的插值》，第129卷。学术出版社，1988。[3] Brascamp, H. J.、Lieb, E. H. 和 Luttinger, J. M.，多重积分的一般重排不等式。《泛函分析杂志》17(2)(1974), 227-237。[4] Christ M.，k-平面变换的估计[J]。《印第安纳大学数学杂志》，1984，33(6): 891-910。[5] Draghici C.，一般重排不等式[J]。《美国数学会会刊》，2005，133(3): 735-743。[6] Garnett J.，《有界解析函数》[M]。施普林格科学与商业媒体，2007。[7] Grafakos, L. 和 Montgomery-Smith, S.，非中心极大函数的最佳常数。《伦敦数学会通报》29(01)(1997), 60-64。[8] Grafakos, L. 和 Kinnunen, J.，与一般测度相关的极大函数的锐不等式。《爱丁堡皇家学会会刊》：A辑 数学 128(04)(1988), 717-723。[9] Hardy G. H.、Littlewood J. E.、P*ó*lya G.，《不等式》[M]。剑桥大学出版社，1952。[10] Lieb, E. H.，Hardy-Littlewood-Sobolev不等式及相关不等式中的锐常数[M]。《不等式》。施普林格，柏林、海德堡，2002: 529-554。[11] Lieb, E, H. 和 Loss, M.，《分析》，数学研究生教材第14卷。美国数学会4 (2001)。[12]Luttinger J. M.、Friedberg R.，多重积分的新重排不等式[R]。哥伦比亚大学，纽约（美国），物理系；巴纳德学院，纽约（美国），1973。[13] Nie X.、Yan D.、Liu S. 等，Hardy-Littlewood极大算子的重排不等式。《巴拿赫数学分析杂志》，2022，16(3): 1-30。[14] Pfiefer R. E.，若干几何平均值的最大集与最小集。《理论概率杂志》，1990，3(2): 169-179。[15] PIC、PICK L.，分数阶极大算子的一个锐重排不等式[J]。《数学研究》，2000，138: 3。[16] Sobolev S. L.，关于一个泛函分析定理。《数学文集》，1938，4: 471-497。

Department of Mathematics and Physics, Shijiazhuang Tiedao University, Shi-jiazhuang 050043, P.R. China电子邮箱地址：nxd2016@stdu.edu.cn
School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, P.R. China电子邮箱地址：wudi08@mails.ucas.ac.cn
Department of Mathematics and Physics, Shijiazhuang Tiedao University, Shi-jiazhuang 050043, P.R. China电子邮箱地址：wangpw@stdu.edu.cn