arXiv:2305.00714v1 [math.QA] 1 May 2023

SUSY 泊松顶点代数的代数运算子

YUSUKE NISHINAKA, SHINTAROU YANAGIDA

Abstract. 作为我们关于超对称顶点代数的歌剧的研究（Y.N., S.Y., arXiv:2209.14617）的延续，我们引入了 SUSY 共泊松运算子，它编码了 SUSY 泊松顶点代数的结构。我们的运算子是编码泊松顶点代数结构的运算子的一种自然的 SUSY 类比，该运算子由 Bakalov、De Sole、Heluani 和 Kac（2019）引入。在滤过情形下，我们还给出了 SUSY 手征运算子的伴随分次到 SUSY 共泊松运算子中的一个嵌入。

Contents

0. 引言1. 预备知识 1.1. 超术语 1.2. SUSY 李共形代数与 SUSY 顶点代数 1.3. SUSY 泊松顶点代数 1.4. SUSY 顶点代数的超运算子 2. SUSY 泊松顶点代数的超运算子 2.1. 图与箭图 2.2. $N_W = N$ SUSY 泊松顶点代数的超运算子 2.3. $N_K = N$ SUSY 泊松顶点代数的超运算子 3. 与 SUSY 手征运算子的关系 3.1. 超运算子的分次与滤过 3.2. $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}$ 的幺半群过滤 3.3. gr $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}$ 在 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}$ 中的嵌入$_{\mathrm{gr}\,V}$附录 A。泊松上同调双复形与有限上同调复形 A.1. 泊松上同调双复形 A.2. 有限歌剧与泊松代数结构 A.3. 识别 参考文献
1
3
3
3
5
6
9
9
12
20
21
21
22
24
27
27
31
33
37

0. Introduction

这是我们关于超对称顶点代数的代数运算子研究的延续 [NY] 。在那里，我们引入了超运算子 $\mathcal{P}^{\mathrm{ch}N_W=N}$ 和 $\mathcal{P}^{\mathrm{ch}N_K=N}$ 称为超对称手征运算子，它编码了 $N_W = N$ 和 $N_K = N$ Heluani 和 Kac 意义下的超对称顶点代数结构 [HK07]。 [NY] 中的主要结论是以下双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Op}}(\mathcal{L}\mathrm{ie}\ \mathcal{P}^{\mathrm{ch}N_\bullet=N}_{\Pi^{N+1}V})_{\mathrm{T}} \xrightarrow{\sim} \{N_\bullet = N\text{超对称顶点代数结构（定义在 }(V,\nabla)\text{ 上）} \quad \bullet = W，\text{或}\ K.$$

对于每个超模（V， ∇）上的某个特定超代数 $\mathcal{H}_W$ 或 $\mathcal{H}_K$，其中 $\mathcal{L}$即表示李运算子，且Π 表示奇偶性变换函子。这些超运算子是手性运算子的自然超对称扩展P^{ch} 由 Bakalov、De Sole、Heluani 和 Kac 在[BDHK 19], 中引入，它编码了顶点代数的结构。

Date: 2023年5月1日。Y.N. 获日本学术振兴会青年科学家研究奖学金资助（编号：23KJ1120）。S.Y. 获日本学术振兴会科研费项目编号 19K03399 资助。

在本文中，我们引入超运算子 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}$ 和 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_K=N}$ （定义2.2.1），称为SUSY coisson 运算子。它们编码了 SUSY 泊松顶点代数的结构。更确切地说，存在双射（定理2.2.10和2.3.2）

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Op}}(\mathcal{L}ie\ \mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_\bullet=N}_{\Pi^{N+1}\overline{V}})_{\overline{1}} \xrightarrow{\sim} \{N=N_\bullet \text{ 超对称泊松顶点代数结构 } (V,\nabla)\},\qquad \bullet = W \text{ 或 } K. \tag{0.0.1}$$

“coisson”一词是“泊松顶点”的同义词，借自 [BD04，2。7]。

这些超运算子是运算子 P^{cl} 在 [BDHK19，§10] 中所述结构的自然超对称扩展，该运算子编码了泊松顶点代数的结构。同样，与非超对称情形 [BDHK19，§10。4], 类似，我们在超对称手性运算子上定义了滤过 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_\bullet=N}$，其中 $V=(V,\ \nabla)$ 是一个过滤超模；对于伴随分次 $\mathrm{gr}\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_\bullet=N}$，我们有一个自然嵌入（定理 3.3.8）

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_\bullet=N} \hookrightarrow \mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_\bullet=N} \quad \bullet = W \text{ or } K. \tag{0.0.2}$$

我们对 SUSY coisson 运算子的构造基本遵循 BDHK19，§10], 中的非 SUSY 情形，其中玻色部分的公式与 [BDHK19]中的公式基本相同。然而，为了妥善处理费米子部分，我们在若干处给出了非平凡的扩展。例如，参见注记 2.2.2、例 2.2.6 以及 §3的开头。

文献中所采用的泊松顶点代数结构研究方法具有独特性和非标准性，具体体现在以下方面：众所周知（例如，参见 [F06] 和 [LV12，13。3] ），线性空间 V 上的泊松代数结构与一个歌剧代数态射 $\mathcal{P}ois \to \mathcal{H}om_V$ 之间存在一一对应关系，该态射从泊松歌剧代数 $\mathcal{P}ois$映射到端同态歌剧代数 $\mathcal{H}om_V$。因此，可以猜想，泊松顶点代数结构与从 $\mathcal{P}ois$ 到某个歌剧的歌剧代数态射相对应。而 [BDHK19] 所采用的方法则是考虑从 $\mathcal{L}ie$ 出发的歌剧代数态射，正如式（0.0.1）所示。

在附录 A中，我们对上述类泊松代数结构的方法作一注记。在 [BDHK19 中，第 10 节5], 论证了存在歌剧 $P_{\mathrm{cl}V}$（用于编码泊松代数结构）的一个有限类比 P_V^{fn}，并且对于一个偶线性空间 V，两类歌剧代数态射之间存在双射：

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Op}}(\mathcal{P}ois, \mathcal{H}om_V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Op}}(\mathcal{L}ie, P_V^{\mathrm{fn}}).$$

那么，给定一个泊松代数 $A=(V,\cdot,\{\ ,\ \})$，我们有两个上同调复形 $\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}}$和 $C_{\mathcal{P}ois}(A,A)$，它们分别来自 P^{fn} 和 $\mathcal{P}$ois。根据 Fresse [F06], 的工作，后一个复形具有双分次 $C^{\bullet,\bullet}_{\mathcal{P}ois}(A,A)$。现在自然会问，这两个复形能否以一种自然的方式识别。在定理 A.3.2 中，我们证明，来自有限 operad P_V^{fn}的复形 $\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}}$ 具有双分次 $(\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}})^{\bullet,\bullet}$，且这两个双复形除一个移位外重合：

$$(\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}})^{\bullet,\bullet} \cong C^{\bullet,\bullet+1}_{\mathcal{P}ois}.$$

这一结论可视为 [BDHK19定理 10 的强化形式。16]。

运算子 P^{cl} 在[BDHK19] 中被引入，旨在将顶点代数上同调的计算化约为泊松顶点代数上同调的计算，正如一系列工作 [BDHK20、BDK20、BDK21、BDKV21]所展示的那样。我们预计，也可以使用我们的超对称共泊松运算子来对超对称顶点代数进行类似的计算，但将此留待今后研究。

组织结构。§1 是预备章节。在§ 1.1中，我们简要介绍超对象和超运算子的记号与术语。在§ 1.2 中，我们回顾文献 [HK07]中的 SUSY 顶点代数基础知识。在§1.3中，我们回顾文献 [HK07]中关于 SUSY 泊松顶点代数的基本定义。在§1.4中，我们回顾文献[NY]中的 SUSY 手征运算子，即编码 SUSY 顶点代数结构的超运算子。

第 2 节和第 3 节是正文。在第 2.1 节中，我们引用 [BDHK19] 中的图语言，并在第 2.2 节的前半部分用它来构造我们的 $N_W=N$超对称共泊松运算子 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}$（定义 2.2.1）。在第 2.2 节的后半部分，我们证明超运算子 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}$ 确实编码了 $N_W=N$超对称泊松顶点代数的结构（定理 2.2.10）。第 2.2 节中的论证基本遵循 [BDHK19], 中非 SUSY 情形的思路，但我们对费米子部分进行了细致处理。 $N_K=N$ 情形可以类似地处理为 $N_W=N$ 情形，我们在第 2.3 节简要陈述结果，略去证明。

在§3中，我们建立了超运算子嵌入的一个 SUSY 类比（0.0.2） [BDHK19，§10。4]一开始，我们介绍了 $N_W=N$ SUSY 顶点代数上的滤过概念（定义3.0.1），

其伴随分次具有一个自然的 $N_W = N$ SUSY 泊松顶点代数结构（命题3.0.3）。在 §3.1中，我们引用了 [BDHK19]中关于超运算子上的分次和滤过的基础知识。在§3.2中，我们为一个带滤过的 $\mathcal{H}_W$-超模 V在我们的 SUSY 手征运算子 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}$上引入了一个歌剧过滤。在 § 3.3中，定理 3.3.8表明，伴随分次超算子 $\mathrm{gr}\ \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}$嵌入了 V的伴随分次的 SUSY 共泊松运算子 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}{}_{\mathrm{gr}\ V}$中。

附录 A 给出了有限歌剧 P_V^{fn}在 [BDHK19]中的一个观察。回顾泊松上同调双复形 [F06] 以及附录 A.1 和附录 A.2中关于有限歌剧的内容后，我们分别证明，由 P_V^{fn}导出的上同调复形具有双复形结构，并且它与泊松上同调双复形一致（定理 A.3.2）。

全局记号。

- 符号 $\mathbb{N}$ 表示非负整数集 $\{0,1,2,\dots\}$。
- 对于正整数 m，符号 $[m]$ 表示集合 $\{1,2,\dots,m\}\subset\mathbb{Z}$。我们还定义 $[0]:=\emptyset$。
- 除非另有说明，“环”或“代数”均指含单位元的结合环或结合代数。
- 全文中，我们都在特征零的域 $\mathbb{K}$ 上进行讨论；除非另有说明，线性空间、线性映射、代数和代数同态均定义在 $\mathbb{K}$ 上。

1. Preliminaries

1.1. 超术语。 我们采用与 [NY， §1.1] 中相同的超术语。这里仅回顾对称群及其模的一些符号。

- 对于 $n\in\mathbb{N}$，我们用 $\mathfrak{S}_n$ 表示按照约定 $\mathfrak{S}_0:=\{e\}$ 的第 n 个对称群。我们将群代数 $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$ 视为一个纯偶超代数。配备左（分别地，右） $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$-超模结构的线性超空间称为左（分别地，右） $\mathfrak{S}_n$-超模。

- 设 V 为一个线性超空间。对于 $n\in\mathbb{N}$，通过令 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ 作用于 $v_1\otimes\cdots\otimes v_n\in V^{\otimes n}$，线性超空间 $V^{\otimes n}$ 成为一个左 $\mathfrak{S}_n$-超模。

$$\sigma(v_1\otimes\cdots\otimes v_n):=\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ \sigma(i)>\sigma(j)}}(-1)^{p(v_i)p(v_j)}\cdot v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

这里， $p(v)\in\{0,1\}$ 表示 $v\in V$的宇称。在下文中，除非另有说明，我们始终将 $V^{\otimes n}$ 视为这一左$\mathfrak{S}_n$-超模。

- 一个 $\mathfrak{S}$-超模 $M=\big(M(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族右 $\mathfrak{S}_n$-超模 $M(n)$

.

歌剧代数的概念（例如参见 [LV12] ）自然地扩展到超情形。我们沿用 [BDHK19] 中的术语，将其称为超运算子。更准确地说，超运算子是一个 $\mathfrak{S}$-模$\mathcal{P}=\big(\mathcal{P}(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$，配备一个偶元素 $1\in\mathcal{P}(1)\bar{0}$ 和一族偶线性映射 $\gamma_\nu\colon\ \mathcal{P}(m)\otimes\mathcal{P}(n_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{P}(n_m)\to\mathcal{P}(n)$，对每个 m、$n\in\mathbb{N}$ 和 $\nu=(n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{N}^m$（其中 $n_1+\cdots+n_m=n$）均有定义，称为复合映射，并满足若干公理。我们将运算 $f\in\mathcal{P}(m)$ 与$g_1\in\mathcal{P}(n_1),\dots,g_m\in\mathcal{P}(n_m)$ 的复合记作 γ_ν，写为

$$f\circ(g_1\odot\cdots\odot g_m):=\gamma_\nu(f\otimes g_1\otimes\cdots\otimes g_m)\in\mathcal{P}(n).$$

详细内容请参见[NY，定义 1.1。1]。

1.2. 超对称李共形代数与超对称顶点代数。 Heluani 和 Kac 在 [HK07]，中引入了超对称顶点代数及相关代数结构，其若干方面的综述见 [NY，§§2.1–2.3, §§3.1–3.3]。超对称顶点代数分为两类： $N_W=N$ 和 $N_K=N$ 超对称顶点代数。这里仅给出超对称李共形代数和超对称顶点代数在 $N_W=N$ 情形下的定义，并简要说明 $N_K=N$ 情形下的定义。

在本§ 1.2节中，我们固定一个非负整数 N。

定义 1.2.1. 设 A 为一个指标集，并且对每个 $\alpha\in A$， $\Lambda_\alpha=(\lambda_\alpha,\theta_\alpha^1,\dots,\theta_\alpha^N)$ 是一个字母序列。我们将由偶元 λ_α ($\alpha\in A$) 和奇元 $\theta_\alpha^i(\alpha\in A,i\in[N])$ 生成的自由交换 $\mathbb{K}$-超代数记为 $\mathbb{K}[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A}$，也就是说，它是由这些元素生成并满足以下关系的 $\mathbb{K}$-超代数。

$$\lambda_\alpha\lambda_\beta-\lambda_\beta\lambda_\alpha=0,\quad \lambda_\alpha\theta_\beta^i-\theta_\beta^i\lambda_\alpha=0,\quad \theta_\alpha^i\theta_\beta^j+\theta_\beta^j\theta_\alpha^i=0\quad(\alpha,\beta\in A,\ i,j\in[N]).\tag{1.2.1}$$

每个 Λ_α for $\alpha\in A$ 称为一个 $(1|N)_W$-超变量，而 $\mathbb{K}$-超代数 $\mathbb{K}[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A}$ 称为超变量 $(\Lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ 的 $N_W=N$ 多项式超代数。

在 $A=[n]=\{1,\dots,n\}$ for $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ 的情形下，我们通常用 $\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ 表示多项式超代数，而不写作 $\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k\in[n]}$。如果 A 只含一个元素，则省略下标 $\alpha\in A$，并用 $\mathbb{K}[\Lambda]$ 表示多项式超代数。

对于 $(1|N)_W$-超变量 $\Lambda=(\lambda,\theta^1,\dots,\theta^N)$ 及子集 $I=\{i_1<\cdots<i_r\}\subset[N]$，记 $\theta^I:=\theta^{i_1}\cdots\theta^{i_r}\in\mathbb{K}[\Lambda]$。此外，对 $I,J\subset[N]$，我们通过关系 $\theta^I\theta^J=\sigma(I,J)\theta^{I\cup J}$ 定义 $\sigma(I,J)\in\{0,\pm1\}$，并令 $\sigma(I):=\sigma(I,[N]\setminus I)$。对于 $m\in\mathbb{N}$ 和 $I\subset[N]$，记 $\Lambda^{m|I}:=\lambda^m\theta^I\in\mathbb{K}[\Lambda]$。

对于线性超空间 V 和具有 $(1|N)_W$ 的超变量 $\Lambda_\alpha(\alpha\in A)$，我们记作 $V[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A}:=\mathbb{K}[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A}\otimes_{\mathbb{K}}V$，并将其视为一个左 $\mathbb{K}[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A}$-超模。我们将经常在特殊情形 $A=[n]$: 中使用它。

$$V[\Lambda_k]_{k=1}^n=\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n\otimes_{\mathbb{K}}V.$$

定义 1.2.2. 令 $\mathcal{H}_W$ 为由偶 T 和奇 S^i（$i\in[N]$）生成的自由交换 $\mathbb{K}$-超代数，即由这些元素生成且满足以下关系的 $\mathbb{K}$-超代数。

$$TS^i-S^iT=0,\quad S^iS^j+S^jS^i=0\quad(i,j\in[N]).\tag{1.2.2}$$

为简便起见，我们设定

$$\nabla:=(T,S^1,\dots,S^N).\tag{1.2.3}$$

我们还将一个配备左 $\mathcal{H}_W$-超模结构的线性超空间 V 记为

$$(V,\nabla)=(V,T,S^1,\dots,S^N),$$

其中 T 被视为 V 上的偶线性变换，而 S^i 被视为奇线性变换，并满足关系式（1.2.2）。

在本§1.2的剩余部分中，让我们固定一个 $(1|N)_W$-超变量 $\Lambda=(\lambda,\theta^1,\dots,\theta^N)$。

注意到 $\mathcal{H}_W$ 与 $\mathbb{K}[\Lambda]$ 作为超代数同构，其同态定义为

$$T\longmapsto-\lambda,\quad S^i\longmapsto-\theta^i\quad(i\in[N]).$$

由于 $\mathcal{H}_W$ 是一个 co 在交换超代数中，以下将省略 $\mathcal{H}_W$-超模中的“左”字。

定义 1.2.3 ([HK07，定义 3.2。2])。设 $(V,\nabla)=(V,T,S^1,\dots,S^N)$ 是一个 $\mathcal{H}_W$-超模，并且 $[\cdot_\Lambda\cdot]\colon V\otimes V\to V[\Lambda]$ 是一个宇称为 $\overline{N}$ 的线性映射。三元组 $(V,\nabla,[\cdot_\Lambda\cdot])$ 称为一个 $N_W=N$ 超对称李共形代数，如果它满足以下条件:

(i)（半共轭线性）对于任意 a、$b\in V$，

$$[Ta_\Lambda b]=-\lambda[a_\Lambda b],\qquad[a_\Lambda Tb]=(\lambda+T)[a_\Lambda b],$$
$$[S^ia_\Lambda b]=-(-1)^N\theta^i[a_\Lambda b],\quad[a_\Lambda S^ib]=(-1)^{p(a)+\overline{N}}(\theta^i+S^i)[a_\Lambda b]\quad(i\in[N]).$$

(ii)（斜对称性）对于任意 a、$b\in V$，

$$[b_\Lambda a]=-(-1)^{p(a)p(b)+\overline{N}}[a_{-\Lambda-\nabla}b],\tag{1.2.4}$$

其中我们在 $\nabla:=(T,S^1,\dots,S^N)$ 中使用了（1.2.3）。

（iii）（雅可比恒等式）对于任意的 a、b、$c\in V$，

$$[a_{\Lambda_1}[b_{\Lambda_2}c]]=(-1)^{(p(a)+\overline{N})\overline{N}}[[a_{\Lambda_1}b]_{\Lambda_1+\Lambda_2}c]+(-1)^{(p(a)+\overline{N})(p(b)+\overline{N})}[b_{\Lambda_2}[a_{\Lambda_1}c]],\tag{1.2.5}$$

其中 Λ_1、Λ_2 是 $(1|N)_W$-超变量。

为简单起见，我们称 (V,∇)，或更简洁地称 V，为一个 $N_W=N$ 超对称李共形代数。线性映射 $[\cdot_\Lambda\cdot]$ 称为超模 (V,∇) 的 Λ-括号。

对于线性超空间 V 上的偶线性变换 F 和 G，我们定义线性映射 $\int_F^G d\Lambda\colon V[\Lambda]\to V$，其定义为

$$\int_F^G d\Lambda\,\Lambda^{m|I}v:=\frac{\delta_{I,[N]}}{m+1}(G^{m+1}v-F^{m+1}v)\quad(m\in\mathbb{N},\,I\subset[N],\,v\in V).\tag{1.2.6}$$

线性映射 $\int_F^G d\Lambda$ 具有宇称 $\overline{N}$。此外，若 V 是一个超代数（不一定含单位元或满足结合律），我们定义线性映射 $\int_F^G d\Lambda\, a\colon\ V[\Lambda]\to V$，对于 $a\in V$，其定义为

$$\Big(\int_F^G d\Lambda\, a\Big)\Lambda^{m|I}v := \Big(\int_F^G d\Lambda\ \Lambda^{m|I}a\Big)v,$$

其中，$\int_F^G d\Lambda\ \Lambda^{m|I}a$ 右侧的项由（1.2.6）给出。于是，线性映射 $\int_F^G d\Lambda\, a$ 具有宇称 $p(a)$。利用这个积分，我们引入：

定义 1.2.4（[HK07，定义 3.3.15]）。设 $(V,\nabla,[\cdot_\Lambda\cdot])\ =\ (V,T,S^1,\dots,S^N,[\cdot_\Lambda\cdot])$ 是一个超对称李共形代数（定义 1.2.3），且 $\mu\colon\ V\otimes V\to V$ 是一个偶线性映射。记作 $ab\colon=\mu(a\otimes b)$，其中 $a,b\in V$。若一个四元组 $(V,\nabla,[\cdot_\Lambda\cdot],\mu)$ 满足以下条件，则称其为非幺超对称顶点代数（简称非幺超对称顶点代数）：

(i) 对任意 $a,b\in V$，

$$T(ab)=(Ta)b+a(Tb),\quad S^i(ab)=(S^ia)b+(-1)^{p(a)}a(S^ib)\quad(i\in[N]).$$

(ii)（拟交换性）对任意 $a,b\in V$，

$$ab-(-1)^{p(a)p(b)}ba=\int_{-T}^{0}d\Lambda[a_\Lambda b].$$

(iii)（拟结合性）对任意 $a,b,c\in V$，

$$(ab)c-a(bc)=\Big(\int_0^T d\Lambda a\Big)[b_\Lambda c]+(-1)^{p(a)p(b)}\Big(\int_0^T d\Lambda b\Big)[a_\Lambda c].$$

(iv)（Wick 公式）对任意 $a,b,c\in V$，

$$[a_\Lambda bc]=[a_\Lambda b]c+(-1)^{(p(a)+\overline{N})p(b)}b[a_\Lambda c]+\int_0^\lambda d\Gamma[[a_\Lambda b]_\Gamma c],$$

其中 Γ 是一个额外的 $(1|N)_W$-超变量。

为简便起见，我们称 (V,∇)，或更简单地记为 V，为非幺 $N_W=N$ SUSY 顶点代数。映射 μ 称为 V 的乘法。

定义 1.2.5. 非幺 $N_W=N$ 超对称顶点代数 V 称为一个 $N_W=N$ 超对称顶点代数，如果存在一个偶元素 $|0\rangle\in V$ 使得 $a\,|0\rangle=|0\rangle\,a=a$ 对所有 $a\in V$ 均成立。

我们以简短评述 $N_K=N$ 超对称顶点代数来结束本小节。关于 $N_W=N$ 情形给出的所有定义和论证，对 $N_K=N$ 情形同样适用，只需将 (1.2.1) 中关于 $(1|N)_W$-超变量 $\Lambda_\alpha=(\lambda_\alpha,\theta_\alpha^1,\dots,\theta_\alpha^N)$ 的关系替换为关于 $(1|N)_K$-超变量的关系：

$$\lambda_\alpha\lambda_\beta-\lambda_\beta\lambda_\alpha=0,\quad \lambda_\alpha\theta_\beta^i-\theta_\beta^i\lambda_\alpha=0,\quad \theta_\alpha^i\theta_\beta^j+\theta_\beta^j\theta_\alpha^i=-2\delta_{\alpha,\beta}\delta_{i,j}\lambda_\alpha,\tag{1.2.7}$$

并将交换超代数 $\mathcal{H}_W$ 替换为下列超代数 $\mathcal{H}_K$。

定义 1.2.6. 令 $\mathcal{H}_K$ 为由一个偶生成元 T 和奇生成元 $S^i(i\in[N])$生成的 $\mathbb{K}$-超代数，其关系为

$$TS^i-S^iT=0,\quad S^iS^j+S^jS^i=2\delta_{i,j}T\quad(i,j\in[N]).$$

于是我们有了 $N_K=N$ SUSY 李共形代数和 $N_K=N$ SUSY 顶点代数的概念。

1.3. SUSY 泊松顶点代数。我们引用 [HK07] 中SUSY 泊松顶点代数的概念，它是本文的主要研究对象。在本 § 1.3中，我们固定一个非负整数 N。

定义 1.3.1（[HK07，定义 3.3.16]）。设 $(V,\nabla,\{\cdot_\Lambda\cdot\})$ 是一个 $N_W=N$ SUSY 李共形代数，且 $\mu\colon\ V\otimes V\to V$ 是一个偶线性映射。我们将 $ab:=\mu(a\otimes b)$ 记作 $a,b\in V$。若一个元组 $(V,\nabla,\{\cdot_\Lambda\cdot\},\mu)$ 满足以下条件，则称其为非幺 $N_W=N$ SUSY 泊松顶点代数（简称非幺 $N_W=N$ SUSY 泊松顶点代数）：

(i) 对于任意 a、$b\in V$，

$$T(ab)=(Ta)b+a(Tb),\quad S^i(ab)=(S^ia)b+(-1)^{p(a)}a(S^ib)\quad(i\in[N]).$$

(ii) 线性映射 μ 是交换的，即对于任意 a、$b\in V$， $ba=(-1)^{p(a)p(b)}ab$。(iii) 线性映射 μ 是结合的，即对于任意 a、b、$c\in V$，$(ab)c=a(bc)$。(iv)（莱布尼茨法则）对于任意 a、b、$c\in V$，

$$\{a_\Lambda bc\}=\{a_\Lambda b\}c+(-1)^{(p(a)+\overline{N})p(b)}b\{a_\Lambda c\}. \tag{1.3.1}$$

定义 1.3.2. 如果一个非含单位元的 $N_W=N$ SUSY 泊松顶点代数 V 满足存在 $|0\rangle\in V$，使得 $a\,|0\rangle=|0\rangle\,a=a$ 对任意 $a\in V$成立，则称其为一个 $N_W=N$ SUSY 泊松顶点代数。

在 $N=0$的情况下， $N_W=0$ SUSY 泊松顶点代数不过就是通常意义下的泊松顶点代数（例如参见 [K17] 和[FBZ04，第 16] 章）。

例 1.3.3 ([Y22，命题 3.1。9])。设 P 是一个宇称为 $q\in\mathbb{Z}_2$的泊松超代数，即一个 P赋有李括号 $\{\cdot,\cdot\}$: $P\otimes P\to P$其宇称为 q（参见 [HK07，定义 3.2。5]），并满足

$$\{a,bc\}=\{a,b\}c+(-1)^{(p(a)+q)p(b)}b\{a,c\}$$

对于 a， b， $c\in P$。则 $1|N$-超喷射代数 $P^{\mathcal{O}}=P^{\mathbb{K}[Z]}$（参见 [Y22，命题 1.3。5]）具有如下定义的 SUSY 泊松顶点代数结构

$$\{a_\Lambda b\}:=\theta^{[N]}\{a,b\}$$

对于每个 $a,b\in P$。

情形 $N_K=N$ 的引入方式类似:

定义 1.3.4. 设 $(V,\nabla,\{\cdot_\Lambda\cdot\})$ 是一个 $N_K=N$超对称李共形代数，且 μ: $V\otimes V\to V$是一个偶线性映射。对于 $a,b\in V$，记 $ab:=\mu(a\otimes b)$。若一个四元组 $(V,\nabla,\{\cdot_\Lambda\cdot\},\mu)$ 满足定义 1.3.1 中的条件 (i)–(iv)，其中将 $(1|N)_W$-超变量 Λ 替换为 $(1|N)_K$-超变量，则称其为非含单位元的$N_K=N$ 超对称泊松顶点代数。

1.4. 超对称顶点代数的超运算子。我们简要回顾一下 $N_W=N$ 超对称手征运算子$\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}$，其定义见 [NY]。固定一个非负整数 N。

定义 1.4.1. 对每个 $k\in[n]$，令 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$, $[n]:=\{1,\dots,n\}$ 和 $Z_k=(z_k,\zeta_k^1,\dots,\zeta_k^N)$ 为一个 $(1|N)_W$-超变量。我们设

$$z_{k,l}:=z_k-z_l,\quad \zeta_{k,l}^i:=\zeta_k^i-\zeta_l^i$$

对于 $i\in[N]$and $k,l\in[n]$. Al因此，我们设t $Z_{k,l}:=(z_{k,l},\zeta_{k,l}^1,\dots,\zeta_{k,l}^N)$ and $\partial_{Z_k}:=(\partial_{z_k},\partial_{\zeta_k^1},\dots,\partial_{\zeta_k^N})$ for simplicit

多项式超代数（1）令 $\mathbb{K}[Z_k]_{k=1}^n$ 为超变量 $N_W=N,\dots,Z_1,\dots,Z_n$（定义 1.2.1）。接下来，令 $\mathcal{O}_n^\star=\mathbb{K}[Z_k]_{k=1}^n[z_{k,l}^{-1}]_{1\le k<l\le n}$ 为 $\mathbb{K}[Z_k]_{k=1}^n$ 关于由 $\{z_{k,l}\mid 1\le k<l\le n\}$生成的乘法封闭集的局部化。记 $\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$ 为由 $\mathcal{O}_n^\star$ 生成的子代数，即 $\{z_{k,l}^{\pm1}\mid 1\le k<l\le n\}\cup\{\zeta_{k,l}^i\mid i\in[N],\,1\le k<l\le n\}$。

$$\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}:=\mathbb{K}[z_{k,l}^{\pm1},\zeta_{k,l}^i\mid i\in[N],\ 1\le k<l\le n].$$

上标 T 表示平移不变部分。有关说明，请参见 [NY，§2.3, (2.3.11)] 。

(2) 令 $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}$ 表示由 $\{z_{k,l},\zeta_{k,l}^i\mid i\in[N],1\le k<l\le n\}\cup\{\partial_{z_k},\partial_{\zeta_k^i}\mid i\in[N],k\in[n]\}$ 生成的 $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_n^\star)$ 的子代数。

此外，按照惯例，我们设 $\mathcal{O}_0^{\star\mathrm{T}}=\mathcal{D}_0^{\mathrm{T}}:=\mathbb{K}$

在本 §1.4 结束之前，固定一个 $\mathcal{H}_W$-超模（V， ∇）。关于 1.2.2 中 $\mathcal{H}_W$ 的定义，请参见定义。

令 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$。空间 $V^{\otimes n}\otimes\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$ 通过令 $Z_{k,l}=(z_{k,l},\zeta_{k,l}^1,\dots,\zeta_{k,l}^N)$ 按如下方式作用，成为右 $\mathcal{D}_n^{\star\mathrm{T}}$-超模:

$$(v\otimes f)\cdot z_{k,l}:=v\otimes fz_{k,l},\quad (v\otimes f)\cdot\zeta_{k,l}^i:=v\otimes f\zeta_{k,l}^i$$

并令 $\partial_{Z_k}=(\partial_{z_k},\partial_{\zeta_k^1},\dots,\partial_{\zeta_k^N})$ 按如下方式作用：

$$(v\otimes f)\cdot\partial_{z_k}\coloneqq T^{(k)}v\otimes f-v\otimes\partial_{z_k}f,$$
$$(v\otimes f)\cdot\partial_{\zeta_k^i}\coloneqq(-1)^{p(v)+p(f)}S^{(k)}v\otimes f-(-1)^{p(f)}v\otimes\partial_{\zeta_k^i}f.$$

对每个 $v\in V^{\otimes n}$ 和 $f\in\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$。这里，对于 V上的线性变换 φ，符号 $\varphi^{(k)}$ 表示 $V^{\otimes n}$ 上的线性变换，该变换定义为 $\varphi^{(k)}\coloneqq\mathrm{id}_V\otimes\cdots\otimes\overset{k}{\varphi}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}_V$。

接下来，回顾一下 $\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ 具有右 $\mathcal{H}_W$-超模结构（参见[NY，（2.2.4）之前的段落]）：

$$a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\cdot T=a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\Big(-\sum_{k=1}^n\Lambda_k\Big),\quad a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\cdot S^i=a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\Big(-\sum_{k=1}^n\theta_k^i\Big)$$

对于 $a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\in\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$。于是我们可以构造一个线性超空间

$$V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n\coloneqq\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n\otimes_{\mathcal{H}_W}V.\tag{1.4.1}$$

它是一个右 $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}$-超模，其运算定义为

$$(a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\otimes v)\cdot z_{k,l}\coloneqq(\partial_{\lambda_l}-\partial_{\lambda_k})a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\otimes v,$$
$$(a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\otimes v)\cdot\zeta_{k,l}^i\coloneqq(-1)^{p(a)+p(v)}(\partial_{\zeta_l^i}-\partial_{\zeta_k^i})a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\otimes v,$$

and

$$(a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\otimes v)\cdot\partial_{z_k}\coloneqq-\lambda_k a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\otimes v,$$
$$(a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\otimes v)\cdot\partial_{\zeta_k^i}\coloneqq-(-1)^{p(a)+p(v)}\theta_k^i a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\otimes v$$

对每个 $a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\in\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ 和 $v\in V$。

定义 1.4.2。对于一个 $\mathcal{H}_W$-超模 (V,∇)，我们定义一个 $\mathfrak{S}$-超模

$$\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}\coloneqq\big(\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

如下。首先，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们定义一个线性超空间 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)$：

$$\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)\coloneqq\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}}(V^{\otimes n}\otimes\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}},V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n).$$

我们将其元素 $X\in\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)$ 记作

$$X\colon V^{\otimes n}\otimes\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\longrightarrow V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n,\quad v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f\longmapsto X_{\Lambda_1,\dots,\Lambda_n}(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f),$$

以突出超变量 Λ_k。其次，对于 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ 和 $X\in\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)$，我们定义一个线性映射 X^σ：$V^{\otimes n}\otimes\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\to V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$：

$$X^\sigma(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f)\coloneqq X_{\sigma(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)}(\sigma(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\otimes\sigma f),$$

其中

$$\sigma(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\coloneqq(\Lambda_{\sigma^{-1}(1)},\dots,\Lambda_{\sigma^{-1}(n)}),$$
$$\sigma(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\coloneqq\prod_{\substack{1\le k<l\le n\\ \sigma(k)>\sigma(l)}}(-1)^{p(v_k)p(v_l)}\cdot v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(n)},$$
$$(\sigma f)(Z_1,\dots,Z_n)\coloneqq f(Z_{\sigma(1)},\dots,Z_{\sigma(n)}),$$

于是可得 $X^\sigma\in\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)$，因此我们有 $\mathfrak{S}$-超模 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}$。

此后，对于 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ 和 $n\in\mathbb{N}$，我们使用以下记号

$$\mathbb{N}_n^m\coloneqq\{(n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{N}^m\mid n_1+\cdots+n_m=n\}.\tag{1.4.2}$$

此外，让我们回顾一下[NY，引理 2.2。3] 我们有线性同构

$$\begin{aligned}V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n&\xrightarrow{\sim}V[\Lambda_k]_{k=1}^{n-1}\\ a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\otimes v&\longmapsto a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n-1},-\Lambda_1-\cdots-\Lambda_{n-1}-\nabla)v\end{aligned}\tag{1.4.3}$$

对于 $a\in\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ 和 $v\in V$。

定义 1.4.3. 令 $m,n\in\mathbb{N}$,$(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}_n^m$, 并令 $N_j\coloneqq n_1+\cdots+n_j$ 对于 $j\in[m]$ 和 $N_0\coloneqq 0$. (1)对于 $Y_j\in\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n_j)$, $j\in[m]$, 我们定义一个线性映射

$$Y_1\odot\cdots\odot Y_m\colon V^{\otimes n}\otimes\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\longrightarrow\bigotimes_{j=1}^m V[\Lambda_k]_{k=N_{j-1}+1}^{N_j-1}\otimes\mathcal{O}_m^{\star\mathrm{T}}$$

by

$$\begin{aligned}&(Y_1\odot\cdots\odot Y_m)(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f)\\&\coloneqq\pm(Y_1)_{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_{N_1-1}}(w_1\otimes f_1)\otimes\cdots\otimes(Y_m)_{\Gamma_{N_{m-1}+1},\ldots,\Gamma_{N_m-1}}(w_m\otimes f_m)\otimes f_0|_{Z_k=Z_{N_j}(N_{j-1}<k\le N_j)}.\end{aligned}$$

对于 v_1、……、$v_n\in V$ 和 $f\in\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$。此处我们用

$$(Y_j)_{\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n_j-1}}(w)\coloneqq(Y_r)_{\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n_j-1},-\Lambda_1,\ldots,-\Lambda_{n_j-1}-\nabla}(w)\quad(w\in V^{\otimes n_j})$$

通过同构 $V[\Lambda_k]_{k=1}^{n_j-1}$ 对应于 $Y_j(w)$ 的元素记为（1.4.3）。此外，令

$$\begin{aligned}&\pm\coloneqq\prod_{1\le i<j\le m}(-1)^{p(w_i)p(Y_j)},\quad w_j\coloneqq v_{N_{j-1}+1}\otimes\cdots\otimes v_{N_j},\quad(j\in[m]),\\&\Gamma_k\coloneqq\Lambda_k-\partial_{Z_k}\quad(k\in[n]\setminus\{N_1,\ldots,N_m\}),\end{aligned}$$

and

$$f=f_0f_1\cdots f_m,\quad f_0\in\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}},\quad f_j=\prod_{N_{j-1}<k<l\le N_j}z_{k,l}^{-m_{k,l}^j}\quad(m_{k,l}^j\in\mathbb{N})$$

是一个分解，使得 f_0 在 $z_k=z_l$ $(N_{j-1}<k<l\le N_j,\ j\in[m])$ 处无极点。

(2) 对于满足 $j\in[m]$ 的 $X\in\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(m)$ 和 $Y_j\in\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n_j)$，令

$$X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m)\colon V^{\otimes n}\otimes\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\longrightarrow V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$$

表示由复合定义的线性映射

$$V^{\otimes n}\otimes\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\xrightarrow{Y_1\odot\cdots\odot Y_m}\bigotimes_{j=1}^m V[\Lambda_k]_{k=N_{j-1}+1}^{N_j-1}\otimes\mathcal{O}_m^{\star\mathrm{T}}\xrightarrow{X_{\Lambda'_1,\ldots,\Lambda'_m}}V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n.$$

这里对每个 $j\in[m]$ 设 $\Lambda'_j\coloneqq\Lambda_{N_{j-1}+1}+\cdots+\Lambda_{N_j}$，符号 $X_{\Lambda'_1,\ldots,\Lambda'_m}$ 表示由……定义的线性映射。

$$X_{\Lambda'_1,\ldots,\Lambda'_m}\colon a_1v_1\otimes\cdots\otimes a_mv_m\otimes f\longmapsto\pm(a_1\cdots a_m)X_{\Lambda'_1,\ldots,\Lambda'_m}(v_1\otimes\cdots\otimes v_m\otimes f)$$

对于每个 $a_j\in\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=N_{j-1}+1}^{N_j-1}$、$v_j\in V(j\in[m])$ 和 $f\in\mathcal{O}_m^{\star\mathrm{T}}$，带有相应的符号

$$\pm\coloneqq\prod_{1\le i<j\le m}(-1)^{p(v_i)p(a_j)}\cdot\prod_{j=1}^m(-1)^{p(a_j)p(X)}.$$

$\mathfrak{S}$-超模 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}$ 通过赋予……而具有超运算子的结构

$$X\otimes Y_1\otimes\cdots\otimes Y_m\longmapsto X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m)$$

为复合映射，且 $\mathrm{id}_V\in\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}$ (1) 为单位元。

针对 $X\in\mathcal{P}_{\Pi^{N+1}V}^{\mathrm{ch}N_W=N}$ (2)下，我们定义线性映射 $[\cdot_\Lambda\cdot]_X\colon\ V\otimes V\to V[\Lambda]$ 和 $\mu_X\colon\ V\otimes V\to V$b y

$$[a_\Lambda b]_X\coloneqq(-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})}X_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b\otimes 1_{\mathbb{K}}),\tag{1.4.4}$$

$$\mu_X(a\otimes b)\coloneqq(-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})+\overline{1}}\operatorname{Res}_\Lambda\bigl(\lambda^{-1}X_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b\otimes z_{1,2}^{-1})\bigr)\tag{1.4.5}$$

对每个 a，$b\in V$。此处 $\operatorname{Res}_\Lambda(\lambda^{-1}_)\colon\ V[\Lambda]\to V$是留数映射 [HK07，3.1。2]:

$$\operatorname{Res}_\Lambda(\lambda^{-1}\Lambda^{m|I}v)\coloneqq\delta_{m,0}\delta_{I,[N]}v\quad(m\in\mathbb{N},\ I\subset[N],\ v\in V).$$

回顾 [NY，定义 1.3.1、命题 1.3。3]，对于每个超运算子 $\mathcal{P}$，我们都有一个 $\mathbb{Z}_{\geq -1}$-分次线性超空间

$$L(\mathcal{P}) \coloneqq \bigoplus_{n\geq -1} L^n(\mathcal{P}), \quad L^n(\mathcal{P}) \coloneqq \{f \in \mathcal{P}(n+1) \mid \forall \sigma \in \mathfrak{S}_{n+1},\, f^\sigma = f\} \tag{1.4.6}$$

配备了一个线性映射 $\square\colon L(\mathcal{Q}) \otimes L(\mathcal{Q}) \to L(\mathcal{Q})$，并且存在一个双射

$$\mathrm{MC}\big(L(\mathcal{Q})\big) \coloneqq \{X \in L^1(\mathcal{Q}) \mid X\square X = 0\} \xrightarrow{\sim} \{\text{operad morphisms } \mathcal{L}ie \to \mathcal{Q}\}, \tag{1.4.7}$$

其中 $[f,g] \coloneqq f\square g - (-1)^{p(f)p(g)} g\square f$，$\mathcal{L}$ie 表示李运算子。现在我们有 e:

定理 1.4.4 ([NY，定理 2.3。15])。设 $(V,\ \nabla)$ 是一个 $\mathcal{H}_W$-超模。

(1) 对于 $X \in \mathrm{MC}\big(L\big(\mathcal{P}^{\mathrm{ch}N_W=N}_{\Pi^{N+1}V}\big)\big)_{\overline{1}}$，有序对 $([\cdot_\Lambda \cdot]_X, \mu_X)$ 是 (V,∇) 上的非幺超对称顶点代数结构。(2) 映射 $X \mapsto ([\cdot_\Lambda \cdot]_X, \mu_X)$ 给出了 $\mathrm{MC}\big(L\big(\mathcal{P}^{\mathrm{ch}N_W=N}_{\Pi^{N+1}V}\big)\big)_{\overline{1}} \xrightarrow{\sim}$ {与 (V,∇) 上的非幺超对称顶点代数结构之间的双射}.

2. The superoperad of SUSY Poisson vertex algebras

本节将引入一个超对称泊松顶点代数的代数运算子，它是 P^{cl} 中泊松顶点代数运算子的自然超对称类比 [BDHK19，§10]。

以下将使用这些符号。

- 对于集合 S，我们用 $\mathfrak{P}(S)$ 表示 S 的幂集。
- 对于有限集 S，我们用 $\#S$ 表示 S 中元素的个数。

2.1. 图与箭图。我们引用自 [BDHK19，§9] 其中关于图以及相关余运算子的术语，这些内容将用于构造我们的超对称泊松顶点代数运算子。

图是一个三元组 $G = (G_0, G_1, f)$，其中 G_0, G_1 是集合，且 $f\colon G_1 \to \mathfrak{P}(G_0)$ 是一个映射，使得对于任意 $\alpha \in G_1$，$\#f(\alpha) = 1, 2$。G_0 和 G_1 中的每个元素分别称为 G 的顶点和边。因此，按照图论的标准术语，本文中的图指的是顶点集为 G_0、边集为 G_1，且允许存在重边和边环的无向图。

定义 2.1.1. 对于图 $G = (G_0, G_1, f)$，我们使用以下记号：

- 对于一条边 $\alpha \in E$，我们记 $i \overset{\alpha}{\text{——}} j$ 以表示 $f(\alpha) = \{i, j\}$。
- 对于 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，令
$$G_l \coloneqq \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in G_1^l \mid f(\alpha_k) \cap f(\alpha_{k+1}) \neq \emptyset\ (k = 1, \dots, l-1)\}.$$
元素 $\alpha \in G_l$ 对于 $l \in \mathbb{N}$ 称为一条长度为 l 的路径。
- 对于顶点 $i, j \in G_0$，我们定义
$$G(i,j) \coloneqq \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \big\{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in G_l \mid i \in f(\alpha_1),\, j \in f(\alpha_l)\big\}.$$
这里我们采用约定，对每个 $i \in G_0$，$f(i) \coloneqq i$，由此可得 $G(i,i) \neq \emptyset$。$G(i,j)$ 中的每个元素都称为从 i 到 j 的路径。
- 长度为 $l \geq 1$ 的路径 $\alpha \in G(i,i)$称为圈。长度为 1 的圈称为环。如果 G 不含圈，则称 G 为无环。
- 对于顶点 i、$j \in G_0$，如果 $G(i,j) \neq \emptyset$，我们就称 i、j 连通。这在 G_0 上定义了一个等价关系。G_0 的一个等价类称为 G 的连通分支。

接下来，我们为 $n \in \mathbb{N}$ 引入 n-图的概念。

定义 2.1.2. 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $G = (G_0, G_1, f_G)$ 是一个图。

(1) G 称为一个 n- graph if $G_0 = [n] = \{1, \dots, n\}$.

(2) 假设 G 是一个 n-图。那么，对于 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，令 σG 表示 n-图 $\sigma G = ([n], G_1, f)$，其具有
$$f\colon G_1 \longrightarrow \mathfrak{P}([n]), \quad \alpha \longmapsto \sigma f_G(\alpha).$$
在此处及下文中，对于 $J = \{j_1, \dots, j_r\} \subset [n]$，我们令 $\sigma J \coloneqq \{\sigma(j_1) \dots, \sigma(j_r)\}$。由此作用，所有 n-图的集合构成一个左 $\mathfrak{S}_n$-集。

以下引理将在 §2.2 中用到。证明显而易见。

引理 2.1.3. 设 $n \in \mathbb{N}$、$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ 和 $G = (G_0 = [n], G_1, f)$ 是一个 n-图。
(1) 对于 i、$j \in [n]$ 和 $\alpha \in G(i, j)$，有 $\alpha \in (\sigma G)(\sigma(i)\ \sigma(j))$。(2) 对于 i、$j \in [n]$，如果 i、j 在 G 中连通，则 $\sigma(i)$ $\sigma(j)$ 在 σG 中连通。(3) n-图 G 无环，当且仅当 σG 无环。(4) 如果 $I^a \subset [n] = G_0$ 是 G 的一个连通分支，则 σI^a 是 σG 的一个连通分支。

我们还需要箭图的概念。

定义 2.1.4. 箭图是有向图，即一个元组 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$，其中 Q_0、Q_1 是集合，且 s、t: $Q_1 \to Q_0$ 是映射。Q_0 中的每个元素分别称为 Q 的一个顶点，Q_1 中的每个元素分别称为 Q 的一条边。对于箭图 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$，我们使用以下记号：

- 对于一条边 $\alpha \in Q$，我们记 $\overset{\bullet}{i} \quad \overset{\alpha}{\longrightarrow} \overset{\bullet}{j}$ 以表示 $s(\alpha) = i$ 和 $t(\alpha) = j$。
- 对于 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，我们令

$$Q_l := \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in Q_1^l \mid s(\alpha_{k+1}) = t(\alpha_k)\,(k = 1, \ldots, l-1)\}.$$

  称 $\alpha \in Q_l$ 中从 $l \in \mathbb{N}$ 出发的元素为长度为 l的有向路径。
- 对于顶点 i、$j \in I$，我们定义

$$Q(i, j) := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in Q_l \mid s(\alpha_1) = i,\, t(\alpha_l) = j\}.$$

  这里我们采用约定 $s(i) = t(i) := i$ 对于每个 $i \in Q_0$，由此有 $Q(i, i) \neq \emptyset$。$Q(i, j)$中的元素称为从 i 到 j的有向路径。
- 长度为 $l \geq 1$ 的有向路径 $\alpha \in Q(i, i)$称为有向圈。长度为1的有向圈称为环。
- 令 f_Q: $Q_1 \to \mathfrak{P}(Q_0)$ 表示由 $f(\alpha) := \{s(\alpha)\ t(\alpha)\}$ 定义的映射，则我们得到一个图 $\underline{Q} := (Q_0, Q_1, f_Q)$。图 $\underline{Q}$ 称为 Q 的底层图。

例如，$Q = ([5], Q_1, s, t)$，其中 $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$，$s(\alpha_1) = 1$，$t(\alpha_1) = 2$，$s(\alpha_2) = 4$，$t(\alpha_2) = 1$，$s(\alpha_3) = 5$，$t(\alpha_1) = 4$，是一个箭图，如图所示：

$$Q = \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & \overset{\alpha_2}{\curvearrowleft} & & & & & \\ 1 & \overset{\alpha_1}{\longrightarrow} & 2 & & 3 & & 4 & \overset{\alpha_3}{\longleftarrow} & 5 \end{array} \tag{2.1.1}$$

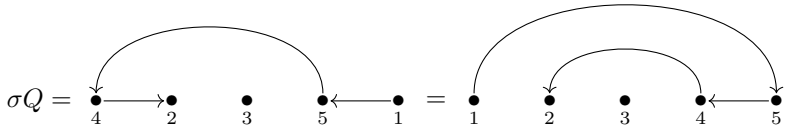
底层图 $\underline{Q}$ 是一个有向无环图，如图所示：

$$\underline{Q} = \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & \overset{\alpha_2}{\curvearrowleft} & & & & & \\ 1 & \overset{\alpha_1}{\longrightarrow} & 2 & & 3 & & 4 & \overset{\alpha_3}{\longrightarrow} & 5 \end{array}$$

现在我们利用箭图引入一个集合论余幺半群。我们需要一个左 $\mathfrak{S}$-集合，即一个由集合 $\mathcal{Q}(n)$ 组成的序列 $\big(\mathcal{Q}(n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$，并且这些集合带有左 $\mathfrak{S}_n$-作用。

定义 2.1.5. 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $Q = (Q_0, Q_1, s_Q, t_Q)$。
(1) 若满足 $Q_0 = [n]$，则称 Q 为 n-箭图。(2) 假设 Q 是一个 n-箭图。那么，对于 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，令 σQ 表示 n-箭图 $\sigma Q = ([n], Q_1, \sigma s_Q, \sigma t_Q)$，其中对每条边 $\alpha \in Q_1$，有 $(\sigma s_Q)(\alpha) := \sigma(s_Q(\alpha))$ 和 $(\sigma t_Q)(\alpha) := \sigma(t_Q(\alpha))$。所有 n- 箭图的集合在此作用下构成一个左 $\mathfrak{S}_n$- 集。

对于循环置换 $\sigma=(1,\ 4,\ 5)\in\mathfrak{S}_5$ 以及式（Q 中的 5-箭图（2.1.1），有



下面引理的证明是显然的。

引理 2.1.6. 设 $n\in\mathbb{N}$, $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ 和 $Q=([n],Q_1,s_Q,t_Q)$ 是一个 n-箭图。

(1) 对于 $i,j\in[n]$ 和 $\alpha\in Q(i,j)$，有 $\alpha\in(\sigma Q)(\sigma(i)\ \sigma(j))$。(2) σQ 的底层图等于定义 2.1.2 (2) 中的 $\sigma\underline{Q}$。(3) 对于 $\alpha\in Q_1$，设 $Q\setminus\alpha=([n],E,s,t)$ 是从 Q 中移除边 α 后得到的箭图，即 $E=Q_1\setminus\{\alpha\}$，$s=s_Q|_E$ 和 $t=t_Q|_E$。则有 $\sigma(Q\setminus\alpha)=(\sigma Q)\setminus\alpha$。

定义 2.1.7. 对于 $n\in\mathbb{N}$:

(1) 令 $\mathcal{Q}(n)$ 表示所有无环的 n-箭图所组成的集合。(2) 我们将 $\mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(n)$ 表示为由满足以下条件的 $Q\in\mathcal{Q}(n)$ 组成的集合：其底层图 $\underline{Q}$ 按照定义 2.1.1 的意义是无环的。

注意，$\mathcal{Q}(0)=\mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(0)=\{\emptyset\}$，其中 $\emptyset=(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\emptyset)$ 表示空箭图。

接下来我们引用 [BDHK19, 9.1] 中左侧 $\mathfrak{S}$-集合 $\mathcal{Q}=\big(\mathcal{Q}(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$上的余合成映射，由此得到一个集合论余幺半群 $\mathcal{Q}$。回顾记号 $\mathbb{N}_n^m:=\{(n_1,\ \ldots\ldots,\ n_m)\in\mathbb{N}^m\mid n_1+\cdots+n_m=n\}$ 来自（1.4.2）。

定义 2.1.8。令 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$、$n\in\mathbb{N}$ 和 $\nu=(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}_n^m$。对每个 $k\in[m]$，置 $N_k:=n_1+\cdots+n_k$，并置 $N_0:=0$。对于 $Q=([n],E,s,t)\in\mathcal{Q}(n)$:

(1) 对每个 $k\in[m]$ by，我们定义一个 n_k-箭图 $\Delta_k^\nu(Q)=([n_k],E_k,s_k,t_k)\in\mathcal{Q}(n_k)$。

$$E_k:=\{\alpha\in E\mid s(\alpha),t(\alpha)\in\{N_{k-1}+1,\ldots,N_k\}\},$$
$$s_k(\alpha):=s(\alpha)-N_{k-1},\quad t_k(\alpha):=t(\alpha)-N_{k-1}.$$

(2) 我们定义一个 m-箭图 $\Delta_0^\nu(Q)=([m],E_0,s_0,t_0)\in\mathcal{Q}(m)$ 为

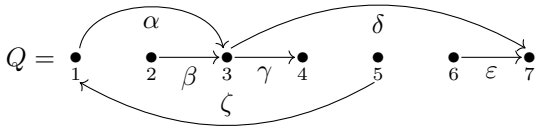
$$E_0:=\{\alpha\in E\mid\{s(\alpha),t(\alpha)\}\not\subset\{N_{k-1}+1,\ldots,N_k\}\ (k\in[m])\},$$
$$s_0(\alpha):=i\quad\text{如果 } s(\alpha)\in\{N_{i-1}+1,\ldots,N_i\},\quad t_0(\alpha):=j\quad\text{如果 } t(\alpha)\in\{N_{j-1}+1,\ldots,N_j\}.$$

该映射

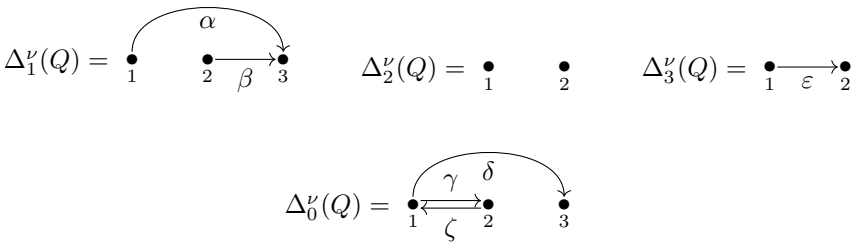
$$\Delta^\nu:\ \mathcal{Q}(n)\longrightarrow\mathcal{Q}(m)\times\mathcal{Q}(n_1)\times\cdots\times\mathcal{Q}(n_m),\quad Q\longmapsto\big(\Delta_0^\nu(Q),\Delta_1^\nu(Q),\ldots,\Delta_m^\nu(Q)\big)$$

称为 n-箭图的余合成。

例 2.1.9. 设 $\nu=(3,2,2)\in\mathbb{N}_7^3$，且 Q 为如下所示的 7-箭图



于是我们有



定义 2.1.10 ([BDHK19，定义 9。4])。令 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，$n \in \mathbb{N}$ 以及 $\nu = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}_n^m$。我们设$N_k := n_1 + \cdots + n_k$对每个 $k \in [m]$ 以及 $N_0 := 0$。

(1) 对于 $Q = ([n], E, s, t) \in \mathcal{Q}(n)$、$i \in [m]$和 $j \in [n]$，如果底层图$\Delta_0^\nu(Q)$中存在一条路径 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \Delta_0^\nu(Q)(i,k)$，其中 $k \in [m]$ 满足 $j \in \{N_{k-1}+1, \ldots, N_k\}$，且满足以下条件，则称顶点 i 在 $\Delta^\nu(Q)$中与顶点 j外部连通：(i) 边 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$之间没有重叠。(ii) 存在 $p \in [r]$ 使得 $j \in \{s(\alpha_p)\ t(\alpha_p)\} \subset [n] = Q_0$。(2) 对于 $Q \in \mathcal{Q}(n)$ 和 $j \in [n]$，令 $\mathcal{E}_Q^\nu(j)$表示由所有在 $\Delta^\nu(Q)$中与 j 外部连通的 $i \in [m]$ 构成的集合。

例 2.1.11. 对于 $\nu = (3, 2, 2)$ 以及 Q 在例 2.1.9中，

$$\mathcal{E}_Q^\nu(1) = \{1,2,3\}, \quad \mathcal{E}_Q^\nu(2) = \emptyset, \quad \mathcal{E}_Q^\nu(3) = \{1,2,3\},$$
$$\mathcal{E}_Q^\nu(4) = \{1,2,3\}, \quad \mathcal{E}_Q^\nu(5) = \{1,2,3\}, \quad \mathcal{E}_Q^\nu(6) = \emptyset, \quad \mathcal{E}_Q^\nu(7) = \{1,2\}.$$

2.2. 超对称泊松顶点代数的超运算子。本小节中，我们引入 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}$ 的 $N_W = N$ 超对称泊松顶点代数（定义 2.2.1），并在定理 2.2.10 中证明，$N_W = N$ 超对称泊松顶点代数的结构与歌剧 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}$上的奇李代数结构一一对应。和之前一样，我们固定一个非负整数 N，并使用记号 $\nabla = (T, S^1, \ldots, S^N)$。

首先，我们按照 ⓈBDHK19 第 10 节中非 SUSY 情形的论述，引入超运算子的底层 [BDHK19，§10。2]。令 $\Lambda_k = (\lambda_k, \theta_k^1, \ldots, \theta_k^N)$ 对每个 $1|N)_W$都是一个 ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$。

定义 2.2.1. 设 $V = (V, \nabla)$ 是一个 $\mathcal{H}_W$-超模，且 $n \in \mathbb{N}$。回顾 (1.4.1) 中的线性超空间 $V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$，以及定义 $\mathfrak{S}_n$-集 $\mathcal{Q}(n)$，它由定义 n2.1.7 中的无环 $\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)$ 箭图构成。我们将 $\mathbb{K}$-线性空间记为 $\mathcal{Q}(n)$，其基为 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}(n)$。现在定义

$$X : V^{\otimes n} \otimes \mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n) \longrightarrow V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$$

满足以下条件的线性映射空间，对每个 $Q \in \mathcal{Q}(n)$ 均成立。记作

$$X^Q := X(- \otimes Q) : V^{\otimes n} \longrightarrow V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n. \tag{2.2.1}$$

(i)（循环关系）

- 若 $Q \in \mathcal{Q}(n) \setminus \mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(n)$，即底层图 $\underline{Q}$ (定义 2.1.4) 含有一个圈，则有 $X^Q = 0$。
- 对于 Q 的有向圈 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$，有 $\sum_{q=1}^r X^{Q \setminus \alpha_q} = 0$。关于箭图 2.1.6 的解释，参见引理 $Q \setminus \alpha_q$。

(ii)（半线性条件）

- 对于$\underline{Q}$的一个连通分支 I^a，我们有

$$(\partial_{\lambda_k} - \partial_{\lambda_l}) X^Q(v) = 0 \quad (k, l \in I^a,\ v \in V^{\otimes n}), \tag{2.2.2}$$

and

$$\sum_{k \in I^a} X^Q(T^{(k)} v) = -\sum_{k \in I^a} \lambda_k X^Q(v) \quad (v \in V^{\otimes n}). \tag{2.2.3}$$

此处及下文，对于一个线性变换 $\varphi \in \mathrm{End}\, V$，符号 $\varphi^{(k)}$ 表示由 $\varphi^{(k)} := \mathrm{id}_V \otimes \cdots \otimes \overset{k}{\varphi} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_V$定义的 $V^{\otimes n}$ 上的线性变换。

- 对于每个 $k \in [n]$，我们有

$$X^Q((S^i)^{(k)} v) = -(-1)^{p(X)} \theta_k^i X^Q(v) \quad (v \in V^{\otimes n}). \tag{2.2.4}$$

注记 2.2.2. 循环关系与非 SUSY 情形相同[BDHK19, (10.4), (10.5)]，且半线性条件中“玻色子部分”（2.2.2）和（2.2.3）与 [BDHK19, (10.6), (10.7)]。“费米子部分”（2.2.4）是我们定义中的新内容。

在本§ 2.2的其余部分中，我们固定一个 $\mathcal{H}_W$-超模 $V = (V, \nabla)$。仿照非 SUSY 情形 $\mathfrak{S}_n$，我们为每个 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}(n$定义对称群 $n \in \mathbb{N}$在 [BDHK19, (10.10)]上的右作用：

De义 2.2.3. 设 $n \in \mathbb{N}$。对于 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ 和 $X \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{clN}_W=N}(n)$，我们定义一个线性映射

$$X^\sigma \colon V^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{Q}(n) \longrightarrow V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$$

by

$$X^\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes Q) \coloneqq X^{\sigma Q}_{\sigma(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n)}\big(\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\big) \quad (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n},\, Q \in \mathcal{Q}(n)),$$

其中，对 $Q = (Q_0,\ Q_1,\ s_Q,\ t_Q)$ 我们令 $\sigma Q \colon = (Q_0,\ Q_1,\ \sigma s_Q,\ \sigma t_Q)$，其中 σs_Q 且 σt_Q 由定义 2.1.5给出

$$\begin{aligned}
&\sigma(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n) \coloneqq \big(\Lambda_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,\Lambda_{\sigma^{-1}(n)}\big),\\
&\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \coloneqq \prod_{\substack{1\le k<l\le n\\ \sigma(k)>\sigma(l)}} (-1)^{p(v_k)p(v_l)} \cdot v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}.
\end{aligned}$$

如下一个引理 2.2.4所示，这个 $\mathfrak{S}_n$-作用是良定义的。证明思路与非 SUSY 情形 [BDHK19，定理 10.6，证明，第 1 段相似。

引理 2.2.4. 设 $n \in \mathbb{N}$. 对任意 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ 和 $X \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{clN}_W=N}(n)$，有 $X^\sigma \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{clN}_W=N}(n)$。

证明。我们不妨设 $n > 1$。我们证明线性映射 X^σ 满足循环关系和对称线性条件。固定 $Q \in \mathcal{Q}(n)$。

- X^σ 满足第一个循环关系：若 $\underline{Q}$ 含有一个圈，则根据引理 $\underline{\sigma Q} = \sigma\underline{Q}$ 也含有一个圈 2.1.3 (1)、(3)。因此，对每个 $v \in V^{\otimes n}$，有
$$(X^\sigma)^Q(v) = X^{\sigma Q}_{\sigma(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n)}(\sigma v) = 0.$$
- X^σ 满足第二个循环关系：利用引理 2.1.6(1)、(3) 可通过直接计算验证。
- X^σ 满足半线性条件（2.2.2）：设 I^a 是 $\underline{Q}$的一个连通分支。对于k，$l \in I^a$我们有

$$\begin{aligned}
(\partial_{\lambda_k} - \partial_{\lambda_l})(X^\sigma)^Q(v) &= (\partial_{\lambda_k} - \partial_{\lambda_l}) X^{\sigma Q}_{\sigma(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n)}(\sigma v)\\
&= \big(\partial_{\lambda'_{\sigma(k)}} - \partial_{\lambda'_{\sigma(l)}}\big) X^{\sigma Q}_{\Lambda'_1,\ldots,\Lambda'_n}(\sigma v)\Big|_{(\Lambda'_1,\ldots,\Lambda'_n)=\sigma(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n)}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

  其中 Λ'_1、.....、Λ'_n 是 $(1|N)_W$-超变量 iabl$^{\text{es, an}}$ d 我们使用d L 引理.. 2 1 3 (2) in the third equality.
- X^σ 满足半线性条件（2.2.3）：直接计算可得
$$\sigma(T^{(k)}v) = T^{(\sigma(k))}(\sigma v) \quad (v \in V^{\otimes n}).$$
  对于 $k \in [n]$。该恒等式和引理 2.1.3 (4) 给出了所述结论。
- X^σ 满足半线性条件（2.2.4）：对于 $k \in [n]$，可得
$$\sigma((S^i)^{(k)}v) = (S^i)^{(\sigma(k))}(\sigma v) \quad (v \in V^{\otimes n}),$$
  由此得到该结论。

□

在此作用下，线性超空间 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{chN}_W=N}(n)$ 是一个右 $\mathfrak{S}_n$-超模。因此，我们有一个 $\mathfrak{S}$-超模 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{clN}_W=N} \coloneqq \big(\mathcal{P}_V^{\mathrm{clN}_W=N}(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^\circ}$

为了描述 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{clN}_W=N}$ 上的复合映射，我们引入额外的 $(1|N)_W$-超变量 $\Xi_k = (x_k, \xi_k^1, \ldots, \xi_k^N)$，其中 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，并且对于 $m, n \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{N}_n^m$, $Q \in \mathcal{Q}(n)$ 和 $j \in [n]$，我们定义

$$\Xi_Q^\nu(j) \coloneqq \sum_{i \in \mathcal{E}_Q^\nu(j)} \Xi_i.$$

这里 $\mathcal{E}_Q^\nu(j)$ 是 $i \in [m]$ 与 j 相连接的集合，其定义见定义 2.1.10。另外，回顾同构（1.4.3）。现在，按照 [BDHK19，（10.11）–（10.13）]，我们引入复合映射如下：

定义 2.2.5。令 m、$n \in \mathbb{N}$ 和 $\nu = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}_n^m$。对 $j \in [m]$，置 $N_j := n_1 + \cdots + n_j$，并置 $N_0 := 0$。

(1) 对于 $Y_j \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}(n_j)$、$j \in [m]$，我们定义一个线性映射

$$Y_1 \odot \cdots \odot Y_m \colon V^{\otimes n} \otimes \mathbb{K}\, \mathcal{Q}(n) \longrightarrow \bigotimes_{j=1}^{m} V_\nabla[\Lambda_k]_{k=N_{j-1}+1}^{N_j} \otimes \mathbb{K}\, \mathcal{Q}(m) \cong \bigotimes_{j=1}^{m} V[\Lambda_k]_{N_{j-1}+1}^{N_j-1} \otimes \mathbb{K}\, \mathcal{Q}(m)$$

by

$$\begin{aligned}&(Y_1 \odot \cdots \odot Y_m)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes Q)\\ &:= \pm (Y_1)_{\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{N_1}}^{\Delta_1^\nu(Q)}(w_1) \otimes \cdots \otimes (Y_m)_{\Lambda_{N_{m-1}+1},\ldots,\Lambda_{N_m}}^{\Delta_m^\nu(Q)}(w_m) \otimes \Delta_0^\nu(Q)\end{aligned}$$

对于 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ 和 $Q \in \mathcal{Q}(n)$。这里我们使用了

$$\pm := \prod_{1 \le i < j \le m} (-1)^{p(w_i)p(Y_j)}, \quad w_j := v_{N_{j-1}+1} \otimes \cdots \otimes v_{N_j} \quad (j \in [m]).$$

(2) 对于满足 $j \in [m]$ 的 $X \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}(m)$ 和 $Y_j \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}(n_j)$，令

$$X \circ (Y_1 \odot \cdots \odot Y_m) \colon V^{\otimes n} \otimes \mathbb{K}\, \mathcal{Q}(n) \longrightarrow V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$$

为由下列线性映射复合定义的线性映射：

$$\begin{aligned}V^{\otimes n} \otimes \mathbb{K}\, \mathcal{Q}(n) &\xrightarrow{Y_1 \odot \cdots \odot Y_m} \bigotimes_{j=1}^{m} V[\Lambda_k]_{k=N_{j-1}+1}^{N_j-1} \otimes \mathbb{K}\, \mathcal{Q}(m)\\ &\longrightarrow V^{\otimes m}[\Lambda_k]_{k=1}^n \otimes \mathbb{K}\, \mathcal{Q}(m) \xrightarrow{X_{\Lambda_1',\ldots,\Lambda_m'}} V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n.\end{aligned}$$

这里，第二个箭头表示由以下方式定义的线性映射

$$a_1 v_1 \otimes \cdots \otimes a_m v_m \otimes Q \longmapsto \pm a|_{\Xi_j = \Lambda_j' + \nabla^{(j)}\ (j=1,\ldots,m)}\, (v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \otimes Q$$

对于每个满足条件的 $a_j \in \mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=N_{j-1}+1}^{N_j-1}$、$v_j \in V$ 和 $Q \in \mathcal{Q}(m)$

$$\begin{aligned}\pm &:= \prod_{1 \le i < j \le m} (-1)^{p(v_i)p(a_j)}, \quad \Lambda_j' := \Lambda_{N_{j-1}+1} + \cdots + \Lambda_{N_j} \quad (j \in [m]),\\ a &:= \prod_{j=1}^{m} a_r(\Lambda_{N_{j-1}+1} + \Xi_Q^\nu(N_{j-1}+1), \ldots, \Lambda_{N_j-1} + \Xi_Q^\nu(N_j - 1)),\end{aligned}$$

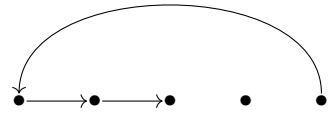
第三个箭头$X_{\Lambda_1',\ldots,\Lambda_m'}$ 是由下式定义的线性映射

$$X_{\Lambda_1',\ldots,\Lambda_m'} \colon b(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \otimes Q \longmapsto (-1)^{p(X)p(b)} b X_{\Lambda_1',\ldots,\Lambda_m'}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \otimes Q)$$

for $b \in \mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$, $v_j \in V$ and $Q \in \mathcal{Q}(n)$.

这个定义看起来相当复杂，而且很难看出复合映射保持循环关系和半线性条件。为了说明半线性条件，特别是“费米子部分”（2.2.4），下面给出一个复合的例子。

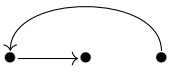
例 2.2.6。考虑 $m = 3$, $n = 5$, $\nu = (n_1, n_2, n_3) = (2, 1, 2)$ 和 $X \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}(3)$,$Y_r \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}(n_r)$，其中 $r \in [3]$。对于箭图

$Q =$ 

让我们计算一下

$$(X \circ (Y_1 \odot Y_2 \odot Y_3))(v_1 \otimes \cdots \otimes v_5 \otimes Q) \quad (v_1, \ldots, v_5 \in V),$$

并检查半线性条件（2.2.3）和（2.2.4）对于 $X\circ(Y_1\odot Y_2\odot Y_3)$。首先我们计算余合成 $\Delta^\nu(Q)$：

$\Delta_0^\nu(Q)=$  $\Delta_1^\nu(Q)=$ $\Delta_2^\nu(Q)=\bullet$ $\Delta_3^\nu(Q)=\bullet\quad\bullet$

Thus

$$\begin{aligned}&(X\circ(Y_1\odot Y_2\odot Y_3))(v_1\otimes\cdots\otimes v_5\otimes Q)\\&=X^{\Delta_0^\nu(Q)}_{\Lambda_1',\Lambda_2',\Lambda_3'}\Big((Y_1)^{\Delta_1^\nu(Q)}_{\Gamma_1}(v_1\otimes v_2)\otimes(Y_2)^{\Delta_2^\nu(Q)}(v_3)\otimes(Y_3)^{\Delta_3^\nu(Q)}_{\Gamma_4}\Big|_{\Xi_r=\Lambda_r'+\nabla^{(r)}\ (r=1,2,3)}\Big)\end{aligned}$$

with

$$\Lambda_1'\coloneqq\Lambda_1+\Lambda_2,\quad \Lambda_2'\coloneqq\Lambda_3\quad \Lambda_3'\coloneqq\Lambda_4+\Lambda_5,\quad \Gamma_1\coloneqq\Lambda_1+\Xi_Q^\nu(1),\quad \Gamma_4\coloneqq\Lambda_4+\Xi_Q^\nu(4).$$

这里我们省略 Λ_2 在 $(Y_1)^{\Delta_1^\nu(Q)}_{\Lambda_1,\ \Lambda_2}(v_1\otimes v_2)$，当我们使用同构（1.4.3）时，以及对于 Y_2 和 Y_3。由 $\mathcal{E}_Q^\nu(1)=\{3\}$ 和 $\mathcal{E}_Q^\nu(4)=\emptyset$，我们有 $\Gamma_1=\Lambda_1+\Xi_3$ 和 $\Gamma_4=\Lambda_4$，因此得到

$$\begin{aligned}&(X\circ(Y_1\odot Y_2\odot Y_3))(v_1\otimes\cdots\otimes v_5\otimes Q)\\&=X^{\Delta_0^\nu(Q)}_{\Lambda_1',\Lambda_2',\Lambda_3'}\Big((Y_1)^{\Delta_1^\nu(Q)}_{\Lambda_1+\Lambda_3'+\nabla^{(3)}}(v_1\otimes v_2)\otimes(Y_2)^{\Delta_2^\nu(Q)}(v_3)\otimes(Y_3)^{\Delta_3^\nu(Q)}_{\Lambda_4}(v_4\otimes v_5)\Big)\\&=X^{\Delta_0^\nu(Q)}_{\Lambda_1+\Lambda_2,\Lambda_3,\Lambda_4+\Lambda_5}\Big((Y_1)_{-\Lambda_2-\Lambda_3-\nabla^{(1)}-\nabla^{(2)}}(v_1\otimes v_2)\otimes(Y_2)^{\Delta_2^\nu(Q)}(v_3)\otimes(Y_3)^{\Delta_3^\nu(Q)}_{\Lambda_4}(v_4\otimes v_5)\Big),\end{aligned}$$

其中第二个等号处用到了2.2.3中的半线性条件 X。现在很容易看出，$X\circ(Y_1\odot Y_2\odot Y_3)$ 满足半线性条件（2.2.3）和（2.2.4）。

如下面的引理所示 2.2.7，$\mathfrak{S}$-模 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}$ 在定义 2.2.5中的复合映射下是闭合的。证明的策略与非 SUSY 情形 [BDHK19，引理 10.5], 相同，但我们还是将其写出。

引理 2.2.7. 设 m、$n\in\mathbb{N}$ 和 $\nu\in\mathbb{N}_n^m$。对于任意的 $X\in\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}(m)$ 和 $Y_1\otimes\cdots\otimes Y_m\in\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}(\nu)$，我们有

$$X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m)\in\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}(n).$$

证明。设 $\nu=(n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{N}_n^m$，并固定 $v=v_1\otimes\cdots\otimes v_n\in V^{\otimes n}$。对于 $j\in[m]$，我们采用与定义 2.2.5 中类似的记号：

$$N_j\coloneqq n_1+\cdots+n_j,\quad w_j\coloneqq v_{N_{j-1}+1}\otimes\cdots\otimes v_{N_j},\quad \Lambda_j'\coloneqq\Lambda_{N_{j-1}+1}+\cdots+\Lambda_{N_j}.$$

对于每个 $j\in[m]$、$Q\in\mathcal{Q}(n_j)$ 和 $w\in V^{\otimes n_j}$，记作

$$\begin{aligned}&a_j^Q(w)(\Lambda_{N_{j-1}+1},\dots,\Lambda_{N_j-1})\coloneqq(Y_j)^Q_{\Lambda_{N_{j-1}+1},\dots,\Lambda_{N_j-1},-\Lambda_{N_{j-1}+1}-\cdots-\Lambda_{N_j-1}-\nabla}(w),\\&\widetilde{a}_j^Q(w)\coloneqq a_j^Q(w)\big(\Lambda_{N_{j-1}+1}+\Xi_Q^\nu(N_{j-1}+1),\dots,\Lambda_{N_j-1}+\Xi_Q^\nu(N_j-1)\big)\Big|_{\Xi_k=\Lambda_k'+\nabla^{(k)}\ (k=1,\dots,m)}.\end{aligned}$$

那么，对于 $Q\in\mathcal{Q}(n)$，我们有

$$(X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m))^Q(v)=\pm X^{\Delta_0^\nu(Q)}_{\Lambda_1',\dots,\Lambda_m'}\Big(\widetilde{a}_1^{\Delta_1^\nu(Q)}(w_1)\otimes\cdots\otimes\widetilde{a}_m^{\Delta_m^\nu(Q)}(w_m)\Big)$$

其中 $\pm:=\prod_{1\le i<j\le m}(-1)^{p(w_i)p(Y_j)}$。现在我们验证定义 2.2.1 中的循环关系和半线性条件。

- $X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m)$ 满足第一个循环关系：若 $Q\in\mathcal{Q}(n)\setminus\mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(n)$，则显然 $\Delta_j^\nu(Q)\in\mathcal{Q}(n_j)\setminus\mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(n_j)$，其中某个 $j\in[m]$ or $\Delta_0^\nu(Q)\in\mathcal{Q}(m)\setminus\mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(m)$。因此，对于任意 $Q\in\mathcal{Q}(n)\setminus\mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(n)$，我们有 $(X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m))^Q=0$，因为 X、.....、Y_m 满足第一个循环关系。

- $X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m)$ 满足第二个循环关系：设 $Q\in\mathcal{Q}(n)$ 和 $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ 是 Q 的一个圈。记箭图 Γ 的顶点集为 $E(\Gamma):=\Gamma_1$。若对某个 $j\in[m]$，有 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}\subset E(\Delta_j^\nu(Q))$，则 $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ 是 $\Delta_j^\nu(Q)$ 的一个圈。因此

$$\begin{aligned}&\sum_{q=1}^{k}(X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m))^{Q\setminus\alpha_q}(v)\\&=\pm X^{\Delta_0^\nu(Q)}_{\Lambda_1',\dots,\Lambda_m'}\Big(\widetilde{a}_1^{\Delta_1^\nu(Q)}(w_1)\otimes\cdots\otimes\Big(\sum_{q=1}^{k}\widetilde{a}_j^{\Delta_j^\nu(Q)\setminus\alpha_q}(w_j)\Big)\otimes\cdots\otimes\widetilde{a}_m^{\Delta_m^\nu(Q)}(w_m)\Big)\\&=0\end{aligned}$$

因为 Y_j 满足第二个循环关系。如果对于任意 $j\in[m]$，$\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}\not\subset E(\Delta_j^\nu(Q))$，那么存在 $\beta_1,\dots,\beta_l\in\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$，使得 $(\beta_1,\dots,\beta_l)$ 是 $\Delta_0^\nu(Q)$ 的一个有向圈，并且

$$A:=\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}\setminus\{\beta_1,\dots,\beta_l\}\subset E(Q)\setminus E(\Delta_0^\nu(Q)).$$

Thus

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{k}(X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m))^{Q\setminus\alpha_q}(v)&=\sum_{\alpha\in A}X^{\Delta_0^\nu(Q)}_{\Lambda_1',\dots,\Lambda_m'}\Big(\widetilde{a}_1^{\Delta_1^\nu(Q\setminus\alpha)}(w_1)\otimes\cdots\otimes\widetilde{a}_m^{\Delta_m^\nu(Q\setminus\alpha)}(w_m)\Big)\\&\quad+\sum_{q=1}^{l}X^{\Delta_0^\nu(Q)\setminus\beta_q}_{\Lambda_1',\dots,\Lambda_m'}\Big(\widetilde{a}_1^{\Delta_1^\nu(Q)}(w_1)\otimes\cdots\otimes\widetilde{a}_m^{\Delta_m^\nu(Q)}(w_m)\Big)\\&=0\end{aligned}$$

因为 X 满足第一个和第二个循环关系。

- $X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m)$ 满足半线性条件（2.2.2）：对于 k，$l\in[n]$ 使得 k，l 在 Q中连通，我们需要证明

$$(\partial_{\lambda_k}-\partial_{\lambda_l})(X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m))^Q(v)=0.\tag{2.2.5}$$

如果对于某个 $j\in[m]$，$k,l\in\{N_{j-1}+1,\dots,N_j\}$，那么 Λ_k, Λ_l 以 $\Lambda_k+\Lambda_l$ 的形式出现在 Λ_j' 中，并且对于 $q\in[m]\setminus\{j\}$ 不出现在 Λ_q' 中。此外，顶点 $k-N_{j-1}$ 和 $l-N_{j-1}$ 在 $\Delta_j^\nu(Q)$ 中连通。因此，Y_j 的半线性条件（2.2.2）推出（2.2.5）。如果对于不同的 $i,j\in[m]$，$k\in\{N_{i-1},\dots,N_i\}$ 和 $l\in\{N_{j-1},\dots,N_j\}$，那么 i,j 在 $\Delta_0^\nu(Q)$ 中连通。此外，根据 $Y_1,\dots,Y_m$ 的半线性条件以及 Ξ_Q^ν 的定义，我们有：出现在$\widetilde{a}_q^{\Delta_q^\nu(Q)}(w_q)$（$q\in[m]$）中的 Λ_k, Λ_l 具有 $\Lambda_k+\Lambda_l$ 的形式。因此，恒等式（2.2.5）成立。

- $X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m)$ 满足半线性条件（2.2.3）：设 I^a 是 $\underline{Q}$的一个连通分支，并令

$$I_j^a:=\underline{\Delta_j^\nu(Q)}\cap\{k-N_{j-1}\mid k\in I_j\}$$

对于 $j\in[m]$。显然，每个 I_j^a都是 $\Delta_j^\nu(Q)$ 的一个连通分支。若 $\underline{\Delta_0^\nu(Q)}$ 含有圈，则根据 X的第一条循环关系，2.2.3中关于 $X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m)$ 的半线性条件是平凡的。因此，我们可以假设 $\Delta_0^\nu(Q)$ 无环。于是，我们有 $\#I^a=\sum_{j=1}^m\#I_j^a$，这意味着

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in I^a}(X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m))^Q(T^{(k)}v)\\&=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k\in I_j^a}X^{\Delta_0^\nu(Q)}_{\Lambda_1',\dots,\Lambda_m'}\Big(\widetilde{a}_1^{\Delta_1^\nu(Q)}(w_1)\otimes\cdots\otimes\widetilde{a}_j^{\Delta_j^\nu(Q)}(T^{(k)}w_j)\otimes\cdots\otimes\widetilde{a}_m^{\Delta_m^\nu(Q)}(w_m)\Big).\end{aligned}$$

根据2.2.3的半线性条件，Y_j，我们有

$$\sum_{k\in I_j^a}\widetilde{a}_j^{\Delta_j^\nu(Q)}(T^{(k)}w_j)=-\sum_{k\in I_j^a}\big(\lambda_{N_{j-1}+k}+x_Q^\nu(N_{j-1}+k)\big)\big|_{\Xi_q=\Lambda_q'}\widetilde{a}_j^{\Delta_j^\nu(Q)}(w_j).$$

因此，可以根据2.2.3中的 X半线性条件得到，

$$\sum_{k\in I^a}(X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m))^Q(T^{(k)}v)=-\sum_{k\in I^a}\lambda_k(X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m))^Q(v).$$

- $X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m)$ 满足半线性条件（2.2.4）：这可以仿照半线性条件（2.2.3）进行验证。

□

命题 2.2.8. 对于一个 $\mathcal{H}_W$-超模 $V=(V,\nabla)$， $\mathfrak{S}$-超模

$$\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}=\left(\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

通过令 $X\otimes Y_1\otimes\cdots\otimes Y_m\mapsto X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m)$ 为复合映射，并令 $\mathrm{id}_V\in\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}(1)$ 为单位元，可得到一个超运算子。

证明。 非 SUSY 情形的证明 [BDHK19，定理 10。6] 稍作修改即可适用。细节从略。 □

定义 2.2.9 。我们称超运算子 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}$ 为 $V=(V,\nabla$ 的 $N_W=N$ 超对称 coisson 运算子).

回顾（1.4.7）中的 Maurer-Cartan 解空间。以下是本 §2.2 的主定理，它是 $N_W=N$ SUSY 类比 [BDHK19，定理 10。7]。

定理 2.2.10. 设 $V=(V,\nabla)$ 为一个 $\mathcal{H}_W$-超模。

(1) 对于一个奇 Maurer-Cartan 解 $X\in\mathrm{MC}\left(L\left(\mathcal{P}_{\Pi^{N+1}V}^{\mathrm{cl}N_W=N}\right)\right)_{\overline{1}}$，定义线性映射 $\{\cdot_\Lambda\cdot\}_X\colon\ V\otimes V\to V[\Lambda]$ 以及 $\mu_X\colon\ V\otimes V\to V$，其定义为

$$\{a_\Lambda b\}_X:=(-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})}X^{\bullet\ \bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b)\tag{2.2.6}$$

$$\mu_X(a\otimes b):=(-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})}\operatorname{Res}_\Lambda\left(\lambda^{-1}X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b)\right)\tag{2.2.7}$$

对每个 a、$b\in V$。则 $(V,\nabla,\{\cdot_\Lambda\cdot\}_X,\mu_X)$ 是一个非幺 $N_W=N$ SUSY 泊松顶点代数。(2) 映射 $X\mapsto(\{\cdot_\Lambda\cdot\}_X,\mu_X)$ 给出了一个双射

$$\mathrm{MC}\left(L\left(\mathcal{P}_{\Pi^{N+1}V}^{\mathrm{cl}N_W=N}\right)\right)_{\overline{1}}\xrightarrow{\sim}\{\text{non-unital } N_W=N \text{ SUSY PVA structure on } (V,\nabla)\}.$$

在本第 2.2 节的其余部分，我们证明定理 2.2.10。为简便起见，记 $\widetilde{V}:=\Pi^{N+1}V=(\Pi^{N+1}V,\nabla)$ 和 $\mathcal{P}:=\mathcal{P}_{\Pi^{N+1}V}^{\mathrm{cl}N_W=N}$，并令 $p,\widetilde{p}$ 分别为 $V,\widetilde{V}$ 的宇称。考虑由 (2.2.6) 和 (2.2.7) 定义的线性映射 $\{\cdot_\Lambda\cdot\}_X\colon V\otimes V\to V[\Lambda]$ 和 $\mu_X\colon V\otimes V\to V$，其中 $X\in\mathcal{P}(2)_{\overline{1}}$ 是奇元素。显然， $\{\cdot_\Lambda\cdot\}_X\colon V\otimes V\to V_\nabla[\Lambda]$ 的宇称为 $\overline{N}$，而 $\mu_X\colon V\otimes V\to V$ 是偶的。

- 线性映射 $\{\cdot_\Lambda\cdot\}_X$ 满足定义1.2.3中的 (i)：这可以通过使用 (2.2.3) 和 (2.2.4) 直接计算来验证。例如，我们有

$$\begin{aligned}\{S^ia_\Lambda b\}&=(-1)^{(p(a)+\overline{1})(\overline{N}+\overline{1})}X^{\bullet\ \bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(S^ia\otimes b)\\&=(-1)^{(p(a)+\overline{1})(\overline{N}+\overline{1})}(-1)^{\widetilde{p}(X)+\overline{1}}\theta^iX^{\bullet\ \bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b)\\&=-(-1)^N\theta^i\{a_\Lambda b\}.\end{aligned}$$

- 线性映射 μ_X 满足定义 1.3.1中的 (i)：由 (2.2.3)，可得

$$\begin{aligned}X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(Ta\otimes b)+X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes Tb)&=-\lambda X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b)+(\lambda+T)X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b)\\&=TX^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b),\end{aligned}$$

并根据 2.2.7 的定义 μ_X 得到 $T(ab)=(Ta)b+a(Tb)$。我们还可以利用 $(S^i(ab)=(S^ia)b+(-1)^{p(a)}a(S^ib)$，证明 2.2.4。

注意到，映射 $X\mapsto(\{\cdot_\Lambda\cdot\}_X,\mu_X)$ 在集合 $\mathcal{P}(2)_{\overline{1}}$ 与所有满足以下条件的对 $(\{\cdot_\Lambda\cdot\},\mu$所组成的集合之间给出一一对应：其中，线性映射 $\{\cdot_\Lambda\cdot\}\colon V\otimes V\to V[\Lambda]$ 具有宇称 $\overline{N}$，且满足定义 1.2.3中的 (i)；偶线性映射 $\mu\colon V\otimes V\to V$ 满足定义 1.3.1中的 (i)。逆映射为

$$X^{\bullet\ \bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b):=(-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})}\{a_\Lambda b\},$$

$$X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b) \coloneqq (-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})}\sum_{I\subset[N]}(-1)^{\#I(N+1)}\sigma(I)\theta^{[N]\setminus I}\mu(S^I a\otimes b).$$

- 的斜对称性 (1.2.4) 与 μ_X 的交换性等价于：对于任意 $\sigma\in\mathfrak{S}_2$，有 $X^\sigma = X$。由 $Q\in\mathcal{Q}(2)\setminus\mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(2)$ 的循环关系 $X^Q=0$，元素 X 满足 $X^\sigma = X(\sigma\in\mathfrak{S}_2)$ 当且仅当 $(X_{(1,2)})^Q = X^Q$ 对于 $Q\in\mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(2)$ 成立，也就是说

$$(-1)^{\widetilde{p}(a)\widetilde{p}(b)}X^{\bullet,\bullet}_{\Lambda_2,\Lambda_1}(b\otimes a) = X^{\bullet,\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2}(a\otimes b), \tag{2.2.8}$$

$$(-1)^{\widetilde{p}(a)\widetilde{p}(b)}X^{\bullet\leftarrow\bullet}_{\Lambda_2,\Lambda_1}(b\otimes a) = X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2}(a\otimes b). \tag{2.2.9}$$

显然，恒等式 (2.2.8) 等价于 $\{\cdot_\Lambda\cdot\}_X$ 的斜对称性。因此，只需证明：

引理 2.2.11. 恒等式（2.2.9）等价于 μ_X 的交换性。

证明。 由循环关系 $X^{\bullet\leftarrow\bullet} = -X^{\bullet\to\bullet}$，恒等式（2.2.9）等价于

$$(-1)^{\widetilde{p}(a)\widetilde{p}(b)+\overline{1}}X^{\bullet\to\bullet}_{-\Lambda-\nabla,\Lambda}(b\otimes a) = X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b).$$

如果恒等式（2.2.9）成立，那么我们有

$$(-1)^{\widetilde{p}(a)\widetilde{p}(b)+\overline{1}}\operatorname{Res}_\Lambda\big(\lambda^{-1}X^{\bullet\to\bullet}_{-\Lambda-\nabla,\Lambda}(b\otimes a)\big) = \operatorname{Res}_\Lambda\big(\lambda^{-1}X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b)\big).$$

<escape>根据半共轭线性（2.2.2），可以证明</escape>

$$\operatorname{Res}_\Lambda\big(\lambda^{-1}X^{\bullet\to\bullet}_{-\Lambda-\nabla,\Lambda}(b\otimes a)\big) = (-1)^N\operatorname{Res}_\Lambda\big(\lambda^{-1}X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(b\otimes a)\big).$$

因此，我们得到的是

$$(-1)^{\widetilde{p}(a)\widetilde{p}(b)+\overline{N}+\overline{1}}\operatorname{Res}_\Lambda\big(\lambda^{-1}X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(b\otimes a)\big) = \operatorname{Res}_\Lambda\big(\lambda^{-1}X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b)\big),$$

这意味着 μ_X 的交换性。

反之，假设 μ_X 具有交换性。根据半线性条件（2.2.4），我们有

$$X^{\bullet\to\bullet}_{-\Lambda-\nabla,\Lambda}(b\otimes S^I a) = (-1)^{\widetilde{p}(b)\overline{\#I}}\theta^I X^{\bullet\to\bullet}_{-\Lambda-\nabla,\Lambda}(b\otimes a).$$

因此，利用半线性条件（2.2.4），可得

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_\Lambda\big(\lambda^{-1}\theta^I X_{-\Lambda-\nabla,\Lambda}(b\otimes a)\big) &= (-1)^{\widetilde{p}(b)\overline{\#I}}\operatorname{Res}_\Lambda\big(\lambda^{-1}X^{\bullet\to\bullet}_{-\Lambda-\nabla,\Lambda}(b\otimes S^I a)\big)\\ &= (-1)^{\widetilde{p}(b)\overline{\#I}}(-1)^N\operatorname{Res}_\Lambda\big(\lambda^{-1}X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(b\otimes S^I a)\big)\\ &= (-1)^{\widetilde{p}(b)\overline{\#I}}(-1)^N(-1)^{p(b)(\overline{N}+\overline{1})}b(S^I a).\end{aligned}$$

从而我们得到

$$\begin{aligned}X_{-\Lambda-\nabla,\Lambda}(b\otimes a) &= (-1)^N(-1)^{p(b)(\overline{N}+\overline{1})}\sum_{I\subset[N]}(-1)^{\widetilde{p}(b)\overline{\#I}}\sigma(I)\theta^{[N]\setminus I}b(S^I a)\\ &= (-1)^N(-1)^{p(b)(\overline{N}+\overline{1})}\sum_{I\subset[N]}(-1)^{\widetilde{p}(b)\overline{\#I}}(-1)^{(p(a)+\overline{\#I})p(b)}\sigma(I)\theta^{[N]\setminus I}(S^I a)b\\ &= (-1)^{\widetilde{p}(a)\widetilde{p}(b)+\overline{1}}X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b),\end{aligned}$$

这等价于恒等式（2.2.9）。 □

回忆（1.4.7）中的线性超空间 $L^1(\mathcal{P})$。在下文中，我们选定并固定 $X\in L^1(\mathcal{P})_{\overline{1}}$，使得 $\{\cdot_\Lambda\cdot\}_X$：$V\otimes V\to V[\Lambda]$ 和 μ_X：$V\otimes V\to V$ 是满足定义 1.2.3 （i）、（ii）以及定义 1.3.1 （i）、（ii）的线性映射。于是，只需证明：

命题 2.2.12。 式（1.2.5）中的雅可比恒等式 $\{\cdot_\Lambda\cdot\}_X$、μ_X 的结合律，以及式（1.3.1）中的莱布尼茨法则，等价于 Maurer-Cartan 条件 $X\square X = 0$。

由于 $X\square X$ 在 $\mathfrak{S}_3$ 作用下保持不变，我们有

$$X\square X=0 \iff (X\square X)^{Q}=0 \text{ for } Q=\bullet\ \bullet\ \bullet,\quad \bullet\ \ \bullet\to\bullet \text{ and } \bullet\to\bullet\to\bullet.$$

此后直到本§ 2.2 结束，我们省略 X 中的 $\{\cdot_\Lambda\cdot\}_X$ 和 μ_X。

在下列引理的证明中2.2.13 至 2.2.15，我们使用以下记号：对于超运算子 $\mathcal{P}$，m，$n\in\mathbb{N}$ 和 $i\in[m]$，我们记

$$\circ_i\colon \mathcal{P}(m)\otimes\mathcal{P}(n)\longrightarrow\mathcal{P}(m+n-1),\quad f\circ_i g:=f\circ(1\odot\cdots\odot 1\odot\overset{i}{g}\odot 1\odot\cdots\odot 1), \tag{2.2.10}$$

这称为无穷小复合。

引理 2.2.13. 对于 $X\in L^1\big(\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}_{\Pi^{N+1}V}\big)_{\overline{1}}$，我们有

$$\begin{aligned}&(X\square X)^{\bullet,\bullet,\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2,-\Lambda_1-\Lambda_2-\nabla}(a\otimes b\otimes c)\\&=\pm\big(\{a_{\Lambda_1}\{b_{\Lambda_2}c\}\}-(-1)^{(p(a)+\overline{N})\overline{N}}\{\{a_{\Lambda_1}b\}_{\Lambda_1+\Lambda_2}c\}-(-1)^{(p(a)+\overline{N})(p(b)+\overline{N})}\{b_{\Lambda_2}\{a_{\Lambda_1}c\}\}\big)\end{aligned}$$

其中 $\pm:=(-1)^{N+1}(-1)^{p(a)\overline{N}}(-1)^{p(b)(\overline{N}+\overline{1})}$。因此，雅可比恒等式（1.2.5）等价于

$$(X\square X)^{\bullet\ \bullet\ \bullet}=0.$$

证明。直接计算可得

$$\begin{aligned}(X\circ_1 X)^{\bullet,\bullet,\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2,-\Lambda_1-\Lambda_2-\nabla}(a\otimes b\otimes c)&=(-1)^{p(b)(\overline{N}+\overline{1})}\{\{a_{\Lambda_1}b\}_{\Lambda_1+\Lambda_2}c\},\\(X\circ_2 X)^{\bullet,\bullet,\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2,-\Lambda_1-\Lambda_2-\nabla}(a\otimes b\otimes c)&=(-1)^{\widetilde{p}(a)}(-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})}(-1)^{p(b)(\overline{N}+\overline{1})}\{a_{\Lambda_1}\{b_{\Lambda_2}c\}\},\\\big((X\circ_2 X)^{(1,2)}\big)^{\bullet,\bullet,\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2,-\Lambda_1-\Lambda_2-\nabla}(a\otimes b\otimes c)&=(-1)^{\widetilde{p}(a)\widetilde{p}(b)}(-1)^{\widetilde{p}(b)}(-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})}(-1)^{p(b)(\overline{N}+\overline{1})}\{b_{\Lambda_2}\{a_{\Lambda_1}c\}\},\end{aligned}$$

这就证明了第一个等式。第二个等价关系显然成立。 □

引理 2.2.14。对于 $X\in L^1\big(\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}_{\Pi^{N+1}V}\big)_{\overline{1}}$，我们有

$$\begin{aligned}(X\square X)^{\bullet,\bullet\to\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2,-\Lambda_1-\Lambda_2-\nabla}(a\otimes b\otimes c)=\pm\sum_{I\subset[N]}&(-1)^{\widetilde{p}(a)\overline{\#I}}\sigma(I)\theta_2^{[N]\setminus I}\\&\times\big(\{a_{\Lambda_1}(S^Ib)c\}-\{a_{\Lambda_1}S^Ib\}c-(-1)^{(p(a)+\overline{N})(p(b)+\overline{\#I})}(S^Ib)\{a_{\Lambda_1}c\}\big).\end{aligned}$$

其中 $\pm:=(-1)^{p(b)(\overline{N}+\overline{1})+\overline{1}}$。因此，莱布尼茨法则（1.3.1）等价于

$$(X\square X)^{\bullet\ \bullet\to\bullet}=0.$$

证明。直接计算表明

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{\Lambda_2}\big(\lambda_2^{-1}(X\circ_1 X)^{\bullet,\bullet\to\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2,-\Lambda_1-\Lambda_2-\nabla}(a\otimes b\otimes c)\big)&=\epsilon_1\{a_{\Lambda_1}b\}c,\\\mathrm{Res}_{\Lambda_2}\big(\lambda_2^{-1}(X\circ_2 X)^{\bullet,\bullet\to\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2,-\Lambda_1-\Lambda_2-\nabla}(a\otimes b\otimes c)\big)&=\epsilon_2\{a_{\Lambda_1}bc\},\\\mathrm{Res}_{\Lambda_2}\big(\lambda_2^{-1}((X\circ_2 X)^{(1,2)})^{\bullet,\bullet\to\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2,-\Lambda_1-\Lambda_2-\nabla}(a\otimes b\otimes c)\big)&=\epsilon_3 b\{a_{\Lambda_1}c\},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\epsilon_1&:=(-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})}(-1)^{(p(a)+p(b)+\overline{N})(\overline{N}+\overline{1})},\\\epsilon_2&:=(-1)^{\widetilde{p}(a)}(-1)^{(\widetilde{p}(a)+\overline{1})\overline{N}}(-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})}(-1)^{p(b)(\overline{N}+\overline{1})}=\pm,\\\epsilon_3&:=(-1)^{\widetilde{p}(a)\widetilde{p}(b)}(-1)^{\widetilde{p}(b)}(-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})}(-1)^{p(b)(\overline{N}+\overline{1})}.\end{aligned}$$

因此我们有

$$\mathrm{Res}_{\Lambda_2}\big(\lambda_2^{-1}(X\square X)^{\bullet,\bullet\to\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2,-\Lambda_1-\Lambda_2-\nabla}(a\otimes b\otimes c)\big)=\pm\big(\{a_{\Lambda_1}bc\}-\{a_{\Lambda_1}b\}c-(-1)^{(p(a)+\overline{N})p(b)}b\{a_{\Lambda_1}c\}\big),$$

利用半线性条件（2.2.2）和（2.2.4），可得第一个结论。第二个等价关系显然。 □

引理 2.2.15. 对于 $X\in L^1\big(\mathcal{P}_{\Pi^{N+1}V}^{\mathrm{cl}N_W=N}\big)_{\overline{1}}$，我们有

$$\begin{aligned}&(X\square X)^{\bullet\to\bullet\to\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2,-\Lambda_1-\Lambda_2-\nabla}(a\otimes b\otimes c)\\&=\pm(-1)^N\sum_{I,J\subset[N]}(-1)^{p(a)\overline{\#J}}(-1)^{\#I\#J+\#J}\sigma(I)\sigma(J)\times\theta_1^{[N]\backslash I}\theta_2^{[N]\backslash J}\big(((S^Ia)b)c-(S^Ia)(bc)\big),\end{aligned}$$

其中 $\pm:=(-1)^{p(b)(\overline{N}+\overline{1})}$。因此，结合律等价于

$$(X\square X)^{\bullet\to\bullet\to\bullet}=0.$$

证明。直接计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{\Lambda_1}\mathrm{Res}_{\Lambda_2}\big(\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}(X\circ_1X)^{\bullet\to\bullet\to\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2,-\Lambda_1-\Lambda_2-\nabla}(a\otimes b\otimes c)\big)&=\epsilon_1(ab)c,\\\mathrm{Res}_{\Lambda_1}\mathrm{Res}_{\Lambda_2}\big(\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}(X\circ_2X)^{\bullet\to\bullet\to\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2,-\Lambda_1-\Lambda_2-\nabla}(a\otimes b\otimes c)\big)&=\epsilon_2a(bc),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\epsilon_1&:=(-1)^{(p(a)+p(b)+\overline{N})(\overline{N}+\overline{1})}(-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})}=\pm,\\\epsilon_2&:=(-1)^{\widetilde{p}(a)}(-1)^{(\widetilde{p}(a)+\overline{1})\overline{N}}(-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})}(-1)^{p(b)(\overline{N}+\overline{1})}.\end{aligned}$$

此外，由 X 的第一个圈关系，我们得到

$$\big((X\circ_2X)^{(1,2)}\big)^{\bullet\to\bullet\to\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2,-\Lambda_1-\Lambda_2-\nabla}(a\otimes b\otimes c)=0.$$

因此我们有

$$\mathrm{Res}_{\Lambda_1}\mathrm{Res}_{\Lambda_2}\big(\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}(X\square X)^{\bullet\to\bullet\to\bullet}_{\Lambda_1,\Lambda_2,-\Lambda_1-\Lambda_2-\nabla}(a\otimes b\otimes c)\big)=\pm\big((ab)c-a(bc)\big).$$

利用半线性条件，我们得到第一个等式。第二个等价关系显然成立。 □

根据引理2.2.13 至2.2.15，我们得到断言2.2.12。现在定理2.2.10 的证明完成。

2.3. 超对称泊松顶点代数的超运算子。 $N_K=N$ 超对称泊松顶点代数。 §2.2 中给出的所有结果和证明对于 $N_W=N$ 情形均适用于 $N_K=N$ 情形，但需作如下修改：

- 将超代数 $\mathcal{H}_W$ (定义1.2.2)替换为 $\mathcal{H}_K$ (定义1.2.6)。
- 将$(1|N)_W$-超变量 (1.2.1)替换为$(1|N)_K$-超变量 (1.2.7)。

定义 2.3.1. 对每个 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$，令 $\Lambda_k=(\lambda_k,\theta_k^1,\dots,\theta_k^N)$ 为一个 $(1|N)_K$-超变量。对于一个 $\mathcal{H}_K$-超模 $V=(V,\nabla)$ 和 $n\in\mathbb{N}$，定义 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_K=N}(n)$ 为所有线性映射构成的线性超空间

$$X\colon V^{\otimes n}\otimes\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)\longrightarrow V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$$

满足定义 2.2.1 中的条件 (i)、(ii)，将 $(1|N)_W$-超变量 $\Lambda_1,\dots,\Lambda_n$ 替换为 $(1|N)_K$-超变量。

然后我们可以在 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_K=N}(n)$ 上定义一个 $\mathfrak{S}_n$-作用和复合映射，并且我们有一个超运算子$\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_K=N}:=\big(\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_K=N}(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$。它以下述方式编码了 $N_K=N$ 超对称 SUSY VPA 结构：

定理 2.3.2. 设 $V=(V,\nabla)$ 是一个 $\mathcal{H}_K$-超模。

(1) 对于一个奇 Maurer-Cartan 解 $X\in\mathrm{MC}\big(L\big(\mathcal{P}_{\Pi^{N+1}V}^{\mathrm{cl}N_K=N}\big)\big)_{\overline{1}}$，定义线性映射 $\{\cdot_\Lambda\cdot\}_X\colon V\otimes V\to V[\Lambda]$ 和 $\mu_X\colon V\otimes V\to V$，使得

$$\begin{aligned}\{a_\Lambda b\}_X&:=(-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})}X^{\bullet,\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b),\\\mu_X(a\otimes b)&:=(-1)^{p(a)(\overline{N}+\overline{1})}\mathrm{Res}_\Lambda\big(\lambda^{-1}X^{\bullet\to\bullet}_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a\otimes b)\big)\end{aligned}$$

对每个 $a,b\in V$。那么 $(V,\nabla,\{\cdot_\Lambda\cdot\}_X,\mu_X)$ 是一个非含单位元的 $N_K=N$超对称泊松顶点代数。

(2) 对应关系 $X\mapsto(\{\cdot_\Lambda\cdot\}_X,\mu_X)$ 给出一个双射

$$\mathrm{MC}\big(L\big(\mathcal{P}_{\Pi^{N+1}V}^{\mathrm{cl}N_K=N}\big)\big)_{\overline{1}}\xrightarrow{\sim}\{\text{non-unital }N_K=N\text{ SUSY PVA structures on }(V,\nabla)\}.$$

定义 2.3.3. 我们将超运算子 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_K=N}$ 称为 $N_K=N$ $V=(V,\nabla)$ 的超对称共泊松运算子。

3. Relation to the SUSY chiral operad

可以从带滤过的顶点代数构造分次泊松顶点代数。这种构造有若干变体，例如 [BDHK19], [FBZ04, 16.2。3] 以及 [Li04，Li05]。本文中，我们考虑这种构造的超对称类比，它在底层线性超空间上使用任意递增过滤[BDHK19，§8。5]。

我们首先为 SUSY 顶点代数引入一种“良好”的滤过。

定义 3.0.1. 如果一个 $\mathcal{H}_W$-超模 $V=(V,\nabla)$ 配备了一个递增的 $\mathcal{H}_W$-子模序列，则称其为带滤过的

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r \subset V_{r+1} \subset \cdots \subset V.$$

我们将这样的带滤过 $\mathcal{H}_W$-模记为 $(V,(V_r)_{r\in\mathbb{N}})$。其伴随分次记为

$$\operatorname{gr} V := \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} V_r/V_{r-1},$$

它自然是一个分次 $\mathcal{H}_W$-超模。这里我们采用约定 $V_{-1} := 0$.

一个非幺 $N_W=N$ SUSY 顶点代数 V 是带滤过的，如果 V 作为一个 $\mathcal{H}_W$-超模是带滤过的，且滤过 $(V_r)_{r\in\mathbb{N}}$ 满足

$$[a_\Lambda b] \in V_{r+s-1}[\Lambda], \quad ab \in V_{r+s}.$$

对每个 $a\in V_r$ 和 $b\in V_s$。我们将一个滤过的 $N_W=N$ 超对称顶点代数记为 $(V,(V_r)_{r\in\mathbb{N}})$.

注记 3.0.2。任意 $\mathcal{H}_W$-超模 V 都可以通过令 $V_r := V$，对每个 $r\in\mathbb{N}$，视为一个滤过的 $\mathcal{H}_W$-超模。我们称其为 V 的平凡滤过。

以下陈述的证明是直接的，故略去。

命题 3.0.3。给定一个滤过的超对称顶点代数 $(V,(V_r)_{r\in\mathbb{N}})$，在伴随分次 $\operatorname{gr} V := \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} V_r/V_{r-1}$ 上有一个自然的超对称泊松顶点代数结构。该运算定义为

$$\left[\overline{a}^r_\Lambda \overline{b}^s\right] := \overline{[a_\Lambda b]}^{r+s-1}, \quad \overline{a}^r\overline{b}^s := \overline{ab}^{r+s}$$

对每个 $a\in V_r$ 和 $b\in V_s$。这里 $\overline{a}^r$ 表示典范投影 $V_r \to V_r/V_{r-1}$。

在本小节中，我们沿着 [BDHK19 中的§8 及 §10.4] 中的非超对称论证，从 SUSY 手征/泊松算子$\mathcal{H}_W$-超模 $V=(V,(V_r)_{r\in\mathbb{N}})$ 的角度研究这一由分次超对称泊松顶点代数构造而成的构造。我们将证明以下陈述。

- SUSY 手征运算子 $\mathcal{P}_{\mathrm{cl}_V}{}^{N_W=N}$ 是带滤过的，并且我们有伴随分次超运算子 $\operatorname{gr}\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}$（命题 3.2.7）。
- 存在一个单射 $\alpha\colon \operatorname{gr}\mathcal{P}_{\mathrm{ch}_V}{}^{N_W=N} \hookrightarrow \mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}\operatorname{gr} V$ 超运算子之间的（定理 3.3.8）。
- 由 α 和命题3.0.3 给出的SUSY顶点泊松代数结构一致（注记 3.3.9）。

尽管我们只对 $N_W=N$ 情形给出详细论证，类似的陈述对 $N_K=N$ 情形也成立。

3.1. 超运算子的分次与滤过。我们引用 [BDHK19 的过滤与分次超算子概念，（3.10）]。回忆符号 $\mathbb{N}_n^m := \{(n_1,..,n_m)\in\mathbb{N}^m \mid n_1+\cdots+n_m=n\}$ 见（1.4.2）。对于一个 $\mathfrak{S}$-超模 $\mathcal{P}=(\mathcal{P}(n))_{n\in\mathbb{N}}$，$\mathfrak{S}$-子模 $\mathcal{Q}\subset\mathcal{P}$ 是指一个 $\mathfrak{S}$-超模 $\mathcal{Q}=(\mathcal{Q}(n))_{n\in\mathbb{N}}$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$，$\mathcal{Q}(n)$ 都是 $\mathcal{P}(n)$ 的 $\mathfrak{S}_n$-子模。

定义 3.1.1. 设 $\mathcal{P}$ 为一个超运算子。由 $\mathcal{P}$ 的 $\mathfrak{S}$-子模组成的序列 $(\mathcal{P}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ 称为 $\mathcal{P}$ 的分次，若其满足以下条件：

(i) 我们有 $\mathcal{P}=\bigoplus_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_r$，即对每个 $n\in\mathbb{N}$，$\mathcal{P}(n)=\bigoplus_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_r(n)$。(ii) 对于 $m,n\in\mathbb{N}, (n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{N}_n^m$ 以及 $r,s\in\mathbb{N}, (s_1,\dots,s_m)\in\mathbb{N}_s^m$，若 $X\in\mathcal{P}_r(m)$ 且 $Y_i\in\mathcal{P}_{s_i}(n_i)$，其中 $i\in[m]$，则 $X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m)\in\mathcal{P}_{r+s}(n)$。

我们将一个超运算子 代 $\mathcal{P}$ 赋予一个分次 $(\mathcal{P}_r)_{r\in\mathbb{N}}$，称为分次算子，并记作 $\mathcal{P}=\bigoplus_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_r$.

定义 3.1.2. 设 $\mathcal{P}$ 是一个超运算子。由 $\mathcal{P}$ 的 $\mathfrak{S}$-子模组成的序列 $(\mathcal{P}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ 称为该超运算子的幺半群过滤 $\mathcal{P}$，如果它满足以下条件：

(i) $1_\mathcal{P}\in\mathcal{P}_0(1)$，并且对每个 $r\in\mathbb{N}$，$\mathcal{P}_r\supset\mathcal{P}_{r+1}$。

(ii) 对于 $m,n\in\mathbb{N}$，$(n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{N}_n^m$和 $r,s\in\mathbb{N}$，$(s_1,\dots,s_m)\in\mathbb{N}_s^m$，若 $X\in\mathcal{P}_r(m)$ 且 $Y_i\in\mathcal{P}_{s_i}(n_i)$，并满足 $i\in[m]$，则有 $X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m)\in\mathcal{P}_{r+s}(n)$。

注记 3.1.3. 请注意，定义 3.1.2中的歌剧滤过是递减的，与定义 $\mathcal{H}_W$中的超模递增过滤相反 3.0.1。

以下陈述很容易证明，证明从略。

引理 3.1.4. 设 $\mathcal{P}$ 为一个超运算子，且 $(\mathcal{P}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ 为一列 $\mathfrak{S}$-子模 $\mathcal{P}_r\subset\mathcal{P}$，满足定义 3.1.2中的条件 (i)。则 $(\mathcal{P}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ 是超运算子 $\mathcal{P}$ 的幺半群过滤，当且仅当它满足以下条件：

- 对于 $m,n,r,s\in\mathbb{N}$，若 $X\in\mathcal{P}_r(m)$ 且 $Y\in\mathcal{P}_s(n)$，则有 $X\circ_1 Y\in\mathcal{P}_{r+s}(m+n-1)$.

对于配备了歌剧过滤 $(\mathcal{P}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ 的超运算子 $\mathcal{P}$，我们可以赋予 $\mathfrak{S}$-超模

$$\operatorname{gr}\mathcal{P}\coloneqq\bigoplus_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_r/\mathcal{P}_{r+1},\quad \mathcal{P}_r/\mathcal{P}_{r+1}\coloneqq\big(\mathcal{P}_r(n)/\mathcal{P}_{r+1}(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

具有分次超运算子结构。为了解释这一点，我们记

$$\mathcal{P}_r(n)\longrightarrow\mathcal{P}_r(n)/\mathcal{P}_{r+1}(n),\quad X\longmapsto\overline{X}^r$$

为每个 $n,r\in\mathbb{N}$的典范投影。于是，对于 $m,n\in\mathbb{N}$和 $\nu=(n_1,..,n_m)\in\mathbb{N}_n^m$，存在唯一的线性映射

$$\gamma_\nu\colon\ \operatorname{gr}\mathcal{P}(m)\otimes\operatorname{gr}\mathcal{P}(\nu)\longrightarrow\operatorname{gr}\mathcal{P}(n)$$

满足

$$\gamma_\nu(\overline{X}^r\otimes\overline{Y_1}^{s_1}\otimes\cdots\otimes\overline{Y_k}^{s_k})=\overline{X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_m)}^{r+s}\quad(X\in\mathcal{P}_r(m),Y_i\in\mathcal{P}_{s_i}(n_i))$$

对于 $r,s\in\mathbb{N},(s_1,\dots,s_m)\in\mathbb{N}_s^m$。于是，$\operatorname{gr}\mathcal{P}$是一个超运算子，其复合映射为 $\gamma=(\gamma_\nu)_\nu$，单位元为 $\overline{1_{\mathcal{P}}}^0\in\operatorname{gr}\mathcal{P}(1)$。此外，序列 $(\mathcal{P}_r/\mathcal{P}_{r+1})_{r\in\mathbb{N}}$是 $\operatorname{gr}\mathcal{P}$的一个分次。

定义 3.1.5。我们称所得的分次超运算子 $\operatorname{gr}\mathcal{P}$ 为滤过超拟运算子 $(\mathcal{P},(\mathcal{P}_r)_{r\in\mathbb{N}})$ 的伴随分次幺半群。

3.2. $\mathcal{P}_V^{\mathbf{ch}N_W=N}$的幺半群过滤。本小节中，对于一个滤过 $\mathcal{H}_W$-超模 V，我们定义超对称手征运算子 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}$ 的幺半群过滤。

首先，回忆一下定义 $\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$中的超代数 1.4.1：

$$\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}=\mathbb{K}[z_{k,l}^{\pm1},\zeta_{k,l}^i\mid i\in[N],\ 1\le k<l\le n],\quad z_{k,l}=z_k-z_l,\quad \zeta_{k,l}^i=\zeta_k^i-\zeta_l^i.$$

对于 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$，我们令

$$\mathcal{O}_n^{\mathrm{T}}\coloneqq\mathbb{K}[z_{k,l},\zeta_{k,l}^i\mid i\in[N],\ 1\le k<l\le n].$$

我们还令 $\mathcal{O}_0^{\mathrm{T}}\colon=\mathbb{K}$。我们在 $\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$ 上引入一个递增过滤，它是 $N_W=N$ 的超对称类比[BDHK19，§8。1]。

定义 3.2.1。对于 $n,r\in\mathbb{N}$，我们将线性子空间 $F^r\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\subset\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$定义为

$$F^r\mathcal{O}_0^{\star\mathrm{T}}=F^r\mathcal{O}_1^{\star\mathrm{T}}\coloneqq\mathbb{K},$$
$$F^r\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\coloneqq\operatorname{Span}_{\mathbb{K}}\{z_{k_1,l_1}^{-m_1}\cdots z_{k_r,l_r}^{-m_r}a\mid m_s\in\mathbb{N},\,I_s\subset[N],\,1\le k_s<l_s\le n,\,a\in\mathcal{O}_n^{\mathrm{T}}\}\quad(n>1).$$

例 3.2.2。对于 $n=2$，我们有

$$F^0\mathcal{O}_2^{\star\mathrm{T}}=\mathbb{K},\quad F^r\mathcal{O}_2^{\star\mathrm{T}}=\mathcal{O}_2^{\star\mathrm{T}}\quad(r\ge1).$$

下面的引理可由 3.2.1 中的定义 $F^r\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$ 立即推出。

引理 3.2.3。设 n、r、$s\in\mathbb{N}$。

(1) $F^r\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\subset F^{r+1}\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$。(2) $\big(F^r\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\big)\big(F^s\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\big)\subset F^{r+s}\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$。(3) 空间 $F^r\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$在 $\mathfrak{S}_n$的作用下是封闭的，即若 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$且 $f\in F^r\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$，则 $\sigma f\in F^r\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$，其中 $(\sigma f)(Z_1,\dots,Z_n)\coloneqq f(Z_{\sigma(1)},\dots,Z_{\sigma(n)})$，如前所述。

引理 3.2.4. 设 m、$n \in \mathbb{Z}_{>0}$和 $r \in \mathbb{N}$。对于 $f = z_{k_1,l_1}^{m_1} \cdots z_{k_r,l_r}^{m_r} a \in F^r\mathcal{O}_{m+n}^{\star\mathrm{T}}$，存在 $f_0 \in F^{r_0}\mathcal{O}_{m+n}^{\star\mathrm{T}}$和 $f_1 \in F^{r_1}\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$，使得 $(r_0, r_1) \in \mathbb{N}_r^2$满足以下条件。

(i) $f = f_0 f_1$。(ii) 对于 $1 \le k < l \le n$，f_0 在 $z_k = z_l$ 处没有极点。(iii) f_1 具有如下形式：$f_1 = \prod_{1\le k<l\le n} z_{k,l}^{-m_{k,l}}$，其中 $m_{k,l} \in \mathbb{N}$。

证明。对于 $r = 0$，结论显然。对于 $r \ge 1$，我们对 r 作归纳来证明该结论。

令 $r = 1$。则 f 可写成如下形式：$f = z_{k,l}^{-m} a$。因此，

$$(f_1, f_0) \coloneqq \begin{cases} (z_{k,l}^{-m}, a) & (1 \le k < l \le n) \\ (1_{\mathbb{K}}, z_{k,l}^{-m} a) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

满足该陈述的条件。

令 $r > 1$。我们可以将 f 写为

$$f = z_{k_1,l_1}^{-m_1} g, \quad g \coloneqq z_{k_2,l_2}^{-m_2} \cdots z_{k_r,l_r}^{-m_r} a,$$

然后 $g \in F^{r-1}\mathcal{O}_{m+n}$。因此，根据归纳假设，存在 $g_0 \in F^{s_0}\mathcal{O}_{m+n}^{\star\mathrm{T}}$ 和 $g_1 \in F^{s_1}\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$，使得 $(s_0, s_1) \in \mathbb{N}_{r-1}^2$，且 $f = z_{k_1,l_1}^{-m_1} g_1 g_0$ 和 g_0, g_1 分别满足条件 (ii)、(iii)。于是

$$(f_1, f_0) \coloneqq \begin{cases} (z_{k_1,l_1}^{-m_1} g_1, g_0) & (1 \le k_1 < l_1 \le n) \\ (g_1, z_{k_1,l_1}^{-m_1} g_0) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

满足该陈述的条件。 □

接下来，我们仿照 $N_W = N$ BDHK19，为[超对称手征运算子引入§85]中的幺半群过滤。回忆一下，定义 3.0.1 给出了 $\mathcal{H}_W$-超模 $V = (V, \nabla)$ 上的滤过。

定义 定义 3.2.5. 设 $(V, (V_r)_{r\in\mathbb{N}})$ 是一个带滤过的 $\mathcal{H}_W$-超模。对于 $n, r \in \mathbb{N}$，记

$$F^r V^{\otimes n} \coloneqq \sum_{(r_1,\dots,r_n)\in\mathbb{N}_r^n} V_{r_1} \otimes \cdots \otimes V_{r_n}.$$

对于 $n, r \in \mathbb{N}$，我们将线性子空间 $F_r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n) \subset \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)$ 定义为

$$F_r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n) \coloneqq \left\{ X \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n) \mid X(F^s V^{\otimes n} \otimes F^t\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}})) \subset V_{s+t-r,\nabla}[\Lambda_k]_{k=1}^n \ (s,t \in \mathbb{N}) \right\}$$

按照约定 $V_s \coloneqq 0$ 对于 $s \in \mathbb{Z}_{<0}$。

例 3.2.6. 对于具有平凡滤过的 $\mathcal{H}_W$-超模 V，我们有

$$F_r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n) = \{X \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n) \mid X(V^{\otimes n} \otimes F_{r-1}\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}) = 0\} \quad (r \in \mathbb{N})$$

约定 $F_{-1}\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}} \coloneqq 0$ 表示 $r = 0$。

根据引理 3.2.3 (3)，$F_r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)$ 是 $\mathfrak{S}_n$ 的右子模 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)$，对 n，$r \in \mathbb{N}$。因此，对于每个 $r \in \mathbb{N}$，我们有一个 $\mathfrak{S}$-子模 $F_r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N} \coloneqq \left(F_r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$，属于 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}$。此外：

命题 3.2.7。对于一个带滤过的 $\mathcal{H}_W$-超模 $(V, (V_r)_{r\in\mathbb{N}})$，序列 $\left(F_r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}$ 的幺半群过滤。

证明。 定义中的条件 (i) 3.1.2 显然。定义 3.1.2 中的条件 (ii) 3.1.4 由引理 3.2.4推出。 □

因此，根据定义 3.1.5之前的论证，我们得到滤过超拟运算子 $\left(\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}\text{的伴随分次歌剧 }\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}\right)_{r\in\mathbb{N}}$：

$$\operatorname{gr}\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N} = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} F_r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N} / F_{r+1}\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}.$$

现在，回顾 (1.4.4)、1.4.5) 和定理1.4.4。

命题 3.2.8. 设 $(V, (V_r)_{r\in\mathbb{N}})$ 是一个滤过的 $\mathcal{H}_W$-超模。

(1) 对于 $X \in \mathcal{P}^{\mathrm{ch}N_W=N}_{\Pi^{N+1}V}(2)_{\mathrm{T}}$，条件 $X \in F^1\mathcal{P}^{\mathrm{ch}N_W=N}_{\Pi^{N+1}V}(2)_{\mathrm{T}}$ 等价于以下条件：对于满足 r、$s \in \mathbb{N}$ 的 $a \in V_r$ 和 $b \in V_s$，我们有

$$[a_\Lambda b]_X \in V_{r+s-1}[\Lambda], \quad \mu_X(a \otimes b) \in V_{r+s}. \tag{3.2.1}$$

(2) 对应关系 $X \mapsto ([\cdot_\Lambda \cdot]_X, \mu_X)$ 给出一个双射。

$$\mathrm{MC}\big(L\big(\mathcal{P}^{\mathrm{ch}N_W=N}_{\Pi^{N+1}V}\big)\big)_{\mathrm{T}} \cap F_1\mathcal{P}^{\mathrm{ch}N_W=N}_{\Pi^{N+1}V}(2)_{\mathrm{T}}$$
$$\xrightarrow{\sim} \{\text{non-unital filtered } N_W = N \text{ SUSY VA structures on } (V, (V_r)_{r\in\mathbb{N}})\}.$$

证明。设 $X \in F_1\mathcal{P}^{\mathrm{ch}N_W=N}_{\Pi^{N+1}V}(2)_{\mathrm{T}}$，$a \in V_r$ 和 $b \in V_s$。由于 $1_{\mathbb{K}} \in F^0\mathcal{O}^{\star\mathrm{T}}_2$ 和 $z_1^{-1}, {}_2 \in F^1\mathcal{O}^{\star\mathrm{T}}_2$，我们有

$$X_{\Lambda_1,\Lambda_2}(a \otimes b \otimes 1_{\mathbb{K}}) \in V_{r+s-1,\nabla}[\Lambda_k]_{k=1,2}, \quad X_{\Lambda_1,\Lambda_2}(a \otimes b \otimes z_{1,2}^{-1}) \in V_{r+s,\nabla}[\Lambda_k]_{k=1,2},$$

这意味着 $[a_\Lambda b]_X \in V[\Lambda]_{r+s-1}$ 和 $\mu_X(a \otimes b) \in V_{r+s}$。

反之，假设条件（3.2.1）成立。那么，对于 $a \otimes b \in F^sV^{\otimes 2}$，我们有

$$X_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a \otimes b \otimes 1_{\mathbb{K}}) \in V_{s-1}[\Lambda], \tag{3.2.2}$$
$$X_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a \otimes b \otimes z_{1,2}^{-1}) \in V_s[\Lambda]. \tag{3.2.3}$$

由（3.2.2），我们有 $X(F^sV^{\otimes 2} \otimes F^0\mathcal{O}^{\star\mathrm{T}}_2) \subset V_{s-1,\ \nabla}[\Lambda_k]_{k=1,\ 2}$。此外，由（3.2.2）、（3.2.3）并利用 X的半线性，我们得到

$$X_{\Lambda_1,\Lambda_2}\big(a \otimes b \otimes Z_{1,2}^{m|I}\big) \in V_{s-1,\nabla}[\Lambda_k]_{k=1,2} \subset V_{s,\nabla}[\Lambda_k]_{k=1,2},$$
$$X_{\Lambda_1,\Lambda_2}\big(a \otimes b \otimes Z_{1,2}^{-m-1|I}\big) \in V_{s,\nabla}[\Lambda_k]_{k=1,2}$$

对每个 $m \in \mathbb{N}$ 和 $I \subset [N]$。因此，对于 $t \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$X(F^sV^{\otimes 2} \otimes F^t\mathcal{O}^{\star\mathrm{T}}_n) \in V_{s,\nabla}[\Lambda_k]_{k=1,2} \subset V_{s+t-1,\nabla}[\Lambda_k]_{k=1,2}.$$

因此我们有 $X \in F^1\mathcal{P}^{\mathrm{ch}N_W=N}_{\Pi^{N+1}V}(2)_{\mathrm{T}}$。 □

3.3. 将 $\mathrm{gr}\,\mathcal{P}^{\mathbf{ch}N_W=N}_V$嵌入 $\mathcal{P}^{\mathbf{cl}N_W=N}{}_{\mathrm{gr}\,V}$。本小节中，我们仿照 $\mathcal{P}^{\mathrm{ch}N_W=N}_V$中的非超对称论证，构造伴随分次 gr $N_W = N$超对称手征运算子到 $N_W = N$超对称 coisson 运算子 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}{}_{\mathrm{gr}\,V}$的单态[BDHK19，§10.4]。

首先，我们在超对称 coisson 运算子 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}_V$ 上引入一种分次。回顾箭图的术语（定义 2.1.4）、无环 $\mathcal{Q}(n)$ 集合 n（无环2.1.7的箭图（定义）），以及记号 X^Q: $V^{\otimes n} \to V_\nabla[\Lambda_k]^n_{k=1}$，用于表示运算$X \in \mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}_V(n)$ 和箭图 $Q \in \mathcal{Q}(n)$（见（2.2.1））。

定义 3.3.1. 设 $V = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} V_r$ 是一个分次 $\mathcal{H}_W$-超模。对于 n、$r \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}_{V\,r}{}_{,}(n)$ 表示 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}_V(n)$ 中由满足以下条件的 $X \in \mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}_V(n)$ 所构成的线性子空间。

$$X^Q(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \in V_{s+t-r,\nabla}[\Lambda_k]^n_{k=1} \quad (v_i \in V_{s_i},\ Q \in \mathcal{Q}(n) \text{ with } t \text{ edges})$$

对于 $s, t \in \mathbb{N}$ 以及 $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}^n_s$。于是我们得到一个分次超幺半群 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}_V = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=}{}_{V,r}{}^{N}$

定义 3.3.2. 设 $n \in \mathbb{N}$。对于箭图 $Q = (Q_0, Q_1, s, t) \in \mathcal{Q}(n)$，我们记

$$f_Q := \prod_{k,l=1}^{n} z_{k,l}^{-m_{k,l}} \in \mathcal{O}^{\star\mathrm{T}}_n,$$

其中，$m_{k,\ l}$ 是满足 $s(\alpha) = k$ 且 $t(\alpha) = l$的边 $\alpha \in Q_1$ 的数量。

元素 f_Q 在 p_Q 中记作[BDHK19，§8。3]。以下陈述容易验证，证明从略。

引理 3.3.3. 设 n、$r \in \mathbb{N}$。

(1) 对于 $Q \in \mathcal{Q}(n)$ 和 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，有 $\sigma f_Q = f_{\sigma Q}$。(2) 对于带有 r 条边的 $Q \in \mathcal{Q}(n)$，有 $f_Q \in F_r\mathcal{O}^{\star\mathrm{T}}_n$。(3) 对于带有 r 条边的 $Q \in \mathcal{Q}(n) \setminus \mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(n)$，有 $f_Q \in F_{r-1}\mathcal{O}^{\star\mathrm{T}}_n$。

(4) 对于 $Q\in\mathcal{Q}(n)$ 和 Q 中的一个有向圈 $(\alpha_1,\dots,\alpha_l)$，有 $\sum_{k=1}^{l} f_{Q\setminus\alpha_k}=0$（见引理 2.1.6 关于$Q\setminus\alpha_k$）。
(5) 对于 $Q\in\mathcal{Q}(n)$ 以及底层图 $\underline{Q}$的一个连通分支 I^a，有 $\sum_{k\in I^a}\partial_{z_k}f_Q=0$（回忆一下，$I^a$ 被视为顶点集 Q_0的子集）。

以下命题在 [BDHK19 的命题 8 的证明中得到了证明。7] (另见 [BDHK19，例 9.1、9.5]) 。

引理 3.3.4. 设 m、$n\in\mathbb{Z}_{>0}$，并令 $\nu:=(n,1,\dots,1)\in\mathbb{N}^m_{m+n-1}$。对于 $j\in[n]$ 和 $Q\in\mathcal{Q}(n)$，如果 $\Delta_0^\nu(Q)\in\mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(m)$，则我们有

$$\partial_{z_j} f_{\Delta_1^\nu(Q)}^{-1} f_Q\Big|_{z_1=\cdots=z_n} = -\sum_{i\in\mathcal{E}_Q^\nu(j)} \partial_{z_i} f_{\Delta_0^\nu(Q)}$$

在识别 $\mathbb{K}[z_n^{\pm1},\dots,z_{m+n-1}^{\pm1}]\cong\mathbb{K}[z_1^{\pm1},\dots,z_m^{\pm1}]$, $z_{i+n-1}\mapsto z_i$ 下。

在本§ 3.3节余下部分中，我们固定一个滤过的 $\mathcal{H}_W$-超模（V，$(V_r)_{r\in\mathbb{N}}$）。

定义 3.3.5. 设 $n,r\in\mathbb{N}$。对于 $X\in F_r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)$，我们定义一个线性映射

$$\widetilde{X}^r\colon(\operatorname{gr}V)^{\otimes n}\otimes\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)\longrightarrow(\operatorname{gr}V)_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$$

by

$$\widetilde{X}^r(\overline{v}_1^{s_1}\otimes\cdots\otimes\overline{v}_n^{s_n}\otimes Q):=\overline{X(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f_Q)}^{s+t-r}\quad(v_i\in V_{s_i},\,Q\in\mathcal{Q}(n)\text{ with }t\text{ edges}).$$

对于每个 s、$t\in\mathbb{N}$ 和 $(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{N}_s^n$。

引理 3.3.6. 设 n、$r\in\mathbb{N}$。
(1) 对任意 $X\in F_r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)$，有 $\widetilde{X}^r\in\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}{}_{\operatorname{gr}V,r}(n)$。
(2) 映射

$$F_r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)\longrightarrow\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}_{\operatorname{gr}V,r}(n),\quad X\longmapsto\widetilde{X}^r$$

是右 $\mathfrak{S}_n$-超模同态。
(3) 对于 $X\in F_r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)$，当且仅当 $X\in F_{r+1}\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{cl}N_W=N}(n)$ 时，有 $\widetilde{X}^r=0$。

~证明。对于 X^r，循环关系由引理 3.3.3 (3)、(4)得出。为证明半线性条件，设 $s,t\in\mathbb{N},(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{N}_s^n$, $v_i\in V_{s_i}(i\in[n])$，以及 $Q\in\mathcal{Q}(n)$，其中有 t 条边。此外，设 I^a 是 $\underline{Q}$的一个连通分支。

- $\widetilde{X^r}$ 满足半线性条件（2.2.2）：对 k，$l\in I^a$，根据 $\widetilde{X^r}$ 的定义，
$$(\partial_{\lambda_k}-\partial_{\lambda_l})\widetilde{X}^r(\overline{v}_1^{s_1}\otimes\cdots\otimes\overline{v}_n^{s_n}\otimes Q)=(\partial_{\lambda_k}-\partial_{\lambda_l})\overline{X(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f_Q)}^{s+t-r}.$$
Si由于 $X\colon V^{\otimes n}\otimes\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\to V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ 是右 $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}$-超模同态，我们有
$$\begin{aligned}(\partial_{\lambda_k}-\partial_{\lambda_l})X(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f_Q)&=-X(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f_Q)\cdot z_{k,l}\\&=-X(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f_Q z_{k,l}).\end{aligned}$$
显然，$f_Q z_{k,\,l}\in F_{t-1}\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$若 $Q\in\mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(n)$，于是
$$(\partial_{\lambda_k}-\partial_{\lambda_l})\widetilde{X}^r(\overline{v}_1^{s_1}\otimes\cdots\otimes\overline{v}_n^{s_n}\otimes Q)=0.$$
- $\widetilde{X}^r$ 满足半线性条件 (2.2.3)：由于 $X\colon\ V^{\otimes n}\otimes\mathcal{O}^{\star}{}_{\mathrm{T}_n}\ \to V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ 是一个右$\mathcal{D}_{\mathrm{T}n}$-超模同态，我们有
$$\begin{aligned}&\sum_{k\in I^a}\widetilde{X}^r\big(T^{(k)}(\overline{v}_1^{s_1}\otimes\cdots\otimes\overline{v}_n^{s_n})\otimes Q\big)=\sum_{k\in I^a}\overline{X\big(T^{(k)}(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\otimes f_Q\big)}^{s+t-r}\\&=-\sum_{k\in I^a}\lambda_k\overline{X(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f_Q)}^{s+t-r}+\sum_{k\in I^a}\overline{X(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes\partial_{z_k}f_Q)}^{s+t-r}\\&=-\sum_{k\in I^a}\lambda_k\overline{X(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f_Q)}^{s+t-r}=-\sum_{k\in I^a}\lambda_k\widetilde{X}^r(\overline{v}_1^{s_1}\otimes\cdots\otimes\overline{v}_n^{s_n}\otimes Q).\end{aligned}$$

在第三个等式中，我们使用了引理 3.3.3(5)。

- 线性映射 $\widetilde{X}$ 满足半线性条件（2.2.4）：利用以下事实进行直接计算即可验证：$X: V^{\otimes n}\otimes \mathcal{O}_n^{\star \mathrm{T}} \to V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ 是一个右 $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}$-超模同态。

因此，我们有 $\widetilde{X}^r \in \mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}{}_{\text{分次 } V}(n)$，现在 $\widetilde{X}^r \in \mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}{}_{\text{分次 } V,\ r}(n)$ 根据分次的定义 3.3.1 显然成立，其中 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}{}_{\text{分次 } V}$。

（2）利用引理 3.3.3 (1)进行直接计算即可验证。

（3）容易验证，$X \in F_{r+1}\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)$ 蕴含 $\widetilde{X}^r = 0$。反之，设 $\widetilde{X}^r = 0$。由 X 的半共轭线性，只需证明

$$X(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f) \in V_{s+t-r-1,\nabla}[\Lambda_k]_{k=1}^n, \quad (v_i\in V_{s_i},\ f \coloneqq z_{k_1,l_1}^{-1}\cdots z_{k_t,l_t}^{-1})$$

对于 s，$t \in V$以及（s_1，...，s_n）$\in \mathbb{N}_s^n$（另见 [BDHK19，引理 8.3]）。利用 $Q \in \mathcal{Q}$（n），使得 $f_Q = f$，我们有

$$\overline{X(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f)}^{s+t-r} = \widetilde{X}^r(\overline{v}_1^{s_1}\otimes\cdots\otimes\overline{v}_n^{s_n}\otimes Q) = 0,$$

这意味着 $X(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f) \in V_{s+t-r-1,\ \nabla}[\Lambda_k]_{k=1}^n$。

□

引理 3.3.7. 设 $m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$和 $r,s\in\mathbb{N}$。对于 $X\in F_r\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(m)$ 和 $Y\in F_s\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)$，我们有

$$\widetilde{X\circ_1 Y}^{r+s} = \widetilde{X}^r\circ_1\widetilde{Y}^s. \tag{3.3.1}$$

证明。设 $\nu\coloneqq(n,\ 1,\ \ldots,\ 1)\in\mathbb{N}_{m+n-1}^m$ 以及 $Q\in\mathcal{Q}$（n）。若 $\Delta_0^\nu(Q)\in\mathcal{Q}$（$m$）$\setminus\mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}$（$m$），则显然，式（3.3.1）（在 Q上取值）的右端等于 0，因为 X 满足第一个循环关系。此外，由于

$$f_{\Delta_1^\nu(Q)}^{-1}f_Q\Big|_{z_1=\cdots=z_n}\in F_{t-1}\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}},\quad t\coloneqq\#E(Q)-\#E(\Delta_1^\nu(Q)),$$

（3.3.1）的左端也为 0。若 $\Delta_1^\nu(Q)\in\mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(m)$，则可利用引理 3.3.1通过直接计算证明（3.3.4）。□

由引理 3.3.6，我们有一个单射右 $\mathfrak{S}_n$-超模同态

$$\alpha_{n,r}\colon F_r\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)/F_{r+1}\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)\longrightarrow\mathcal{P}_{\mathrm{gr}\,V,r}^{\mathrm{cl}N_W=N}(n),\quad \overline{X}^r\longmapsto\widetilde{X}^r.$$

这里 $\overline{X}^r$ 表示 $X\in F_r\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)$ 的等价类。我们定义

$$\alpha_n\coloneqq\bigoplus_{r\in\mathbb{N}}\alpha_{n,r}\colon\mathrm{gr}\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}(n)\longrightarrow\mathcal{P}_{\mathrm{gr}\,V}^{\mathrm{cl}N_W=N}(n),$$

那么 b y 引理 3.3.7 , the se q序列 $\alpha\coloneqq(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个 p态射 p运算子的是 gr $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}$ 到 $\mathcal{P}_{\mathrm{gr}\,V}^{\mathrm{cl}N_W=N}$.

总结迄今为止的讨论，我们得到了 §3 的以下主要结论，它是 [BDHK19 定理 10 的一个自然的超对称类比。12]。

定理 3.3.8。对于滤过的 $\mathcal{H}_W$-超模 $(V,(V_r)_{r\in\mathbb{N}})$，序列 $\alpha=(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$是从 gr $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W=N}$到 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}N_W=N}{}_{\mathrm{gr}\ V}$的分次超运算子代数单态。

注 3.3.9. 对于非幺滤过超对称顶点代数 V，由命题 3.0.3 可知，gr V 上具有非幺超对称泊松顶点代数结构。另一方面，如果我们记作

$$X\in\mathrm{MC}\big(L(\mathcal{P}_{\Pi^{N+1}V}^{\mathrm{ch}N_W=N})\big)_{\overline{1}}\cap F_1\mathcal{P}_{\Pi^{N+1}V}^{\mathrm{ch}N_W=N}(2)_{\overline{1}}$$

命题3.2.8中与滤过超对称顶点代数结构相对应的元素，那么我们便得到另一个超对称泊松顶点代数结构 $\alpha_2(\overline{X}^1)=\widetilde{X}^1$ 在 gr V 上。根据 $\widetilde{X}^1$的定义，定理 1.4.4 和定理 2.2.10，这两个超对称泊松顶点代数结构相同。

Appendix A. Poisson cohomology bicomplex and finite cohomology complex

本附录A 旨在对文献 P^{cl} [BDHK19中的有限 operad，第10.5], 节作一则注记，其内容在逻辑上独立于正文。下文为与正文保持一致，使用花体符号 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}}$ 表示有限 operad。

根据代数歌剧代数理论（例如参见 [LV12] ），给定线性空间 V 上的泊松代数结构与从泊松歌剧代数 $\mathcal{P}$ois [LV12, §13.3] 到端同态歌剧代数 $\mathcal{H}\mathrm{om}_V$的歌剧代数态射 $\alpha\colon \mathcal{P}\mathrm{ois} \to \mathcal{H}\mathrm{om}_V$ 一一对应。泊松歌剧代数 $\mathcal{P}$ois 是一个二元齐次二次歌剧代数，可通过分配律由李运算子 $\mathcal{L}$ie 和交换歌剧代数 $\mathcal{C}$om 构造而成： $\mathcal{P}\mathrm{ois} = \mathcal{C}\mathrm{om} \circ \mathcal{L}\mathrm{ie}$。作为一个 $\mathfrak{S}_n$-模，我们有 $\mathcal{P}\mathrm{ois}(n) = (\mathcal{L}\mathrm{ie} \circ \mathcal{C}\mathrm{om})(n) \simeq \mathcal{A}\mathrm{ssoc}(n) = \mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$，其中 $\mathcal{A}$ssoc 表示结合歌剧代数。

根据歌剧代数上同调理论 [LV12，第 6], 给定一个泊松代数 A 对应于一个歌剧代数态射 $\alpha\colon \mathcal{P}ois \to \mathcal{H}om_V$，我们得到一个安德烈-奎伦型上同调复形，其微分由 α （简要回顾见附录 A.1.1 ）诱导。该复形结构复杂，但根据 Fresse [F06], 的工作，它具有双复形结构 $C^{\bullet,\bullet}_{\mathcal{P}ois}(A,A)$，其垂直和水平复形本质上分别与切瓦利-埃伦伯格（李代数）上同调复形和哈里森（交换代数）上同调复形相同。解释见附录 A.1.3 。

在 [BDHK19中，§10。5], 论证了，线性空间 A 上的泊松代数结构 V 与一个歌剧代数态射 $X\colon \mathcal{L}ie \to \mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}$从李运算子到所谓有限歌剧的态射一一对应。于是，我们有切瓦利-埃伦伯格型上同调复形 $\mathfrak{g}(\mathcal{P}_A^{\mathrm{fn}})$，其微分由 X诱导。

因此，我们可以问这两个上同调复形 $C^{\bullet,\bullet}_{\mathcal{P}ois}(A, A)$和 $\mathfrak{g}(\mathcal{P}_A^{\mathrm{fn}})$之间有什么关系。在定理A.3.2中，我们将证明 $\mathfrak{g}(\mathcal{P}_A^{\mathrm{fn}})$具有双复形结构，并且这两个双复形除垂直平移外完全一致。

我们将在特征零的域 $\mathbb{K}$ 上进行讨论，除非另有说明，所有对象（线性空间、代数等）均定义在 $\mathbb{K}$ 上。对于 $\mathbb{K}$-模 V和 W （即 $\mathbb{K}$上的线性空间），我们将记号简写为 $\mathrm{Hom}(V,W) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$， $V \otimes W := V \otimes_{\mathbb{K}} W$，等等。

A.1. 泊松上同调双复形。

A.1.1. 泊松上同调。设 $A = (A, -\cdot-)$ 是一个交换代数，其乘法为 $-\cdot-\colon A\otimes A \to A$。 A 上的泊松括号是一个反对称双导子 $\{-,-\}\colon A \otimes A \to A$，满足雅可比关系。泊松代数是配备了泊松括号的交换代数。因此，一个泊松代数 $(A, -\cdot-, \{-,-\})$ 同时具有交换代数的结构 $(A, -\cdot-)$ 和李代数的结构 $(A, \{-,-\})$。

设 $A = (A, -\cdot-, [-,-])$ 是一个泊松代数。泊松 A-模是交换代数 $(A, -\cdot-)$ 上的一个模 M，配备了一个反对称双线性映射 $[-,-]\colon M \otimes A \oplus A \otimes M \to M$，该映射相对于代数作用 $A \to \mathrm{End}(M)$ 是一个双导子，并使 M 成为李代数 $(A, [-,-])$ 的一个表示。我们同样具有泊松 A-模的态射这一自然概念，以及相应的泊松 A-模范畴 $\mathrm{Mod}_A^{\mathcal{P}ois}$。存在一个结合代数 $U_{\mathcal{P}ois}(A)$，称为泊松代数 A 的包络代数，使得 $\mathrm{Mod}_A^{\mathcal{P}ois}$ 等价于左 $U_{\mathcal{P}ois}(A)$-模范畴。详见 [F06, 1.1.2–1.1.4] ，关于适用于任意歌剧上的代数的一般论证，另见 [LV12, 12.3.1–12.3.4]。

接下来，我们简要回顾泊松上同调，遵循 [F06, 1.2], ，它给出了 Andr´e-Quillen (上)同调理论的泊松类比。另见 [LV12, 12.3] ，该方法可应用于任意歌剧。设A 是一个泊松代数， M 是一个泊松 A-模。若线性映射 $d\colon A \to M$ 同时是关于乘法和泊松括号的导子，我们就称其为泊松导子。我们用 $\mathrm{Der}_{\mathcal{P}ois}(A, M)$ 表示泊松导子模 $A \to M$。粗略地说，泊松上同调定义为“ $A \mapsto \mathrm{Der}_{\mathcal{P}ois}(A, M)$ 的导出函子”。更准确地说，存在一个泊松 A-模 $\Omega^1_{\mathcal{P}ois}(A)$，使得对于任意泊松 A-模 M，都有 $\mathrm{Der}_{\mathcal{P}ois}(A, M) = \mathrm{Hom}_{U_{\mathcal{P}ois}(A)}(\Omega^1_{\mathcal{P}ois}(A)\ M)$。然后，我们用拟自由分解 R 替换 A ，并将 A 以 M为系数的第 p阶泊松上同调定义为

$$H^p_{\mathcal{P}ois}(A, M) := H^p\big(\mathrm{Hom}_{U_{\mathcal{P}ois}(R)}(\Omega^1_{\mathcal{P}ois}(R), M)^\bullet\big). \tag{A.1.1}$$

这里， A的拟自由分解是一个微分分次泊松代数 $R = (R_\bullet, \partial, -\cdot-, [-,-])$，配备一个满射拟同构 $R \to A$ ，其底层分次泊松代数 $(R_\bullet, -\cdot-, [-,-])$ 是约化自由的。

由某个在导子 ∂ 下稳定的子模 $V \subset R$ 所得的分次泊松代数 $\overline{P}(V)$: $R_\bullet \to R_{\bullet-1}$。约化自由泊松代数 $\overline{P}(V)$ 是自由泊松代数 $\mathcal{P}(V)$ 的增广理想，其定义为 $\mathcal{P}(V) = \mathcal{S}(\mathcal{L}(V))$，即模 V 的自由李代数 $\mathcal{L}(V)$ 的对称代数。回到 (A.1.1)，模 $\mathrm{Hom}_{U_{\mathcal{P}ois}}(R)(\Omega^1_{\mathcal{P}ois}(R)\ M)$ 带有由同调分次 $R_\bullet$ 诱导的分次，并配备由 ∂ 诱导的微分。因此，它是一个上同调复形，我们可以取其 p 次上同调。

A.1.2. 欧拉分解。 作为下一附录中所述构造的准备工作， A.1.3，我们回顾 欧拉 （也称为 霍奇型） 分解，即交换代数的霍赫希尔德复形的分解 [GS87、 Lo89]。我们遵循 [Lo98（ §4.5] ）和 [LV12（ §1.3）中的说明。5]

对于线性空间 V，我们将 $\mathcal{T}^c = \mathcal{T}^c(V)$ 表示为张量余代数。作为一个模，它表示为$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n}$。我们将自然的 $\mathbb{N}$分次记为 $\mathcal{T}^c_n := V^{\otimes n}$ 我们将其元素记为 $(v_1, \dots, v_n) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$。余乘法由解串给出:

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) := \sum_{i=0}^{n} (v_1, \dots, v_i) \otimes (v_{i-1}, \dots, v_n) \in \mathcal{T}^c \otimes \mathcal{T}^c .$$

余代数 $\mathcal{T}^c$ 具有交换霍普夫代数结构，其乘法由洗牌积 μ给出:

$$\mu\big((v_1 \cdots v_m) \otimes (v_{m+1}, \dots, v_{m+n})\big) := \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{m,n}} (-1)^\sigma v_{\sigma^{-1}(1)} \cdots v_{\sigma^{-1}(m+n)},$$

其中，$\mathrm{Sh}_{m,\ n}$ 是由 (m, n)-洗牌组成的 $(m + n)$ 阶对称群 $\mathfrak{S}_{m+n}$ 的子群，即,

$$\mathrm{Sh}_{m,n} := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{m+n} \mid \sigma(1) < \cdots < \sigma(m),\ \sigma(m+1) < \cdots < \sigma(m+n)\}. \tag{A.1.2}$$

我们分别用 u 和 ε表示单位元和余单位。其精确定义见 [LV12，§1。2]

利用霍普夫代数 $(\mathcal{T}^c, \mu, \Delta, u, \varepsilon)$ ，我们将两个线性自同态 $f, g \in \mathrm{End}(\mathcal{T}^c)$ 的卷积定义为

$$f * g := \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

若 f 和 g 是代数自同态，则 $f * g$ 也是代数自同态。我们还注意到，若 f 是代数自同态，且对于 $1 \in \mathbb{K}$ 有 $f(1) = 0$，那么将 $f^{*k} := f * \cdots * f (k\text{times})$ 限制在$V^{\otimes n}$ 上时，对于 $n < k$其值为 0。

考虑迭代卷积 id^{*k}。它是 $\mathcal{T}^c$ 的代数自同态，并且有 $\mathrm{id}^{*k} = \mu^k \circ \Delta^k$，其中我们分别用 μ^k: $V^{\otimes k} \to V$和 Δ^k: $V \to V^{\otimes k}$ 表示 μ和 Δ 的迭代复合。注意，按照我们的约定， $\mu^2 = \mu$ 和 $\Delta^2 = \Delta$ 。现在我们定义

$$e^{(1)} := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathrm{id}^{*k}}{k}.$$

由于等式 $(\mathrm{id} - u\varepsilon)(1) = 0$ 对 $1 \in \mathbb{K}$成立，上述注记声称 $e^{(1)}$ 是 $\mathcal{T}^c$上的良定义代数自同态。我们进一步定义

$$e^{(p)} := \frac{1}{p!}(e^{(1)})^{*p}, \quad e^{(p)}_n := e^{(p)}\Big|_{\mathcal{T}^c_n} .$$

我们有 $e^{(0)}_0 = 1$ ，并且对 $p > n$有 $e^{(p)}_n = 0$ 。

由一般性论证 [Lo98，命题 4.5.3], 元素 $e^{(p)}_n \in \mathrm{End}\big(\mathcal{T}^c_n\big)$ 具有以下性质。

(i) $e^{(1)}_n + \cdots + e^{(n)}_n = \mathrm{id}$。 (ii) $e^{(p)}_n e^{(j)}_n = \delta_{i,\ j} e^{(p)}_n$,

即它们是正交幂等元。

这些元素称为欧拉幂等元。

由于每个欧拉幂等元 $a = e^{(p)}_n (p = 1, \dots, n)$ 都作用于齐次分量 $\mathcal{T}^c_n = V^{\otimes n}$，因此 $(v_1, \dots, v_n) \in V^{\otimes n}$ 的像具有 $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a(\sigma)\sigma.(v_1, \dots, v_n)$ 的形式，我们可以将 a 与 $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a(\sigma)\sigma \in \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ 识别。在此识别下，我们有 $e^{(p)}_n \in \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]\ (i = 1, \dots, n)$，其显式公式可用一个排列的下降来表示。我们还有 $e^{(p)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{(p)}_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$，可将其视为 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ 的完备化。详情参见 [Lo98, §4.5.5] 。

现在我们可以说明交换代数的霍赫希尔德上链复形的分解。设 A 为一个交换代数， M 为一个对称的 A-双模，即满足条件 $a.m = m.a$ 的 A-双模，其中 $a \in A$ 和 $m \in M$ 任取。我们还用 Σ 表示按同调次数分次的模的悬移。因此，对于 $p \in \mathbb{Z}$，有 $(\Sigma V)_p = V_{p-1}$。令

$$C^{\bullet}_{\mathcal{A}ssoc}(A, M) \coloneqq \mathrm{Hom}\big(\mathcal{T}^c(\Sigma A), M\big) \tag{A.1.3}$$

即为霍赫希尔德上链复形。每个分次分量为 $C^n_{\mathcal{A}ssoc}(A, M) \simeq \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M)$ $(n \in \mathbb{N})$，且上余边界映射 $b\colon C^n_{\mathcal{A}ssoc}(A, M) \to C^{n+1}_{\mathcal{A}ssoc}(A, M)$ 定义为

$$\begin{aligned}(bf)(a_1, \ldots, a_{n+1}) \coloneqq a_1 f(a_2, \ldots, a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} f(a_1, \ldots, a_n) a_{n+1}.\end{aligned} \tag{A.1.4}$$

于是，欧拉幂等元 $e^{(p)}_n$诱导出 $C^{\bullet}(A, M)$ 的如下分解，该分解由[GS87、Lo89]建立。另请参见 [F06，第 4 节2]中的解释。

事实 A.1.1. 交换代数 A 上系数取自对称A-双模 M 的霍赫希尔德上链复形可分解为子复形

$$C^{\bullet}_{\mathcal{A}ssoc}(A, M) = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} C^{\bullet}_{(p)}(A, M), \quad C^{\bullet}_{(p)}(A, M) \coloneqq \mathrm{Hom}(e^{(p)}\, \mathcal{T}^c(\Sigma A), M).$$

此外，我们有

$$C^{\bullet}_{(p)}(A, M) \simeq \mathrm{Hom}\big(\mathcal{S}_p\big(\mathcal{L}^c(\Sigma A)\big), M\big) \tag{A.1.5}$$

对每个 $p \in \mathbb{N}$ 均成立，其中 $\mathcal{L}^c(\Sigma A)$ 是分次模 ΣA的余自由李余代数， $\mathcal{S} = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_p$ 表示自由交换代数函子，即对称张量积。特别地， $p = 1$部分同构于 Harrison 上链复形：

$$C^{\bullet}_{(1)}(A, M) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{L}^c(\Sigma A), M) = C^{\bullet}_{\mathcal{C}om}(A, M). \tag{A.1.6}$$

为后续使用，我们明确描述哈里森（上）链复形。令 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，并对 $r = 1$、.....、 n，设 $s_{r,n-r} \coloneqq \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(r,n-r)} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \in \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$，它通过置换张量因子作用于 $A^{\otimes n}$。然后我们定义

$$\mathrm{ch}_n(A) \coloneqq A^{\otimes n} / \langle s_{r,n-r}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \mid r = 1, \ldots, n,\ a_i \in A \rangle_{A\text{-mod}}.$$

我们将与 $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in A^{\otimes n}$ 相关联的元素记为 $[a_1 \otimes \cdots \otimes a_n] \in \mathrm{ch}_n(A)$。现在，对于一个 A-模 M，我们设

$$\mathrm{ch}_n(A; M) \coloneqq \mathrm{ch}_n(A) \otimes M. \tag{A.1.7}$$

分次模 $\bigoplus_{n>0} \mathrm{ch}_n(A;\ M)$ 配备了边界映射 $\partial\colon \mathrm{ch}_n(A;\ M) \to \mathrm{ch}_{n-1}(A;\ M)$，其定义为

$$\begin{aligned}\partial_n([a_1 \otimes \cdots \otimes a_n] \otimes m) \coloneqq [a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}] \otimes a_n.m + \sum_{i=1}^{n-1} [a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n] \otimes m \\ + (-1)^n [a_2 \otimes \cdots \otimes a_n] \otimes a_1.m.\end{aligned} \tag{A.1.8}$$

所得的同调复形 $(\mathrm{ch}_\bullet(A;\ M)\ \partial)$ 即为哈里森链复形。另一方面，哈里森上链复形 $C^{\bullet}_{\mathcal{C}om}(A, M)$ 定义为

$$C^n_{\mathcal{C}om}(A, M) \coloneqq \mathrm{Hom}(\mathrm{ch}_n(A), M) \tag{A.1.9}$$

上余边界映射 d： $C^n_{\mathcal{C}om}(A, M) \to C^{n+1}_{\mathcal{C}om}(A, M)$ 与霍赫希尔德上余边界映射相同（A.1.4）。

注记 A.1.2. 有必要对参考文献作一些说明。哈里森复形最初定义为[Ha62] 使用单调置换，这些置换也用于 [BDHK19]。另一方面，余自由李余代数是张量余代数关于洗牌积的不可分解元所构造的（例如参见 [SS85] ）。这两个对象在 [GS87] 中被证明是等价的。上述描述

(A.1.7) 和 (A.1.8) 确实是余自由李余代数的相关结构。之后，李代数对象与交换代数对象之间的关系进一步发展为幺半群上同调 Koszul 对偶理论 [GK94]。

A.1.3. 泊松上同调双复形。 泊松上同调复形在 [F06] 中引入，用于计算泊松上同调（A.1.1）。这里我们遵循 [F06，§1.3] 和 [N08，§2]，简要回顾一下。作为一个双重分次模，它不过是前一附录中回顾的欧拉分解的霍赫希尔德复形 A.1.2。

设 $A=(A,-\cdot-,[-,-])$ 是一个泊松代数， M 是一个泊松 A-模。那么， M 可视为底层交换代数 $A_{\mathcal{C}om}:=(A,-\cdot-)$ 上的一个对称模，并且我们有霍赫希尔德上链复形 $C^\bullet_{\mathcal{A}ssoc}(A_{\mathcal{C}om},M)$。回顾霍赫希尔德上链复形的欧拉分解：

$$C^\bullet_{\mathcal{A}ssoc}(A_{\mathcal{C}om},M)=\bigoplus_{p\in\mathbb{N}}C^\bullet_{(p)}(A_{\mathcal{C}om},M),\quad C^\bullet_{(p)}(A,M)\simeq\mathrm{Hom}(\mathcal{S}_p\big(\mathcal{L}^c(\Sigma A)\big),M)^\bullet.$$

对于 $p,q\in\mathbb{N}$，我们令 $C^{p,q}_{\mathcal{P}ois}(A,M):=0$ 当 $p=0$ 时，以及

$$C^{p,q}_{\mathcal{P}ois}(A,M):=C^{p+q}_{(p)}(A,M)\quad(p>0).$$

我们定义注意 Hochschild 余边界映射的限制（A.1.4），并沿用相同的符号 a s

$$d\colon C^{p+q}_{(p)}(A,M)\longrightarrow C^{p+q+1}_{(p)}(A,M).$$

根据事实 A.1.1，它给出了双复形的垂直微分。

为了引入水平微分，我们需要回顾李代数的 Chevalley-Eilenberg 上链复形。设 $L=(L,[-,-])$ 是一个李代数，且 M 是一个 L-模，其 $[-,-]$ 为： $L\otimes M\to M$ 其李模结构。则 Chevalley-Eilenberg 上链复形 $(C^\bullet_{\mathcal{L}ie}(L,M)\ \delta_{\mathrm{CE}})$ 为

$$C^n_{\mathcal{L}ie}(L,M):=\mathrm{Hom}(\mathcal{S}_n(\Sigma L),M),\tag{A.1.10}$$

以及对于 $f\in C^n_{\mathcal{L}ie}(L,M)$ 和 $u_0\cdots u_n\in\mathcal{S}_{n+1}(\Sigma L)$,

$$\delta_{\mathrm{CE}}(f)(u_0\cdots u_n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[u_i,f(u_0\cdots\widehat{u_i}\cdots u_n)]+\sum_{0\le i<j\le n}(-1)^{i+j}f([u_i,u_j]u_0\cdots\widehat{u_i}\cdots\widehat{u_j}\cdots u_n).\tag{A.1.11}$$

根据 [F06, 1.3.5], ， A 上的泊松括号诱导出一个 -1-移位李括号 $[-,-]$ ，作用于 $\mathcal{L}^c(\Sigma A)$，即$L:=\Sigma^{-1}\mathcal{L}^c(\Sigma A)$ 是一个分次李代数。此外，根据 [F06, 1.3.7], ， M 上的泊松 A- 模结构诱导出一个 -1- 移位李代数 $(\mathcal{L}^c(\Sigma A)\ [-,-])$ 上的模结构。因此，我们得到切瓦利-艾伦伯格上链复形 $(C^\bullet_{\mathcal{L}ie}(L,M)\ \delta_{\mathrm{CE}})$。展开定义后，我们得到一个微分

$$\delta_{\mathrm{CE}}\colon C^{p+q}_{(p)}\longrightarrow C^{p+q+1}_{(p+1)}.$$

由于 Hochschild 余边界映射 d 通过 $\mathcal{L}^c(\Sigma A)\ [-,-]$在 [F06，1.3.5],上诱导出微分分次李代数结构，最终我们得到：

定义 A.1.3 ([F06, 1.3.13]). 对于泊松代数 $(A,-\cdot-,[-,-])$ 和一个泊松 A-模 M，我们有一个双复形

$$\big(C^{\bullet,\bullet}_{\mathrm{Pois}}(A,M),d,\delta_{\mathrm{CE}}\big),$$

其中

$$C^{p,q}_{\mathcal{P}ois}(A,M):=\begin{cases}C^{p+q}_{(p)}(A,M)\simeq\mathrm{Hom}\big(\mathcal{S}_p\big(\mathcal{L}^c(\Sigma A)\big),M\big)^{p+q} & (p\in\mathbb{Z}_{>0},q\in\mathbb{N})\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases},$$

垂直微分 $d\colon C^{p,q}_{\mathcal{P}ois}=C^{p+q}{}_{(p)}\to C^{p+q+1}{}_{(p)}=C^{p,q+1}_{\mathcal{P}ois}$ 由 Hochschild 余边界映射（A.1.4）诱导，而水平微分 $\delta\colon C^{p,q}_{\mathcal{P}ois}=C^{p+q}{}_{(p)}\to C^{p+q+1}{}_{(p+1)}=C^{p+1,q}_{\mathcal{P}ois}$ 由 Chevalley-Eilenberg 上余边界映射（A.1.11）诱导。我们称这个双复形为泊松上同调双复形。

事实 A.1.4 ([F06, 1.3.14]). 定义 A.1.3 中的泊松上同调双复形的总复形的上同调与泊松上同调 (A.1.1) 同构。

图 A.1.1 展示了关于泊松上同调双复形的图表。我们只展示非零部分。左上方的图表展示了 $C^{p+q}{}_{(p)}$ 的构型，右上方的图表展示了 $C^{p,\,q}$。底部图表引自 [N08，第268], 页，展示了每个模的内容以及哈里森链复形 $\mathsf{ch}_\bullet \simeq \mathcal{L}^c(\Sigma A)_\bullet$（见（A.1.7）、（A.1.8）和注记 A.1.2）。

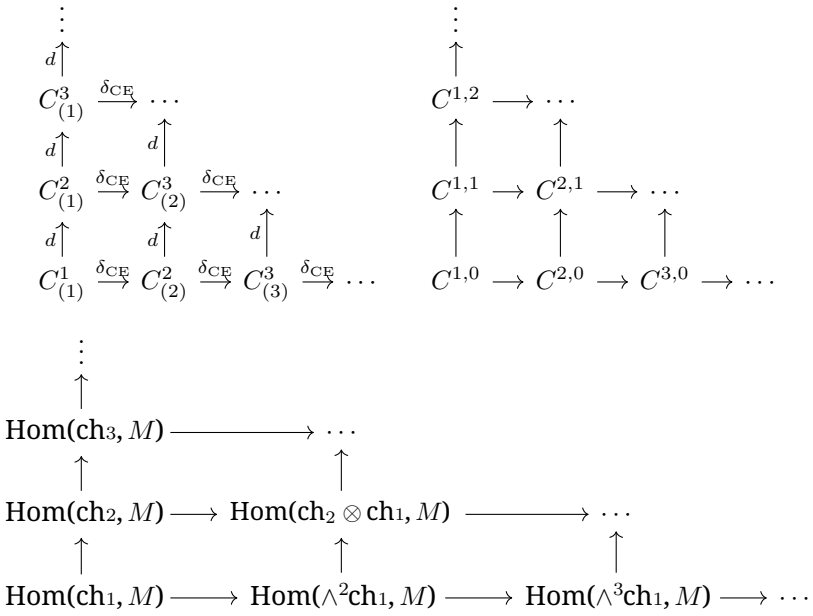


FIGURE A.1.1. 泊松上同调双复形

由此可推得：

事实 A.1.5. 设 $A = (A, -\cdot-, \{-,-\})$ 是一个泊松代数，M 是一个泊松 A-模。分别记 $A_{\mathcal{C}om} := (A, -\cdot-)$ 和 $A_{\mathcal{L}ie} := (A, \{-,-\})$ 为其底层交换代数和李代数。则 Harrison 上链复形 $C^\bullet_{\mathcal{C}om}(A_{\mathcal{C}om}, M)$ 和 Chevalley-Eilenberg 上链复形 $C^\bullet_{\mathcal{L}ie}(A_{\mathcal{L}ie}, M)$ 嵌入泊松上同调双复形 $C^{\bullet,\,\bullet}_{\text{泊松}}(A, M)$ 中，如下所示

$$C^\bullet_{\mathcal{C}om}(A_{\mathcal{C}om}, M) = C^{\bullet,1}_{\mathcal{P}ois}(A, M), \quad C^\bullet_{\mathcal{L}ie}(A_{\mathcal{L}ie}, M) = C^{1,\bullet}_{\mathcal{P}ois}(A, M).$$

A.2. 有限 operad 与泊松代数结构。 在本附录中，A.2，我们简要回顾有限 operad，它由[BDHK19第 10 节5] 作为研究经典 operad$\mathcal{P}^{\mathrm{cl}}$的副产品而引入。

A.2.1. n-图。 我们回顾一下 §2.1 中关于图和箭图的术语。另见 [BDHK19，8。2]{BDHK20，4。1] 和 [BDKV21，4。2]。

回顾定义 2.1.7 中的集合 $\mathcal{Q}(n)$，即无环的 n-箭图集合，以及其子集 $\mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(n) \subset \mathcal{Q}(n)$，它由无环的 n-箭图组成。令 $\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)$ 为以 $\mathcal{Q}(n)$ 为基的线性空间。若 $\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)$ 中的元素具有以下任一形式，则称其为 循环关系 ([BDHK20，4。1])。

(i) 元素 $\Gamma \in \mathcal{Q}(n) \setminus \mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(n)$，即一个 n-箭图，其底层图 $\underline{\Gamma}$ 含有一个圈。(ii) 线性组合 $\sum_{e\in C} \Gamma \setminus e$，其中 $\Gamma \in \mathcal{Q}(n)$ 且 $C \subset E(\Gamma)$ 是一个有向圈。这里 $\Gamma \setminus e$表示从 $n-1$) 箭图中移除该边后得到的 Γ 所构成的（ e ）箭图；该边包含在有向圈中C （参见引理 2.1.6(3)）。

我们用 $R(n) \subset \mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)$ 表示所有循环关系的线性张成空间。集合 $\mathcal{Q}(n)$ 上的 $\mathfrak{S}_n$-作用扩张为 $\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)$ 上的线性作用，并保持子空间 $R(n)$ 不变。因此，我们在商空间 $\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)/R(n)$ 上得到一个线性 $\mathfrak{S}_n$-作用。

考虑一个划分

$$\{1,\dots,n\} = \{i^1_1,\dots,i^1_{m_1}\} \sqcup \{i^2_1,\dots,i^2_{m_2}\} \sqcup \cdots \sqcup \{i^p_1,\dots,i^p_{m_p}\}$$

其中 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $m_l \geq 1\,(l = 1, 2, \ldots, p)$ 和 $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ 满足

$$i_1^1 = 1 < i_1^2 < \cdots < i_1^p, \quad i_1^l = \min\{i_1^l, \ldots, i_{m_l}^l\} \quad (l = 1, 2, \ldots, p).$$

对于这样的划分 I，我们有一个如下形式的 n-箭图 Λ_I。

$$\Lambda_I := \quad \overset{i_1^1}{\bullet} \longrightarrow \overset{i_2^1}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overset{i_{m_1}^1}{\bullet} \qquad \overset{i_1^2}{\bullet} \longrightarrow \overset{i_2^2}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overset{i_{m_2}^2}{\bullet} \qquad \cdots \qquad \overset{i_1^p}{\bullet} \longrightarrow \overset{i_2^p}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overset{i_{m_p}^p}{\bullet} \tag{A.2.1}$$

我们称 Λ_I 为直线的不交并，并用 $\mathcal{L}(n) \subset \mathcal{Q}(n)$ 表示由直线的不交并构成的 n-箭图集合。显然，我们有 $\mathcal{L}(n) \subset \mathcal{Q}_{\mathrm{ac}}(n)$。现在引用：

事实 A.2.1 ([BDHK20，引理 4。1]). 集合 $\mathcal{L}(n)$ 是商空间 $\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)/R(n)$ 的一组基。

我们以回顾 n-箭图的余复合映射（定义 2.1.8）来结束本小节。另见[BDHK19，9。1]。对于一个由正整数组成的 n-元组 $M = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$，我们定义

$$M_0 := 0, \quad M_i := m_1 + m_2 + \cdots + m_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{A.2.2}$$

注意 $M_n = m_1 + \cdots + m_n$。那么映射

$$\Delta^M = (\Delta_0^M, \Delta_1^M, \ldots, \Delta_n^M)\colon\ \mathcal{Q}(M_n) \longrightarrow \mathcal{Q}(n) \times \mathcal{Q}(m_1) \times \cdots \times \mathcal{Q}(m_n)$$

由以下描述定义。令 $\Gamma \in \mathcal{Q}(M_n)$。

- 对于 $i = 1, \ldots, n$, $\Delta_i^M(\Gamma) \in \mathcal{Q}(m_i)$ 是与顶点 $M_{i-1}+1, \ldots, M_i$ 相关联的 Γ 的有向子图。
- $\Delta_0^M(\Gamma) \in \mathcal{Q}(n)$ 是通过将顶点 $M_{i-1}+1, \ldots, M_i$ 收缩为单个顶点 i 而得到的有向图，其中每个 $i = 1, \ldots, n$ 都如此。

A.2.2. 有限 operad。现在我们引用 [BDHK19, 10.5]中关于有限 operad $\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}$ 的定义。令 V 为一个线性空间。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们定义

$$\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}(n) := \mathrm{Hom}\big((\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)/R(n)) \otimes V^{\otimes n}, V\big). \tag{A.2.3}$$

我们将其元素记作一个映射

$$f\colon\ \mathcal{Q}(n) \times V^{\otimes n} \longrightarrow V, \quad (\Gamma, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \longmapsto f^\Gamma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$$

它关于第二个因子 $V^{\otimes n}$ 是线性的，并且我们通过线性性将其扩展到 $\Phi = \sum_\Gamma c_\Gamma \Gamma \in \mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)$，即 $f^\Phi := \sum_\Gamma c_\Gamma f^\Gamma\colon\ V^{\otimes n} \to V$。于是，对于每个循环关系 $\Phi \in R(n)$，都有 $f^\Phi = 0$。

回顾一下，在附录 A.2.1 中，我们定义了集合 $\mathfrak{S}_n$上的作用 $\mathcal{Q}(n)$、空间 $\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n$以及商空间 $\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)/R(n$。于是，空间 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}(n$是一个右 $\mathfrak{S}_n$-模，其定义为

$$(f^\sigma)^\Gamma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := f^{\sigma(\Gamma)}(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}).$$

最后，我们定义复合映射。对于每个 $M = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$，我们需要定义 $\gamma\colon\ \mathcal{P}_{(}^{\mathrm{fn}}\, n) \otimes \mathcal{P}_{(}^{\mathrm{fn}}\, m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_{(}^{\mathrm{fn}}\, m_n) \to \mathcal{P}_{(}^{\mathrm{fn}}\, M_n)$，其中 $M_n := m_1 + \cdots + m_n$。对于 $f \in \mathcal{P}_{(}^{\mathrm{fn}}\, n)$、$g_1 \in \mathcal{P}_{(}^{\mathrm{fn}}\, m_1)$、$\ldots$、$g_n \in \mathcal{P}_{(}^{\mathrm{fn}}\, m_n)$ 和 $\Gamma \in \mathcal{Q}(m_1 + \cdots + m_n)$，我们定义 $f(g_1, \ldots, g_n) = \gamma(f; g_1, \ldots, g_n)$，其定义为

$$f(g_1, \ldots, g_n)^\Gamma := f^{\Delta_0^M(\Gamma)}\big(g_1^{\Delta_1^M(\Gamma)} \otimes \cdots \otimes g_n^{\Delta_n^M(\Gamma)}\big). \tag{A.2.4}$$

这里我们使用了余复合映射 Δ_i^M，见附录A.2.1。

事实 A.2.2 ([BDHK19，10。5])。该 $\mathfrak{S}$-模 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}} = \big(\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ 具有歌剧结构，其复合映射 γ: $\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}} \circ \mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}} \to \mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}$由（A.2.4）给出。我们称之为有限 operad。

为便于后续使用，我们明确描述线性空间 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}(2)$。根据事实A.2.1，线性空间 $\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(2)/R(2)$ 有一个基 $\Lambda_{\{1\}\sqcup\{2\}}$，$\Lambda_{\{1\,2\}}$ 其中

$$\Lambda_{\{1\}\sqcup\{2\}} := \overset{1}{\bullet} \quad \overset{2}{\bullet} \qquad \Lambda_{\{1,2\}} := \overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet}$$

对于这些 2-箭图，我们记作

$$f^{\{1\}\sqcup\{2\}} := f^{\Lambda_{\{1\}\sqcup\{2\}}}, \quad f^{\{1,2\}} := f^{\Lambda_{\{1,2\}}}. \tag{A.2.5}$$

于是，线性空间 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}(2)$ 由元素 $f^{\{1\}\sqcup\{2\}}, f^{\{12\}}$ 张成，其中 $f \in \mathrm{Hom}(V^{\otimes 2}, V)$。

A.2.3. 有限 operad 与泊松代数结构。 接下来我们要说明的是 [BDHK19定理 10 中确立的事实：16] $\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}$ 与 V上的泊松代数结构有关。为此，回顾[NY，§1.3]中关于代数结构的歌剧形变与上同调理论。

令 $\mathcal{Q}$ 为任意歌剧，并考虑 $\mathcal{Q}$ 上李代数结构的上同调复形：

$$\mathfrak{g}(\mathcal{L}ie,\mathcal{Q})^\bullet=\big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}ie^!,\mathcal{Q})^\bullet,[-,-]\big),\quad [f,g]:=f\square g-(-1)^{|f||g|}g\square f. \tag{A.2.6}$$

分次分量 $\mathfrak{g}(\mathcal{L}\mathrm{ie}\ \mathcal{Q})^n$ 由下式给出

$$\mathfrak{g}(\mathcal{L}ie,\mathcal{Q})^n\simeq\big(\Pi\,\mathcal{Q}(n+1)\big)^{\mathfrak{S}_{n+1}}:=\{f\in\mathcal{Q}(n+1)\mid\forall\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1},\ f^\sigma=\mathrm{sgn}(\sigma)f\} \tag{A.2.7}$$

作为一个线性空间。其中，f^σ 表示 $\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}$ 在 $f\in\mathcal{Q}(n+1)$ 上的右作用。前李乘积 $\square$ 属于$\mathfrak{g}$（$\mathcal{L}$即 $\mathcal{Q}$）。对于 $f\in\mathfrak{g}$（$\mathcal{L}$即 $\mathcal{Q}$）^{n}和 $g\in\mathfrak{g}$（$\mathcal{L}$即 $\mathcal{Q}$）^{m}，我们有 $f\square g\in\mathfrak{g}$（$\mathcal{L}$即 $\mathcal{Q}$）$^{n+m}$，其中

$$f\square g:=\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(m+1,n)}(f\circ_1 g)^{\sigma^{-1}}, \tag{A.2.8}$$

其中 $\mathrm{Sh}(m+1,n)\subset\mathfrak{S}_{n+m+1}$ 表示 $(m+1,n)$-洗牌的子集（见 (A.1.2)），而 $\circ_1$ 表示无穷小复合（2.2.10）。分次李代数 $\mathfrak{g}(\mathcal{L}ie\ \mathcal{Q})$ 本质上与 BDHK19, 3. 中与 $\mathcal{Q}$ 相关的普适李超代数 [BDHK19,3.2]。

给定一个元素 $X\in\mathrm{MC}(\mathfrak{g}(\mathcal{L}\mathrm{ie}\ \mathcal{Q}))$，即一个在平凡微分下满足 Maurer-Cartan 方程的解，我们有一个微分 $d_X:=[X,-]$，作用于 $\mathfrak{g}(\mathcal{L}\mathrm{ie}\ \mathcal{Q})$。我们将论证总结如下：

事实 A.2.3 ([BDHK19，§3])。 令 $\mathcal{Q}$ 为一个歌剧，且 $\mathfrak{g}(\mathcal{L}ie\ \mathcal{Q})^\bullet$ 为分次李代数（A.2.6）、A.2.7）、A.2.8）。

（1）一个歌剧代数态射 $\varphi\colon\ \mathcal{L}\mathrm{ie}\ \to\mathcal{Q}$ 被称为 $\mathcal{Q}$ 中的李代数结构，它与一个元素 $X\in\mathrm{MC}\big(\mathfrak{g}(\mathcal{L}\mathrm{ie}\ \mathcal{Q})\big)$一一对应，即满足 $[X,X]=0$ 的 $X\in\mathfrak{g}(\mathcal{L}\mathrm{ie}\ \mathcal{Q})^1$。（2）对于 $X\in\mathrm{MC}\big(\mathfrak{g}(\mathcal{L}\mathrm{ie}\ \mathcal{Q})\big)$，我们有微分分次李代数

$$\mathfrak{g}(\mathcal{L}ie,\mathcal{Q})^X:=\big(\mathfrak{g}(\mathcal{L}ie,\mathcal{Q}),d_X\big),\quad d_X:=[X,-]\colon\mathfrak{g}(\mathcal{L}ie,\mathcal{Q})^\bullet\to\mathfrak{g}(\mathcal{L}ie,\mathcal{Q})^{\bullet+1}. \tag{A.2.9}$$

现在我们继续讨论。根据事实 A.2.2，我们得到有限歌剧 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}$，因此可以应用事实 A.2.3。结果总结如下：

事实 A.2.4 ([BDHK19，定理 10。16])。 对于线性空间 V，我们将事实 A.2.3中带有 $\mathcal{Q}=\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}$的分次李代数记为 $\mathfrak{g}:=\mathfrak{g}(\mathcal{L}$即$\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}})$。根据 (A.2.7) 和 (A.2.3)，其底层分次线性空间为

$$\mathfrak{g}^{n-1}=\big(\Pi\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}(n)\big)^{\mathfrak{S}_n}=\big\{f\in\mathrm{Hom}\big((\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)/R(n))\otimes V^{\otimes n},V\big)\mid\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n,\ f^\sigma=\mathrm{sgn}(\sigma)f\big\}. \tag{A.2.10}$$

于是，在集合

$$\mathrm{MC}(\mathfrak{g})=\{X\in\mathfrak{g}^1\mid X\square X=0\}=\{X\in\big(\Pi\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}(2)\big)^{\mathfrak{S}_2}\mid X\square X=0\}$$

与 $-\cdot-$，$\{-,-\}$上的泊松代数结构集合 V之间存在双射。按照记号 (A.2.5)，该双射为

$$X^{\{1\}\sqcup\{2\}}(v\otimes w)=\{v,w\},\quad X^{\{1,2\}}(v\otimes w)=v\cdot w. \tag{A.2.11}$$

下文将 $X\in\mathrm{MC}\big(\mathfrak{g}(\mathcal{L}$即$\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}})\big)$ 与 V上对应于 X在 (A.2.11) 下的泊松代数结构等同起来，并将泊松代数记为 $A=(V,\ X)=(V,\ -\cdot-,\ \{-,-\})$。给定这样的泊松代数 A，我们有上同调复形 (A.2.9)，记为

$$\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}}:=\big(\mathfrak{g}(\mathcal{L}ie,\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}),d_X\big),\quad d_X(f):=[X,f]. \tag{A.2.12}$$

我们称之为泊松代数 $A=(V,X)$ 的有限上同调复形。

A.3. 识别。 我们继续使用前一附录 A.2中的符号。给定一个泊松代数 $A=(V,X)$，现在我们有两个上同调复形。

- 上同调复形 $\mathfrak{g}_{\mathrm{fn}A}$ 见（A.2.12）
- 泊松上同调双复形 $C^\bullet,\ \bullet\ \mathrm{Pois}(A,A)$见定义 A.1.3。

这两个复形之间的关系由下式给出 [BDKV21]。

事实 A.3.1 (参见 [BDKV21，定理 4。1])。 设 $A=(V,X)=(V,-\cdot-,\{-,-\})$ 是一个泊松代数，其底层线性空间为 V。那么，存在一个从上同调复形 $\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}}$ 到交换代数 $A_{\mathcal{C}om}=(V,-\cdot-)$ 的 Harrison 上链复形的满射态射，

$$\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow C_{\mathcal{C}om}(A_{\mathcal{C}om},A_{\mathcal{C}om}), \tag{A.3.1}$$

映射 $Y\in(\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}})^{n-1}=\big(\Pi\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}(n)\big)^{\mathfrak{S}_n}$ 到 $Y^{\Lambda_{\{1,\dots,n\}}}$，其中 $\Lambda_{\{1,\dots,n\}}$ 表示 n-箭图 Λ_I（A.2.1）中的划分 $I=\{1,\dots,n\}$，即

$$\Lambda_{\{1,\dots,n\}}=\ \overset{1}{\bullet}\longrightarrow\overset{2}{\bullet}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\overset{n}{\bullet}$$

注记。 严格来说， [BDKV21] 研究与经典歌剧 $\mathcal{P}^{\mathrm{cl}}_{V\text{相关的上同调复形},\,\partial}$ 以及给定微分交换代数（V， ∂， $-\cdot-$）的微分 Harrison 复形。上述事实 A.3.1 可由 loc. cit. 令 $\partial=0$ 得出。

现在回顾事实 A.1.5 ，该事实断言 Harrison 上链复形嵌入 Poisson 上同调双复形 $C^{\bullet,\bullet}_{\mathrm{Pois}}(A,A)$ 中，作为

$$C^{\bullet}_{\mathcal{C}om}(A_{\mathcal{C}om},A_{\mathcal{C}om})=C^{\bullet,1}_{\mathcal{P}ois}(A,A).$$

因此自然会问，事实 A.3.1 中的满射是否能扩展为映射 $\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}}\to C_{\mathcal{P}ois}(A,\,A)$。我们的回答是肯定的。

定理 A.3.2. 对于底层线性空间为 V 的泊松代数 $A=(V,-\cdot-,[-,\cdot,-])=(V,X)$，有限上同调复形 $\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}}=\mathfrak{g}(\mathcal{L}\mathrm{ie}\ \mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}V)^X$ 具有双复形结构 $(\bigoplus_{p,\,q\in\mathbb{Z}}(\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}})^{p,\,q},d,\delta_{\mathrm{CE}})$，并且在平移意义下与泊松上同调双复形同构：

$$(\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}})^{\bullet,\bullet}\simeq C^{\bullet,\bullet+1}_{\mathcal{P}ois}(A,A).$$

该双复形的总复形等于有限上同调复形 $\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}}$。此外，将此同构限制在子空间 $(\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}})^{1,\,\bullet}\subset(\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn}})^{\bullet,\,\bullet}$，即可恢复满射 (A.3.1)。

本附录 A.3 的其余部分将用于证明定理A.3.2。

我们先引用 [BDKV21，(3.36)]。回顾一下，对于一个 n-箭图 Γ，我们用 $E(\Gamma)$ 表示 Γ的边集。于是可以定义一个自然的 $\mathbb{N}$-分次

$$\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}V(n)=\bigoplus_{r\in\mathbb{N}}\mathrm{gr}^r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}(n)$$

在有限 operad $\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}$by

$$\mathrm{gr}^r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}(n):=\{f\in\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}(n)\mid f^\Gamma=0\text{ for any }n\text{-quiver }\Gamma\text{ with }\#E(\Gamma)\neq r\}. \tag{A.3.2}$$

注意，根据环条件，我们有 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}(n)=\bigoplus_{r=0}^{n-1}\mathrm{gr}^r\,\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}(n)$。现在 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}$是一个分次歌剧，即$\mathfrak{S}$-模结构和复合映射 γ 都保持分次。

接下来，使用附录 A.2中的记号，令我们选定并固定一个泊松代数 $A=(V,-\cdot-,\{-,-\})=(V,X)$，其底层线性空间为 V并且 $X\in\mathrm{MC}(\mathfrak{g}_V^{\mathrm{fn}})$。为简单起见，我们用

$$\mathfrak{g}:=\mathfrak{g}_A^{\mathrm{fn},X}$$

上同调复形 (A.3.1)。由 (A.2.10)，可得

$$\mathfrak{g}^{n-1}=\left\{f\in\mathrm{Hom}\big((\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)/R(n))\otimes V^{\otimes n},V\big)\mid\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n,\ f^\sigma=\mathrm{sgn}(\sigma)f\right\},$$

并且根据事实 A.2.1，空间 $\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)/R(n)$ 有一个基 $\mathcal{L}(n)$，由直线的不连通并 Λ_I构成，其中 I遍历 $\{1,\dots,n\}$的划分。于是，A.3.2中的分次 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{fn}}$在 $\mathfrak{g}$上诱导出以下双分次。

引理 A.3.3. 对于 $\{1,\dots,n\}$ 的一个划分 $I=\{i_1^1,\dots,i_{m_1}^1\}\sqcup\{i_1^2,\dots,i_{m_2}^2\}\sqcup\cdots\sqcup\{i_1^p,\dots,i_{m_p}^p\}$，我们记$\pi_0(I):=p$。于是，(A.3.2) 诱导出 $\mathbb{Z}^2$-分次 $\mathfrak{g}=\bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}^2}\mathfrak{g}^{p,q}$，其定义如下：

$$\mathfrak{g}^{p,q}:=\{f\in\mathfrak{g}^{p+q}\mid f^{\Lambda_I}=0\text{ for any partition }I\text{ of }\{1,\dots,n\}\text{ with }\pi_0(I)\neq p\}. \tag{A.3.3}$$

有 $\mathfrak{g}^{n-1}=\bigoplus_{p=1}^n\mathfrak{g}^{p,\,n-1-p}=\mathfrak{g}^{1,\,n-2}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}^{n,\,-1}$，对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq1}$。

证明。 该结论由事实 A.2.1 以及以下事实得出： $\pi_0(I) = p$ 当且仅当 $\#E(\Lambda_I) = n-p$ 对于划分 I的 $\{1,\dots,n\}$。 □

我们可以将以下双重分次线性空间 $\mathfrak{g}^{\bullet,\bullet}$ 和 $C^{\bullet,\bullet}_{\mathrm{Pois}}$ 以如下方式识别。 y.

引理 A.3.4. 我们有

$$\mathfrak{g}^{p,q} \simeq C^{p,q+1}_{\mathcal{P}ois}(A,A) \tag{A.3.4}$$

对于任意 p、$q \in \mathbb{Z}$，作为线性空间。

证明。 我们可以假设 $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ 且 $q+1 \in \mathbb{N}$。记 $\mathsf{ch}_\bullet := \mathcal{L}^c(\Sigma A_{\mathcal{C}om})_\bullet$ 为交换代数 $A_{\mathcal{C}om} = (V, -\cdot-)$ 的哈里森链复形。于是，定义 A.1.3 断言

$$C^{p,q+1}_{\mathcal{P}ois}(A,A) = \mathrm{Hom}\big(\mathcal{S}_p(\mathsf{ch}_\bullet), V\big)^{p+q+1} = \bigoplus_J \mathrm{Hom}(\mathsf{ch}_J, V),$$

其中求和指标 $J = \{j_1,\dots,j_l\}$ 遍历 $l \in \mathbb{Z}_{>0}$、$j_k \in \mathbb{Z}_{>0}$ $(k=1,\dots,l)$ 、 $\sum_{k=1}^l j_k = p$ 和 $\sum_{k=1}^l k j_k = p+q+1$，并且

$$\mathsf{ch}_J := \wedge^{j_1}\mathsf{ch}_1 \otimes \wedge^{j_2}\mathsf{ch}_2 \otimes \cdots \otimes \wedge^{j_l}\mathsf{ch}_l.$$

这样的 J与 I的一个划分 $\{1,\dots,p+q+1\}$ 的等价类一一对应$\pi_0(I) = p$在自然的 $\mathfrak{S}_n$-作用下。回顾我们有 $\mathsf{ch}_\bullet \simeq \mathcal{L}^c(\Sigma A_{\mathcal{C}om}) \simeq e^{(1)}T^c(\Sigma A_{\mathcal{C}om})$，由 (A.1.6)，我们发现这个双射导出

$$\mathrm{Hom}(\mathsf{ch}_J, V) \xrightarrow{\sim} \big\{f = f^I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}\Lambda_I \otimes V^{\otimes n}, V) \mid \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ f^\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma) f\big\}.$$

由于 $\mathcal{L}(n)$ 是 $\mathbb{K}\,\mathcal{Q}(n)/R(n$的一个基，因此我们看到 $\bigoplus_J \mathrm{Hom}(\mathsf{ch}_J, V)$ 与 (A.3.3) 右侧同构。由此得证。□

关于 $d_X = [X,-]$ 的微分 $\mathfrak{g}$，我们有如下引理 A.3.5，这将完成定理A.3.2的证明。

引理 A.3.5。利用基 (A.2.5)，我们将 $X \in \mathfrak{g}^1$ 分解为

$$X = X^{\{1\}\sqcup\{2\}} + X^{\{1,2\}}, \quad X^{\{1\}\sqcup\{2\}} \in \mathfrak{g}^{2,-1}, \quad X^{\{1,2\}} \in \mathfrak{g}^{1,0}.$$

那么，诱导的分解

$$d_X = d_h + d_v \quad \text{with } d_h := [X^{\{1\}\sqcup\{2\}}, -], \quad d_v := [X^{\{1,2\}}, -]$$

满足

$$d_h(\mathfrak{g}^{p,q}) \subset \mathfrak{g}^{p+1,q}, \quad d_v(\mathfrak{g}^{p,q}) \subset \mathfrak{g}^{p,q+1}.$$

此外，在 ($\mathfrak{g}^{p,q} \simeq C^{p,q+}_{\mathcal{P}ois}(A,A)$ 中的识别 (A.3.4) 以及 $X_1 = \{-,-\}, X_2 = -\cdot-$ 在 (A.2.11) 中，我们有

$$(\mathfrak{g}^{\bullet,\bullet}, d_h, d_v) \simeq (C^{\bullet,\bullet+1}_{\mathrm{Pois}}(A,A), \delta_{\mathrm{CE}}, d)$$

作为双复形。

在开始证明之前，我们指出，部分 $d_v = d$ 归功于 [BDKV21，引理 4.10]（参见事实 A.3.1）。证明。为简便起见，记 $X_h := X^{\{1\}\sqcup\{2\}}$ 和 $X_v := X^{\{1,2\}}$。我们要计算 $d_i(Y) = [X_i, Y] = X\square Y - (-1)^{n-1}Y\square X_i$，其中 $i = h, v$, $Y \in \mathfrak{g}^{p,q} \subset \mathfrak{g}^{n-1}$ 满足 $n := p+q+1$。由事实 A.2.1，我们可以假设 $Y^\Gamma = 0$，除非 $\Gamma = \Lambda_I$，其中 I 是 $\{1,\dots,n\}$ 的一个划分，且 $\pi_0(I) = p$。令

$$I = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_p, \quad I_a := \{i^a_1,\dots,i^a_{m_a}\} \quad (a = 1,\dots,p).$$

回顾前李乘积的描述（A.2.8），我们发现前李乘积 $\square$可表示为 $X_i\square Y \in \mathfrak{g}^n$ 如下形式

$$X_i\square Y = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(n,1)} (X_i \circ_1 Y)^{\sigma^{-1}},$$

其中，每个 $\sigma \in \mathsf{Sh}(n,1)$ 都可以写成

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & \cdots & n & n+1 \\ 1 & \cdots & \widehat{j} & \cdots & n+1 & j \end{pmatrix} \quad (1 \le j \le n+1).$$

回顾该划　　ty 变化 Π 在 $\mathfrak{g}$ (参见 (A.2.10)) 并展开无穷小复合 $\circ_1$，我们有　　e

$$\begin{aligned}(X_i\circ_1 Y)^{\sigma^{-1}}(v_1\otimes\cdots\otimes v_{n+1}) &= \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\big(X_i(Y\otimes\mathrm{id})\big)(v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(n+1)})\\ &= \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot X_i\big(Y(v_{\sigma(1)}\otimes v_{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(n)})\otimes v_{\sigma(n+1)}\big)\end{aligned}\tag{A.3.5}$$

对于 $v_1,\ldots,v_{n+1}\in V$。类似地，我们有 $Y\square X_i\in\mathfrak{g}^n$，其中

$$Y\square X_i=\sum_{\tau\in\mathrm{Sh}(2,n-1)}(Y\circ_1 X_i)^{\tau^{-1}},$$

并且每个 $\tau\in\mathrm{Sh}(2,n-1)$ 都可以写成

$$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & & \cdots & & \cdots & n+1\\ j & k & \cdots & \widehat{j} & \cdots & \widehat{k} & \cdots & n+1\end{pmatrix}\quad(1\le j<k\le n+1).$$

无穷小复合 $(Y\circ_1 X_i)^{\tau^{-1}}$ 定义为

$$\begin{aligned}&(Y\circ_1 X_i)^{\tau^{-1}}(v_1\otimes\cdots\otimes v_{n+1})\\ &=\operatorname{sgn}(\tau)\cdot\big(Y(X_i\otimes\underbrace{\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}}_{n-1})\big)(v_{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\tau(n+1)})\\ &=\operatorname{sgn}(\tau)\cdot Y\big(X_i(v_{\tau(1)}\otimes v_{\tau(2)})\otimes v_{\tau(3)}\otimes\cdots\otimes v_{\tau(n+1)}\big).\end{aligned}\tag{A.3.6}$$

现在我们关注 $X_v=X^{\{1,2\}}$。根据假设，除非 $\Gamma=\Lambda_I$，否则 $Y^\Gamma=0$；根据余复合映射的描述（A.2.2）和（A.2.4），除非 $\Gamma=\Lambda_{J^v(a)}$，否则有 $(X_v\circ_1 Y)^\Gamma=0$，$a=1,\ldots,n$，其中 $J^v(a)$ 是 $\{1,\ldots,n+1\}$ 的一个划分，由 I 将条目 a 替换为 a 和 $n+1$ 得到。在 $\Gamma=\Lambda_{J^v(a)}$ 的情形下，我们有

$$(X_v\circ_1 Y)^{\Lambda_{J^v(a)}}=\pm X_v(Y\otimes\mathrm{id}).$$

类似地，除非 $\Gamma=\Lambda_{K^v}$，我们有 $(Y\circ_1 X_v)^\Gamma=0$，其中 K^v 是由 I 将条目 1 替换为 1 和 2，并分别将条目 $2,\ldots,n$ 替换为 $3,\ldots,n+1$ 而得到的 $\{1,\ldots,n+1\}$ 的一个划分。若 $\Gamma=\Lambda_{K^v}$，则

$$(Y\circ_1 X_v)^{\Lambda_{K^v}}=Y(X_v\otimes\mathrm{id}^{\otimes(n-1)}).$$

因此我们得到 $(X_v\square Y)^\Gamma=0$ 和 $(Y\square X_v)^\Gamma=0$ 除非 $\Gamma\in\mathfrak{g}^{p,q+1}$，由此得到 $d_v(\mathfrak{g}^{p,q})\subset\mathfrak{g}^{p,q+1}$。此外，根据 (A.3.5) 和 (A.3.6)，并仔细计算 [BDKV21中的符号（引理 4.10], ），我们有

$$\begin{aligned}&d_v(Y)(v_1\otimes\ldots\otimes v_{n+1})=(-1)^{n+1}\Big(X_v\big(v_1\otimes Y(v_2\otimes\cdots\otimes v_{n+1})\big)\\ &+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j Y\big(v_1\otimes\cdots\otimes X_v(v_j\otimes v_{j+1})\otimes\cdots\otimes v_{n+1}\big)+(-1)^{n+1}X_v\big(Y(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\otimes v_{n+1}\big)\Big).\end{aligned}$$

在识别 $\mathfrak{g}^{\bullet,\bullet}\simeq C^{\bullet,\mathcal{P}ois}(A,A)$ 和 $X_v=-\cdot-$下，这不过是 Harrison（或 Hochschild）上余边界映射，即 $C^{\bullet,\bullet}\,\mathrm{Pois}(A,A)$ 中的垂直微分 d。

接下来，对于 $X_h=X^{\{1\}\sqcup\{2\}}$，我们有 $(X_h\circ_1 Y)^\Gamma=0$，除非 $\Gamma=\Lambda_{J^h}$，其中 $J^h:=J\sqcup\{n+1\}$，并且

$$(X_h\circ_1 Y)^{\Lambda_{J^h}}=X_h(Y\otimes\mathrm{id}).$$

我们还有 $(Y\circ_1 X_h)^\Gamma=0$，除非 $\Gamma=\Lambda_{K^h}$，其中 K^h 是由 $\{1,\ldots,n+1\}$ 给出的划分

$$K^h:=\{1\}\sqcup I_1''\sqcup\cdots\sqcup I_p'',\quad I_a'':=\{i_1^a+1,\ldots,i_{m_a}^a+1\}\quad(a=1,\ldots,p),$$

而在 $\Gamma=\Lambda_{K^h}$ 的情况下，我们有

$$(Y\circ_1 X_h)^{\Lambda_{K^h}}=Y(X_h\otimes\mathrm{id}^{\otimes(n-1)}).$$

因此我们有 $(X_h\square Y)^\Gamma=0$ 和 $(Y\square X_h)^\Gamma=0$ 除非 $\Gamma\in\mathfrak{g}^{p+1,q}$，由此得到 $d_h(\mathfrak{g}^{p,q})\subset\mathfrak{g}^{p+1,q}$。由（A.3.5）和（A.3.6），我们有

$$d_h(Y)(v_1\otimes\ldots\otimes v_{n+1})=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}X_h\big(Y(v_1\otimes\cdots\widehat{v_j}\cdots\otimes v_{n+1})\otimes v_j\big)$$

$$
\begin{aligned}
&- (-1)^{n-1} \sum_{1\le j<k\le n+1} (-1)^{j+k} Y\big(X_h(v_j\otimes v_k)\otimes v_1\otimes\cdots\widehat{v}_j\cdots\widehat{v}_k\cdots\otimes v_{n+1}\big)\\
&= (-1)^n\Bigg(\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1} X_h\big(v_j\otimes Y(v_1\otimes\cdots\widehat{v}_j\cdots\otimes v_{n+1})\big)\\
&+ \sum_{1\le j<k\le n+1} (-1)^{j+k} Y\big(X_h(v_j\otimes v_k)\otimes v_1\otimes\cdots\widehat{v}_j\cdots\widehat{v}_k\cdots\otimes v_{n+1}\big)\Bigg),
\end{aligned}
$$

在识别 $\mathfrak{g}^\bullet$, $\bullet \simeq C^{\bullet,\bullet+1}\mathrm{Pois}(A,A)$ 和 $X_h = \{-,-\}$ 下，这无非就是 Chevalley-Eilenberg 余边界，即 $C^{\bullet,\bullet}\mathrm{Pois}(A,A)$ 中的水平微分 δ_{CE}。□

References

[BDHK19] B. Bakalov、A. De Sole、R. Heluani、V. G. Kac, *An operadic approach to vertex algebra and Poisson vertex algebra cohomology* **14**, 249 342 2019 , 《日本数学杂志》, –

（）。[BDHK20] B. Bakalov、A. De Sole、R. Heluani、V. G. Kac, *Chiral versus classical operad*, 《国际数学研究通知》IMRN, 2020年第19期, 6463–6488（2020）。[BDK20] B. Bakalov、A. De Sole、V. G. Kac, *Computation of cohomology of Lie conformal and Poisson vertex algebras*, 《精选数学·新系列》, 26:50, 共51页（2020）。[BDK21] B. Bakalov、A. De Sole、V. G. Kac, *Computation of cohomology of vertex algebras*, 《日本数学杂志》, 16, 81–154（2021）。[BDKV21] B. Bakalov、A. De Sole、V. G. Kac、V. Vignoli, *Harrison Vertex Algebra Cohomology and Differential Harrison Cohomology Representation Theory Mathematical Physics and Integrable Systems* , 载于《》, 《》, 《》, 数学进展, 第340卷, Birkh¨auser出版社, 第39–69页（2021）。[BD04] A. Beilinson、V. Drinfeld, *Chiral Algebras*, 《美国数学学会专题论文集》, 51, 美国数学学会, 罗德岛州普罗维登斯（2004）。[FBZ04] E. Frenkel、D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, 第2版, 《数学调查与专著》, 88, 美国数学学会, 罗德岛州普罗维登斯（2004）。[F06] B. Fresse, *Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson*, 《Blaise Pascal数学年刊》, 13（2006）, 第2期, 237–312。[GK94] V. Ginzburg、M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, 《Duke数学杂志》, 76, 第1期, 203–272（1994）。[GS87] M. Gerstenhaber、S. D. Schack, *A Hodge-type decomposition for commutative algebra cohomology*, 《纯粹与应用代数杂志》, 48（1987）, 229–247。[Ha62] D. K. Harrison, *Commutative algebras and cohomology*, 《美国数学学会汇刊》, 104（1962）, 191–204。[HK07] R. Heluani、V. G. Kac, *Supersymmetric Vertex Algebras*, 《数学物理通讯》, 271, 103–178（2007）。[K17] V. Kac, *Introduction to Vertex Algebras Poisson Vertex Algebras and Integrable Hamiltonian PDE Perspectives in Lie Theory* **19** 3 72 2017 1512 00821 , 《》, 《》, 载于: 《》, Springer INdAM丛书, 第卷。Springer, – (); arXiv: 。。[Li04] H. Li, *Vertex algebras and vertex Poisson algebras*。《当代数学通讯》, 6（2004）第1期, 61–110。[Li05] H. Li, *Abelianizing vertex algebras*。《数学物理通讯》, 259（2005）, 391–411。[Lo89] J.-L. Loday, *Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives*, 《数学发明》, 96（1989）, 205–230。[Lo98] J.-L. Loday, *Cyclic homology*, 第2版, 《数学基础》, 301, Springer-Verlag, 1998。[LV12] J-L. Loday、B. Vallette, *Algebraic Operads*, 《数学基础丛书》, 346, Springer（2012）。[N08] Y. Namikawa, *Flops and Poisson Deformations of Symplectic Varieties*, 《京都大学数理科学研究所刊》, 44（2008）, 259–314。[NY] Y. Nishinaka、S. Yanagida, *Algebraic operad of SUSY vertex algebra*, 预印本（2022）, arXiv:2209.14617。[SS85] M. Schlessinger、J. Stasheff, *The Lie algebra structure of tangent cohomology and deformation theory*, 《纯粹与应用代数杂志》, 38（1985）, 第2–3期, 313–322。[Y22] S. Yanagida, *Li filtrations of SUSY vertex algebras*, 《数学物理通讯》, 112（2022）, 编号: 103, 共77页。

Graduate School of Mathematics, Nagoya University. Furocho, Chikusaku, Nagoya, Japan, 464-8602.

Email address: m21035a@math.nagoya-u.ac.jp, yanagida@math.nagoya-u.ac.jp