分布式同步的导频合成

弗拉迪斯拉夫·雷日霍夫 多媒体技术与电信系 莫斯科物理技术学院 俄罗斯莫斯科ryzhov.vp@phystech.edu

安东·拉克秋什金 多媒体技术与电信系 莫斯科物理技术学院，俄罗斯莫斯科laktyushkin@yahoo.com

摘要 — **多用户大规模多输入多输出是一种前景广阔的无线技术，在分布式架构中可采用多种系统设计和拆分方案。所有此类方案都会受到不完善同步的影响，而通过前景可观的空中导频交换可以减轻这一问题。本文介绍了一种灵活的非正交导频设计所需的要求及算法，用于实现时间同步，且无需更改3GPP协议栈。我们的方案减少了同步时隙的数量，并解决了保护间隔分离问题。**

关键词 — 导频设计、时间同步、相关特性、分布式系统、网状网络。

I. 引言

分布式多输入多输出技术通过增加信道秩来提升频谱效率 [1]。遗憾的是，此类系统需要更高精度的同步 [2]，才能提高吞吐量。要将其应用于产品，新同步方案必须具备可扩展性，并满足当前的系统要求。本文 [3] 介绍了可扩展同步和校准原理。在文献 [4] 中，作者提出了分布式时间同步算法。为了克服最小二乘（LS）估计器所带来的影响，必须在所有节点之间进行多次交互 [5]（[6] 的作者分析了协作式网络同步）。但在密集城市场景中，空间分离有时不足，导致

会导致持续时间较长的顺序同步和性能下降。此外，符号间干扰（ISI）消除问题（由初始网络时间同步粗略、硬件失配和残余时间对齐误差（TAE）引起）也需要插入保护间隔，从而降低容量。

当前的同步方案基于点对点（P2P）主从同步，而共识算法 [7] 在密集网络中的表现更好。在粗同步阶段，主同步信号、辅同步信号和重同步信号 [8]（PSS、SSS 和 RSS）在下行链路（DL）中处理。根据 [9]-[10] 中的定义，这些信号由 Zadoff-Chu 序列或 m序列生成（[11] 的作者分析了 5G 时间同步的性能），主要利用了唯一的特性——良好的自相关特性。此外，每个物理信道都包含特定的导频（例如，用于物理上行链路/下行链路共享信道（PUSCH/PDSCH）的解调参考信号），这些导频可用于精细时间同步。对于分布式架构，导频设计仍有改进空间，因为它要求接入点（AP）之间以及接入点（AP）与用户设备（UE）之间实现完美同步。分布式根据接收机类型和小区运行模式，可在相同的时隙中，于下行链路或上行链路（UL）物理信道中引入同步导频。

本文研究具有分布式架构和网状/树形对齐算法的任意系统中与时间同步导频设计相关的问题。针对这些问题，本文提出导频合成算法予以解决，并着重考虑商用系统的局限性。

II. 系统架构

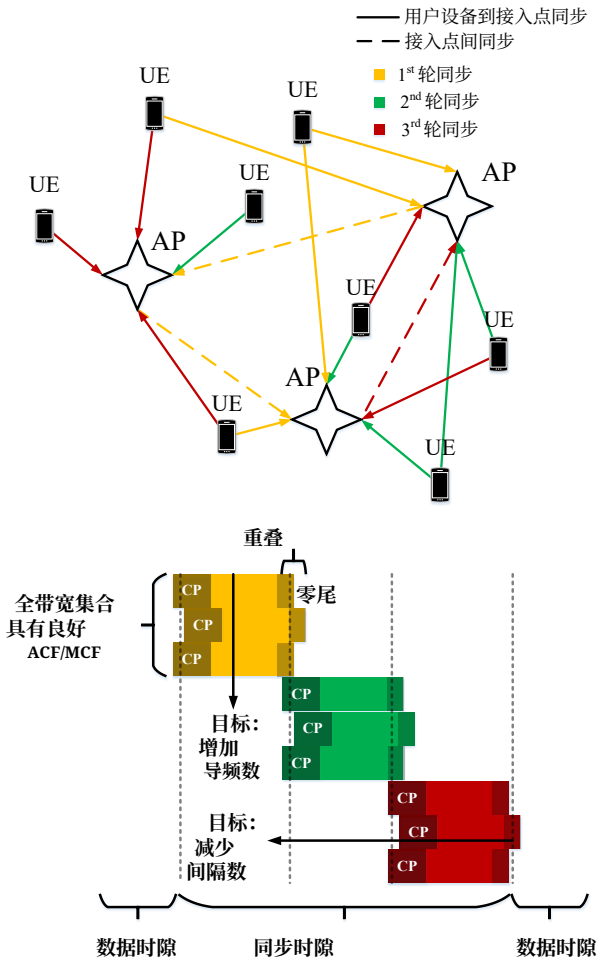

图 1. 同步过程的整体表示。

本文考虑了如图 1 所示的任意无线接入网（RAN）架构，该架构需要通过多个节点之间的空中（OTA）交换实现精确的时间同步。接入点和用户设备位于具有多径传播的典型城市环境中。硬件时间失配、双向首达路径（FAP）检测误差以及变化的无线信道条件会导致符号重叠。

V. Ryzhov 和 A. Laktyushkin，《分布式同步的导频合成》，2023年第25届数字信号处理及其应用国际会议（DSPA），俄罗斯联邦莫斯科，2023年，第1–6页，数字对象标识符：10.1109/DSPA57594.2023.10113432。

时钟差测量、导频交换顺序、时钟对齐过程等内容超出了本文的范围。

准确的最小二乘时钟差估计需要按照某种调度对多个节点对进行测量。多无线接入技术协议栈中的特定功能会搜索同步交换的最佳顺序。中央单元（CU）通过F1-C接口将估计的调度通知每个分布式单元（DU）。多个接入点和用户设备对会根据收到的调度，同时针对若干连续的正交频分复用符号执行点对点或多播导频交换。

本文顺应这样一种趋势：通过高效算法，以更廉价的组件替代昂贵可穿戴设备、智能手机和基站中的组件；同时，本文研究一种无需任何锚节点的网状时间同步过程。此类方案能够抵抗硬件损伤和条件变化。即使设备精度较高，多次测量联合估计的时间对齐均方根误差也低于单次点对点估计。这凸显了采用简单方案进行多次同步测量的必要性。另一个原因是，许多无线设备的同步只能借助专用锚点实现，或者通过利用额外测量而不增加分配的资源来实现。后者要求同时测量尽可能多的收发器对。

III. 技术要求

分布式系统中同步信号的设计受到以下商用系统限制：

A. 与正交频分复用（*OFDM*）的兼容性

为尽量降低时间同步过程的复杂度，导频设计应遵循正交频分复用的一般原则以及3GPP协议栈各层之间的数据交换原则。因此，导频应插入带宽所限的频域（FD）中，而不访问时域（TD）。

B. 相对良好的自相关函数和互相关函数（自相关函数和互相关函数）特性

设计的导频必须使搜索窗口内的互相关函数（MCF）的主峰与旁峰之比达到最大值。该搜索窗口受到初始时间同步（例如，IEEE 1588协议的精度小于 1μsec[12]）、时延、残余误差等因素的限制。

C. 时间高效

同步过程必须利用最少的时间资源，这要求通过最大化同时传输的数量来减少同步时隙的数量。

D. 对重叠具有鲁棒性

设计的导频在同步过程中不应引起符号间干扰，也不应在发生重叠时恶化数据传输性能。（即使存在许多同时传输的情况）。

E. 灵活性

同步信号必须具备灵活性，以适应节点数量、同时传输的数量、初始和残余定时误差要求、重叠长度、峰值检测精度等方面的变化。

上述限制了经典序列（例如金序列）或经计算设计的 [13]-[14] 在时域中的使用，这些序列具有较高的互相关。为了在频域中合成此类序列且避免符号间干扰，必须限制带宽，这会因快速傅里叶变换的特性而导致脉冲响应对称重叠（在相关矩阵的正交投影中搜索导频的算法 [13] 思路并不适用，因为正交投影包含时域尾部非零的导频）。需要解决的主要问题是在存在奇异映射的情况下，如何管理导频在时域中的行为。

IV. 导频合成

A. 导频设计原理

考虑一个频域导频合成任务，其中 N_{sc} 个子载波，N_{fft} 为快速傅里叶变换长度，T 为时域中的零样本数，W 为逆快速傅里叶变换矩阵。

$$W = \left[W_1^{N_{fft}\times N_{sc}} \quad W_2^{N_{fft}\times(N_{fft}-N_{sc})}\right] \tag{1}$$

$$W = \begin{bmatrix} W_{11}^{(N_{fft}-T)\times N_{sc}} & W_{12}^{(N_{fft}-T)\times(N_{fft}-N_{sc})} \\ W_{21}^{T\times N_{sc}} & W_{22}^{T\times(N_{fft}-N_{sc})} \end{bmatrix} \tag{2}$$

对 W 子矩阵进行奇异值分解（SVD），可得到右特征向量矩阵 V_0:

$$W_{21} = USV^H, V = \left[V_1^{N_{sc}\times T} \quad V_0^{Nsc\times(N_{sc}-T)}\right] \tag{3}$$

V_0 是一个线性算子，可将任意频域导频原像 x 映射为频域导频 y_{FD}，使其在时域中具有零尾:

$$y_{FD} = V_0 x, \forall x \in \mathbb{C}^{N_{sc}-T} \tag{4}$$

该算法旨在找到原像 $\{x_n\}_{n=1}^{N_{pilots}}$，使其对应的频域导频 $\{y_n\}_{n=1}^{N_{pilots}}$ 和时域导频 $\{Ax_n\}_{n=1}^{N_{pilots}}$ 具有良好的 ACF/MCF 特性。

B. 算法

代价函数由若干分量组成:

$$F(x,n) = F_1(x,n) + F_2(x,n) + F_3(x,n) \tag{5}$$

其中，x 表示导频的原像，n 表示移位的采样点数。

- ACF代价函数

$$F_1(x,n) = \frac{[c_n(x^HA^H)(Ax)][(x^HA^H)r_n(Ax)]}{[(x^HA^H)(Ax)]^2} \tag{6}$$

- MCF代价函数

$$F_2(x,n) = \sum_{i=1}^{N_{pilots}} \frac{[c_n(x^HA^H)(Ax_i)]\left[\left(x_i^HA^H\right)r_n(Ax)\right]}{[(x^HA^H)(Ax)]^2} \tag{7}$$

V. Ryzhov 和 A. Laktyushkin，“分布式同步的导频合成”，2023年第25届数字信号处理及其应用国际会议（DSPA），俄罗斯联邦莫斯科，2023年，第1–6页，数字对象标识符：10.1109/DSPA57594.2023.10113432。

$A = W_1 V_0$ – 线性算子[1]：导频原像 → 时域导频。c_n/r_n – 矩阵或向量中列/行的循环移位算子。

$F_3(x, n)$ 对应外部约束（例如对低峰均功率比导频的要求）。详情请参阅附录。

极小极大优化问题被视为在 MCF 中搜索旁瓣峰值最小的零尾导频原像：

$$x = \arg\min_{x} \left\{ \max_{n,i} \left(F_i(x, n) \right) \right\} \quad (8)$$

可以通过两种梯度下降方法求解：

$$\vec{g}_1(x) = \frac{\partial F_{i_{max}}(x, n_{max})}{\partial x} \quad (9)$$

$$\vec{g}_2(x) = \frac{\partial \left[\sum_i \alpha_i \sum_{k=1}^{N_{peaks}} \beta_k \tilde{F}_i(x, k) \right]}{\partial x} \quad (10)$$

$$\tilde{F}_i(x, n) = \underset{n}{\text{sorted}} \left(F_i(x, n) \right) \quad (11)$$

前一种方法是在所有代价函数分量中找出唯一最大的旁瓣峰值，并下降至其最小值。后一种方法则要求下降至所有代价函数分量中多个加权峰值的最小值。

试探搜索算法

1) 初始化

$x_1 = x_0$

2) 寻找梯度步

在所有分量 F_i 中，找到 N_{peaks} 个最大峰值和匹配梯度。

$$\left(\begin{array}{l} n_k^{max} \in \left[\frac{-T}{2}^{max}, \frac{T}{2}^{max} \right] | \\ n_k^{max} \notin \left[\frac{-T_{min}}{2}, \frac{T_{min}}{2} \right], \; i = 1 \end{array} \right)$$

查找梯度步：

$$\vec{g}(x) = \sum_{i,\{nk\}k=1N峰值} \alpha_i \beta_k \frac{\partial Fi(x,nk)}{\partial x}$$

3) 更新导频原像

$$\vec{x}_n = \vec{x}_{n-1} - h_{step}^{(n)} \cdot \overrightarrow{g^H}(x_{n-1})$$

4) 对所有导频重复步骤 *2-3*

5) 终止条件

如果 $||x_n - x_{n-1}|| < \varepsilon$:

$y_{FD} = V_0 x_n$

end.

否则：

转到步骤 2。

图 2 展示了算法的基本思路：对于集合中的当前导频，我们寻找能在有界区域内产生 N_{peaks} 个最大非期望峰值的时间移位，并通过梯度步将其最小化。对其他导频也应重复这一过程。在下一次迭代中，我们寻找新的峰值，并通过梯度步使其趋于最小值。采用递减步长 $h_{step}^{(n)}$ 的这种导频与峰值交替过程会收敛到所需的同步信号。

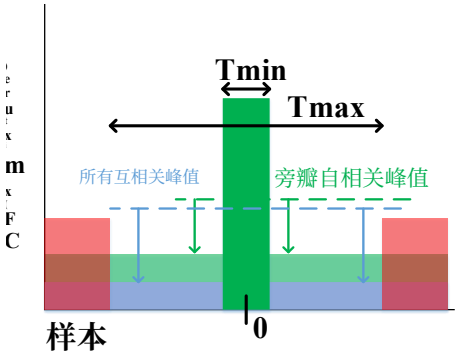

图 2. 算法思想示意图。

C. 符合要求

上述构造的导频可按任意指定的载波顺序集成到正交频分复用符号中。所提出的方法允许根据外部约束添加任意优化准则。得益于算法的设计方式，可以针对当前运行条件找到任意导频组合：

● 对于具有更多自由度的导频，可以通过 $T_{max} \rightarrow min$、$T_{min} \rightarrow max$、$T \rightarrow min$ 提高主峰与旁峰比。

● 间隔 T_{min}会影响时钟差估计的精度。对于最初的同步时隙，可增大 T_{min}以进行粗略时间对齐；对于后续时隙，可采用更窄的 T_{min}重复该过程。此外，对于快速变化且多径效应显著的信道，较大的 FAP 检测误差会限制 T_{min}可缩窄的程度。

● 间隔 T_{max}限定了两个节点之间的最大时钟差。对于廉价振荡器，T_{max}间隔应足够长；而对于温控或恒温槽控制的晶体振荡器，T_{max}可对应更窄的时钟差搜索范围。

● 间隔 T 可根据 ISD、传播环境（多径、时延扩展）以及残余硬件时延失配进行选择，以权衡符号间干扰与主峰与旁峰比。

V. 仿真结果

表 1 列出了用于导频合成的输入参数。

表 I. 仿真参数

参数	值	备注
N_{pilots}	4	---
N_{fft}	4096	---
N_{sc}	3300	$\Delta f = 30$千赫兹，带宽 $= 99$兆赫
T	1750	零尾：$T \frac{\Delta f \cdot N_{fft}}{}$ ~14 μs

[1] A – 是奇异的，符号 A^{-1} – 表示通过奇异值分解并舍弃为零的对角元素来进行近似最小二乘逆运算。

V. Ryzhov 和 A. Laktyushkin，“分布式同步的导频合成”，2023年第25届数字信号处理及其应用国际会议（DSPA），莫斯科，俄罗斯联邦，2023年，第1-6页，数字对象标识符：10.1109/DSPA57594.2023.10113432。

参数	值	备注
T_{min}	2	精度：$1+T_{2\Delta}\cdot\overline{\ \ }^{min}\ f\ N_{fft}$ ~12 ns
T_{max}	370	初始时钟差：$T_{2\Delta}\cdot\overline{\ \ }^{max}\ f\ N_{fft}$ ~1.5 μ秒

导频以复随机数初始化。图 3 展示了算法通过梯度下降使唯一的最大旁峰收敛的过程。

分析了以下梯度下降策略：

1) 下降方法 a) 最大峰值梯度 b) 类拉格朗日（加权梯度） 2) 梯度平均

$$\overrightarrow{g^{(n)}}(x) = \alpha_{\text{learn rate}}\vec{g}(x) + (1-\alpha_{\text{learn rate}})\overrightarrow{g^{(n-1)}}(x)$$

3) 步长选择策略

a) $h_{step}^{(n)} = \frac{h_{step}^{(n-1)}}{a} \mid F^{(n)} > F^{(n-1)}$

b) $h_{step}^{(n)} = f(n)$

c) $h_{step}^{(n)} = f(F^{(n)})$

4) *ACF/MCF* 中的峰值数量

对于极小极大问题，由于计算额外梯度需要更多计算量，直接更新单个最大峰值的梯度向量是最快的方案。对于较大的导频集合，梯度平均可以提高收敛速度。步长最快的选择方案是根据代价函数的值来确定步长。

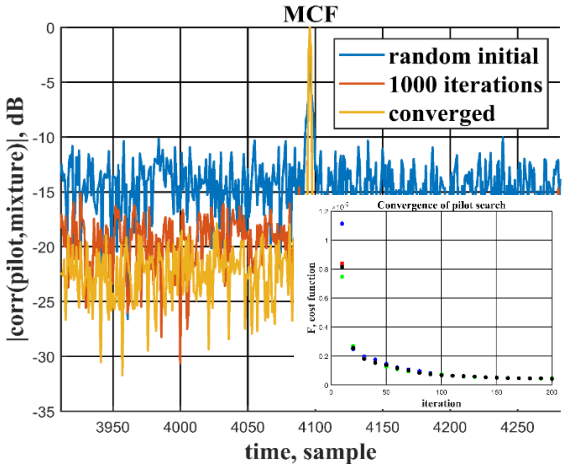

图3. 4个复用导频的算法收敛情况。

图4展示了频域/时域中4个收敛导频组成的集合中的1个导频。时域中的零尾由算子V_0提供。图5显示，所需的ACF/MCF特性均已满足。

图 6 展示了分布式同步的最坏情况。该情况对应于一个系统[2]，其中 4 对收发器同时交换一组 4 个预计算导频。主链路（同步链路）与受干扰链路的路径损耗（PL）（其他设备间的不利并行同步）相同（应通过正确的调度排除这种情况）。即使在如此复杂的条件下，设计的导频仍展现出非常接近互相关函数峰值的性能。

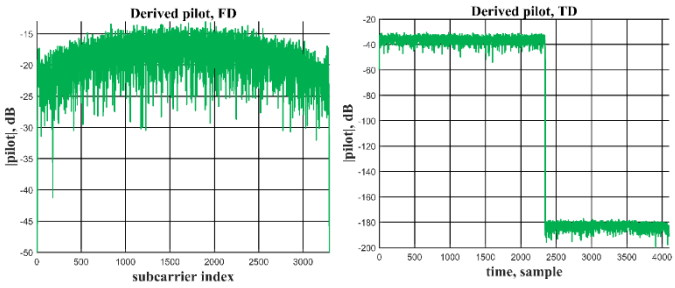

图4. 时域/频域中4个收敛导频组成的集合中的1个导频表示。

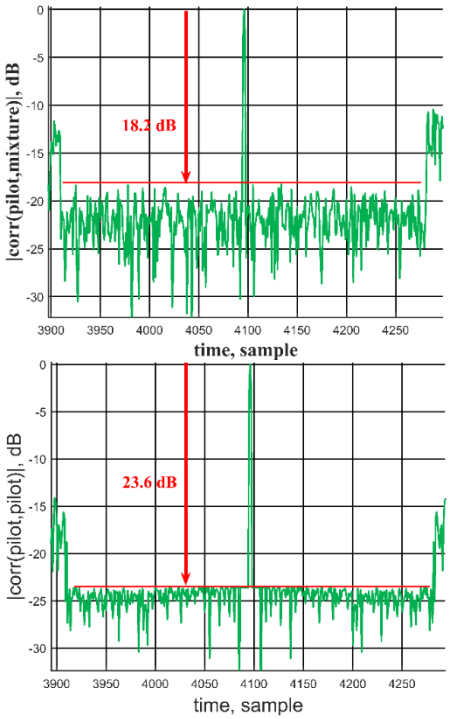

图5. 4个收敛导频组成的集合的ACF/MCF。

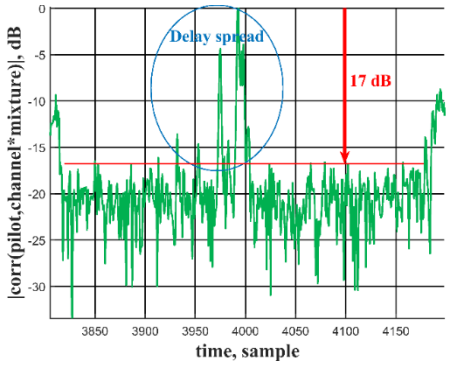

图6. 经过信道传输的4个收敛导频组成的集合的MCF。

如果设备数量足够多，由于……的限制，它们需要进行更多同时传输。

[2] 在城市街道环境中，通过C++ 射线追踪仿真器对信道进行建模。

V. Ryzhov 和 A. Laktyushkin，“分布式同步的导频合成”，2023年第25届数字信号处理及其应用国际会议（DSPA），俄罗斯联邦莫斯科，2023年，第1–6页，数字对象标识符：10.1109/DSPA57594.2023.10113432。

同步时隙数量。表 2 展示了不同大小导频集的导频合成结果。针对最坏情况（链路功率相等）分析了互相关函数峰值。正确的调度应考虑填有 PL 值的连接表。在这种情况下，主峰与旁峰比值会更接近自相关函数峰值，而不是互相关函数峰值。对于大量同时传输，如何改进梯度搜索仍有待研究，同时还需改进针对自相关函数/互相关函数峰值和导频的交替过程。表 2 还表明，采用所提出的方案可以减少同步时隙数量。在基本方案中，3 对设备同时交换导频，每对占用四分之一频带。在这种情况下，零尾的长度为：

$$\left(3300\ \text{subcarriers} \cdot \left[1-\frac{3}{4}\right] \cdot \frac{1}{\Delta f N_{\text{fft}}} = 6.7\ \mu\text{sec}\right)$$

表 II.　　同步信号复用

N 个导频=4	N 个导频=8	N 个导频=64
10log(|相关（导频，混合信号）|)，主峰与旁峰比，dB		
18.2 dB	15 dB	8 dB
同步时隙数量		
-25%	-62.5%	-95.3%

六、结论

本文阐述并解决了分布式架构系统中的同步导频合成问题。所提出的解决方案可应用于商用系统，具有很高的灵活性，能够添加额外的优化准则，并根据当前条件在线选择预计算导频集。此外，该方法还可纳入准静态信道，以便在远程服务器上计算导频集时提升性能。我们的方法减少了用于同步的时隙，并解决了导频重叠问题。

8 对收发器可交换同步信号，实现 15 dB 的主峰与旁峰比值。随着设备数量增加，最多可有 64 对同时交换，主峰为 8 分贝（最坏情况，可通过正确的调度/功率匹配加以改善），且分配时隙减少 20 倍。

尚未解决的一些问题包括：在给定限制下，所设计导频的主峰与旁峰比值上界，以及如何提高大规模导频集的收敛性。

附录

A. 导频设计的低峰均功率比约束

附加代价函数分量：

$$F_3(x) = \frac{\max \text{element}(|Ax|^2)}{\text{mean element}(|Ax|^2)} \qquad (12)$$

峰均功率比降低的思路与 ACF/MCF 梯度下降相同。主要区别在于，峰值和梯度是在时域中处理，然后再转换回频域。

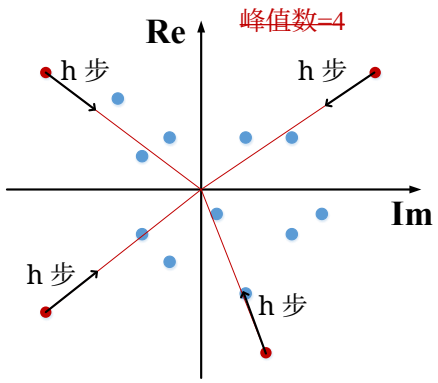

图 7. 峰均功率比降低的时域梯度表示。

找到 ACF 和 MCF 梯度后，将新的导频转换到 TD，并估计 TD 梯度步，使其朝向 $\mathbf{N_{peaks}}$ 个峰值的最小值。通过奇异矩阵 A 的最小二乘逆，将 TD 梯度步（示例如图 7 所示）转换为 FD 梯度，并更新 FD 导频。

低峰均功率比导频设计过程

对于 i=(1,N _PAPR_次迭代)

1) 在时域中寻找梯度步
寻找时域导频的 N_{peaks} 个最大峰值，并时域中的匹配梯度：

$$y_{TD} = Ax_{n-1}$$

$$\vec{g}_{PAPR}^{TD}(x) = h_{step} \cdot |y_{TD,k}| \cdot I\{|y_{TD,k}| > \varepsilon\},$$

例如：$\vec{g}_{PAPR}^{TD} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ |y_{TD,k}| \\ 0 \\ \dots \\ |y_{TD,k_N}| \end{pmatrix}$

2) 在频域中求梯度步
$\vec{g}_{PAPR}^{FD}(x) = A^{-1}\vec{g}_{PAPR}^{TD}(x)$

3) 更新导频原像
$\vec{x}_n = \vec{x}_{n-1} - h_{step} \cdot \vec{g}_{PAPR}^{FD}(x)$

end

表 3 列出了采用峰均功率比降低技术的导频合成算法在主峰与旁峰比和峰均功率比值取不同组合时的性能分析结果。该方法效果显著，但会略微降低所设计导频的自相关函数/互相关函数性能。

表 III.　　峰均功率比降低性能

|相关性（导频，混合信号）|，主峰与旁峰比，dB			
18.2 dB	17.3 分贝	16.8 分贝	16.5 分贝
没有低峰均功率比标准	**低峰均功率比导频**		
9 dB	8.3 分贝	8 dB	7.5 分贝

V. Ryzhov 和 A. Laktyushkin，“分布式同步的导频合成”，2023年第25届数字信号处理及其应用国际会议（DSPA），俄罗斯联邦莫斯科，2023年，第1-6页，数字对象标识符：10.1109/DSPA57594.2023.10113432。

B. 自相关函数梯度

$$\frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = \frac{[c_n(x^H A^H)A][(x^H A^H)r_n(Ax)]}{[(x^H A^H)(Ax)]^2} + \\ + \frac{[c_n(x^H A^H)(Ax)][(x^H A^H)r_n(A)]}{[(x^H A^H)(Ax)]^2} - \\ -2\frac{[r_n(x^H A^H)(Ax)][(x^H A^H)c_n(Ax)]}{[(x^H A^H)(Ax)]^3}(x^H A^H A) \quad (13)$$

C. MCF 梯度

$$\frac{\partial F_2(x)}{\partial x} = \frac{[c_n(x^H A^H)(Ax_i)]\left[\left(x_i^H A^H\right)r_n(A)\right]}{[(x^H A^H)(Ax)]^2} - \\ -2\frac{[r_n(x^H A^H)(Ax_i)]\left[\left(x_i^H A^H\right)c_n(Ax)\right]}{[(x^H A^H)(Ax)]^3}(x^H A^H A) \quad (14)$$

参考文献

[1] S. Elhoushy 和 W. Hamouda，《硬件和信道损伤下分布式大规模 MIMO 与小蜂窝系统的性能》，载于 IEEE《车辆技术汇刊》，第 69 卷，第 8 期，第 8627-8642 页，2020 年 8 月，数字对象标识符：10.1109/TVT.2020.2998405。

[2] S. Jagannathan、H. Aghajan 和 A. Goldsmith，《时间同步误差对协作式 MISO 系统性能的影响》，IEEE 全球电信会议研讨会，2004 年。2004 年 GlobeCom 研讨会，2004 年，第 102-107 页，数字对象标识符：10.1109/GLOCOMW.2004.1417557。[3] R. Rogalin 等，《分布式多用户 MIMO 的可扩展同步与互易性校准》，载于 IEEE《无线通信汇刊》，第 13 卷第 4 期，第 1815-1831 页，2014 年 4 月，数字对象标识符：10.1109/TWC.2014.030314.130474。

[4] D. Goswami、N. Marchetti 和 S. S. Das，《超密集网络中的分布式时间同步》，载于 IEEE《系统期刊》，第 16 卷第 2 期，第 2136-2147 页，2022 年 6 月，数字对象标识符：10.1109/JSYST.2021.3106542。[5] Xiao、L.、Boyd、Stephen 和 Kim、Seung-Jean。（2007）。采用最小均方偏差的分布式平均共识。《并行与分布式计算期刊》，67，33-46。10.1016/j.jpdc.2006.08.010。[6] Y. Xiong、N. Wu、Y. Shen 和 M. Z. Win，《协作式网络同步：渐近分析》，载于 IEEE《信号处理汇刊》，第 66 卷第 3 期，第 757-772 页，2018 年 2 月 1 日，数字对象标识符：10.1109/TSP.2017.2759098。[7] H. Wang、L. Chen、M. Li 和 P. Gong，《采用截断指数时延的无线传感器网络基于共识的时钟同步》，载于 IEEE《信号处理汇刊》，第 68 卷，第 1425-1438 页，2020 年，数字对象标识符：10.1109/TSP.2020.2973489。[8] A. Abdelnasser、L. Lampe 和 G. Vos，《面向 Re1-15 LTE-M 的新型重新同步信号设计》，ICC 2020——2020 年 IEEE 国际通信会议（ICC），都柏林，爱尔兰，2020 年，第 1-7 页，数字对象标识符：10.1109/ICC40277.2020.9148693。

[9] 3GPP TS 38.211 版本 17.1.0 Release 17

[10] 3GPP TS 36.211 版本 17.2.0 Release 17[11] M. U. Hadi、T. Jacobsen、R. Abreu 和 T. Kolding，《5G 时间同步：多径场景下的性能分析与改进》，2021 年 IEEE 拉丁美洲通信会议（LATINCOM），多米尼加共和国圣多明各，2021 年，第 1-5 页，数字对象标识符：10.1109/LATINCOM53176.2021.9647837。[12] Pang Fubin、Yuan Yubo、Gao Lei 和 Song Liangliang，《IEEE 1588 2015 12 时间同步协议的精度及其改进》，第 th 届 IEEE 国际电子测量与仪器会议（ICEMI），2015 年，第 280-284 页，数字对象标识符：10.1109/ICEMI.2015.7494173。[13] J. Song、P. Babu 和 D. P. Palomar，《通过主化-最小化设计具有良好相关特性的序列集》，载于 IEEE《信号处理汇刊》，第 64 卷，第 1 期，2016 年 11 月，第 2866-2879 页，数字对象标识符：10.1109/TSP.2016.2535312。[14] M. Soltanalian 和 P. Stoica，《具有良好相关特性的序列的计算设计》，载于 IEEE《信号处理汇刊》，第 60 卷，第 5 期，第 2180-2193 页，2012 年 5 月，数字对象标识符：10.1109/TSP.2012.2186134。

V. Ryzhov 和 A. Laktyushkin，《分布式同步的导频合成》，2023年第25届数字信号处理及其应用国际会议（DSPA），俄罗斯联邦莫斯科，2023年，第 1-6 页，数字对象标识符：10.1109/DSPA57594.2023.10113432。