arXiv:2305.00722v1 [math.GR] 1 May 2023

关于 Jordan 有限子群定理原始证明的阐述$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$。

EMMANUEL BREUILLARD

Dedicated to Udi Hrushovski on the occasion of his 60th birthday.

Abstract. 我们讨论可逆矩阵有限子群的 Jordan 定理，并介绍他的原始证明。

1. Introduction

1878年，Camille Jordan [26]证明了以下定理：

定理 1.1 (Jordan 定理)。 设 G 是$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$的有限子群，则在 G 中存在一个指数有上界 $J(n)$ 的正规阿贝尔子群 A ，该上界仅取决于 n 。

本文旨在阐述 Jordan 对其结果的原始证明。Jordan 的证明是纯代数的，与大多数教科书（如 [16]或 [18]）中基于 Bierberbach [3]所提出的几何论证的证明截然不同。除了 Dieudonn´e 在 Jordan 文集 [17]中的注释之外，Jordan 的证明似乎鲜少在其他地方被讨论，尽管今年正值 Jordan 逝世一百周年。

Jordan 证明这一结果的动机，源于对以下线性微分方程的研究：方程的阶数为 n ，系数为有理函数，且具有代数解：在此背景下，GL_n 的有限子群自然地作为单值群出现，而关于单值群的信息（例如定理1.1 ）会立即转化为方程[1]解的结构性质。在 Jordan 之前，Fuchs 和 Klein 研究过二维情形，而 Klein 给出了 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 的有限子群的完整列表。Jordan 在 [25], 发表了他的结果， [26]后来又撰写了第二篇文章 [27]以阐明他的证明。

Jordan 通过对维数进行归纳法来论证，但他在文章中没有给出关于 $J(n)$ 的显式上界，甚至连归纳式上界也没有。因此，数学家们试图寻找更接近真实值的显式上界，是可以理解的；在过去146年里，这一课题一直相当活跃。事实上，在 Jordan 的回忆录发表后，几位作者为他的定理给出了新的证明。其中最早的似乎是 Blichfeldt，他提出了一种截然不同的

[1]关于 Jordan 定理得以证明的动机和背景的完整故事，读者可参阅 Jeremy Gray 撰写的精彩著作 [21]

通过研究 p-Sylow 子群给出了 Jordan 结果的证明，并以 p 和 n 为参数（见 [4, 32]），建立了这些子群大小的显式上界。随后，Bieberbach [3] 提出了另一种截然不同且纯粹几何的论证，后来 Frobenius [20]对其进行了改进。第三种证明简洁得多，也是大多数讨论这一问题的教科书中所采用的证明，并有若干变体（例如 [16, 第V章],[38, 第 8]章）。后来，Blichfeldt 将这种证明与他先前的方法结合起来，以改进他对 $J(n)$ 的上界（见 [32] 和 [43, 24, 19]）。

Bierberbach 的论证始于如今人们所说的 Weyl 酉技巧（即观察到，可以通过在 G 上对厄米内积取平均，将 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的有限或紧子群 G 共轭到紧酉群 $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ 中）。随后结合李群的 交换子收缩性质，运用体积装填论证；所谓交换子收缩性质，是指在 $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ 中，接近单位元的元素之间的交换子本身也接近单位元，而且实际上要近得多。这一交换子收缩性质启发了其他几位作者（[47], [7],[22], [1]），如今已成为研究李群离散子群和黎曼几何的重要工具。关于通过这一论证证明 Jordan 定理，请参见 [39, Thm A] 或 [11,§2] 。

另一方面，Jordan 的原始证明基于一种纯代数的思想；这一思想可以追溯到 Klein 用于分类 2-球面旋转有限子群（以及柏拉图立体的等距变换）的方法，Klein 在其关于二十面体的著名著作中对此作了阐述 [23]。基本上，人们按照 G 的中心化子的形状和大小对其元素进行枚举，由此可以写出一个类方程，其中涉及 G 的阶以及其各元素的中心化子的阶。对维数进行归纳，可得到如下形式的丢番图方程:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{q_1} + \ldots + \frac{1}{q_k} - \frac{b}{a}, \tag{1.1}$$

其中 $g = [G : \Phi]$ 是中心 Φ 在 G 中的指数 G， a， b 以及 k 都是仅依赖于 n 的整数上界，且每个 q_i 都是 G/Φ的某个子群的阶数。容易验证，任何这种形式的等式都迫使 g 有界（其上界依赖于 n），随后 Jordan 讨论了可能出现的有限多个情形。尽管更繁琐，这种方法能提供关于有限子群 G的更多潜在信息。例如，Jordan 用它列出了 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ 的所有有限子群，并在考察了约 47 种不同情形后，为每一类群给出了一组明确的生成元[2]。

随着有限单群分类的出现，B. Weisfeiler[45] 以及最近的 M. Collins [13] 为 $J(n)$ 找到了紧的上界。例如，Collins 证明，如果 $n \geqslant 71$，那么 $J(n)$ 可以取为 $(n+1)!$ 。这是紧的，即 $(n+1)!$ 始终是 $J(n)$ 的下界，因为

[2]事实上，Jordan 漏掉了一些群，见 [4, 17]。

字母上的对称群通过置换 $n+1$ 个坐标，在超平面$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$ 上不可约地作用。

Schur [41] 推广了 Jordan 定理，证明只要群 G 是挠群（即每个元素都具有有限阶），该定理便成立。特别地，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的每个有限生成挠子群都是有限的。这有时称为 Jordan–Schur 定理，参见 [44, 16]。

沿着 Brauer 和 Feit 开创的另一条研究路线， [10], Larsen 和 Pink [31] 将 Jordan 定理大幅推广到特征为 p 的有限线性群，并且无需借助有限单群分类。有趣的是，他们证明中的一部分与 Jordan 的原始论证颇为相似。另见 [8] ，其中近期运用了 Jordan 型和 Larsen–Pink 型定理，研究具有有限 Morley 秩的初等阿贝尔 p-群上的有限群作用。

最后，我们提及 Jordan 定理在非线性情形下的类似结果：关于流形的同胚有限子群（由 E. Ghys 提出猜想），以及代数簇的双有理自同构有限子群。在这些情形下，近期已有证明表明，存在一个幂零子群，其指数上界仅取决于流形或簇的维数。但“幂零”不能替换为“阿贝尔”。有关这些令人振奋的最新进展，请参阅预印本 [15]和 [29] 及其中的参考文献。

本文组织如下：在第 2 节中，我们定义M-扇的概念，并陈述定理 1.1 的一个版本，作为后文将使用的归纳假设。在第3节和4 节中，我们写出相应的类方程，并完成 Jordan 的定理 1.1的证明。在第5 节中，我们通过专门考察 $n = 2$ 的情形来阐释该方法，并推导出 Klein 关于 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 中有限子群的经典结果。在第 6节中，我们讨论一种非标准的 Jordan 证明处理方式，它与 Jordan 原本对其证明的表述非常接近；最后一节则从历史角度简要回顾关于 $J(n)$ 的上界。

致谢。我谨向 Udi Hrushovski 致谢，感谢他最先让我注意到 Jordan 的原始回忆录；感谢 Michael Collins 和 Terry Tao 提供宝贵意见；也感谢 Jean-Pierre Serre 鼓励我发表这篇短文。本文的初稿约十年前便已写成。我还要感谢审稿人提出的深思熟虑的意见并认真审阅本文。

2. A reformulation of Theorem 1.1

正如我们将在下文看到的，Jordan 的论证并未用到域 $\mathbb{C}$的任何性质；事实上，只要假设 G 的每个元素都是半单的，即在某个域扩张中可对角化，他的证明就适用于任意域。因此，我们取 K 为任意域，并且不失一般性地假设它是代数闭的。

我们先将定理 1.1 重新表述为 Jordan 最初证明的形式。为此，我们需要先引入几个定义。

定义 2.1。 我们称 根环面为 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的一个子群，它共轭于由对角元素之间的一组等式定义的对角矩阵子群。

例如，对角矩阵 $\{g = diag(a_1, ..., a_6) | a_i \in K^*, a_1 = a_2, a_5 = a_6\}$ 的子群是 $\mathrm{GL}_6(K)$ 的一个根环面。

定义 2.2。 设 G 是 $\mathrm{GL}_n(K)$的一个有限子群。给定 $M \geqslant 2$，我们称 G 的一个子群 F 为一个 M-扇，如果它共轭于对角矩阵 $\{g = diag(a_1, ..., a_n) \ a_i \in K^*\}$ 的一个子群，并且对于任意一对指标 i、j，比值集合 $a_i(g)/a_j(g)$ 要么仅含 $\{1\}$，要么随着 g 在 F中变化而取得至少 M 个不同的值。

术语扇是对 Jordan 的束[3]的一种宽泛翻译。注意， G 中由所有数量矩阵组成的子群 Φ 显然是一个 M-扇，对任意$M \geq 2$均如此。

注意，每个 M-扇 F 都包含于唯一的最小根环面 S_F中；该环面由与 F中成立的等式相同的对角元素等式定义，例如 $a_i = a_j$。特别地， $G \cap S_F$ 本身就是一个 M-扇，并且 G 中的每个极大 M-扇都具有这种形式。

现在我们可以给出上文定理1.1 的另一种稍精确的表述:

定理 2.3 （Jordan 定理的第二种形式）。 给定 $n \in \mathbb{N}$，存在常数 $M = M(n)$ $N = N(n) \geqslant 1$，使得下述结论成立。设 K是代数闭域，且 G 是$\mathrm{GL}_n(K)$的有限子群，其中每个元素都可对角化。那么 G 包含唯一的极大 M-扇。将其记为 $\mathcal{F}$。我们有 $[G : \mathcal{F}] \leqslant N$。

定理2.3 的证明将在接下来的两节中展开。在开始之前，先说明几点简单的事实:

1) 由于 $\mathcal{F}$ 是唯一的，它必然是 G中的正规子群。

2) 要证明定理2.3 蕴含定理1.1，只需验证：若 $K = \mathbb{C}$，则 G 中的每个元素都是可对角化的。确实如此，因为 G 中的每个元素都具有有限阶，因此在 $\mathbb{C}$上可对角化。

3）虽然我们将证明该结论对任意特征都成立，但值得一提的是，正特征的情形可由 $K = \mathbb{C}$的情形推出，因为如果 G 如定理2.3所述，那么 $|G|$ 与 $\mathrm{char}(K)$ 互素，因此 G 可以嵌入 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$。例如，参见 [36,定理 C 的证明], 或 [18, 定理 38]。

[3]我们感谢审稿人提出这一译法。事实上，Jordan 在其其他著作中始终使用 *faisceau* 一词，有时指“子群”，有时指“阿贝尔子群”。

4）定理2.3 的证明将对维数作归纳。字母 F 表示一个扇，而字母 $\mathcal{F}$ 则专用于表示极大扇。

5）由于 $S_{\mathcal{F}}$ 被 G 归一化， G 必须置换 $S_{\mathcal{F}}$ 的特征空间。因此，如果 G 在 K^n 上原始作用（即不置换 K^n 的任何非平凡直和分解的分量），那么 $S_{\mathcal{F}}$ 必须化简为数量矩阵，而这些矩阵在 G 中具有有界指数。

6）如果 $g \in GL_n(K)$ 归一化 $\mathcal{F}$，那么它也必须归一化根环面 $S_{\mathcal{F}}$ 。特别地， G 位于根环面 $S_{\mathcal{F}}$ 的正规化子中，并且 $[G\colon\ G \cap S_{\mathcal{F}}] \leqslant N$。

如上面的第 1）和第 2）项所示，定理2.3 蕴含定理1.1。事实证明，也可以直接由定理2.3 推出定理1.1，我们将在下面的段落中对此进行说明。更准确地说，由于我们只在 $\mathbb{C}$ 上陈述了定理2.3 在正特征下同样成立，我们将证明定理2.3 可由以下断言推出：$\mathrm{GL}_n(K)$ 中由可对角化元素构成的任意有限子群都含有一个指数至多为 $J(n)$ 的正规阿贝尔子群。Jordan 的原始证明首先证明定理2.3 ，因为其表述更适合归纳方案。

定理 1.1 与定理 2.3 的等价性的证明。假设定理 1.1 的结论成立。由于 G 的每个元素都可对角化，且 A 是阿贝尔的，所以 A 可同时对角化，并且 K^n 分解为关于 A 的权空间（即联合特征空间）的直和。由于 A 在 G 中正规，这些特征空间在 G 的作用下相互置换，因此 G 包含于 $N(S)$，即根环面 S 的正规化子；该根环面对 K^n 的作用，在 A 的每个权空间上都是一个标量倍数。注意， $A \leqslant S$。此外，若 F 是一个 M-扇，满足 $M > J(n)$ 且 $m := [F\colon\ F \cap S] \leqslant [G\colon\ S] \leqslant J(n)$，则对所有 $f \in F$，都有 $f^m \in S$。因此， $F \cap S$ 是一个位于 S 中的 M/m-扇。由于 $M/m > 1$，这意味着 F 本身也位于 S 中。因此，每个 M-扇都包含于 S。最后，将 S 视为一个对角子群，可以直接验证， S 中所有 M-扇生成的子群本身也是一个 M-扇。因此， $G \cap S$ 是 G 中唯一的极大 M-扇。由此完成定理 2.3 的论断，其中 $\mathcal{F} := G \cap S$, $N = J(n)$, $M = N + 1$。

3. Jordan's fundamental equation

本节开始证明定理2.3 ，并在下文得到 Jordan 基本方程（3.3），该方程将 G 中的元素分成若干类进行计数，这些类别将在下文介绍。定理2.3 的证明将在下一节讨论基本方程后完成。

我们将对维数 n进行归纳。

若 $n=1$，则 $\mathrm{GL}_1(K) = K^*$ 是阿贝尔群，无需证明。现在假设该定理已对所有维数 $< n$得到证明。

注意，根据上一节末尾的论证，只需证明定理1.1的结论，即存在一个指数有某个函数 $J(n)$ 上界的阿贝尔正规子群，因为这将自动推出定理 2.3 在 $N(n) = J(n)$ 和 $M(n) = N(n)+1$下的结论。

如果 G 保持一个直和分解 $K^n = K^r \oplus K^{n-r}$，且$1 < r < n$，那么我们可以按显而易见的方式应用归纳假设，分别将其用于到 $\mathrm{GL}_r(K)$ 和 $\mathrm{GL}_{n-r}(K)$ 的投影 $\pi_r(G)$ 和 $\pi_{n-r}(G)$。只要$J(n) \geqslant \max_{0<r<n} N(r)N(n-r)$，定理 1.1 的结论便很容易得出；正如我们刚才所说，定理 2.3 的结论也同样如此。

对于保持这种分解的 G 的子群，我们将反复使用最后这个观察。如果 $g \in G$ 不是数量矩阵，那么中心化子 $C_G(g)$ 保持 g 在 K^n 上的特征空间分解。因此，我们可以将这个观察应用于 $C_G(g)$，并根据归纳假设得出： $C_G(g)$ 含有唯一的极大 M-扇（对于所有大于某个仅取决于 n 的数的 M ）。也就是说：

引理 3.1。 如果 $g \in G$ 不是数量矩阵，那么中心化子 $C_G(g)$ 含有唯一的极大 M-扇。

因此，我们可以作如下定义：

定义3.2。 如果元素 g 属于中心化子 $C_G(g)$ ，并且是 $C_G(g)$ 中唯一的极大 M-扇，则称其与 M-扇 F 相关。

我们用 F_g 表示与 g 相关的 M-扇。根据定义上文的说明，只要 g 在 $\mathrm{GL}_n(K)$ 中不是数量矩阵，这个定义便有意义（目前，这要归功于归纳假设）。注意，由极大性可知， F_g 必须包含 G 中所有数量矩阵构成的子群 Φ G 。此外，令 $N := N(n-1)$，由归纳假设可得

$$[C_G(g) : F_g] \leqslant N. \tag{3.1}$$

这些论述还可以得出以下三个推论：

引理3.3. 如果 F 是一个 M 扇，且其元素并非全都是数量矩阵，那么 F 包含于 G 的唯一一个极大 M 扇 $\mathcal{F}$ 中。

证明。 设 $f \in F$ 是一个非标量元素。若 F_1 是一个包含 F 的 M 扇，那么 F_1 必须与 F 的所有元素交换，因此属于 f 的中心化子 $C_G(f)$。因此，F_1 必须属于 $C_G(f)$ 的唯一极大 M 扇。 □

设 F 是一个 G 中不包含于数量矩阵 Φ 的 M-扇，并设 $\mathcal{F}$ 是包含 F 的 G 的极大 M-扇。由于 $\mathcal{F}$ 包含于

中心化子 $C_G(F)$ 中，它也必定是其中的极大 M-扇；根据归纳假设，我们有 $[C_G(F):\mathcal{F}] \leqslant N$。

引理 3.4. 设 $\Phi \lneqq F \lneqq \mathcal{F}$。那么，与 F相关的 G 中元素的数量 n_F 可被 $|\mathcal{F}|$和 $\frac{n_F}{|\mathcal{F}|} \leqslant N$整除。

证明。若 $n_F = 0$，则无需证明，因此我们假设 $n_F \geqslant 1$。与 F 相关的每个元素都属于中心化子 $C_G(F)$。此外，若 $g \in C_G(F)$ 与 F和 $f \in \mathcal{F}$相关，那么 gf也与 F相关，即 $F_{gf} = F_g = F$。事实上，由于 $F \lneqq \mathcal{F}$，我们必有 $gf \notin \Phi$（否则，$C_G(g) = C_G(f)$ 将包含 $\mathcal{F}$），并且根据引理 3.1，在 $C_G(gf)$ 中存在唯一的极大 M- 扇 F_{gf}。由于 $F \subset C_G(gf)$，我们有 $F \subset F_{gf} \subset C_G(gf)$。此外，$F_{gf}$ 包含于 $\mathcal{F}$ 中，因此必与 f交换，进而也与 g交换。由此可得 $F \subset F_{gf} \subset C_G(g)$，并且根据 F的极大性，$F = F_{gf}$。

因此，与 F 相关联的 G 中的元素集是 $C_G(F)$ 中若干 $\mathcal{F}$ 陪集的并。由于 $C_G(F)$ 包含 $\mathcal{F}$ 作为子群，且其指数至多为 N，结论得证。 □

对于极大扇，我们有：

引理 3.5。设 $\mathcal{F} \neq \Phi$ 是 G 中的一个极大 M-扇。那么，G 中与 $\mathcal{F}$ 相关联的非标量元素 g 的数量 $n_{\mathcal{F}}$ 为 $n_{\mathcal{F}} = |C_G(\mathcal{F})| - |\Phi|$，且 $[C_G(\mathcal{F}):\mathcal{F}] \leqslant N$。

证明。非标量元素 g 与 $\mathcal{F}$相关联，当且仅当 $\mathcal{F} \leqslant C_G(g)$，即 $g \in C_G(\mathcal{F})$。上界由（3.1）得出。 □

Jordan 的证明策略是根据 G 中元素各自关联的 M-扇对它们进行枚举。令 Φ 为 G 中的数量矩阵。我们可以将 G 分解为以下互不相交的并

$$G = \Phi \cup_F \{g,\ g \text{ associated with } F\}$$

其中，取并集时遍历由 G 的非标量元素的中心化子的极大 M-扇所产生的各个扇。我们将把这个并集拆分为四个互不相交的部分，

$$G = \Phi \cup G_1 \cup G_2 \cup G_3,$$

其中 G_1 是 g中不属于 Φ 且满足 $F_g = \Phi$ 的子集，G_2 是g中不属于 Φ 且满足 F_g 严格包含 Φ 但并非由引理 M 扇$\mathcal{F}_g$ 给出的包含它的极大扇的子集 3.3，最后 G_3 是其余那些 g中不属于 Φ 且满足 F_g 不是 Φ 并且在 G中极大的 G_i 各子集。下面我们依次考察这些子集。

1) 我们首先枚举 G_1的元素，即 Φ 之外与 Φ相关联的 g。这个子集在 G的共轭作用下保持不变。此外，显然它是 Φ的陪集之并，因为如果 $\phi \in \Phi$，则 $C_G(g\phi) = C_G(g)$

因此 $g\phi$ 也与 Φ相关联。由此可知， G的共轭作用会置换这些 Φ-陪集。

N_G作用于 Φ陪集 $g\Phi$ 的稳定子 $N_G(g\Phi)$在 G通过共轭作用下的指数至多为 n ，在 $C_G(g)$中。事实上，若 $h \in G$ 具有 $hg\Phi h^{-1} = g\Phi$，则对某个 $\phi \in \Phi$有 $hgh^{-1} = g\phi$ 。由此可得 $\det(\phi) = 1$ ，因此 ϕ 是一个 n次单位根。我们得出 $[N_G(g\Phi) : C_G(g)] \leqslant n$。

G陪集$g\Phi$ 的 G-共轭类中的元素个数等于

$$\frac{|G|}{N_G(g\Phi)}|\Phi| = |G|\frac{1}{[N_G(g\Phi) : C_G(g)]}\frac{1}{[C_G(g) : \Phi]} = |G|\frac{1}{\lambda}.$$

枚举所有这类共轭类，我们得到：

$$|G_1| = |G|\left(\frac{1}{\lambda_1} + ... + \frac{1}{\lambda_{k_1}}\right).$$

其中每个 λ_i 都是一个大小至多为 nN 的正整数（由（3.1）及上文的说明可知）。

2）现在我们转向子集 G_2。显然， G_2 在 G的共轭作用下稳定。设 F是 M的一个 G-扇，且具有最大的 M-扇 $\mathcal{F}$，使得 $\Phi \subsetneqq F \subsetneqq \mathcal{F}$。设 n_F 是与 F 相关联的 g的个数。由引理3.4，$n_F/|\mathcal{F}|$是一个大小至多为 N的整数。

将与 F 共轭的扇归为一组，我们得到 $\frac{|G|}{|N_G(F)|}$ 个不同的扇，其中 $N_G(F)$ 是 F 在 G 中的正规化子。注意

$$[N_G(F) : C_G(F)] \leqslant n! \tag{3.2}$$

由于 $N_G(F)$ 会置换 F 的权空间，因此指数至多为 $n!$ 的某个子群会保持这些权空间不变，进而与 F 对易。

由此可知，与一个扇相关联且该扇属于 G-共轭类 F 的元素个数等于

$$n_F\frac{|G|}{|N_G(F)|} = |G|\frac{1}{[N_G(F) : C_G(F)]}\frac{n_F/|\mathcal{F}|}{[C_G(F) : \mathcal{F}]} = |G|\frac{\nu}{\mu},$$

从而枚举不同的共轭类

$$|G_2| = |G|\left(\frac{\nu_1}{\mu_1} + ... + \frac{\nu_{k_2}}{\mu_{k_2}}\right),$$

其中 $\nu_i \leqslant N$ 和 $\mu_i \leqslant n!N$ 均为正整数。

3) 最后，我们考虑以下子集： G_3 其中包含满足以下条件的非标量 g: F_g 在 G 中是极大的，且不同于 Φ。显然，该集合在 G 的共轭作用下保持不变。给定一个极大 M扇 $\mathcal{F}$，与 $n_{\mathcal{F}}$相关联的 G 中元素的个数 $\mathcal{F}$等于 $|C_G(\mathcal{F})| - |\Phi|$，根据引理3.5。

令 $\omega = [N_G(\mathcal{F}) : C_G(\mathcal{F})]$ 以及 $q = [N_G(\mathcal{F}) : \Phi]$，与共轭于 $\mathcal{F}$ 的极大扇相关联的元素个数为

$$n_{\mathcal{F}} \frac{|G|}{|N_G(\mathcal{F})|} = |G| \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{q} \right),$$

其中 ω 和 q 是正整数，满足 $\omega \leqslant n!$，且 $q = [C_G(\mathcal{F}) : \Phi]\omega \geq 2\omega$。对共轭类求和，得到：

$$|G_3| = |G| \left(\left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{q_1} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{\omega_{k_3}} - \frac{1}{q_{k_3}} \right) \right).$$

综合上述三种情形，我们由此完成了对 G 的枚举，并得到：

命题 3.6 (Jordan 基本方程)。 设 G 是 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的有限子群，其所有元素均可对角化，且 Φ 是 G 中的数量矩阵子群。那么存在整除 g 的正整数 $q_i := |G|/|\Phi|$，使得

$$|G| = |\Phi| + |G| \sum_{i=1}^{k_1} \frac{1}{\lambda_i} + |G| \sum_{i=1}^{k_2} \frac{\nu_i}{\mu_i} + |G| \sum_{i=1}^{k_3} \left(\frac{1}{\omega_i} - \frac{1}{q_i} \right), \tag{3.3}$$

其中 k_i、λ_i、ν_i、μ_i 和 ω_i 是不超过 $2n!N$ 的非负整数（回顾一下，$N = N(n-1)$ 是归纳假设下定理 2.3 中的上界）。特别地，

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{q_1} + \ldots + \frac{1}{q_{k_3}} - \frac{b}{a}, \tag{3.4}$$

其中 $\frac{b}{a}$ 是一个既约分数，其分子和分母都以上界仅取决于 n 的方式受到限制。

要证明命题 3.6，只需证明每个求和式中的项数有上界k_i，然后推导出（3.4）。但这由方程（3.3）以及此前得到的上界即可推出，因为 $\frac{1}{\omega_i} - \frac{1}{q_i} \geqslant \frac{1}{2\omega_i}$ 对每个 $i = 1$、……、k_3 都成立，因此上述求和式中的每一项至少贡献 $|G|/2n!\ N$ 从而迫使 $k_1 + k_2 + k_3 \leqslant 2n!\ N$。

证明（3.4）只需将（3.3）重新排列即可：

$$\frac{|G|}{|\Phi|} \left(\sum_{i=1}^{k_1} \frac{1}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{k_2} \frac{\nu_i}{\mu_i} + \sum_{i=1}^{k_3} \frac{1}{\omega_i} - 1 \right) = \sum_{i=1}^{k_3} \frac{|G|}{|\Phi|} \frac{1}{q_i} - 1. \tag{3.5}$$

然后令 $g := \frac{|G|}{|\Phi|}$ 且 $\frac{b}{a} := \sum_{i=1}^{k_1} \frac{1}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{k_2} \frac{\nu_i}{\mu_i} + \sum_{i=1}^{k_3} \frac{1}{\omega_i} - 1$，其中 $\frac{b}{a}$ 是一个既约分数。于是得到（3.4）。

进一步注意到 a 的上界仅取决于 n；事实上，它不超过至多 $2n!\ N$ 个大小不超过 $n!$ N的整数的最小公倍数。类似的上界也适用于 b。这就完成了命题3.6的证明。

4. Proof of Theorem 2.3

下面根据整数 λ_i、 ν_i、 μ_i、 ω_i 和 q_i的可能取值，讨论基本方程（3.3）。

证明将基于以下关于分数的初等引理:

引理 4.1. 考虑以下方程，其中所有变量均为正整数:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{q_1} + \ldots + \frac{1}{q_k} - \frac{b}{a}.$$

假设对所有 i，均有 $q_i < g$，则 $g \leqslant f(k,a)$，其中 $f(k,a)$ 仅为 k 和 a 的函数。可取 $f(k,a) = (k!a)^{2^k}$。

证明。 证明采用关于 k 的归纳法。若 $k=1$，则 $\frac{1}{q_1} \geqslant \frac{b}{a}$ 推出 $q_1 \leqslant a$ 和 $\frac{1}{g} \geqslant \frac{1}{q_1 a} \geqslant \frac{1}{a^2}$，因此 $g \leqslant a^2 =: f(1,a)$。

假设该引理对所有指标 $\leqslant k-1$ 均已证明。不妨设 $\frac{1}{q_1} \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{q_k}$。于是，对于 $q_1 < g$，有 $\frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_k} < \frac{b}{a}$。

由此可得 $\frac{b}{a} > \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_k} \geqslant \frac{1}{q_k}$。因此我们可以写成 $\frac{c}{d} = \frac{b}{a} - \frac{1}{q_k}$，其中 c， d 是正整数，而 $\frac{c}{d}$ 是既约分数。

由于 $\frac{1}{g} \leqslant \frac{k}{q_k} - \frac{b}{a}$，我们得到 $q_k \leqslant ka$，从而 $d = \mathrm{lcm}(a, q_k) \leqslant ka^2$。于是得到

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{q_1} + \ldots + \frac{1}{q_{k-1}} - \frac{c}{d}.$$

应用归纳假设，我们得出 $g \leqslant f(k-1, ka^2) =: f(k, a)$。

□

现在我们完成定理 2.3 的证明。若 $k_3 = 0$，则由（3.4）可知 $\frac{-b}{a} = \frac{1}{g}$，因此 $b = -1$，并且 $g = a$ 仅由 n 决定的上界可由命题 3.6得到。因此 Φ 在 G 中的指数有界，结论得证。

假设 $k_3 \geq 1$。若 $q_i = g$ 对某个 i成立，则 $G = N_G(\mathcal{F}_i)$ 且 $[G : \mathcal{F}_i] = \omega_i [C_G(\mathcal{F}_i) \mathcal{F}_i] \leqslant n!$ N 由（3.1）可得。因此 $\mathcal{F}_i$ 就是所求的有有界指数的阿贝尔正规子群，结论得证。

（3.5）右边是一个非负正整数。若它为零，则 $k_3 = 1$， $q_1 = g$，于是回到前一种情形。否则它为正，因此 $b > 0$，故我们处于引理 4.1的情形。由此可得 g 仅由 n 决定的上界，再次得证。

定理2.3 现已完整证明。

注记。 顺便提一下，兰道定理的证明 [30]指出，恰有 k 个共轭类的有限群 G 只有有限多个$cl_1, \ldots, cl_k$，它基于一个类似但更简单的丢番图方程，即

$$1 = \frac{1}{q_1} + \ldots + \frac{1}{q_k}$$

其中 $q_i = |G|/|cl_i|$。这是一个埃及分数 [6], , 并且一个简单的论证 [33] 表明 $k \geq {}^{1}\log_4 \log\log |G|$。

5. 铂罗米立体与 $SO_3(R)$ 的有限子群

作为一个示例，并为便于比较，本节将回顾一种按照 Klein 的方法对 $SO_3(\mathbb{R})$ 的有限子群进行分类的证明；这种证明见于许多教科书，例如参见 [42, 48]。

设 G 是 $SO_3(\mathbb{R})$ 的一个有限子群。G 的每个非平凡元素都是绕某条轴旋转的旋转。设 X 是 G 中各旋转所绕轴构成的集合。显然，G 会置换 X，因为如果 x_h 是 $h \in G$ 的轴，那么 $gx_h = x_{ghg^{-1}}$。通过双重计数论证（或类方程），根据各元素的不变轴对 G 的元素进行枚举，从而确定所有可能的群 G。给定一条轴 $x \in X$，令 G_x 为 G 中轴为 x 的元素所组成的子集，并将单位元也加入其中。那么 G_x 是一个子群。它通常与 x 的中心化子重合，除非 x 是一次翻转（即其角度为 π）。从单位元开始枚举 G 的元素，我们可以写成：

$$|G| = 1 + \sum_{x \in X} (|G_x| - 1)$$

进一步，我们将对应于两个 G-全等轴的项合并（即，若存在 $g \in G$ 使得 $y = gx$，则有 $x \sim y$ ）。我们得到

$$|G| = 1 + \sum_{\text{classes of x } \in X} \frac{|G|}{|Stab_x|}(|G_x| - 1), \tag{5.1}$$

其中 $Stab_x$ 是 G 中 x 的稳定子。它是 G 的一个子群。现在注意，G 中保持 x 的元素 g 只能有两种可能的形式：要么固定 x 的两个极点，此时 g 属于 G_x；要么交换 x 的两个极点。因此，G_x 是 $Stab_x$ 的一个子群，其指数为 1 或 2。令 $x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_{r+s}$ 为 X 中 G-轨道的一组代表，使得若 $1 \leq i \leq r$ ，则 $[Stab_{x_i} : G_{x_i}] = 1$；若 $r+1 \leq i \leq r+s$，则 $[Stab_{x_i} : G_{x_i}] = 2$。设 $g_i = |G_{x_i}|$，将 (5.1) 除以 $|G|$，得到

$$1 = \frac{1}{|G|} + \sum_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{g_i}) + \frac{1}{2}\sum_{i=r+1}^{r+s}(1 - \frac{1}{g_i}) \tag{5.2}$$

或者等价地写成 Jordan 基本方程的形式（3。4），

$$\frac{1}{|G|} = \frac{1}{n_1} + ... + \frac{1}{n_{r+s}} - \frac{b}{a}, \tag{5.3}$$

其中 $\frac{b}{a} = r + \frac{s}{2} - 1$，且 $n_i = g_i$ 对于 $i \leq r$，$n_i = 2g_i$ 对于 $i > r$。

现在需要根据g_i的可能取值讨论方程（5.3）。由于 $g_i \geq 2$，由（5.2）可得 $1 > \frac{r}{2} + \frac{s}{4}$，由此立即推出 $r \leq 1$ 以及 $2r + s \leq 3$，因此 $\frac{b}{a} \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$。由于 n_i整除

$|G|$, （5.3）迫使$\frac{b}{a} > 0$（从而 $\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$），除非 $\frac{b}{a} = 0$ 且 $r + s = 1$。后一种情况只有在 $r + \frac{s}{2} = 1$时才会发生，因而 $r = 1$, $s = 0$。现在我们考察各种可能性。

- $\frac{b}{a} = 0$ 和 $r = 1$、 $s = 0$, 那么 $g_1 = |G|$ 和 G 是由绕单一轴旋转构成的循环群。
- $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, 以及 $r = 1$, $s = 1$,
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{|G|} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$$
我们可以假设 $n_1 \leq n_2$。这推出 $n_1 < 4$，进而得到 $n_1 = 2$, 3。因此有两种情况:

1）若 $n_1 = 2$, 则 $n_2 = 2g_2 = |G|$，且 G 是一个阶为 $2n$的二面体群，其中 $n = g_2$ 是一个奇整数。 G 是正 n边形的保向等距变换群。此外，在我们的情形中， n 是奇数，因为轴只有两个共轭类。

2）若 $n_1 = 3$, 则可验证 $n_2 = 4$ 且 $|G| = 12$。这里 G是正四面体的保向等距变换群。

- $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, $r = 0$, $s = 3$,
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{|G|} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$$
我们可以假设 $n_1 \leq n_2 \leq n_3$。这迫使 $n_1 < 6$。由于 $r = 0$, 所有三个 n_i 都是偶数 $n_i = 2g_i$, 因此要么 $n_1 = 2$，要么 $n_1 = 4$。如上所述，情况 $n_1 = 2$ 不成立。因此 $n_1 = 4$，于是
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{|G|} = \frac{1}{2g_2} + \frac{1}{2g_3}.$$
我们有以下几种情况:

1) $g_2 = 2$, 那么 $|G| = n_3 = 2g_3$，且 G 是一个阶为 $2n$ 的二面体群，其中 $n = g_3$ 是一个偶整数。 G 是正 n 边形的保向等距变换群。此外，在我们的情形中， n 是偶数，因为轴恰有三个共轭类。例如，若 $n = 2$, 则 $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$，且每个非平凡元素都是绕三条相互正交的轴之一的翻转。

2) $g_2 = 3$, 那么
$$\frac{1}{6} + \frac{2}{|G|} = \frac{1}{g_3}.$$
这就意味着 $g_3 < 6$, 因此有三种情况:

a) $g_3 = 3$, 那么 $|G| = 12$ 和 G 保持一个正四面体不变。然而，这与假设 $s = 3$矛盾，因为在这种情况下，轴只有两个共轭类。因此，这种情况不可能发生。

b) $g_3 = 4$, 那么 $|G| = 24$ 和 $G \simeq S_4$ 是立方体或正八面体的保向等距变换群。

c) $g_3 = 5$, $G \simeq A_5$ 是正二十面体或正十二面体的保向等距变换群。

6. Non-standard analysis and Jordan's unlimited numbers

正如我们所见，Jordan 在他的文章中没有给出 $J(n)$ 的显式上界。当然，这并非证明本身存在任何根本性的无效性所致。事实上，只要非常仔细地遵循 Jordan 的论证，就有可能由此得到一个指数塔形式的上界，即一个指数塔

$$10^{10^{\cdots^{10}}}$$

长度为 n，参见 [2]。事实上，Jordan 本人似乎对其最初的阐述并不满意，于是又撰写了第二篇文章 [27]，在文中他重写了自己的证明，并解释了该证明为何是有效的（尽管他仍未给出具体的上界）。然而，从纯粹的认识论观点来看，Jordan 在最初的回忆录中为何可以完全不写下任何上界，倒是颇值得探究。事实上，为了让读者相信其论证是可靠的，他区分了两类数字，并称之为有限数和无限数。下面引述他的原文 [26, 第 114]:

"对于后续研究而言，明确我们赋予有限和无限这两个词的含义十分重要。它们与有限数和无限数并非同义。我们称一个数为有限的，是指它小于某个已确定的上界。由此定义可知，一个我们一无所知的有限数是无限的；但只要我们设法为它确定一个上界，它就变成了有限的。"

因此，他不说某个量仅以n 为上界，而说该量是有限的。若它不是有限的，便是无限的；而在考察类方程（3.4）时，这似乎会导致矛盾。Jordan 之后一个半世纪，人们很难不从中看到一种思维方式的雏形，它预示着非标准分析的出现；在非标准分析中，一种新型数——无限数——被赋予了独立存在的地位。

事实上，我们可以用一种非标准的方式来阐述 Jordan 的证明，下面简要说明。先取一列可能构成该定理反例的对象，再对它们取超积，便得到某个$\widehat{\quad\quad\quad\quad\quad}$无限、伪有限的子群 G，它属于 $GL_n(K)$。这里 K 是代数闭域 K_i的超积$\widehat{\quad}$。G 中的扇定义为一个内部可对角化子群 F，其中每个根$\alpha_{ij}: F \to K, f \mapsto \lambda_i(f)/\lambda_j(f)$要么是无限的，要么是平凡的。关于维数的归纳假设使我们$\widehat{\quad}$可以假定，每个非标量元素 $g \in G$的中心化子 $C(g)$都含有唯一的正规极大扇 F_g，其指数有限。仿照$\widehat{\quad}$Jordan 的证明，我们可以把 G 的元素分成四类：标量Φ；满足 $F_g = \Phi$的元素 $g \notin \Phi$；满足 $\Phi \lneq F_g$ 且 F_g 在 G中不是极大的元素 $g \notin \Phi$；以及满足 F_g 且 $g \notin \Phi$ 为极大的元素。利用以下事实:

是伪有限的，第二类和第三类在$\widehat{G}$中所占比例为 $r|G|$ ，而最后一类所占比例为 $(r' - \sum q_i^{-1})|\widehat{G}|$，其中 r，r' 是有限的（标准）有理数，q_i ($q_i = |N_{\widehat{G}}(F_{g_i})/\Phi|$)是 $|G/\Phi|$的有限个（非标准）因子。记 g 为非标准整数$\prec|G/\Phi|$，于是得到方程：

$$\frac{1}{g} = r'' + \sum_i \frac{1}{q_i}$$

其中 $r'' = 1 - (r + r')$。取标准部分之差后，我们看到这意味着：

$$\frac{1}{g} = \sum_i{}' \frac{1}{q_i}$$

对于原和式的一个子和。然而，q_i是 g 的因子，而这只有在 $q_i = g$ 对某个 i时才可能发生。由（3.1）和（3.2），这意味着 F_{g_i} 是 G 中的正规子群，且指数有限。这个矛盾结束了证明。

有兴趣一读 Jordan 原文的读者会发现，上述非标准处理实际上比我们在第3节中对其证明所作的阐述，更接近 Jordan 本人的表述。事实上，Jordan 并未谈及 M-扇，而只定义了扇。他的定义与我们上面在非标准处理中所做的完全相同，只是用“无限制”一词代替“无限”一词。当然，若要使这个定义在严格意义上成立，我们一开始就只能置身于一个非标准宇宙中。因此，从一开始，他的证明就是彻底的非标准证明。他原文的表述如下：[26,§40，第 114]

定理 6.1。 （*Jordan* 定理的原始表述）线性代换的有限子群G 存在唯一的极大扇。它是正规子群，且其指数是有限数。

最后，我们强调有限性在 G Jordan 定理中的关键作用。在 Jordan 的证明中，有限性通过类方程以算术方式加以利用。与此形成对照的是，Bieberbach 通过交换子收缩性质进行几何论证，在其中，有限性是通过最接近单位元的元素加以利用的。

本节最后顺带提及近期围绕 Zilber 的一个问题 [49, 问题 6.3] 关于伪有限群的一些相关进展。最近，Nikolov、Schneider 和 Thom [34]证明，从伪有限群到紧李群的每个同态，其像都是阿贝尔扩有限群，从而同时回答了 Pillay [37, 猜想 1.7]的猜想以及 Zilber 的问题。

当然，如此强的陈述足以按照上述概述的非标准方法证明 Jordan 定理本身，

^至少在 K 的特征为零时如此。事实上，在这种情况下， K 可以取为与 $\mathbb{C}$ 同构，因为任何特征为零的可数代数^闭域的超积都具有这一性质。此外，我们可以假设 G 位于 $\mathbb{U}_n(K)$ 的酉矩阵内部集合^ ^中，换言之， G 是一个紧李群的子群。根据 Nikolov-Schneider-Thom，这意味着^ G 是有限扩张阿贝尔群，从而得到所需的矛盾。

当然，Nikolov、Schneider 和 Thom 的定理比 Jordan 定理深刻得多，因为它适用于任意伪有限群，而不仅仅是某个 GL_n 中的群，其中固定的 n。他们的证明依赖于 Nikolov 和 Segal [35] 关于有限群中交换子宽度的深刻结果。

7. Bounds on $J(n)$

最后，我们简要回顾 Jordan 定理的相关历史，以及 $J(n)$ 的上界如何随着时间的推移不断改进：

Jordan（1878年）：没有上界（事实上是：指数塔 [2]）。Blichfeldt（1905年）：$\exp(O(n^3))$。Bieberbach（1911年）：$(1+32^4n^{10})^{2n^2}$。Frobenius（1911年）：$(\sqrt{8n+1})^{2n^2}$。Blichfeldt（1917年）：$n!6^{(n-1)(\pi(n+1)+1)}$ [$\pi(x)$ 是素数的数量$\leqslant x$]。Weisfeiler（1984年）：$(n+1)!e^{O(\log n)^2}$（使用有限单群分类）。Collins（2007年）：$n+1!$，适用于 $n \geq 71$（使用有限单群分类）。

在 [4, 第 396] 页，刚刚完成 Sophus Lie 指导下博士论文的 Blichfeldt 证明了，没有素数 $p \geq n$（$2n-1$）能整除 GL_n（$\mathbb{C}$）的有限本原子群的阶；在 [4, 第 321] 页，他给出了本原子群阶的p-指数的上界；特别地，当 $p > n$时，该指数至多为 1（见 [5, §67]）。这些结果为任意有限子群的阶给出了 exp（O（n^3））的上界（隐含于 [4,第 232]页）。

在他1917年的专著 [5]中，Blichfeldt在早期研究成果的基础上，融入了受Bieberbach的论证 [3] 和Frobenius的改进 [20]启发的几何论证。他在 [5, §73] 中证明，有限本原群的阿贝尔子群的阶至多为数量矩阵群大小的 6^{n-1} 倍。这基于一个引理 [5, §70]：在有限本原子群中，若某个变换的特征值集中在单位圆上的一段弧内，且该弧以其中一个特征值为中心、长度不超过 $\frac{2\pi}{3}$，那么这个变换必为数量矩阵。这个引理与Bieberbaeh-Frobenius的证明密切相关。最后，他还导出了上界 $n!6^{(n-1)(\pi(n+1)+1)}$ on$J(n)$，其中 $\pi(n)$是素数的个数 $\leqslant n$。关于布利希费尔特界的详细论述，参见 [19, 第 30] 章；关于Blichfeldt引理的最新改进，参见 [39, 40]。事实上，Blichfeldt声称可以用5替代6，

但至今尚未出现相关证明。那本由三位作者合著、 [32], 并献给Camille Jordan的书也概述了这些结果。

[43]和[24]中包含了对布利希费尔特界的其他出色阐述。另见 [18, 第 5] 章，其中介绍了布利希费尔特的早期结果，并使用比伯巴赫-弗罗贝尼乌斯论证给出了Jordan 定理的证明。

Brauer [9] 猜想，布利希费尔特界可以改进为以下形式 $e^{O(n\log n)}$，事实上，他在某些假设下实现了这一点。实际上，对于有限可解子群，Dornhoff 证明了一个指数上界 $2^{4n/3}3^{10n/9-1/3}$，而且对无穷多个 n而言甚至是紧的 [19,定理 36。4]

然而，Blichfeldt 形式为 $e^{O(n^2/\log n)}$的第二个上界似乎是在没有有限单群分类（有限单群分类）的情况下所能得到的最佳上界。与比伯巴赫-弗罗贝尼乌斯界相比，指数中这个看似微小的因子 $(\log n)^2$ 增益有时可能十分重要，正如我们在 [12]中发现的那样。

在徒步旅行时失踪前不久[4]，B. Weisfeiler 在智利宣布了一个关于 $J(n)$ 的 $e^{O(n\ \text{对数}\ n)}$质量 [45] 上界。他未发表的手稿现已完成打字，并可在线查阅 [46]。最近，M. Collins [13, 14] 改进了 n 较大时的上界，使其达到精确值，即 $(n+1)!$，从而为有限线性群历史上的漫长篇章画上了句号。

References

[1] H. Bass, 《群论》, 《代数杂志》, –（）。[2] D. Bassett, 关于 Jordan 的原始证明的本科生暑期研究项目，剑桥大学，2021年。[3] L. Bieberbach, 《群论》, 《普鲁士科学院会议报告》（）–。[4] H. F. Blichfeldt, 《群的有限子群》, , *II*, *III*, *IV*, 《美国数学学会汇刊》, 第4卷，第4期（1903年、1903年、1905年、1911年）。[5] H. F. Blichfeldt, 《群论》, 芝加哥大学出版社，194页（1917年）。[6] T. Bloom 和 Ch. Elsholtz, 《有限群的一个定理》, 预印本（2022年）, arXiv:2210.04496。[7] W. Boothby 和 H.C. Wang, 《紧群的表示》, 《海尔维蒂数学评论》39（1965年）281–294。[8] A. Borovik, 《有限群的 Jordan 定理》, arXiv:2008.00604v2 预印本，2020年。[9] R. Brauer, 《有限群表示理论》, （1969年）, 第103–106页, 《哥廷根科学院通讯: 数学—物理学类》第11期。另见《文集》第三卷。[10] R. Brauer 和 W. Feit, 《有限群的线性表示》, 《数学年刊》第二辑，第84卷，第2期（1966年9月）, 第119–131页。[11] E. Breuillard 和 B. Green, 《有限群的乘积集》, 《土耳其数学杂志》36（2012年）, 第2期，199–215。[12] E. Breuillard 和 G. Pisier, 《群的近似子群》, 预印本 arXiv: 。

[4]参见 https://en.wikipedia.org/wiki/Boris_Weisfeiler

[13] M. J. Collins, 《有限群的置换表示》, 《群论杂志》10（2007年）, 第4期, 411–423。[14] M. J. Collins, 《有限群的线性表示》, 《代数杂志》319（2008年）, 第2期, 759–776。[15] B. Csik´os、L. Pyber、E. Szabo, *Finite subgroups of the homeomorphism group of a compact topological manifold are almost nilpotent* arXiv: 2204 13375 2021。预印本。[16] C.W. Curtis 和 I. Reiner, 《表示理论》, 《数学研究丛书》Interscience, 纽约, （）。[17] J. Dieudonn´e, 《现代代数》, 载于 [18] J.D. Dixon, 《群论》, van Nostrand, （1971年）, 183页。[19] L. Dornhoff, 《有限群的表示理论》, *Part A: Ordinary representation theory*《纯粹与应用数学》第7卷, Marcel Dekker, Inc., 纽约, （1971年）, vii+页, 1–254。[20] G. Frobenius, 《群的特征标理论》, 《普鲁士科学院会议报告》（）–。[21] J. Gray, 《现代代数》, Birkh´auser, （2000年）, 338页。[22] D. A. Kazhdan 和 G. A. Margulis, 《关于线性群的一个定理》, 《数学文集》（新辑）（1968年）, 75（117）1, 163–168。[23] F. Klein, 《几何学基础》, Dover Publications（1956年）, 或美国数学学会重印版 ISBN 978-7-04-051022-5, （2019年）。[24] I. M. Isaacs, 《有限群理论》, 《纯粹与应用数学》第69卷。Academic Press, （1976年）。xii+303 页。[25] C. Jordan, 《关于置换群》, 《科学院报告》, （）, 第–页, 载于《全集》第二卷（）。[26] C. Jordan, 《论有限群》, 《纯粹与应用数学杂志》84（1878年）, 89–215。[27] C. Jordan, 《关于群的理论》, 《那不勒斯科学院会刊》, VIII, 第（）, 载于《全集》第二卷（）。[28] C. Jordan。《全集》, 共4卷, G. Julia 和 J. Dieudonn´e 编, Gauthier-Villars, 巴黎, （1961年）。[29] A. Guld, 《有限群的 Jordan 定理》, arXiv: 。预印本。[30] E. Landau, 《群论问题》, 《数学年刊》（）–。[31] M. Larsen 和 R. Pink, 《有限群的统一结构定理》, 《美国数学会杂志》24（2011年）, 第4期, 1105–1158。[32] G.A Miller、H. Blichfeldt、L.E. Dickson, 《有限群理论》, 第2版, Stechert, 纽约, （1938年）。[33] M. Newman, 《有限群的一个问题》, 《伦敦数学会杂志》43（1968年）, 108–110。[34] N. Nikolov、J. Schneider、A. Thom, 《紧群中的有限生成子群》, 《J. Ec. polytech. Math.》5（2018年）, 239–258。[35] N. Nikolov 和 D. Segal, 《有限生成群的有限商》, 《数学发明》（）, 第–期。[36] M. Nori, $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_p)$, 《数学发明》88, 257–275（1987年）。[37] A. Pillay, 《关于稳定群的注记》, 《基础数学》236（2017年）, 第2期, 193–200。[38] M.S. Raghunathan, 《离散子群》, Springer-Verlag, （1972年）。[39] G.R. Robinson, 《有限群的表示》, 《代数杂志》131（1990年）, 第2期, 527–534。[40] G.R. Robinson, 《有限群的不可约表示》, 《代数杂志》165（1994年）, 第1期, 113–121。

[41] I. Schur, *´Uber Gruppen periodischer linearer Substitutionen*, 《普鲁士科学院会议报告》（1911年）619–627。[42] M. Senechal
Finding the Finite Groups of Symmetries of the Sphere, 《美国数学月刊》，1990年4月，第97卷第4期，第329–335页。[43] A. Speiser,
Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Birkh¨auser出版社，巴塞尔-斯图加特，（1956年），xi+271 页。[44] B. Wehrfritz, *Infinite linear groups*, Springer出版社（1973年），229页。[45] B. Weisfeiler,
Post-classification version of Jordan's theorem on finite linear groups, 《美国国家科学院院刊》81（1984年），5278–5279。[46] B. Weisfeiler,
On the size and structure of finite linear groups, 未发表手稿（1984年），参见 arXiv:1203.1960 和 http://weisfeiler.com/boris/papers/ papers.html（并非 https）。[47] H. Zassenhaus, *Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen*, 《汉堡大学数学研讨会论文集》12 289-312（1938年）。[48] H. Zassenhaus, *The theory of groups*, 德文译本，译者 Saul Kravetz。Chelsea出版社，纽约，纽约州，（1949年）。viii+159 页。[49] B. Zilber,
Perfect infinities and finite approximation, 载于《无穷与真理》，199–223，新加坡国立大学数学科学研究所讲义丛书第25卷，World Scientific出版社，哈肯萨克，新泽西州，（2014年）。

Emmanuel Breuillard, Mathematical Institute, Woodstock Road, OX2 6GG,United Kingdom*Email address*: breuillard@maths.ox.ac.uk