arXiv:2305.00727v1 [math.RA] 1 May 2023

上三角矩阵李代数上的转置泊松结构*†

Ivan Kaygorodov‡ & Mykola Khrypchenko§

摘要：我们描述了域 F（特征为零）上上三角矩阵李代数$T_n(F)$、 $n>1$上的转置泊松结构。我们证明，对于 $n>2$，任何此类结构要么是泊松型，要么是一个固定的非泊松结构与一个泊松型结构的正交和；而对于 $n=2$，在 $T_n(F)$ 上还存在另一类转置泊松结构。我们还证明，在同构意义下，全矩阵李代数 $M_n(F)$ 仅有一种非平凡的转置泊松结构，且它是泊松型。

关键词：转置泊松代数、上三角矩阵李代数、全矩阵李代数、δ-导子。

2020年数学主题分类：主要分类 17A30、15B30；次要分类 17B40、17B63。

引言

自20世纪70年代起源于泊松几何以来，泊松代数已出现在数学和物理学的多个领域，例如代数几何、运算子、量子化理论、量子群以及经典力学和量子力学。泊松代数理论中的一个自然任务，是描述具有固定李或结合的部分 [6, 7, 14] 的所有此类代数。

最近，Bai、Bai、Guo 和 Wu [1] 通过交换定义泊松代数的莱布尼茨法则中两种乘法的作用，引入了泊松代数的一种对偶概念，称为转置泊松代数。以这种方式定义的转置泊松代数不仅具有泊松代数的某些性质，例如在张量积下封闭以及作为一个幺半群的 Koszul自对偶性，而且还满足一类丰富的恒等式。值得注意的是，转置泊松代数可通过取 Novikov-泊松代数的 Novikov部分的交换子李代数自然得到。

多亏了 [3], ，任何含幺转置泊松代数都是“接触括号”代数和拟泊松代数的一个特例。Ferreira、Kaygorodov 和 Lopatkin 最近的一篇论文建立了李代数的$_1$ $_2$-导子与转置泊松代数之间的关系 [4]。这些思想被用于描述 Witt 代数和 Virasoro 代数上的所有转置泊松结构

*本研究得到 FCT UIDB/MAT/00212/2020、UIDP/MAT/00212/2020、2022.02474.PTDC 以及 CMUP 的资助。CMUP 是 LASI 的成员，LASI 通过 FCT——科学与技术基金会（Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P.）的国家资金获得资助，项目编号为 UIDB/00144/2020。

†通讯作者：kaygorodov.ivan@gmail.com

‡CMA-UBI，贝拉内陆大学，葡萄牙科维良；kaygorodov.ivan@gmail.com §数学系，圣卡塔琳娜联邦大学，巴西；以及 CMUP，理学院数学系，波尔图大学，坎普阿莱格里街 s/n，4169–007 波尔图，葡萄牙 nskhripchenko@gmail.com

见 [4]；扭曲 Heisenberg-Virasoro、Schr¨odinger-Virasoro 和扩展 Schr¨odinger-Virasoro 代数上的相关研究见 [15]；振子李代数上的相关研究见 [3]；$(n+1)$ 维时空中的薛定谔代数上的相关研究见 [13]；Witt 型李代数上的相关研究见 [9]；广义 Witt 代数上的相关研究见 [10]，Block 李代数上的相关研究见 [8, 10]。已有证明表明，任何复有限维可解李代数都存在非平凡的转置泊松结构 [11]。文献 [2] 给出了三维转置泊松代数的代数分类和几何分类。关于转置泊松代数中尚未解决问题的清单，见 [3]。

本文描述域 F 上特征为零的上三角矩阵李代数$T_n(F)$上的转置泊松结构。为此，我们首先在命题10中刻画 $T_n(F)$ 的$\frac{1}{2}$-导子。接着，定理11解决了 $n>2$ 的情形，而定理12则单独处理 $n=2$ 的情形。具体而言，我们在定理11中证明，对于 $T_n(F)$,$n>2$ 上的任意转置泊松结构，它要么是泊松型，要么是固定的非泊松结构与

$$e_{11}\cdot e_{11}=-e_{11}\cdot e_{nn}=e_{nn}\cdot e_{nn}=e_{1n}$$

一个泊松型结构的正交和。如果 $n=2$，那么 $T_n(F)$ 上还会出现一类独立的转置泊松结构，它由该族结构与

$$e_{11}\cdot e_{11}=ce_{11}, e_{11}\cdot e_{12}=-e_{12}\cdot e_{22}=ce_{12}, e_{11}\cdot e_{22}=-e_{22}\cdot e_{22}=ce_{22},\ c\neq 0,$$

一个泊松型结构的正交和。作为补充结果，我们在定理 14 中证明，全矩阵李代数 $M_n(F)$ 仅存在一个非平凡的转置泊松结构 $e_{ii}\cdot e_{jj}=\delta$,$1\leq i,j\leq n$，且它是泊松型的。事实上，正如注 15 所述，它同构于乘积$\delta\cdot\delta=\delta$ 的零扩张。

1. 定义与预备知识

除非另有说明，以下所有代数均定义在特征为零的域 F 上，所有线性映射均为 F-线性的。记号 $\langle S\rangle$ 表示由 S 生成的 F 子空间。

定义 1. 设 $\mathfrak{L}$ 是一个向量空间，配备两个非零双线性运算 $\cdot$ 和 $[\cdot,\cdot].$。若三元组 $(\mathfrak{L},\cdot,[\cdot,\cdot])$ 满足 $(\mathfrak{L},\cdot)$ 是一个交换结合代数，且 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 是一个满足以下相容条件的李代数，则称其为转置泊松代数

$$2z\cdot[x,y]=[z\cdot x,y]+[x,z\cdot y]. \tag{1}$$

转置泊松代数最早由 Bai、Bai、Guo 和 Wu 在论文 [1] 中引入。

定义 2. 设 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 是一个李代数。$(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 上的转置泊松代数结构是指 $\mathfrak{L}$ 上的一个交换结合乘法 $\cdot$，使得 $(\mathfrak{L},\cdot,[\cdot,\cdot])$ 成为一个转置泊松代数。

定义 3. 设 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 是一个代数，$\varphi\colon\mathfrak{L}\to\mathfrak{L}$a 是一个线性映射。那么，如果 φ 满足下列条件，它就是一个 $\frac{1}{2}$-导子。

$$\varphi\big([x,y]\big)=\frac{1}{2}\big([\varphi(x),y]+[x,\varphi(y)]\big). \tag{2}$$

注意到，$_{1\,2}$-导子是 Filippov 在 [5] 中引入的 δ-导子的一个特例。代数 $\mathfrak{L}$ 的所有 $_{1\,2}$-导子构成的空间记为 $\Delta(\mathfrak{L})$。由 (2) 容易看出，$[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 和 Ann($\mathfrak{L}$) 在 $\mathfrak{L}$ 的任意 $_{1\,2}$-导子作用下均保持不变。

定义 1 和定义 3 立即推出以下关键引理。

引理 4. 设 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 是一个李代数，$\mathfrak{L}$ 上有一个新的二元（双线性）运算 $\cdot$。那么 $(\mathfrak{L},\cdot,[\cdot,\cdot])$ 是一个转置泊松代数，当且仅当 $\cdot$ 是交换结合的，并且对于任意 $z\in\mathfrak{L}$，在 $(\mathfrak{L},\cdot)$ 中由 z 诱导的乘法是 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 的一个 $_{1\,2}$- 导子。

$_{1\,2}$-导子的基本例子是由域元素诱导的乘法。这类$_{1\,2}$-导子称为平凡的。

定理5. 设 $\mathfrak{L}$ 是一个不含非平凡$_{1\,2}$-导子的李代数。那么 $\mathfrak{L}$ 上的所有转置泊松代数结构都是平凡的。

$(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 的另一类众所周知的$_{1\,2}$-导子，是由线性映射 $\mathfrak{L}\to\mathrm{Ann}(\mathfrak{L})$ 构成的，它们消去 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$。若 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 是一个李代数，则 $\mathfrak{L}$ 上的这类$_{1\,2}$-导子对应于 $\mathfrak{L}$ 上如下的转置泊松结构。用 $Z(\mathfrak{L})$ 表示 $\mathfrak{L}$ 的中心，并在 $\mathfrak{L}$ 中固定 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 的一个补空间 V。那么任意交换结合乘积 $*:V\times V\to Z(\mathfrak{L})$ 都可通过以下方式在 $\mathfrak{L}$ 上定义一个转置泊松代数结构 $\cdot$

$$(a_1+a_2)\cdot(b_1+b_2)=a_1*b_1, \tag{3}$$

其中 $a_1,b_1\in V$和 $a_2,b_2\in[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$。事实上，(1) 式右端为零，因为 $z\cdot x,z\cdot y\in Z(\mathfrak{L})$；而根据 (3)，(1) 式左端为零，因为 $[x,y]\in[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$。我们称 $\cdot$是 $*$的零延拓。注意，$\cdot$同时也是 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 上通常的泊松结构。因此，这类转置泊松结构称为泊松型。

给定 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 上的两个转置泊松结构 $\cdot_1$ 和 $\cdot_2$，它们的和 $*$ 定义为

$$a*b=a\cdot_1 b+a\cdot_2 b$$

显然是交换的，并满足 (1)。一般而言，$*$ 可能不是结合的，但当

$$\mathfrak{L}\cdot_1\mathfrak{L}\subseteq\mathrm{Ann}(\mathfrak{L},\cdot_2)\text{ and }\mathfrak{L}\cdot_2\mathfrak{L}\subseteq\mathrm{Ann}(\mathfrak{L},\cdot_1).$$

在这种情况下，我们称 $\cdot_1$ 和 $\cdot_2$ 是正交的，并称 $*$ 为 $\cdot_1$ 和 $\cdot_2$的正交和。

设 $\cdot$ 是李代数 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 上的一种转置泊松代数结构。那么，$(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 的任意自同构ϕ 都会在 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 上诱导出一种转置泊松代数结构 $*$，其定义为

$$x*y=\phi\big(\phi^{-1}(x)\cdot\phi^{-1}(x)\big),\quad x,y\in\mathfrak{L}.$$

显然，ϕ 是转置泊松代数（$\mathfrak{L}$，$\cdot$，$[\cdot,\cdot]$）与（$\mathfrak{L}$，$*$，$[\cdot,\cdot]$）之间的同构。

2. 上三角矩阵李代数上的转置泊松结构

2.1. 上三角矩阵代数。设 n 为一个正整数。用 $T_n(F)$ 表示 F 上的 $n\times n$ 阶上三角矩阵代数。$T_n(F)$ 上通常的矩阵乘积记为 $\cdot$，或直接记作连接，而交换子乘积记为 $[a,b]=ab-ba$。沿用关联代数的术语

，我们用 δ 表示单位矩阵；给定 $a \in T_n(F)$ 以及 $1 \le i$、$j \le n$，用 $a(i,j)$ 表示 a 的 (i,j) 项。代数 $T_n(F)$ 的自然基由矩阵单位 e_{ij}、$1 \le i \le j \le n$ 构成，其中 $e_{ij}(k,l) = \delta(i,k)\delta(j,l)$。众所周知，

$$Z(T_n(F)) = \langle \delta \rangle \text{ and } [T_n(F), T_n(F)] = \langle e_{ij} \mid 1 \le i < j \le n \rangle \text{ for all } n \ge 1.$$

此外，

$$Z([T_n(F), T_n(F)]) = \langle e_{1n} \rangle \text{ for all } n > 1. \tag{4}$$

显然，对于所有 $a \in T_n(F)$ 和 $1 \le i \le j \le n$，我们都有

$$e_{ij}a = \sum_{j \le k} a(j,k)e_{ik}, \quad ae_{ij} = \sum_{l \le i} a(l,i)e_{lj},$$

so

$$e_{ij}ae_{kl} = \begin{cases} a(j,k)e_{il}, & j \le k, \\ 0, & j > k. \end{cases}$$

这些 e 本文中将多次使用这些性质，而不再逐一注明。 .

2.2. 上三角矩阵李代数的 $_{1\,2}$-导子。我们用 $\Delta(T_n(F))$ 表示李代数 $(T_n(F)\ [\cdot,\cdot])$ 的 $_{1\,2}$-导子空间。

–

引理 6. 设 $\varphi \in \Delta(T_n(F))$。那么对于所有 $1 \le i < j \le n$，我们有

(i) $\varphi(e_{ij})e_{ii} = 0$; (ii) $e_{ij}\varphi(e_{ii})$
$= \varphi(e_{ii})(j,j)e_{ij}$; (iii) $\varphi(e_{ii})(i,j)$
$= -\varphi(e_{jj})(i,j)$; (iv) $\varphi(e_{ii})e_{ij} = \varphi($
$e_{ii})(i,i)e_{ij}$。

证明。(i)。由于 $e_{ij} = [e_{ij}, e_{jj}]$，因此

$$2\varphi(e_{ij}) = [\varphi(e_{ij}), e_{jj}] + [e_{ij}, \varphi(e_{jj})] = \varphi(e_{ij})e_{jj} - e_{jj}\varphi(e_{ij}) + e_{ij}\varphi(e_{jj}) - \varphi(e_{jj})e_{ij}. \tag{5}$$

在右侧将 (5) 乘以 e_{ii} （在 $\cdot$ 下），即可得到所需等式。

(ii)。将 φ 应用于 $[e_{ii}, e_{jj}] = 0$:

$$0 = \varphi([e_{ii}, e_{jj}]) = \varphi(e_{ii})e_{jj} - e_{jj}\varphi(e_{ii}) + e_{ii}\varphi(e_{jj}) - \varphi(e_{jj})e_{ii}. \tag{6}$$

若存在 $k > j$，则在左侧乘以 e_{jj}、右侧乘以 e_{kk}，由 (6) 可得

$$\varphi(e_{ii})(j,k) = 0 \text{ for } j < k. \tag{7}$$

由此可知

$$e_{ij}\varphi(e_{ii}) = \sum_{j \le k} \varphi(e_{ii})(j,k)e_{ik} = \varphi(e_{ii})(j,j)e_{ij},$$

根据需要。

(iii). 这是将 (6) 左乘 e_{ii} 并右乘 e_{jj} 得出的。

(iv). 将 φ 应用于 $e_{ij}=[e_{ii},e_{ij}]$，我们得到

$$2\varphi(e_{ij})=[\varphi(e_{ii}),e_{ij}]+[e_{ii},\varphi(e_{ij})]=\varphi(e_{ii})e_{ij}-e_{ij}\varphi(e_{ii})+e_{ii}\varphi(e_{ij})-\varphi(e_{ij})e_{ii}. \tag{8}$$

如果存在 $l<i$，则将式 (8) 左乘 e_{ll}、右乘 e_{jj}，可得

$$2\varphi(e_{ij})(l,j)=\varphi(e_{ii})(l,i). \tag{9}$$

另一方面，$[e_{ll},e_{ij}]=0$，因此

$$0=\varphi(e_{ll})e_{ij}-e_{ij}\varphi(e_{ll})+e_{ll}\varphi(e_{ij})-\varphi(e_{ij})e_{ll}.$$

将其左乘 e_{ll}，再右乘 e_{jj}，我们得到

$$\varphi(e_{ij})(l,j)=-\varphi(e_{ll})(l,i). \tag{10}$$

根据条目 (iii)，后者为 $\varphi(e_{ii})(l,i)$。因此，由 (9) 和 (10) 可得

$$\varphi(e_{ii})(l,i)=0 \text{ for } l<i. \tag{11}$$

因此,

$$\varphi(e_{ii})e_{ij}=\sum_{l\le i}\varphi(e_{ii})(l,i)e_{ik}=\varphi(e_{ii})(i,i)e_{ij},$$

如所需。 □

引理 7. 设 $\varphi\in\Delta(T_n(F))$. 那么对所有 $1\le i<j\le n$，我们有

$$\varphi(e_{ij})=(\varphi(e_{ii})(i,i)-\varphi(e_{ii})(j,j))e_{ij}=(\varphi(e_{jj})(j,j)-\varphi(e_{jj})(i,i))e_{ij}. \tag{12}$$

证明. 由 (8) 以及引理 6 的 (i)、(ii) 和 (iv)，我们有

$$2\varphi(e_{ij})=(\varphi(e_{ii})(i,i)-\varphi(e_{ii})(j,j))e_{ij}+e_{ii}\varphi(e_{ij}). \tag{13}$$

在左侧将 (13) 乘以 e_{ii}，得到

$$2e_{ii}\varphi(e_{ij})=(\varphi(e_{ii})(i,i)-\varphi(e_{ii})(j,j))e_{ij}+e_{ii}\varphi(e_{ij}).$$

由此

$$e_{ii}\varphi(e_{ij})=(\varphi(e_{ii})(i,i)-\varphi(e_{ii})(j,j))e_{ij}.$$

将此式代入 (13) 并除以 2（注意 $\mathrm{char}(F)\neq 0$），即可证明 (12) 的第一个等式。利用 (5) 和 $\varphi(e_{ij})\in\langle e_{ij}\rangle$（由 (12) 的第一个等式可知此式成立），可得第二个等式。□

引理8. 设 $\varphi\in\Delta(T_n(F))$.

(i) 对所有满足 $i\notin\{j,k\}$ 的 $1\le i\le n$ 和 $1\le j\le k\le n$，我们有 $\varphi(e_{ii})(j,j)=\varphi(e_{ii})(k,k)$。(ii) 对所有 $1\le i<j\le n$，我们有 $\varphi(e_{ij})(i,j)=\varphi(e_{1n})(1,n)$。(iii) 对所有 $1\le i\le n$ 和 $1\le j<k\le n$，我们有 $\varphi(e_{ii})(j,k)=0$，除非 $i\in\{1,n\}$ 且 $(j,k)=(1,n)$。

证明。(i) 将 φ 应用于 $[e_{ii}, e_{jk}] = 0$，得到

$$0 = \varphi(e_{ii})e_{jk} - e_{jk}\varphi(e_{ii}) + e_{ii}\varphi(e_{jk}) - \varphi(e_{jk})e_{ii}.$$

然后通过左乘 e_{jj} 和右乘 e_{kk}，即可得到所需的等式。(ii). 由于 $i < j$，因此 $i \neq n$，所以 $i \notin \{j, n\}$ 和 $n \notin \{1, i\}$。我们使用 (i) 项和 (12)：

$$\begin{aligned}\varphi(e_{ij})(i,j) &= \varphi(e_{ii})(i,i) - \varphi(e_{ii})(j,j) = \varphi(e_{ii})(i,i) - \varphi(e_{ii})(n,n) \\ &= \varphi(e_{nn})(n,n) - \varphi(e_{nn})(i,i) = \varphi(e_{nn})(n,n) - \varphi(e_{nn})(1,1) = \varphi(e_{1n})(1,n).\end{aligned}$$

(iii). 我们已经在 (7) 中看到，对于 $j < k$ 和 $i \notin \{j, k\}$，$\varphi(e_{ii})(j,k) = 0$（尽管引理 6 的陈述中要求 $i < j$，但 (7) 的证明仅使用了 $j < k$ 和 $i \notin \{j, k\}$）。此外，在存在 $j > i$（即 $i < n$）的假设下，由 (11) 可知，对于所有 $l < i$，$\varphi(e_{ii})(l,i) = 0$。类似地，由 (5) 和引理 7 可得，对于所有 $i < j < k$，$\varphi(e_{jj})(j,k) = 2\varphi(e_{ij})(j,k) = 0$，因此，对于所有 $1 < i < k$，$\varphi(e_{ii})(i,k) = 0$。剩下需要证明的是

$$\varphi(e_{11})(1,k) = \varphi(e_{nn})(j,n) = 0 \text{ for } 1 < j, k < n.$$

但引理 6 (iii) 表明 $\varphi(e_{11})(1,k) = -\varphi(e_{kk})(1,k)$，这已证明对于 $1 < k < n$ 为 0。同理，$\varphi(e_{nn})(j, n) = -\varphi(e_{jj})(j,n) = 0$ 对于 $1 < j < n$。□

引理9。设 $n > 1$。那么由以下给出的线性映射 $\alpha\colon T_n(F) \to T_n(F)$。

$$\alpha(e_{ij}) = \begin{cases} e_{1n}, & (i,j) = (1,1), \\ -e_{1n}, & (i,j) = (n,n), \\ 0, & (i,j) \notin \{(1,1),(n,n)\}, \end{cases}$$

是一个 $_{1\,2}$-导子。

证明。我们将证明 $\varphi = \alpha$ 满足 $x = e_{ij}$ 和 $y = e_{kl}$ 的条件 (2)。由于 α 消去 $T_n(F)$ 的交换子，(2) 的左端恒为零。鉴于 $[\cdot,\cdot]$ 的反交换性，我们只需处理以下两种情况。

情况 1. $(i,j) = (1,1)$。然后

$$[\alpha(e_{ij}), e_{kl}] + [e_{ij}, \alpha(e_{kl})] = [e_{1n}, e_{kl}] + [e_{11}, \alpha(e_{kl})]. \tag{14}$$

除非 $(k,l) \in \{(1,1), (n,n)\}$，否则 (14) 式右端的两个加项均为零。如果 $(k,l) = (1,1)$，则由于 $[\cdot,\cdot]$ 的反交换性，(14) 式右端为零。而如果 $(k,l) = (n,n)$，则 $[e_{1n}, e_{kl}] + [e_{11}, \alpha(e_{kl})] = e_{1n} - e_{1n} = 0$。

情形 2. $(i,j) = (n,n)$。

$$[\alpha(e_{ij}), e_{kl}] + [e_{ij}, \alpha(e_{kl})] = -[e_{1n}, e_{kl}] + [e_{nn}, \alpha(e_{kl})].$$

我们再次只有 2 个非平凡子情形（k,l）$= (1,1)$ 和（k,l）$=$（n,n），它们与情形 1 中对应的子情形相似。□

我们还引入线性映射 β_i：$T_n(F) \to T_n(F)$, $1 \le i \le n$，定义如下：

$$\beta_i(e_{jk}) = \begin{cases} \delta, & (j,k) = (i,i), \\ 0, & (j,k) \neq (i,i). \end{cases}$$

显然，β_i, $1 \le i \le n$构成了线性映射空间 $T_n(F) \to Z(T_n(F))$ 的一组基，该空间中的映射湮灭 $[T_n(F)\ T_n(F)]$。特别地，对所有 $1 \le i \le n$，均有 $\beta_i \in \Delta(T_n(F))$。

命题10. 设 $n > 1$。则 $\Delta(T_n(F)) = \langle \mathrm{id}\ \alpha \rangle \oplus \langle \beta_i \mid 1 \le i \le n \rangle$。

证明。根据引理9，我们只需证明每个 $\varphi \in \Delta(T_n(F))$ 都是 id、α 和 $\beta_i, 1 \le i \le n$ 的线性组合。令 $a = \varphi(e_{1n})(1,n)$，则有

$$\varphi(e_{ij}) = ae_{ij} \text{ for all } 1 \le i < j \le n \tag{15}$$

由引理 7 和引理8 (ii) 得。于是

$$\varphi(e_{ii})(i,i) - \varphi(e_{ii})(j,j) = a = \varphi(e_{ii})(i,i) - \varphi(e_{ii})(k,k)$$

由 (12)，对所有 $k < i < j$ 均成立。因此，定义 $b_i = \varphi(e_{ii})(j,j)$，其中 $j \neq i$ 为某个元素，则有

$$\varphi(e_{ii})(j,j) = \begin{cases} a + b_i, & j = i, \\ b_i, & j \neq i. \end{cases} \tag{16}$$

最后，令 $c = \varphi(e_{11})(1,n)$。根据引理 6 (iii) 和引理8 (iii)，对于所有 $1 \le i \le n$ 和 $1 \le j < k \le n$，我们有

$$\varphi(e_{ii})(j,k) = \begin{cases} c, & (i,j,k) = (1,1,n), \\ -c, & (i,j,k) = (n,1,n), \\ 0, & (i,j,k) \notin \{(1,1,n), (n,1,n)\}. \end{cases} \tag{17}$$

由 (15)–(17) 可知 $\varphi = a \cdot \mathrm{id} + c\alpha + \sum_{i=1}^{n} b_i \beta_i$。 □

定理11. 设 $\mathrm{char}(F) = 0$ 和 $n > 2$。那么，$T_n(F)$ 上的任意转置泊松代数结构都属于以下两种不同构形式之一：

(i) 泊松型转置泊松代数结构；(ii) 转置泊松代数结构的正交和

$$e_{11} \cdot e_{11} = -e_{11} \cdot e_{nn} = e_{nn} \cdot e_{nn} = e_{1n} \tag{18}$$

与一个泊松型转置泊松代数结构。

证明。设 $\cdot$ 是 $T_n(F)$上的一个转置泊松代数结构。由命题10和引理 4，对于所有 $1 \le i \le j \le n$，存在 x_{ij}、$y_{ij} \in F$和 $\{z_{ij}^k\}_{k=1}^n \subseteq F$，使得

$$e_{ij} \cdot e_{kl} = x_{ij}e_{kl} + y_{ij}\alpha(e_{kl}) + \sum_{s=1}^{n} z_{ij}^s \beta_s(e_{kl}) = \begin{cases} x_{ij}e_{kl}, & k < l, \\ x_{ij}e_{kk} + z_{ij}^k \delta, & k = l \notin \{1,n\}, \\ x_{ij}e_{11} + y_{ij}e_{1n} + z_{ij}^1 \delta, & k = l = 1, \\ x_{ij}e_{nn} - y_{ij}e_{1n} + z_{ij}^n \delta, & k = l = n. \end{cases}$$

令 $1 \le i < j \le n$ 以及 $1 < k < n$。于是 $e_{kk} \cdot e_{ij} = x_{kk} e_{ij}$，而 $e_{ij} \cdot e_{kk} = x_{ij} e_{kk} + z_{ij}^{k} \delta$，因此 e

$$x_{kk} = 0 \text{ and } x_{ij} = z_{ij}^{k} = 0 \text{ for } 1 \le i < j \le n \text{ and } 1 < k < n. \tag{19}$$

现在取 $1 \le i < j \le n$，使得 $(i, j) \neq (1, n)$。于是 $e_{11} \cdot e_{ij} = x_{11} e_{ij}$，而 $e_{ij} \cdot e_{11} = y_{ij} e_{1n} + z_{ij}^{1} \delta$。类似地，$e_{nn} \cdot e_{ij} = x_{nn} e_{ij}$，而 $e_{ij} \cdot e_{nn} = -y_{ij} e_{1n} + z_{ij}^{n} \delta$。因此，

$$x_{11} = x_{nn} = 0 \text{ and } y_{ij} = z_{ij}^{1} = z_{ij}^{n} = 0 \text{ for } 1 \le i < j \le n \text{ with } (i, j) \neq (1, n). \tag{20}$$

考虑乘积 $e_{11} \cdot e_{1n} = 0$, $e_{1n} \cdot e_{11} = y_{1n} e_{1n} + z_{1n}^{1} \delta$, $e_{nn} \cdot e_{1n} = 0$ 和 $e_{1n} \cdot e_{nn} = -y_{1n} e_{1n} + z_{1n}^{n} \delta$，我们有

$$y_{1n} = z_{1n}^{1} = z_{1n}^{n} = 0. \tag{21}$$

现在，对任意 $1 < i < n$，由 $e_{11} \cdot e_{ii} = z_{11}^{i} \delta$, $e_{ii} \cdot e_{11} = y_{ii} e_{1n} + z_{ii}^{1} \delta$, $e_{nn} \cdot e_{ii} = z_{nn}^{i} \delta$ 和 $e_{ii} \cdot e_{nn} = -y_{ii} e_{1n} + z_{ii}^{n} \delta$ 可得

$$y_{ii} = 0,\ z_{ii}^{1} = z_{11}^{i} \text{ and } z_{ii}^{n} = z_{nn}^{i} \text{ for } 1 < i < n. \tag{22}$$

Sim类似地，对于 $1 < i$、$j < n$，由 $e_{ii} \cdot e_{jj} = z_{ii}^{j} \delta$ 和 $e_{jj} \cdot e_{ii} = z_{jj}^{i} \delta$ 可得，

$$z_{ii}^{j} = z_{jj}^{i} \text{ for } 1 < i, j < n. \tag{23}$$

最后，$e_{11} \cdot e_{nn} = -y_{11} e_{1n} + z_{11}^{n} \delta$ 和 $e_{nn} \cdot e_{11} = y_{nn} e_{1n} + z_{nn}^{1} \delta$ 得出

$$y_{nn} = -y_{11} \text{ and } z_{11}^{n} = z_{nn}^{1}. \tag{24}$$

结合 (19)–(24)，并记 a_{ij} 为$= z_{ii}^{j}$、$b = y_{11}$，我们看到唯一（可能）非零的乘积 $e_{ij} \cdot e_{kl}$ 是

$$e_{ii} \cdot e_{jj} = a_{ij} \delta,\ 1 < i, j < n, \tag{25}$$

$$e_{11} \cdot e_{11} = b e_{1n} + a_{11} \delta,\ e_{nn} \cdot e_{nn} = b e_{1n} + a_{nn} \delta,\ e_{11} \cdot e_{nn} = e_{nn} \cdot e_{11} = -b e_{1n} + a_{1n} \delta, \tag{26}$$

其中，对所有 $1 \le i$、$j \le n$，均有 $a_{ij} = a_{ji}$。

如果 $b = 0$，那么 $\cdot$ 是泊松型，因此我们处于情形 (i)。否则，选择 ϕ 为由 $(b^{-1} - 1) e_{11} + \delta$ 共轭得到的变换，我们有

$$\phi(e_{ij}) = \begin{cases} e_{ij}, & 1 < i \le j \le n \text{ or } i = j = 1, \\ b^{-1} e_{ij}, & 1 = i < j \le n. \end{cases}$$

因此，应用 ϕ 后，我们可以在 (26) 中用 $b = 1$ 替换 $b \neq 0$，从而得到形式 (ii)。

为证明结构 (i) 和 (ii) 不同构，注意到 [12]，对于 $(T_n(F)\ [\cdot, \cdot])$ 的任意自同构 ϕ

$$\text{either } \phi(e_{ii}) \in e_{ii} + (\langle \delta \rangle \oplus \langle e_{ij} \mid i < j \rangle) \text{ for all } 1 \le i \le n, \tag{27}$$

$$\text{or } \phi(e_{ii}) \in -e_{n-i+1,n-i+1} + (\langle \delta \rangle \oplus \langle e_{ij} \mid i < j \rangle) \text{ for all } 1 \le i \le n. \tag{28}$$

考虑情形 (27)。由于根据 (25) 和 (26)，对所有 $1 \le i \le n$ 和 $1 \le j < k \le n$，$e_{ii} \cdot \delta \in \langle \delta \rangle = Z($ $T_n(F)$ $[\cdot,\cdot])$ 以及 $e_{ii} \cdot e_{jk} = 0$，任何这样的 ϕ 都会得到乘积

$$e_{ii} * e_{jj} = \phi(\phi^{-1}(e_{ii}) \cdot \phi^{-1}(e_{jj})) \in \phi(e_{ii} \cdot e_{jj} + \langle \delta \rangle) = \phi(e_{ii} \cdot e_{jj}) + \langle \delta \rangle,$$

其中，$\phi(e_{ii} \cdot e_{jj})$要么属于 $\langle \delta \rangle$（当 $e_{ii} \cdot e_{jj} \in \langle \delta \rangle$时），要么属于 $\pm b\phi(e_{1n}) + \langle \delta \rangle$（当 $e_{ii} \cdot e_{jj} \in \pm be_{1n} + \langle \delta \rangle$时）。但根据（4），$\phi(e_{1n})$是 e_{1n} 的非零倍数，因此

$$e_{ii} * e_{jj} \in \langle \delta \rangle \Leftrightarrow e_{ii} \cdot e_{jj} \in \langle \delta \rangle. \tag{29}$$

对所有 $1 \le i$、$j \le n$均成立。这表明，任何（i）型结构只能与（i）型结构同构。对于情形（28），同理可得

$$e_{ii} * e_{jj} = \phi(\phi^{-1}(e_{ii}) \cdot \phi^{-1}(e_{jj})) \in \phi(e_{n-i+1,n-i+1} \cdot e_{n-j+1,n-j+1} + \langle \delta \rangle).$$

然而

$$e_{n-i+1,n-i+1} \cdot e_{n-j+1,n-j+1} \in \langle \delta \rangle \Leftrightarrow (i,j) \notin \{(1,1),(1,n),(n,1),(n,n)\} \Leftrightarrow e_{ii} \cdot e_{jj} \in \langle \delta \rangle.$$

因此，我们再次得出，对所有 $1 \le i$、$j \le n$，（29）均成立，这表明结构（i）与（ii）不同构。

反过来，直接验证可知，（18）是 $T_n(F)$上的一个转置泊松代数结构，并且与 $T_n(F)$上任意泊松型转置泊松代数结构正交。□

下面的定理12描述了 $T_2(F)$ 上的转置泊松结构，其证明与定理11的证明类似，唯一的区别在于，最终得到的结构有3种类型，并且每种类型中的结构都可以在同构意义下完全分类。另一方面，$T_2(F)$ 与 [2] 中的三维李代数 $\mathfrak{g}_2^0$ 同构，其转置泊松结构已在 [2, 命题 14] 中得到完整描述。因此，我们选择省略定理 12 的证明，并在每个所得结构的左侧标出其在 [2] 中的同构形式。

定理12. 设 char(F) $= 0$。那么，$T_2(F)$ 上的任意转置泊松代数结构都同构于以下结构中的且仅其中一个:

(i) 泊松型转置泊松代数结构：(a) $\mathrm{T}_{09}^{0,0}$：平凡结构;

(b) T_{17}^{0}：$e_{11} \cdot e_{11} = \delta$; (c) T_{10}^{0}：

$e_{11} \cdot e_{11} = -e_{11} \cdot e_{22} = e_{22} \cdot e_{22} = \delta$;

(ii) 转置泊松代数结构的正交和

$$e_{11} \cdot e_{11} = -e_{11} \cdot e_{22} = e_{22} \cdot e_{22} = e_{12}$$

具有泊松型转置泊松代数结构，由此得到以下结构:

(a) T_{16}：$e_{11} \cdot e_{11} = -e_{11} \cdot e_{22} = e_{22} \cdot e_{22} = e_{12}$; (b) T_{18}：

$e_{11} \cdot e_{11} = e_{12} + \delta$, $-e_{11} \cdot e_{22} = e_{22} \cdot e_{22} = e_{12}$; (c) T_{11}^{0}：

$e_{11} \cdot e_{11} = -e_{11} \cdot e_{22} = e_{22} \cdot e_{22} = e_{12} + \delta$;

(iii) th 该族转置泊松代数结构的（非正交）和

$$e_{11}\cdot e_{11}=ce_{11}, e_{11}\cdot e_{12}=-e_{12}\cdot e_{22}=ce_{12}, e_{11}\cdot e_{22}=-e_{22}\cdot e_{22}=ce_{22},\ c\neq 0,$$

具有泊松型的转置泊松代数结构，因此得到以下结构：

(a) T_{17}^{-c}: $e_{11}\cdot e_{11}=ce_{11}$, $e_{11}\cdot e_{12}=-e_{12}\cdot e_{22}=ce_{12}$, $e_{11}\cdot e_{22}=-e_{22}\cdot e_{22}=ce_{22}$; (b) $\mathrm{T}^{0}_{09}{}^{-c}$: $e_{11}\cdot e_{11}=ce_{11}$, $e_{11}\cdot e_{12}=-e_{12}\cdot e_{22}=ce_{12}$, $e_{11}\cdot e_{22}=ce_{22}$, $e_{22}\cdot e_{22}=-c(e_{22}+\delta)$;
(c) T_{19}^{-c}: $e_{11}\cdot e_{11}=ce_{11}$, $e_{11}\cdot e_{12}=-e_{12}\cdot e_{22}=ce_{12}$, $-e_{11}\cdot e_{22}=e_{22}\cdot e_{22}=ce_{11}$.

3. 全矩阵李代数上的转置泊松结构 A

本节简要介绍全矩阵代数 $M_n(F)$ 上的转置泊松结构。与前文一样，我们用 $e_{ij}, 1\leq i,j\leq n$ 表示矩阵单位，用 δ 表示单位矩阵。回顾一下，

$$\begin{aligned} Z(M_n(F)) &= \langle\delta\rangle,\\ [M_n(F),M_n(F)] &= \mathfrak{sl}_n(F)=\{a\in M_n(F)\mid \mathrm{tr}(a)=0\}\\ &= \langle e_{ij}\mid 1\leq i\neq j\leq n\rangle\oplus\langle e_{11}-e_{ii}\mid 1<i\leq n\rangle. \end{aligned}$$

用 $\Delta(M_n(F))$ 表示李代数 $(M_n(F)\ [\text{-},\cdot])$ 的 1 2-导子空间。线性映射γ: $M_n(F)\to M_n(F)$ 定义如下：

$$\gamma(e_{ij})=\begin{cases}\delta, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

作为一个消去 $[M_n(F)\ M_n(F)]$ 的线性映射 $M_n(F)\to Z(M_n(F))$，它属于 $\Delta(M_n(F))$。

命题 13. 设 $n>1$。则 $\Delta(M_n(F))=\langle\mathrm{id}\ \gamma\rangle$。

证明. 容易看出，作为李代数，$M_n(F)$ 是直和 $[M_n(F)\ M_n(F)]\oplus Z(M_n(F))$。也就是说，每个 $a\in M_n(F)$ 都能唯一分解为

$$a=\left(a-\frac{\mathrm{tr}(a)}{n}\delta\right)+\frac{\mathrm{tr}(a)}{n}\delta.$$

由于李代数的 1 2-导子保持 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 和 $Z(\mathfrak{L})$ 不变，我们有

$$\Delta(M_n(F))=\Delta([M_n(F),M_n(F)])\oplus\Delta(Z(M_n(F))).$$

根据 [5, 推论 3]，任意 $\varphi\in\Delta([M_n(F)\ M_n(F)])$都是平凡的。由于 $\dim(Z(M_n(F)))=1$，任意 $\varphi\in\Delta(Z(M_n(F)))$也都是平凡的。因此，给定 $\varphi\in\Delta(M_n(F))$，存在 $k_1,k_2\in F$使得$\varphi=k_1\cdot\mathrm{id}_{[M_n(F)\ M_n(F)]}+k_2\cdot\mathrm{id}_{Z(M_n(F))}$。显然，

$$\begin{aligned} &\varphi(e_{ij})=k_1e_{ij},\ \text{if } i\neq j,\\ &\varphi(e_{ii})=k_1\left(e_{ii}-\frac{1}{n}\delta\right)+\frac{k_2}{n}\delta=k_1e_{ii}+\frac{k_2-k_1}{n}\delta. \end{aligned}$$

由此可得 $\varphi = k_1 \cdot \mathrm{id}_{M_n(F)} + \frac{k_2-k_1}{n} \cdot \gamma$。因此， $\Delta(M_n(F)) \subseteq \langle \mathrm{id}\ \gamma \rangle$。反向包含是平凡的。□

定理 14. 设 $\mathrm{char}(F) = 0$ and $n > 1$. 那么，在同构意义下， $M_n(F)$ 上仅有一种非平凡的转置泊松代数结构。它由下式给出

$$e_{ii} \cdot e_{jj} = \delta,\ 1 \leq i, j \leq n, \tag{30}$$

且它是泊松型的。

证明. 设 $M_n(F)$ 上有一个转置泊松代数结构 $\cdot$。由命题 13 和引理 4，对于所有 $1 \leq i, j \leq n$，存在 x_{ij} 和 $y_{ij} \in F$，使得

$$e_{ij} \cdot e_{kl} = x_{ij}e_{kl} + y_{ij}\gamma(e_{kl}) = \begin{cases} x_{ij}e_{kl}, & k \neq l, \\ x_{ij}e_{kk} + y_{ij}\delta, & k = l. \end{cases}$$

设 $i \neq j$ 和 $1 \leq k \leq n$。则 $e_{kk} \cdot e_{ij} = x_{kk}e_{ij}$，而 $e_{ij} \cdot e_{kk} = x_{ij}e_{kk} + y_{ij}\delta$，因此

$$x_{kk} = 0 \text{ and } x_{ij} = y_{ij} = 0 \text{ for } i \neq j \text{ and } 1 \leq k \leq n.$$

由 $e_{ii} \cdot e_{jj} = y_{ii}\delta$ 和 $e_{jj} \cdot e_{ii} = y_{jj}\delta$ 可得

$$y_{ii} = y_{jj} \text{ for } 1 \leq i, j \leq n.$$

因此，记 y_{ii} 为 c，我们得到唯一可能非零的乘积

$$e_{ii} \cdot e_{jj} = c\delta,\ 1 \leq i, j \leq n.$$

如果 $c = 0$，那么 $\cdot$是平凡的。否则，选择由以下式子给出的（$M_n(F)$ $[\cdot, \cdot]$）的自同构 ϕ

$$\begin{aligned} \phi(e_{ij}) &= e_{ij}, \text{ if } i \neq j, \\ \phi(e_{ii}) &= e_{ii} - \frac{1}{n}\delta + \frac{c}{n}\delta = e_{ii} + \frac{c-1}{n}\delta, \end{aligned}$$

我们得到同构结构（30）。

还需证明 (30) 是泊松型。对于所有 a、$b \in M_n$（F），我们有

$$a \cdot b = \sum_{i,j=1}^{n} a(i,i)a(j,j)e_{ii} \cdot e_{jj} = \sum_{i,j=1}^{n} a(i,i)a(j,j)\delta = \mathrm{tr}(a)\mathrm{tr}(b)\delta = \frac{\mathrm{tr}(a)}{n}\delta \cdot \frac{\mathrm{tr}(b)}{n}\delta.$$

因此，$\cdot$ 是在 $[M_n(F)\ M_n(F)]$ 于 $M_n(F)$ 中的补空间 $Z(M_n(F))$ 上取值于 $Z(M_n(F))$ 的乘积的零延拓。□

注 15. 结构 (30) 同构于乘积 $\delta \cdot \delta = \delta$ 的零延拓。

参考文献

[1] Bai C.、Bai R.、Guo L.、Wu Y.，转置泊松代数、诺维科夫-泊松代数和 3-李代数，arXiv:2005.01110。[2] Beites P.、Fern´andez Ouaridi A.、Kaygorodov I.，转置泊松代数的代数分类与几何分类，《西班牙皇家精确、物理与自然科学院院刊》A辑《数学》，117（2023），2，55。[3] Beites P.、Ferreira B. L. M.、Kaygorodov I.，转置泊松结构，arXiv:2207.00281。[4] Ferreira B. L. M.、Kaygorodov I.、Lopatkin V.，李代数的1_2-导子与转置泊松代数，《西班牙皇家精确、物理与自然科学院院刊》A辑《数学》115（2021），3，142。[5] Filippov V.，李代数的 δ-导子，《西伯利亚数学杂志》，39（1998），6，1218–1230。[6] Jaworska-Pastuszak A.、Pogorzały Z.，典范代数的泊松结构，《几何与物理学杂志》，148（2020），103564。[7] Kaygorodov I.、Khrypchenko M.，有限关联代数上的泊松结构，《代数杂志》，578（2021），402–420。[8] Kaygorodov I.、Khrypchenko M.，Block李代数和超代数上的转置泊松结构，《线性代数及其应用》，656（2023），167–197。[9] Kaygorodov I.、Khrypchenko M.，Witt型代数上的转置泊松结构，《线性代数及其应用》，665（2023），196–210。[10] Kaygorodov I.、Khrypchenko M.，广义Witt代数和Block李代数上的转置泊松结构，arXiv:2302.00403[11] Kaygorodov I.、Lopatkin V.、Zhang Z.，伽利略李代数和可解李代数上的转置泊松结构，《几何与物理学杂志》，187（2023），104781。[12] Marcoux, L. W.、Sourour, A. R.，保持交换性的线性映射与三角矩阵代数的李自同构，《线性代数及其应用》，288（1999），第1–3期，89–104。[13] Yang Ya.、Tang X.、Khudoyberdiyev A.，$(n+1)$维时空上的薛定谔代数的转置泊松结构，arXiv:2303.08180[14] Yao Y.、Ye Y.、Zhang P.，箭图泊松代数，《代数杂志》，312（2007），2，570–589。[15] Yuan L.、Hua Q.，李代数上的1_2-（双）导子与转置泊松代数结构，《线性与多重线性代数》，70（2022），22，7672–7701。