arXiv:2305.00728v1 [math.AP] 1 May 2023

穿孔球中全非线性方程的主特征值与特征函数

Isabeau Birindelli 数学系，罗马第一大学数学系`a di Roma Fran¸coise Demengel D´数学系´ematiques, CY ParisUniversity Fabiana Leoni 数学系，罗马第一大学数学系`a di Roma

摘要

本文旨在证明在存在奇异势的情况下，穿孔球中一致椭圆全非线性方程的主特征值及相关特征函数的存在性。更具体地，我们分析方程解的存在性、唯一性和正则性¯（λ_γ， u_γ）

$$F(D^2u_\gamma)+\bar{\lambda}_\gamma\frac{u_\gamma}{r^\gamma}=0 \text{ in } B(0,1)\setminus\{0\},\ u_\gamma=0 \text{ on } \partial B(0,1)$$

其中 $u_\gamma>0$ 属于 B(0,1)，且 $\gamma>0$。我们证明，当 $\gamma<2$时，存在在 B(0,1) 上连续的径向解；当 $\gamma=2$ 时，存在无界解；并证明 $\gamma>2$时不存在解。此外，我们还给出了 Pucci 算子情况下 λ_2 的显式值，这推广了拉普拉斯算子的 Hardy–Sobolev 常数。

1 引言

本文将研究狄利克雷问题的径向特征值及相关的正径向特征函数

$$F(D^2u)+\mu r^{-\gamma}u=0 \text{ in } \overline{B(0,1)}\setminus\{0\}$$

其中 $\gamma>0$，且 F 是一个二阶完全非线性一致椭圆算子。径向特征值和径向特征函数分别指实数 λ_γ 和满足方程的非平凡径向函数 u_γ

$$\begin{cases} F(D^2u_\gamma)+\lambda_\gamma r^{-\gamma}u_\gamma=0 & \text{in } \overline{B(0,1)}\setminus\{0\} \\ u_\gamma=0 & \text{on } \partial B(0,1). \end{cases} \tag{1.1}$$

原则上，特征函数须在粘性意义下满足上述特征值问题；但由于径向对称性，这等价于考虑经典解。

我们将重点关注恒正或恒负的特征函数，尤其是正特征函数，因此讨论所谓的主特征值。如有必要，为了强调特征值对算子 F、出现在零阶项中的势函数 $f(r)$ 以及方程所考虑的定义域 Ω 的依赖关系，我们将使用记号 $\lambda=\lambda(F,f(r),\Omega)$。

有趣的是，我们将看到，对于问题 (1.1)，与 F 为拉普拉斯算子的情形一样， $\gamma = 2$ 是一个临界值：当 $\gamma < 2$ 时存在光滑特征函数；当 $\gamma > 2$ 时不存在特征函数；而当 $\gamma = 2$ 时，特征函数无界。

回顾一些 F 为拉普拉斯算子时的已知结果。在 $\gamma = 2$ 的情形下，该方程自然与 Hardy不等式相关。事实上，若 $N > 2$ 且 $\frac{u}{x} \in H_0^1$（$B(0,1)$）（分别地，若 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$），则 $\frac{u(x)}{|x|}$ 属于 $L^2(B(0,1))$（分别地，属于 $\frac{u}{(|x|} \in L^2)(\mathbb{R}^N)$），并且存在一个正常数 c 使得

$$\int \left(\frac{|u(x)|}{|x|} \right)^2 \leq c \int |\nabla u|^2.$$

此外，最佳常数 $c = \frac{4}{(N-2)^2}$ 无法取到，即

$$\inf_{u \in H_0^1(B(0,1)), \int_{B(0,1)} \left(\frac{|u(x)|}{|x|} \right)^2 = 1} \int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 = \frac{(N-2)^2}{4} \tag{1.2}$$

但不存在能使下确界取到的 $u \in H_0^1$。由显然的论证可知， $B(0,1)$ 可以替换为任何包含 0 的 $\mathbb{R}^N$ 有界正则开集，且最优常数与 Ω 的大小无关。注意，(1.2) 右端与方程的第一个（或主）特征值的变分刻画一致

$$-\Delta u = \lambda \frac{u}{|x|^2}.$$

关于 Hardy–Sobolev不等式的更多内容，以及 p-拉普拉斯算子的情形，请参见 [16, 19, 21]。

另一方面，若势函数的指数 γ 严格小于 2，由于 $H_0^1(B(0,1))$ 紧嵌入到加权空间 $L^2(B(0,1), \frac{1}{r^\gamma})$ 中，因此利用变分法中的直接法的标准论证，可以证明 $H_0^1(B(0,1))$ 中极小值的存在性。在这种情况下，记

$$\bar{\lambda}_\gamma = \inf_{u \in H_0^1(B(0,1)), \int_{B(0,1)} \frac{|u(x)|^2}{|x|^\gamma} = 1} \int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 \tag{1.3}$$

可以看出， λ_γ 也是方程的第一特征值

$$\Delta u + \bar{\lambda}_\gamma \frac{u}{r^\gamma} = 0\,,$$

这意味着 $\bar{\lambda}_\gamma$ 满足存在 $u > 0$ 属于 $H_0^1(B(0,1))$，使其满足方程。注意，根据其定义， λ_γ 取决于定义域，因为

$$\bar{\lambda}_\gamma(B(0,t)) = \frac{1}{t^{2-\gamma}} \bar{\lambda}_\gamma(B(0,1)).$$

若 $\gamma > 2$，则不存在从 $H_0^1(B(0,1))$ 到 $L^2(B(0,1), \frac{1}{r^\gamma})$ 的嵌入。事实上，例如，函数

$$u(r) = r^{-\frac{N-2}{2}+\epsilon}(-\log r)$$

其中 $0 < \epsilon < \frac{\gamma-2}{2}$ 属于 $H_0^1(B(0,1))$，并满足

$$\int_{B(0,1)} \frac{u(|x|)^2}{|x|^\gamma} = +\infty$$

关于变分线性情形的结果，可参阅许多作者的研究；我们尤其想提及 Cirstea 及其合作者的工作 [9, 11, 12, 10] 。

现在我们重点关注本文所讨论的情形，即 F 是一个全非线性一致椭圆算子，也就是说， F 是定义在对称 $N \times N$ 矩阵集合 $\mathcal{S}_N$ 上的连续函数，并且对于正常数 $\Lambda \geq \lambda > 0$，它满足

$$\lambda \operatorname{tr}(M') \leq F(M + M') - F(M) \leq \Lambda \operatorname{tr}(M'), \tag{1.4}$$

对所有 M、$M' \in \mathcal{S}_N$，只要 M' 为半正定矩阵，均成立。
我们还假设 F 是旋转不变的，也就是说

$$F(O^t M O) = F(M) \tag{1.5}$$

对于每个正交矩阵 O 以及所有 $M \in \mathcal{S}_N$，并且 F 是 1 次正齐次的，即

$$F(tM) = tF(M) \tag{1.6}$$

对于任意 $M \in \mathcal{S}_N$ 以及所有 $t > 0$。在这种情况下，我们将看到，与正则情形 $\gamma = 0$ 一样，问题 (1.1) 的第一特征值可以按照 [1], 的模式定义，即通过优化公式

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_\gamma &= \bar{\lambda}_\gamma(F, r^{-\gamma}, B(0,1) \setminus \{0\}) \\ &= \sup\{\mu : \exists u \in C(B(0,1) \setminus \{0\}),\ u > 0 \text{ in } B(0,1) \setminus \{0\},\ F(D^2 u) + \mu \tfrac{u}{r^\gamma} \leq 0\}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

其中，微分不等式是在粘性意义下理解的。
¯首先可以轻易观察到，通过考虑常数超解，总有 $\lambda_\gamma \geq 0$。¯本文的一个目标尤其是证明，对于 $\gamma \leq 2$，有 $\lambda_\gamma > 0$ 。
对于光滑系数和正则区域，全非线性算子的主特征值及相关特征函数已得到广泛研究。参见例如 [18, 2, 3, 4, 20]。

Pucci极值算子将发挥关键作用，我们将对其进行深入讨论。首先回顾其定义：将每个矩阵 $M \in \mathcal{S}_N$ 分解为 $M = M^+ - M^-$，其中 M^+和 M^-是满足 $M^+ M^- = O$的半正定矩阵，则 Pucci上确界算子可定义为

$$\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(M) = \Lambda \operatorname{tr}(M^+) - \lambda \operatorname{tr}(M^-),$$

同样，Pucci下确界算子定义为

$$\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M) = \lambda \operatorname{tr}(M^+) - \Lambda \operatorname{tr}(M^-) = -\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(-M).$$

众所周知，在假设 (1.4) 和 (1.6) 下，见 [8], ，每个算子 F 都满足

$$\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M) \leq F(M) \leq \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(M), \qquad \forall\, M \in \mathcal{S}_N, \tag{1.8}$$

这表明 Pucci 算子是具有相同椭圆性常数的整个一致椭圆算子类中的显式极值算子。下文中，我们将省略记号中对椭圆性常数的依赖；这些常数一经确定便保持不变。

我们还要回顾，对于一个 C^2 径向函数 $u(x) = u(|x|)$，有

$$D^2 u(x) = u''(r) \frac{x \otimes x}{r^2} + \frac{u'(r)}{r} \left(I - \frac{x \otimes x}{r^2} \right),$$

因此，

$$\mathcal{M}^+(D^2 u) = \Lambda(N-1) \left(\frac{u'(r)}{r} \right)^+ - \lambda(N-1) \left(\frac{u'(r)}{r} \right)^- + \Lambda (u''(r))^+ - \lambda (u''(r))^-,$$

$$\mathcal{M}^-(D^2u) = \lambda(N-1)\left(\frac{u'(r)}{r}\right)^+ - \Lambda(N-1)\left(\frac{u'(r)}{r}\right)^- + \lambda(u''(r))^+ - \Lambda(u''(r))^- .$$

因此，Pucci 极值方程的径向解所满足的常微分方程，其系数依赖于类似维数的参数，分别与 $\mathcal{M}^+$ 和 $\mathcal{M}^-$ 相关，定义为

$$\tilde{N}_+ = \frac{\lambda}{\Lambda}(N-1)+1\,, \quad \tilde{N}_- = \frac{\Lambda}{\lambda}(N-1)+1\,.$$

注意到，始终有

$$\tilde{N}_- \geq N \geq \tilde{N}_+\,,$$

˜等号成立当且仅当 $\Lambda = \lambda$。我们始终假设 $N_+ > 2$。现在可以陈述本文的主要结果。我们始终假设 F 满足假设 (1.4)、(1.5) 和 (1.6)。先考虑 $\gamma < 2$ 的情形。

定理 1.1. 假设 $\gamma < 2$。则：

¯(i) 式 (1.7) 中定义的 λ_γ 为正，并且存在一个函数 u，它在 $B(0,1)$ 上连续、径向对称，在 $B(0,1)$ 上严格为正，满足

$$\begin{cases} F(D^2u) + \bar{\lambda}_\gamma \frac{u}{r^\gamma} = 0 & in \;\; B(0,1)\setminus\{0\} \\ u = 0 & on \;\; \partial B(0,1) \end{cases}.$$

此外，u 是 $C^2(B(0,1)\setminus\{0\})$，并且当 $\gamma \leq 1$ 时，它可以延拓到 $B(0,1)$ 上成为 Lipschitz 连续函数；当 $\gamma < 1$ 时，它可以延拓为 $C^1(B(0,1))$ 类函数；当 $\gamma > 1$ 时，它可以延拓为指数为 $2-\gamma$ 的 H¨older 连续函数。

¯(ii) λ_γ 在各种正则逼近下保持稳定：

$$\bar{\lambda}_\gamma = \lim_{\epsilon\to 0} \bar{\lambda}(F, \frac{1}{(r^2+\epsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}}}, B(0,1))\,,$$

$$\bar{\lambda}_\gamma = \lim_{\delta\to 0} \bar{\lambda}(F, \frac{1}{r^\gamma}, B(0,1)\setminus\overline{B(0,\delta)})\,.$$

¯上述定理的命题 (i) 尤其表明，λ_γ 实际上可由光滑径向特征函数取得。因此，若我们定义

$$\bar{\lambda}'_\gamma := \sup\{\mu \,:\, \exists\, u \in C^2(B(0,1)\setminus\{0\})\,,\; u>0 \text{ in } B(0,1)\setminus\{0\},\; u \text{ radial},\;\; F(D^2u) + \mu\frac{u}{r^\gamma} \leq 0\}\,, \quad (1.9)$$

那么便可推出

$$\bar{\lambda}_\gamma = \bar{\lambda}'_\gamma.$$

¯实际上，我们将首先研究光滑特征值 λ'_γ，最后证明它与 $\bar{\lambda}_\gamma$一致。注意，由于系数函数 $\frac{1}{r^\gamma}$ 缺乏正则性，我们无法直接运用 [14] 的结果；这些结果保证了解

$$F(D^2u) + f(r)u = 0$$

当 f 为非增函数时，径向定义域中的解是径向的。尽管如此，我们将证明，对于任意 $\gamma \leq 2$，这两个特征值相同。然而，由于零点处存在奇异性，我们无法证明任何特征函数都是径向的。

定理 1.1 将在若干步骤和中间结果之后得到证明。特别是，我们将证明穿孔球中的光滑有界径向下解与上解的一个比较定理，¯而不对原点处作任何序条件假设。此外，我们将说明，对于 $\mu < \lambda_\gamma$，问题

$$\begin{cases} F(D^2u) + \mu u r^{-\gamma} = f(r) r^{-\gamma} & \text{in } B(0,1) \setminus \{0\} \\ u = 0 & \text{on } \partial B(0,1) \end{cases}$$

对于任意满足 $f \le 0$ 的径向连续数据$f \in B(0,1)$，存在唯一的径向解 $u \in C^2(B(0,1)\setminus\{0\}) \cap C(B(0,1))$。

接下来，对于 $\gamma = 2$ 的情形，我们有如下结果，其中给出了 Pucci 算子的特征值和特征函数的显式表达式。

定理 1.2. 假设 $\gamma = 2$。那么：

(i) 对于算子 $\mathcal{M}^+$，有

$$\bar{\lambda}_2(\mathcal{M}^+) = \Lambda \frac{(\tilde{N}_+ - 2)^2}{4}$$

-，且函数 $u(x) = r^{-\frac{N_+ - 2}{2}}(-\ln r)$ 是一个显式解

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+(D^2u) + \bar{\lambda}_2 \frac{u}{r^2} = 0 & in \ \ B(0,1) \setminus \{0\} \\ u = 0 & on \ \ \partial B(0,1) \end{cases}$$

类似地，对于算子 $\mathcal{M}^-$，有

$$\bar{\lambda}_2(\mathcal{M}^-) = \lambda \frac{(\tilde{N}_- - 2)^2}{4}$$

-且函数 $u(x) = r^{-\frac{N_- - 2}{2}}(-\ln r)$ 是一个显式解 马会。

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-(D^2u) + \bar{\lambda}_2 \frac{u}{r^2} = 0 & in \ \ B(0,1) \setminus \{0\} \\ u = 0 & on \ \ \partial B(0,1) \end{cases}$$

(ii) 特征值 $\bar{\lambda}_2(\mathcal{M}^\pm)$ 在各种正则化下是稳定的

$$\bar{\lambda}_2(\mathcal{M}^\pm) = \lim_{\gamma \to 2} \bar{\lambda}_\gamma(\mathcal{M}^\pm)$$

$$\bar{\lambda}_2(\mathcal{M}^\pm) = \lim_{\delta \to 0} \bar{\lambda}(\mathcal{M}^\pm, B(0,1) \setminus \overline{B(0,\delta)})$$

$$\bar{\lambda}_2(\mathcal{M}^\pm) = \lim_{\epsilon \to 0} \bar{\lambda}(\mathcal{M}^\pm, \frac{1}{(r^2 + \epsilon^2)})$$

(iii) 对于任何满足 (1.4) 和 (1.6) 的算子 F，有

$$\Lambda \frac{(\tilde{N}_+ - 2)^2}{4} \le \bar{\lambda}_2(F) \le \lambda \frac{(\tilde{N}_- - 2)^2}{4}.$$

我们注意到，对于一般算子 F，无法证明特征函数的存在性，只能给出上述陈述 (iii) 中特征值的估计。定理 1.2 将通过一种适用于全非线性径向框架的变分方法得到。事实上，我们将类似于 (1.3) 的方式，为算子 $\mathcal{M}^\pm$ 定义变分特征值，

并利用解的径向对称性。然后，定理 1.2 的完整陈述将¯作为在 $\gamma < 2$ 情形下针对 λ_γ 所建立性质以及变分表述在 $\gamma \to 2$时的稳定性的推论得到。

最后，对于情形 $\gamma > 2$，系数的奇异性过强，因此正的光滑上解无法存在，正如下述非存在性结果所述。

¯ ¯定理 1.3. 若 $\gamma > 2$，则由 (1.9) 定义的特征值 λ'_γ 满足 $\lambda'_\gamma = 0$。

我们注意到，对称地，也可以定义与负特征函数相关的特征值，令

$$\bar{\lambda}^-_\gamma = \sup\{\mu : \exists\, u \in C(B(0,1)\setminus\{0\}),\ u < 0 \text{ in } B(0,1),\quad F(D^2u) + \mu\frac{u}{r^\gamma} \geq 0\} = 0.$$

¯在这种情况下，对 λ^-_γ 稍作显而易见的修改，即可推广上述结果。

最后，在结束本引言时，我们注意到，对于半线性或拟线性方程，当零阶项含有经额外次线性或超线性项扰动的 Hardy 势时，已有许多关于存在性、非存在性和分类的结果。特别地，关于拉普拉斯算子的相关结果，请参见 [5, 6, 9, 22] ；关于 p-拉普拉斯算子的结果，请参见 [16] 。

在上述所有方向中，将 Δ 或 Δ_p 替换为非变分型全非线性算子的情形，将是未来研究的主题。

2 情形 $\gamma < 2$：定理 1.1 的证明

定理 1.1 将通过几个经典步骤得以证明：比较原理、存在性与正则性结果，以及低于第一特征值时的最大值原理。

2.1 最大值原理、存在性与正则性结果

本节的第一个结果是一个关键的技术引理。

引理 2.1. 设 $f \in C(B(0,1)\setminus\{0\})$ 是径向、有界且为正的函数，并假设 $u \in C^2(B(0,1)\setminus\{0\})$ 是满足下列条件的径向有界函数

$$\mathcal{M}^+(D^2u) \geq fr^{-\gamma} \qquad in\ B(0,1)\setminus\{0\}\,. \tag{2.1}$$

Then

(i) 在 0 的某个右邻域内；

(ii) $\lim_{r\to 0} u'(r)r^{N_- -1} = 0$ ，并且在 0 的某个右邻域内有

$$u'(r) \geq \frac{\inf f}{\Lambda(\tilde{N}_- - \gamma)} r^{1-\gamma}\,;$$

(iii) 此外，若 $\mathcal{M}^+(D^2u) = fr^{-\gamma}$，则在 0 的某个右邻域内还有

$$u'(r) \leq \frac{\sup f}{\lambda(N-\gamma)} r^{1-\gamma}\,.$$

特别地，存在常数 $c > 0$ ，使得当 r 充分小时，

$$|u'(r)| \leq cr^{1-\gamma}$$

于是，如果 $\gamma \leq 1$，则 u 在 $B(0,1)$ 中局部利普希茨连续；如果 $\gamma < 1$，则它属于 $C^1(B(0,1))$；如果 $\gamma > 1$，则它在 $B(0,1)$ 中局部 H ¨older 连续，指数为 $2-\gamma$。

证明。我们用反证法证明， u' 在 0 的某个右邻域内不变号。否则，存在一个收敛于 0 的递减序列 $\{r_n\}$，使得对所有 n，都有 $u'(r_n)=0$，且 $u'\le 0 \in]r_{2n+1},\ r_{2n}[, u'\ge 0 \in\ ]r_{2n+2},\ r_{2n+1}[$。由于 $u'(r_{2n})=u'(r_{2n+1})=0$，存在某个 $s_{2n}\in]r_{2n+1},\ r_{2n}[$，使得 $u''(s_{2n})=0$。由此得到矛盾

$$0\ge \lambda(N-1)\frac{u'(s_{2n})}{s_{2n}}=\mathcal{M}^+(D^2u(s_{2n}))\ge f(s_{2n})s_{2n}^{-\gamma}>0\,.$$

接下来，再次采用反证法，若 $u'(r)\le 0$ 对充分小的 r 成立，则由 (2.1) 可得 $u''(r)>0$，并且在 0 的某个右邻域内，

$$\mathcal{M}^+(D^2u)=\Lambda u''(r)+\lambda(N-1)\frac{u'(r)}{r}\ge f(r)r^{-\gamma}\,.$$

因此，

$$(u'(r)r^{\tilde{N}_+-1})'\ge \frac{fr^{\tilde{N}_+-1-\gamma}}{\Lambda}>0$$

~，特别地， $u'r^{N_+-1}$ 在 0 的某个右邻域内递增。因此，$\lim_{r\to 0}u'(r)r^{N_+-1}$ 存在，且小于或等于 0。若其小于 0，则对于某个常数 $l>0$，

$$u'(r)\le -lr^{1-\tilde{N}_+}$$

在 0 的某个右邻域内成立，从而与 u 的有界性矛盾。这表明 $\tilde{\lim}_{r\to 0}u'(r)r^{N_+-1}=0$，并且由单调性可知， $u'(r)>0$ 在 0 的某个右邻域内成立。由此得到的矛盾证明了命题 (i)。

为证明 (ii)，注意到对于充分小的 r，由 (2.1) 可知以下两种情况之一成立：

$$u''(r)+(N-1)\frac{u'(r)}{r}\ge\frac{f(r)r^{-\gamma}}{\Lambda}$$

若 $u''(r)\ge 0$，或

$$u''(r)+(\tilde{N}_--1)\frac{u'(r)}{r}\ge\frac{f(r)r^{-\gamma}}{\lambda}$$

~若 $u''(r)\le 0$。由于 $u'(r)\ge 0$ 且 $N_-\ge N$，在这两种情况下都有

$$u''(r)+(\tilde{N}_--1)\frac{u'(r)}{r}\ge\frac{f(r)r^{-\gamma}}{\Lambda}\,,$$

即

$$(u'r^{\tilde{N}_--1})'\ge\frac{f(r)r^{\tilde{N}_--1-\gamma}}{\Lambda}\ge\frac{\inf f}{\Lambda}r^{\tilde{N}_--1-\gamma}\,.$$

~按照上述论证，我们推得 $u'r^{N_--1}$ 在 0 的右邻域内递增，因此当 $r\to 0$时，它具有一个非负极限；由于 u 有界，该极限必为 0。此外，通过对上述不等式积分，我们得到

$$u'(r)\ge\frac{\inf f}{\Lambda(\tilde{N}_--\gamma)}r^{1-\gamma}\,.$$

最后来证明 (iii)。假设 $\mathcal{M}^+(D^2u)=f(r)r^{-\gamma}$，并利用命题 (i)，可得对于任意充分小的 $r>0$，以下两种情况必有一种成立：

$$u''(r)+(N-1)\frac{u'(r)}{r}=\frac{f(r)r^{-\gamma}}{\Lambda}$$

or

$$u''(r) + (\tilde{N}_- - 1)\frac{u'(r)}{r} = \frac{f(r)r^{-\gamma}}{\lambda}\,.$$

在这两种情况下，我们都可以推出

$$u''(r) + (N-1)\frac{u'(r)}{r} \le \frac{f(r)r^{-\gamma}}{\lambda}\,,$$

由此可得

$$(u'(r)r^{N-1})' \le \frac{f(r)}{\lambda}r^{N-1-\gamma} \le \frac{\sup f}{\lambda}r^{N-1-\gamma}\,.$$

因此， $u'(r)r^{N-1} - \frac{f}{\sup\lambda}(N-\gamma)r^{N-\gamma}$ 在 0 的某个右邻域内单调不增，且存在极限，当$r \to 0$时。由此可知， $u'(r)r^{N-1}$ 在 $r \to 0$ 时也存在极限，而由 u有界可知该极限为零。对最后一个不等式积分，最终可得

$$u'(r) \le \frac{\sup f}{\lambda(N-\gamma)}r^{1-\gamma}\,.$$

u 在零点处的正则性由估计式 $|u'(r)| \le cr^{1-\gamma}$ 得出。在其他位置，则由假设 $u \in C^2(B(0,1) \setminus \{0\})$ 得出。

□

注记 2.2. 通过变量代换 $v = -u$，可知若 $f \in C(B(0,1) \setminus \{0\})$ 是一个径向、有界且为正的函数，且 $u \in C^2(B(0,1) \setminus \{0\})$ 是一个有界径向函数，满足

$$\mathcal{M}^-(D^2u) \le -fr^{-\gamma} \quad \text{in } B(0,1)\setminus\{0\}\,,$$

˜于是，当 r 充分小时， $u'(r) \le 0$， $\lim_{r\to 0} u'(r)r^{N_- -1} = 0$ 且

$$u'(r) \le -\frac{\inf f}{\Lambda(\tilde{N}_- - \gamma)}r^{1-\gamma}\,.$$

此外，若 $\mathcal{M}^-(D^2u) = -fr^{-\gamma}$属于 $B(0,1) \setminus \{0\}$，则 $|u'(r)| \le cr^{1-\gamma}$，其中 c为正常数。因此，对于 $\gamma \le 1$, u 在 $B(0,1)$ 上局部利普希茨连续；若 $\gamma < 1$，它属于 $C^1(B(0,1))$；并且对于 $\gamma > 1$，它在 $B(0,1)$ 上具有指数为 $2-\gamma$的局部 H¨older 连续性。显然

，因为 $\mathcal{M}^- \le \mathcal{M}^+$, 当.....时，也可得到类似的结论

$$\mathcal{M}^+(D^2u) \le -fr^{-\gamma}.$$

现在，我们可以证明如下形式的一般径向全非线性奇异方程的比较原理

$$F(D^2u) - \beta ur^{-\gamma} = f(r)r^{-\gamma} \quad \text{in } B(0,1)\setminus\{0\}$$

且不假设原点处满足边界条件。

定理 2.3. 设 $f, g \in C(B(0,1))$ 为径向函数，并假设 $u, v \in C\left(B(0,1)\right) \cap C^2(B(0,1) \setminus \{0\})$ 为径向函数，且在 $B(0,1)$ 中满足 $\setminus\{0\}$

$$F(D^2u) - \beta u(r)r^{-\gamma} \ge f(r)r^{-\gamma}$$

$$F(D^2v) - \beta v(r)r^{-\gamma} \le g(r)r^{-\gamma}$$

其中 $\beta \ge 0$ 和 $f \ge g$ 属于 $B(0,1)$。那么， $u \le v$ 在 $\partial B(0,1)$ 上成立意味着 $u \le v$ 属于 $\overline{B(0,1)}$。

证明。我们先考虑 $\beta > 0$ 或 $f > g$ 属于 $B(0,1)$ 的情形。反设

$$\max_{\overline{B(0,1)}}(u-v) > 0\,.$$

若最大值在 0 处取得，则 $(u-v)(0) > 0$，并且根据关于 f、g 和 β 的假设，存在 $\delta > 0$ 以及 0 右侧的一个邻域，在该邻域上

$$(\beta(u(r)-v(r)) + f(r) - g(r))r^{-\gamma} \geq \delta r^{-\gamma} > 0$$

由 F 的一致椭圆性，对于充分小的 r，我们得到

$$\mathcal{M}^+(D^2(u-v)) \geq \delta r^{-\gamma}$$

对 $u-v$ 应用引理 2.1，可知存在某个正常数 c，使得 $(u-v)' \geq c\delta r^{1-\gamma}$，这与 $u-v$ 在 0 处取得最大值这一事实矛盾。因此，存在 $0 < \bar{r} < 1$，使得$u(\bar{r}) - v(\bar{r}) = \max(u-v)$。于是，$(D^2u - D^2v)(\bar{r}) \leq 0$，并且由椭圆性可得矛盾

$$(f(\bar{r}) + \beta u(\bar{r}))r^{-\gamma} \leq F(D^2u(\bar{r})) \leq F(D^2v(\bar{r})) \leq (g(\bar{r}) + \beta v(\bar{r}))r^{-\gamma}\,.$$

对于 $\beta = 0$ 和 $f \geq g$ 的情形，引入径向函数

$$w(r) = 1 - r^{\tau}$$

其中 $0 < \tau \leq 2-\gamma$。直接计算可得

$$\mathcal{M}^+(D^2w) \leq \tau\Lambda(|\tau-1| - (\tilde{N}_+ - 1))r^{\tau-2}\,.$$

˜我们注意到 $|\tau-1| < 1 < N_+ - 1$，因此

$$\mathcal{M}^+(D^2w) \leq -Cr^{-\gamma} \qquad \text{in } B(0,1)\setminus\{0\}$$

˜其中 $C = \tau\Lambda(N_+ - 1 - |\tau-1|) > 0$。因此，对任意 $\epsilon > 0$，我们有

$$F(D^2(u-\epsilon w)) \geq F(D^2u) - \epsilon\,\mathcal{M}^+(D^2w) \geq (f + \epsilon C)r^{-\gamma}\,.$$

由于 $f + \epsilon C > g$ 且 $u - \epsilon w = u \leq v$ 在 $\partial B(0,1)$ 上，前面的论证证明了

$$u - \epsilon w \leq v \qquad \text{in } \overline{B(0,1)}$$

令 $\epsilon \to 0$，即可得出结论。

□

注 2.4. 定理 2.3 的证明中引入的辅助函数表明，存在一个径向函数 $w \in C^2(B(0,1)\setminus\{0\})$，在 $B(0,1)\setminus\{0\}$ 中严格为正，使得

$$F(D^2w) \leq -cwr^{-\gamma} \qquad \text{in } B(0,1)\setminus\{0\}$$

¯ ¯其中 $c > 0$ 为常数。这证明了 $\lambda_\gamma(F) \geq \lambda'_\gamma(F) \geq c > 0$。

接下来，我们给出如下关于存在性、唯一性和正则性的结果。

定理 2.5. 设 $f \in C(B(0,1))$ 是一个径向有界函数。对于 $\beta \geq 0$ 和 $b \in \mathbb{R}$，存在唯一有界径向函数 $u \in C(B(0,1)\setminus\{0\}) \cap C^2(B(0,1)\setminus\{0\})$ 满足

$$\begin{cases} F(D^2u) - \beta u r^{-\gamma} = r^{-\gamma}f(r) & in \;\; B(0,1)\setminus\{0\} \\ u = b & on \;\; \partial B(0,1) \end{cases} \tag{2.2}$$

此外，u 可以延拓至$B(0,1)$，并且有：若 $\gamma < 1$，则 $u \in C^1(\overline{B(0,1)})$；若 $\gamma \leq 1$，则 u 在 $B(0,1)$上 Lipschitz 连续；若 $\gamma > 1$，则 u 在 $B(0,1)$上具有指数为 $2-\gamma$ 的 H ¨older 连续性。

证明。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，引入正则化狄利克雷边值问题

$$\begin{cases} F(D^2u_n) - \beta u_n (r^2+1/n)^{-\gamma/2} = (r^2+1/n)^{-\gamma/2} f(r) & \text{in } B(0,1) \\ u_n = b & \text{on } \partial B(0,1) \end{cases} \tag{2.3}$$

根据标准的粘性解理论，见 [13], ，可知其在 $u_n \in C(B(0,1))$ 中有唯一解。由 [14], 的对称性结果可知， u_n 是径向的，因此作为相应常微分方程的解， u_n 属于 $C^2(B(0,1))$。

对于 $0 < \tau \leq 2-\gamma$，考虑径向函数

$$w(r) = L(1-r^\tau) + b\,,$$

其中 $L > 0$ 是一个适当选取的常数。使用定理 2.3 的证明中相同的计算可得

$$\mathcal{M}^+(D^2w) \leq -L\,C r^{-\gamma} \leq -L\,C(r^2+1/n)^{-\gamma/2}\,,$$

进而，由一致椭圆性可知

$$F(D^2w) - \beta w r^{-\gamma} \leq (-L\,C + \beta b^-)(r^2+1/n)^{-\gamma/2} \leq f(r)(r^2+1/n)^{-\gamma/2}$$

只要 C 取得足够大即可。类似地，对于某个适当的正常数 L，函数 $-L(1-r^\tau) + b$ 是问题 (2.3) 的一个径向下解。

于是，标准的比较原理意味着序列 $\{u_n\}$ 在 $C(B(0,1))$ 中一致有界。因此，它在 $C^2(B(0,1)\setminus\{0\})$ 中局部一致有界，并且经过取子序列后，它在 $B(0,1)\setminus\{0\}$ 中局部一致收敛到问题 (2.2) 的一个径向解 u；该解是一个全局有界函数，属于 $C^2(B(0,1)\setminus\{0\})$。

现在我们证明，所构造的有界径向解 u 在整个球 $B(0,1)$ 内实际上是连续的。事实上，为证明 u 的存在性而采用的同一近似论证，特别也可用于证明狄利克雷问题存在一个有界径向解 $\bar{w}$

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+(D^2\bar{w}) = -(\|f\|_\infty + B + 1) r^{-\gamma} & \text{in } B(0,1)\setminus\{0\} \\ \bar{w} = u & \text{on } \partial B(0,1) \end{cases}$$

其中 $B > 0$ 是一个常数，使得在 $B(0,1)$ 中 $\beta|u| \leq B$。将引理 2.1 和注记 2.2 应用于 $\bar{w}$，可得

$$|\bar{w}'| \leq c r^{1-\gamma}$$

对某个 $c > 0$ 成立。因此，我们有

$$\mathcal{M}^+(D^2(u-\bar{w})) \geq F(D^2(u-\bar{w})) \geq F(D^2u) - \mathcal{M}^+(D^2\bar{w}) \geq r^{-\gamma} \qquad \text{in } B(0,1)\setminus\{0\}$$

a然后，由引理 2.1 (i)，在零的某个右邻域内有 $(u-\bar{w})'(r) \geq 0$. 因此 ,

$$u'(r) \geq -c r^{1-\gamma}$$

当 r 足够小时。类似地，我们有

$$\mathcal{M}^-(D^2(u+\bar{w})) \leq F(D^2(u+\bar{w})) \leq F(D^2u) + \mathcal{M}^+(D^2\bar{w}) \leq -r^{-\gamma} \qquad \text{in } B(0,1)\setminus\{0\}$$

由注记 2.2，这意味着

$$u'(r) \leq -\bar{w}' \leq c r^{1-\gamma}$$

当 r 足够小时。按照引理 2.1 的证明方法，根据估计 $|u'(r)| \leq c r^{1-\gamma}$ 当 r 充分小时，我们推得：若 $\gamma \leq 1$，则 u 在 $B(0,1)$ 上 Lipschitz 连续；若 $\gamma < 1$，则它属于 $C^1(B(0,1))$；若 $\gamma > 1$，则它在 $B(0,1)$ 上以 $2-\gamma$ 为指数满足 H¨older 连续。

我们注意到，上述论证表明，问题 (2.2) 的任意有界径向解在 $B(0,1)$ 上连续。结合定理 2.3，这意味着问题 (2.2) 存在唯一的有界径向解。

□

上述证明中使用的论证也给出了以下紧性结果。为清晰起见，我们将其单独陈述。

定理 2.6. 设 $\{u_n\}_n$ 是属于 $C^2(B(0,1)\setminus\{0\})$ 的径向函数一致有界序列，并满足

$$F(D^2u_n) = f_n r^{-\gamma} \qquad in\ B(0,1)\setminus\{0\}\,,$$

其中 $\{f_n\}_n$ 在 $B(0,1)\setminus\{0\}$ 上是径向、有界且连续的。若 $\{f_n\}$ 一致有界，则 $\{u_n\}_n$ 等度连续，因此在 $B(0,1)$ 中存在一致收敛的子序列。若 $\{f_n\}$ 一致收敛于 $f\in C(B(0,1))$，则存在一个子序列，使得 $\{u_n\}_n$ 一致收敛于径向解 $u\in C^2(B(0,1)\setminus\{0\})\cap C(B(0,1))$，且该解满足

$$F(D^2u) = r^{-\gamma} f \qquad in\ B(0,1)\setminus\{0\}\,.$$

在接下来的结果中，我们证明“光滑”特征值的若干性质

$$\bar\lambda'_\gamma := \sup\{\mu :\ \exists\, u\in C^2(B(0,1)\setminus\{0\})\,,\ u>0 \text{ in } B(0,1)\setminus\{0\},\ u \text{ radial},\ \ F(D^2u)+\mu\frac{u}{r^\gamma}\le 0\}\,.$$

在第 2.3 小节中，我们实际上将证明 $\lambda'_\gamma = \lambda_\gamma$。

首先证明，当值低于 λ'_γ 时，以下最大值原理成立。

定理 2.7. 设 $\mu<\bar\lambda'_\gamma$，并假设 $u\in C(B(0,1))\cap C^2(B(0,1)\setminus\{0\})$ 是一个满足以下条件的径向函数

$$F(D^2u)+\mu u r^{-\gamma}\ge 0 \qquad in\ \ B(0,1)\setminus\{0\}\,.$$

若 $u(1)\le 0$，则 $u\le 0$ 属于 $\overline{B(0,1)}$。

证明. 若 $\mu<0$，只需应用定理 2.3，并取 $v\equiv g\equiv f\equiv 0$。因此，不失一般性，我们可以假设 $\mu\ge 0$。

对于 $\mu'\in]\mu,\bar\lambda'_\gamma[$，令 $v\in C^2(B(0,1)\setminus\{0\})$ 为满足以下条件的径向函数

$$F(D^2v)+\mu' v r^{-\gamma}\le 0\,,\quad v>0 \qquad \text{in } B(0,1)\setminus\{0\}\,.$$

不妨设 $v>0$ 在 $\partial B(0,1)$ 上成立，例如可通过对 r 进行伸缩得到（这可能会稍微改变 μ'，但由连续性仍可假设 $\mu'\in]\mu,\lambda'_\gamma[$）。按照引理 2.1 的证明，由于 $\mathcal{M}^-(D^2v)+\mu' v r^{-\gamma}\le 0$，我们很容易得到 $v'(r)$ 在零附近符号恒定。反设 $v'(r)$ 在零的某个邻域内 ≥ 0，则 v 在 $B(0,1)\setminus\{0\}$ 内有界。因此，注记 2.2 适用，并推出当 r 足够小时，$v'(r)\le 0$：这便产生矛盾。这说明 $v'(r)$ 在 0 的某个邻域内 ≤ 0。

那么，存在两种可能的情况：要么 $\lim_{r\to 0} v(r) = +\infty$，要么 v 可在 $B(0,1)$ 上延拓为连续函数。在第一种情况下，应用标准比较原理，很容易证明对所有 $\epsilon>0$，都有 $u\le \epsilon v$ 在 $B(0,1)\setminus\{0\}$。在这种情况下，令 $\epsilon\to 0$，即可得到结论。另一方面，如果 v 在 $B(0,1)$ 上有界且连续，我们可以用反证法。假设 u 在 $B(0,1)$ 的某处为正，于是 $\frac{u}{v}$ 在 $B(0,1)$ 上取得正的最大值，且该最大值在 $B(0,1)$ 内某点处取得。对 v 乘以一个常数后，不妨设

$$\max_{B(0,1)}\frac{u}{v} = 1\,,$$

于是 $u(r) \le v(r)$。如果最大值在 0 处取得，则有 $u(0) = v(0) > 0$. 。由连续性可知，当 r 足够小时，有

$$\mathcal{M}^+(D^2(u-v)) \ge F(D^2u) - F(D^2v) \ge \frac{1}{2}(\mu' v(0) - \mu u(0)) r^{-\gamma} .$$

由于 $\mu' v(0) - \mu u(0) = (\mu' - \mu) v(0) > 0$，我们可以使用引理 2.1 (ii)，从而得到 $(u-v)'(r) > 0$在 0 的某个右邻域内成立。这与 $u - v$ 在零点取得最大值矛盾。因此，我们有 $1 = \max \frac{u}{v} > \frac{u}{v}(0)\,(0)$。我们选取 $\eta < 1$，使得 $\eta > \max\{\frac{\mu}{\mu'}, \frac{u}{v}(0)\,(0)\}$。那么，函数 $u - \eta v$ 在某个点 $0 < \bar{r} < 1$处取得正的最大值。由于 $D^2u(\bar{r}) \le \eta D^2 v(\bar{r})$，根据椭圆性并利用 (1.6)，我们得到

$$-\mu v(\bar{r}) \bar{r}^{-\gamma} \le -\mu u(\bar{r}) \bar{r}^{-\gamma} \le F(D^2u(\bar{r})) \le F(\eta D^2 v(\bar{r})) \le -\mu' \eta\, v(\bar{r}) \bar{r}^{-\gamma} ,$$

这就导出了矛盾 $\mu \ge \mu' \eta$。

□

下面的结果给出了低于特征值λ'_γ时解的存在性、唯一性和正则性。

定理 2.8. 设 f 是 $B(0,1)$ 中的径向连续函数，满足 $f \le 0$，且 f 不恒为零。那么，对于每个 $\mu < \bar{\lambda}'_\gamma$，都存在唯一一个有界径向函数 $u \in C^2(B(0,1)\setminus\{0\})$ 满足

$$\begin{cases} F(D^2u) + \mu u r^{-\gamma} = f(r) r^{-\gamma} & in\ B(0,1)\setminus\{0\} \\ u = 0 & on\ \partial B(0,1) \end{cases}$$

此外，如果 $\gamma \le 1$，则 u 可延拓为 $B(0,1)$ 中的严格为正连续函数，并且在 $B(0,1)$ 中 Lipschitz 连续；如果 $\gamma > 1$，则 $(2-\gamma)-$ 在 $B(0,1)$ 中 Hölder 连续。

证明. 与定理 2.7 的证明一样，不妨设 $\mu > 0$；否则，结论直接由定理 2.5 得出。 u 的唯一性由定理 2.7 得出。至于存在性，我们递归定义序列 $\{u_n\}_{n\ge 0}$ 如下：令

$$u_0 \equiv 0 ,$$

接着，利用定理 2.5，我们将 $u_{n+1} \in C^2(B(0,1)\setminus\{0\}) \cap C(B(0,1))$ 定义为以下方程的唯一有界径向解

$$\begin{cases} F(D^2u_{n+1}) = (f - \mu u_n) r^{-\gamma} & \text{in } B(0,1)\setminus\{0\} \\ u_{n+1} = 0 & \text{on } \partial B(0,1) \end{cases}$$

由定理 2.3 可知 $u_{n+1} \ge 0$，因此根据标准强最大值原理， $B(0,1)\setminus\{0\}$ 中的解严格为正，因为 f 并非恒等于零。特别地，对于所有 $n \ge 1$， u_n 都不恒等于零。再次应用定理 2.3 中的比较原理，我们还可推出 $u_{n+1} \ge u_n$。下面证明 $\{u_n\}_n$ 一致有界。若不然，令 $v_n = \|u_n\|_\infty{}^{-1} u_n$ 和 $k_n = \|u_{n+1}\|_\infty^{-1} \|u_n\|_\infty \le 1$，则可得 v_{n+1} 满足

$$\begin{cases} F(D^2v_{n+1}) = \left(\frac{f(r)}{\|u_{n+1}\|_\infty} - \mu k_n v_n(r)\right) r^{-\gamma} & \text{in } B(0,1)\setminus\{0\} \\ v_{n+1} = 0 & \text{on } \partial B(0,1) \end{cases}$$

由于 $\{v_n\}_n$ 一致有界，应用定理 2.6 后，我们可以提取一个仍记为 $\{v_n\}_n$ 的子序列，它一致收敛到满足以下条件的函数 $v \ge 0$

$$\begin{cases} F(D^2v) + \mu k v r^{-\gamma} = 0 & \text{in } B(0,1)\setminus\{0\} \\ v = 0 & \text{on } \partial B(0,1) \end{cases}$$

其中 $k \leq 1$ 是 $\{k_n\}_n$ 的某个收敛子序列的极限。由于 v 是径向解，因此有 $v \in C^2(B(0,1) \setminus \{0\})$; 又由于 $\mu k \leq \mu < \bar{\lambda}'_\gamma$，定理 2.7 得出 $v \leq 0$。因此，我们得到$v \equiv 0$，这与 $\|v\|_\infty = 1$ 矛盾。

我们已经得到 $\{u_n\}_n$ 有界，再次利用定理 2.6，可推得 $\{u_n\}$一致收敛到某个 u，它满足所需方程。由强最大值原理可知，$u > 0$ 在 $B(0,1) \setminus \{0\}$中。此外，由注记 2.2 可知，对于足够小的 $r > 0$，$u'(r) \leq 0$，这意味着 $u(0) > 0$。最后，u 的整体正则性由定理 2.5 得出。

□

We 现在可以证明，光滑特征值 λ'_γ 确实由光滑特征函数取得 .

定理 2.9。存在 $u \in C(B(0,1)) \cap C^2(\overline{B(0,1)} \setminus \{0\})$，其为径向函数，在 $B(0,1)$ 中严格为正，并且满足

$$\begin{cases} F(D^2u) + \bar{\lambda}'_\gamma u r^{-\gamma} = 0 & in\ B(0,1) \setminus \{0\} \\ u = 0 & on\ \partial B(0,1) \end{cases}$$

此外，在 $B(0,1)$ 中，当 $\gamma \leq 1$ 时，u 是 Lipschitz 连续的；若 $\gamma > 1$，则是具有指数 $2-\gamma$ 的 H ¨ol der 连续。

¯ ¯证明。我们考虑一个序列 $\{\lambda_n\}$，其中 $\lambda_n \to \lambda'_\gamma$ 且 $\lambda_n < \lambda'_\gamma$，并且对所有 n，由定理 2.8 给出的解 $u_n \in C(B(0,1)) \cap C^2(B(0,1) \setminus \{0\})$

$$F(D^2u_n) + \lambda_n u_n r^{-\gamma} = -r^{-\gamma}, \quad u_n(1) = 0\ .$$

我们断言正序列 $\{\|u_n\|_\infty\}_n$ 无界。事实上，反设 $\{u_n\}_n$ 一致有界，则利用定理 2.6，并在必要时取一个子序列，可得存在一个解 $u \in C(B(0,1)) \cap C^2(B(0,1) \setminus \{0\})$，$u \geq 0$，满足

$$F(D^2u) + \bar{\lambda}'_\gamma u r^{-\gamma} = -r^{-\gamma}, \quad u(1) = 0\,.$$

于是，仿照定理 2.8 的证明，我们推得 u 在 $B(0,1)$ 中严格为正，并取 $0 < \epsilon < \frac{1}{\|u\|_\infty}$，可知 u 满足

$$F(D^2u) + (\bar{\lambda}'_\gamma + \epsilon) u r^{-\gamma} \leq 0,$$

¯与 λ'_γ 的定义矛盾。因此，序列 $\{u_n\}_n$ 不一致有界。经过归一化并考虑一个子序列，令 $n \to \infty$，可得存在 $u \in C(B(0,1)) \cap C^2(B(0,1) \setminus \{0\})$，满足

$$F(D^2u) + \bar{\lambda}'_\gamma u r^{-\gamma} = 0,\ \text{in}\ B(0,1) \setminus \{0\}\ , u(1) = 0\ .$$

最后，通过类似于定理 2.8 证明中的论证，可得 u 在 $B(0,1)$ 中严格为正，且在 $B(0,1)$ 中具有整体正则性。

□

本节最后一个结果给出了定理 2.9 所得解在相差正乘法常数意义下的唯一性。

¯命题 2.10. 特征值 λ'_γ 是单的。

证明. 根据定理 2.9，存在一个有界特征函数 v。设 u 是另一个特征函数。我们定义 $\eta := \sup\{t > 0, tv < u\}$，或者等价地，$\frac{1}{\eta} = \sup_{B(0,1)\setminus\{0\}} \frac{v}{u}$。根据 Hopf 引理，将其应用于 $\partial B(0,1)$ 上的 u 和 v，可知该定义良好。于是，函数 $u - \eta v$ 在 $B(0,1) \setminus \{0\}$ 中非负，并且满足

$$\mathcal{M}^-(D^2(u - \eta v)) \le 0 \qquad \text{in } B(0,1) \setminus \{0\}.$$

若反设 $u - \eta v > 0$ 在 $B(0,1)\setminus\{0\}$中的某一点成立，那么由强最大值原理可知，$u - \eta v > 0$ 在整个 $B(0,1) \setminus \{0\}$ 中成立。
现在我们区分 $u(0)$有限或无穷的情形。
- 在 $u(0) = +\infty$的情形下，必有

$$\frac{1}{\eta} = \lim_{r\to 1} \frac{v}{u} = \frac{v'(1)}{u'(1)}$$

但这与 Hopf 引理矛盾。
- 若 $u(0) < \infty$，则有 $\frac{1}{\eta} = \lim_{r\to 1} \frac{v}{u} = \frac{v'(1)}{u'(1)}$ 或 $\frac{1}{\eta} = \frac{v(0)}{u(0)}$。这里的矛盾要么来自 Hopf 引理，要么来自注记 2.2；注记 2.2 给出，对于 $r > 0$ 充分小的情形，$(u - \eta v)'(r) \le 0$，因此 $u - \eta v$ 在零点不能有严格极小值。

T因此，我们已经证明所有特征函数都有界，且彼此成比例。

□

2.2 从 $\mathbb{R}^+$上的某个方程继承的特征值

本节假设 F 是 Pucci 算子之一。我们只考虑 $F = \mathcal{M}^+$的情形；对于 $F = \mathcal{M}^-$，所需的修改显而易见。

下面给出一种替代证明，证明与特征值λ_γ相关的径向特征函数的存在性。这里的思路是证明，在$(0, +\infty)$上定义的、与该方程的径向解相关的常微分方程存在整体解

$$\mathcal{M}^+(D^2u) = -\frac{u}{r^\gamma} \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

回　　想起，当且仅当 $u = u(r)$ i时，$u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$才是上述方程的径向解　　s a $C^2((0, +\infty))$ 二阶常微分方程的解

$$u'' = M_+\left(-\frac{(N-1)}{r}K_+(u') - \frac{u}{r^\gamma}\right) \qquad \text{in } (0, +\infty), \tag{2.4}$$

其中

$$K_+(s) = \begin{cases} \Lambda s & \text{if } s \ge 0 \\ \lambda s & \text{if } s < 0 \end{cases}, \qquad M_+(s) = \begin{cases} \frac{1}{\Lambda} s & \text{if } s \ge 0 \\ \frac{1}{\lambda} s & \text{if } s < 0 \end{cases}.$$

定理 2.11. 方程 (2.4) 存在一个全局解 $u \in C^2(0, +\infty))$，它可延拓为定义在 $[0, +\infty)$ 上的连续函数，并满足 $u(0) = 1$。此外，存在 $\bar{r} > 0$ 使得 $u(\bar{r}) = 0$，且 $u(r) > 0$，对任意 $0 \le r < \bar{r}$ 均成立。

证明。我们先证明 u 在零附近的局部存在性。我们区分 $\gamma < 1$ 和 $\gamma \ge 1$ 两种情况。

第一种情况：$\gamma < 1$
对于选定的固定 $r_0 > 0$，我们定义函数集

$$V_{r_0} = \{u \in C([0, r_0]) : |u(r) - 1| \le \frac{1}{2}, u(0) = 1\}.$$

对于 $u \in V_{r_0}$，我们定义

$$T(u)(r) := 1 - \int_0^r \frac{1}{\lambda s^{N-1}} \int_0^s u(t) t^{N-1-\gamma} dt ds.$$

我们固定 r_0，使得 $r_0^{2-\gamma} \leq \frac{\lambda}{(N-\gamma)(2-\gamma)3}$。那么，容易验证 T 将 V_{r_0} 映射到自身，并且它在其上是一个压缩映射。记 $u \in V_{r_0}$ 为其不动点。于是可得 u 满足

$$u'(r) = -\frac{1}{\lambda r^{N-1}} \int_0^r u(t) t^{N-1-\gamma} dt$$

以及

$$u'' = -\frac{u}{\lambda r^\gamma} - (N-1)\frac{u'}{r}.$$

因此，我们显然有 $u' \leq 0$；如果我们还证明 $u'' \leq 0$，那么 u 就是 $(0, r_0)$ 中方程 (2.4) 的一个解。注意到 $u' \leq 0$ 推出 $u \leq 1$，从而

$$u'(r) \geq -\frac{1}{\lambda r^{N-1}} \int_0^r t^{N-1-\gamma} dt = -\frac{r^{1-\gamma}}{\lambda(N-\gamma)}.$$

因此

$$u(r) \geq 1 - \frac{r^{2-\gamma}}{\lambda(2-\gamma)(N-\gamma)}, \tag{2.5}$$

这进一步推出

$$\begin{aligned} u'(r) &\leq -\frac{1}{\lambda r^{N-1}} \int_0^r (1 - \frac{t^{2-\gamma}}{\lambda(2-\gamma)(N-\gamma)}) t^{N-1-\gamma} dt \\ &= -\frac{r^{1-\gamma}}{\lambda(N-\gamma)} + \frac{r^{3-2\gamma}}{\lambda^2(2-\gamma)(N-\gamma)(N+2-2\gamma)} \\ &\leq -\frac{r^{1-\gamma}}{2\lambda(N-\gamma)} \end{aligned}$$

根据 r_0 的选取。因此，我们证明了

$$-\frac{r^{1-\gamma}}{\lambda(N-\gamma)} \leq u'(r) \leq -\frac{r^{1-\gamma}}{2\lambda(N-\gamma)} \tag{2.6}$$

由估计 (2.5) 和 (2.6)，我们进一步推得

$$\begin{aligned} u'' &= -\frac{u}{\lambda r^\gamma} - (N-1)\frac{u'}{r} \\ &\leq -\left(1 - \frac{r^{2-\gamma}}{\lambda(2-\gamma)(N-\gamma)}\right)\frac{r^{-\gamma}}{\lambda} + (N-1)\frac{r^{-\gamma}}{\lambda(N-\gamma)} \\ &= -\frac{(1-\gamma)r^{-\gamma}}{\lambda(N-\gamma)} + \frac{r^{2-2\gamma}}{\lambda^2(2-\gamma)(N-\gamma)} \\ &\leq -\frac{(1-\gamma)r^{-\gamma}}{2\lambda(N-\gamma)} \end{aligned}$$

若我们通过设定 r_0 $r_0^{2-\gamma} = \frac{\lambda}{(1-\gamma)(2-\gamma)3}$ 来固定，则根据对 r_0 的这一选择，我们可得 u 在 $(0, r_0]$ 中满足方程 (2.4)，并且 $u \in C^1([0, r_0])$。

第二种情况： $\gamma \geq 1$

在这种情况下，预计解 u 在零点附近是局部凸的。因此，对于 $v \in V_{r_0}$，我们定义映射

$$T(v)(r) = 1 - \int_0^r \frac{1}{\Lambda s^{\tilde{N}_+ - 1}} \int_0^s u(t) t^{\tilde{N}_+ - 1 - \gamma} dt\, ds$$

与前一种情况一样，容易验证，如果 $r_0^{2-\gamma} \leq \Lambda (N_+ - \gamma)(2-\gamma)$，那么 T 是 V_{r_0}上的压缩映射。设 $u \in V_{r_0}$ 为其不动点。于是有

$$u'(r) = -\frac{1}{\Lambda r^{\tilde{N}_+ - 1}} \int_0^r u(t) t^{\tilde{N}_+ - 1 - \gamma} dt$$

and

$$u'' = -\frac{(\tilde{N}_+ - 1)}{r} u' - \frac{u}{\Lambda r^\gamma}.$$

因此，为了证明 u 在 $(0, r_0]$ 中满足 (2.4)，只需证明 $u'' \geq 0$。通过使用类似于第一种情况中的自举论证，我们得到

$$-\frac{r^{1-\gamma}}{\Lambda(\tilde{N}_+ - \gamma)} \leq u' \leq -\frac{r^{1-\gamma}}{\Lambda(\tilde{N}_+ - \gamma)} + \frac{r^{3-2\gamma}}{\Lambda^2(\tilde{N}_+ - \gamma)(2-\gamma)(\tilde{N}_+ + 2 - 2\gamma)}$$

以及

$$1 - \frac{r^{2-\gamma}}{\Lambda(\tilde{N}_+ - \gamma)(2-\gamma)} \leq u \leq 1 - \frac{r^{2-\gamma}}{\Lambda(\tilde{N}_+ - \gamma)(2-\gamma)} + \frac{r^{4-2\gamma}}{2\Lambda^2(\tilde{N}_+ - \gamma)(2-\gamma)^2(\tilde{N}_+ + 2 - 2\gamma)}.$$

于是有

$$\begin{aligned} u''(r) &= -\frac{u}{\Lambda r^\gamma} - \frac{(\tilde{N}_+ - 1)}{r} u' \\ &\geq \frac{\gamma - 1}{\Lambda(\tilde{N}_+ - \gamma)} r^{-\gamma} + \frac{3 - 2\gamma}{\Lambda^2(\tilde{N}_+ - \gamma)(2-\gamma)(\tilde{N}_+ + 2 - 2\gamma)} r^{2-2\gamma} \\ &\quad - \frac{r^{4-3\gamma}}{2\Lambda^3(\tilde{N}_+ - \gamma)(2-\gamma)^2(\tilde{N}_+ + 2 - 2\gamma)} \end{aligned}$$

通过选取 r_0 使得

$$r_0^{2-\gamma} \leq \Lambda(3 - 2\gamma)(2 - \gamma)$$

无论如何，我们都得到 $u'' \geq 0 \in (0, r_0]$。

因此，方程 (2.4) 在 $(0, r_0]$ 内存在一个局部解 u，该解为正，并满足初始条件 $u(0) = 1$。通过观察函数 K_+ 和 M_+ 的 Lipschitz 连续性，并利用柯西–利普希茨定理，我们可以将解 u 延拓为 $(0, +\infty$ 内的全局解。

还需证明存在第一个点 $\bar{r}$，使得 $u(\bar{r}) = 0$ 且 $u(r) > 0$，其中 $0 \leq r < \bar{r}$。我们采用反证法，并假设对所有 $r \geq 0$ 都有 $u(r) > 0$。由于 u' 最初为负，若存在第一个点 $r_1 > 0$，使得 $u'(r_1) = 0$，则 $u''(r_1) \geq 0$。另一方面，由方程 (2.4) 可推得 $u''(r_1) < 0$，因为 $u(r_1) > 0$。因此，对所有 $r > 0$ 都有 $u'(r) < 0$。由 (2.4) 又可得，无论 u'' 的符号如何，均有

$$u'' + \frac{N-1}{r} u' \leq -\frac{u r^{-\gamma}}{\Lambda}.$$

受 [7] 和 [15], 的启发，我们引入函数

$$y(r) = \frac{u'(r)}{u(r)} r^{N-1},$$

因此，它为负，并且满足

$$y' \le -\frac{r^{N-1-\gamma}}{\Lambda} - \frac{y^2}{r^{N-1}}.$$

在某些 $r_1 > 0$ 和 r 之间积分，可得

$$y(r) + k(r) \le -c_1 r^{N-\gamma},$$

对于某些 $c_1 > 0$ 和 $k(r) = \int_{r_1}^{r} \frac{y^2(t)}{t^{N-1}}\, dt$。特别地，这推出 $y(r) \le -c_1 r^{N-\gamma}$，因此，当 r 足够大时，

$$k(r) \ge c_2 r^{N+2(1-\gamma)}. \tag{2.7}$$

另一方面，我们还有

$$k(r) \le -y(r),$$

也就是说

$$k(r) \le \sqrt{k'(r) r^{N-1}}$$

在（r, $+\infty$）上积分后，得到

$$k(r) \le (N-2) r^{N-2}. \tag{2.8}$$

由于 $N+2(1-\gamma) > N-2$，估计 (2.7) 和 (2.8) 导致矛盾，这表明所构造的解 u 不能在 $[0, +\infty)$ 中处处为正。

□

作为上述结果和定理 2.7 的直接推论，我们得到以下结论

推论 2.12。设 $\bar{r}$ 如定理 2.11 中所定义。则 $\bar{\lambda}'_\gamma(B(0,1) \setminus \{0\}) = \bar{r}^{\gamma-2}$。

注 2.13。我们注意到，与系数连续的方程情形一样，通过证明定理 2.11 中构造的解 u 的振荡行为，可以证明存在一列可数的径向特征值，见 [7] 和 [15]。

2.3 主特征值及相关特征函数的稳定性

本节的结果可作为推论，给出定理 1.1 的证明。我们先证明奇异势的 $\epsilon-$正则化具有稳定性。回顾一下，$r_\epsilon = (r^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}$和 $\bar{\lambda}^\epsilon_\gamma = \bar{\lambda}(F, \frac{1}{r^\gamma_\epsilon}, B(0,1))$。

定理 2.14. 有

$$\bar{\lambda}'_\gamma = \lim_{\epsilon \to 0} \bar{\lambda}^\epsilon_\gamma.$$

此外，如果 $\{u_\epsilon\}$是与特征值 λ^ϵ_γ 相关联且满足 $u_\epsilon(0) = 1$ 的特征函数序列，那么可以从 $\{u_\epsilon\}$ 中提取一个子序列，该子序列在 $B(0,1)$ 上一致收敛于与 λ'_γ 相关联的特征函数，且该特征函数在零点处取值为 1。

证明。设 $\{u_\epsilon\}$ 为陈述中的序列。那么，每个 u_ϵ 都是 $B(0,1)$ 上的光滑正函数，特别满足分分彩

$$F(D^2u_\epsilon) + \bar{\lambda}^\epsilon_\gamma \frac{u_\epsilon}{r^\gamma} \geq 0 \quad \text{in } B(0,1)\setminus\{0\}\,,$$

因此，根据定理 2.7，有 $\lambda^\epsilon_\gamma \geq \lambda'_\gamma$。此外，序列 $\{\lambda^\epsilon_\gamma\}$ 关于 ϵ 单调递增。因此，我们推得

$$\mu := \lim_{\epsilon\to 0} \bar{\lambda}^\epsilon_\gamma \geq \bar{\lambda}'_\gamma\,.$$

另一方面，根据椭圆方程径向对称解的单调性性质，我们知道，对于 $r\in[0,1]$, $u'_\epsilon(r) \leq 0$。由于

$$\mathcal{M}^+(D^2u_\epsilon) \geq F(D^2u_\epsilon)$$

我们推得，无论 $u''_\epsilon(r)$ 的符号如何，都有

$$u''_\epsilon + (\tilde{N}_+ - 1)\frac{u'_\epsilon}{r} \geq -\frac{\bar{\lambda}^\epsilon_\gamma}{\lambda} u_\epsilon r_\epsilon^{-\gamma}\,.$$

这意味着

$$(u'_\epsilon r^{\tilde{N}_+-1})' \geq -\frac{\bar{\lambda}^\epsilon_\gamma}{\lambda} u_\epsilon \frac{r^{\tilde{N}_+-1}}{r_\epsilon^\gamma} \geq -\frac{\bar{\lambda}^\epsilon_\gamma}{\lambda} r^{\tilde{N}_+-1-\gamma}\,,$$

因此，通过积分，

$$0 \geq u'_\epsilon(r) \geq -\frac{\bar{\lambda}^\epsilon_\gamma}{\lambda(\tilde{N}_+-\gamma)} r^{1-\gamma}\,.$$

因此，在 $B(0,1)$ 上，如果 $\gamma\leq 1$，函数 u_ϵ 一致 Lipschitz 连续；如果 $\gamma>1$，则一致 $(2-\gamma)$–Hölder 连续。在这两种情况下，取一个子序列后，$\{u_\epsilon\}$ 一致收敛于连续径向函数 $u\in C(B(0,1))$，该函数满足 $u(0)=1$ 并且

$$F(D^2u) + \mu\frac{u}{r^\gamma} = 0.$$

因此，u 是 $C^2(B(0,1)\setminus\{0\})$，并且根据标准的强最大值原理，$u$ 在 $B(0,1)$ 中严格为正。由定义可得 $\mu\leq\lambda'_\gamma$。因此，$\mu=\lambda'_\gamma$，结论由命题 2.10 得出。

□

作为前一定理的推论，我们最终得到以下

推论 2.15。可得

$$\bar{\lambda}_\gamma = \lim_{\delta\to 0}\bar{\lambda}_\gamma\left(B(0,1)\setminus\overline{B(0,\delta)}\right) = \bar{\lambda}'_\gamma\,.$$

证明。我们注意到，函数 $\delta\mapsto\lambda_\gamma(B(0,1)\setminus B(0,\delta))$ 单调递增。此外，根据它们各自的定义，我们有

$$\bar{\lambda}'_\gamma \leq \bar{\lambda}_\gamma \leq \bar{\lambda}_\gamma\left(B(0,1)\setminus B(0,\delta)\right) \qquad \text{for all } \delta\geq 0\,.$$

另一方面，根据定理 2.14，对于任意 $\eta>0$，都存在 $\epsilon_0>0$ 使得

$$\bar{\lambda}^{\epsilon_0}_\gamma \leq \bar{\lambda}'_\gamma + \frac{\eta}{2}\,.$$

此外，利用正则系数方程的主特征值关于定义域的连续性，存在 $\delta_0 > 0$ 使得

$$\bar{\lambda}_\gamma^{\epsilon_0}(B(0,1)) \setminus B(0,\delta_0)) \leq \bar{\lambda}_\gamma^{\epsilon_0} + \frac{\eta}{2} \leq \bar{\lambda}'_\gamma + \eta\,.$$

现在，由于当 ϵ趋于零时， $\epsilon \mapsto \lambda_\gamma^\epsilon(B(0,1)) \setminus B(0,\delta_0))$ 递减，因此可得

$$\bar{\lambda}_\gamma\left(B(0,1) \setminus B(0,\delta_0)\right) \leq \bar{\lambda}_\gamma^{\epsilon_0}\left(B(0,1)\right) \setminus B(0,\delta_0)) \leq \bar{\lambda}'_\gamma + \eta\,,$$

由此得出结论。

□

3 $\gamma = 2$ = 2 的情形：定理 1.2 的证明。

本节旨在给出定理 1.2 的证明。
首先回顾一下，在半线性情形中，带有反平方势的拉普拉斯算子的特征值可以通过变分方法定义，即考虑如下极小化问题

$$\bar{\lambda}_2(\Delta) := \inf_{\substack{u \in H_0^1(B(0,1)) \\ \int_{B(0,1)} \frac{u^2}{|x|^2} dx = 1}} \int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 dx.$$

在这种情形下，有

$$\bar{\lambda}_2(\Delta) = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2.$$

事实上，一方面，根据 Hardy 不等式，每个函数 $u \in H_0^1(B(0,1)$ 都满足

$$\int_{B(0,1)} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq \left(\frac{2}{N-2}\right)^2 \int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 dx$$

于是

$$\bar{\lambda}_2(\Delta) \geq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2.$$

另一方面，对于每个 $\epsilon > 0$，函数 $u_\epsilon(r) = r^{-\frac{N-2}{2}+\epsilon}(-\log r)$ 属于 $H_0^1(B(0,1))$，并满足

$$\int_{B(0,1)} |\nabla u_\epsilon|^2 = \left[\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 + \epsilon^2\right] \int_{B(0,1)} \frac{|u_\epsilon|^2}{|x|^2} dx\,,$$

因此

$$\bar{\lambda}_2(\Delta) \leq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 + \epsilon^2\,, \qquad \forall\, \epsilon > 0\,.$$

众所周知，定义 $\lambda_2(\Delta)$ 的下确界无法取到，也就是说，狄利克雷问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \bar{\lambda}_2(\Delta)\frac{u}{r^2} & \text{in } B(0,1) \\ u = 0 & \text{on } \partial B(0,1) \end{cases}$$

不存在有限能量解 $u \in H_0^1(B(0,1))$。

对于 Pucci 算子，在全非线性框架下也可以采用一种变分方法。下文中，我们考虑算子 $\mathcal{M}^+$；对于算子 $\mathcal{M}^-$，只需进行相应的显然修改。

我们引入函数空间

$$\mathcal{V} = \left\{ u \in C^2([0,1]) \,:\, u'(0) = 0\,,\ \mathrm{supp}(u) \text{ compact in } [0,1) \right\}\,,$$

并赋予其范数

$$\|u\| = \left(\int_0^1 |u'|^2 r^{\tilde{N}_+ - 1} dr \right)^{1/2}\,,$$

并记 $\mathcal{H}_0^1$ 为 $\mathcal{V}$ 的闭包。于是，对于所有 $\gamma \le 2$，我们可以考虑最小值问题

$$\bar{\lambda}_{\gamma,var} := \inf_{\substack{u \in \mathcal{H}_0^1 \\ \int_0^1 u^2 r^{\tilde{N}_+ - 1 - \gamma} dr = 1}} \int_0^1 |u'|^2 r^{\tilde{N}_+ - 1} dr\,.$$

在接下来的结果中，我们将联系两个值 $\bar{\lambda}_\gamma(\mathcal{M}^+)$ 和 $\bar{\lambda}_{\gamma,\ var}$，并研究它们在 $\gamma \to 2$ 时的渐近行为。

定理 3.1。其中有

$$\bar{\lambda}_{2,var} = \left(\frac{\tilde{N}_+ - 2}{2} \right)^2\,.$$

证明：对于任意 $\epsilon > 0$，令 $u_\epsilon(r) = r^{-\frac{N_+ - 2}{2} + \epsilon}(-\log r)$。于是，容易验证 $u_\epsilon \in \mathcal{H}_0^1$，并且通过直接计算可得

$$\int_0^1 |u_\epsilon'|^2 r^{\tilde{N}_+ - 1} dr = \left[\left(\frac{\tilde{N}_+ - 2}{2} \right)^2 + \epsilon^2 \right] \int_0^1 u_\epsilon^2 r^{\tilde{N}_+ - 3} dr\,,$$

因此

$$\bar{\lambda}_{2,var} \le \left(\frac{\tilde{N}_+ - 2}{2} \right)^2 + \epsilon^2\,, \qquad \forall\, \epsilon > 0\,.$$

另一方面，我们注意到，函数 $u = r^{-\frac{N_+ - 2}{2}}(-\log r)$ 满足，对于 $r > 0$ ，

$$u'' + (\tilde{N}_+ - 1)\frac{u'}{r} = -\left(\frac{\tilde{N}_+ - 2}{2} \right)^2 u r^{-2}.$$

将上式乘以 $\frac{v^2}{u} r^{\tilde{N}_+ - 1}$，其中 $v \in \mathcal{V}$ 任意固定。由于 $\tilde{N}_+ > 2$，我们有 $\frac{u' r^{N_+ - 1}}{u}$ 在 $r \to 0$时趋于零。因此，分部积分可得

$$-\left(\frac{\tilde{N}_+ - 2}{2} \right)^2 \int_0^1 v^2 r^{\tilde{N}_+ - 3} dr = \int_0^1 \left(\frac{u'}{u} v - v' \right)^2 r^{\tilde{N}_+ - 1} dr - \int_0^1 (v')^2 r^{\tilde{N}_+ - 1} dr\,,$$

由 $v \in \mathcal{V}$ 的任意性可得，

$$\bar{\lambda}_{2,var} \ge \left(\frac{\tilde{N}_+ - 2}{2} \right)^2\,.$$

□

为了建立 $\lambda_{\gamma,\ var}$ 与 λ_γ 之间的关系，我们需要研究在 $\lambda_{\gamma,\ var}$ 的定义中使下确界取到的函数 u 的单调性和凸性。

命题 3.2. 设 $1<\gamma<2$，并假设 $u_\gamma\in\mathcal{H}_0^1$（其中 $u_\gamma\geq 0$）实现了定义$\bar{\lambda}_{\gamma的var}$的下确界。则，$u_\gamma\in C^2$（$0,1]$）有界，$u_\gamma'\leq 0$ 且 $u_\gamma''\geq 0$ 属于 (0, 1)。

证明。由于 u_γ 是最小值，对于任意 $v\in\mathcal{H}_0^1$ 都有

$$\int_0^1 u_\gamma' v' r^{\tilde{N}_+-1}=\bar{\lambda}_{\gamma,var}\int_0^1 u_\gamma v r^{\tilde{N}_+-1-\gamma}.$$

特别地，u_γ 在分布意义下满足

$$-\left(u_\gamma' r^{\tilde{N}_+-1}\right)'=\bar{\lambda}_{\gamma,var}u_\gamma r^{\tilde{N}_+-1-\gamma} \tag{3.1}$$

根据正则性理论，这意味着 u_γ 属于 C^2（$0,1]$），在 (0, 1) 中严格为正，并且满足 $u_\gamma(1)=0$。我们来证明 u_γ 有界，并且可以将其延拓为 $[0,1]$上的连续函数。事实上，将方程 (3.1) 乘以一个光滑函数 $v\in C^2$（$[0,1]$），该函数在 $[0,1$ 中具有紧支集并满足 $v(0)\neq 0$，然后在 $[\epsilon,1]$ 上对 $\epsilon>0$进行积分，可得

$$\bar{\lambda}_{\gamma,var}\int_\epsilon^1 u_\gamma(r)r^{\tilde{N}_+-1-\gamma}v(r)\,dr=\int_\epsilon^1 u_\gamma'(r)r^{\tilde{N}_+-1}v'(r)\,dr+u_\gamma'(\epsilon)\epsilon^{\tilde{N}_+-1}v(\epsilon)\,.$$

令 ϵ 趋于零，我们推出 $\lim_{\epsilon\to 0}u_\gamma'(\epsilon)\epsilon^{N_+-1}=0$。于是再次由 (3.1) 可得$u_\gamma'(r)\leq 0$，并且存在某个正常数 c_0 使得

$$u_\gamma'(r)\geq -c_0\,r^{1-\tilde{N}_+}\qquad \text{for } r\in(0,1]\,.$$

这意味着

$$u_\gamma(r)=-\int_r^1 u_\gamma'(s)\,ds\leq c_0\int_r^1 s^{1-\tilde{N}_+}ds\leq d_0 r^{2-\tilde{N}_+}$$

与 $d_0=\frac{c_0}{\tilde{N}_+-2}>0$，进而得到

$$u_\gamma'(r)r^{\tilde{N}_+-1}=-\bar{\lambda}_{\gamma,var}\int_0^r u_\gamma(s)s^{\tilde{N}_+-1-\gamma}ds\geq -\bar{\lambda}_{\gamma,var}\,d_0\int_0^r s^{1-\gamma}ds=-c_1 r^{2-\gamma}\,.$$

因此，我们有

$$u_\gamma'(r)\geq -c_1\,r^{1-\tilde{N}_++2-\gamma}$$

然后，

$$u_\gamma(r)\leq d_1 r^{2-\tilde{N}_++2-\gamma}\,.$$

迭代上述不等式，我们得到，对于所有满足 $2-N_++j(2-\gamma)<0$ 的整数 $j\geq 0$，存在正常数 c_j 和 d_j 满足

$$u_\gamma'(r)\geq -c_j\,r^{1-\tilde{N}_++j(2-\gamma)}\,,\quad u_\gamma(r)\leq d_j r^{2-\tilde{N}_++j(2-\gamma)}\,. \tag{3.2}$$

现在，如果存在 $j\in\mathbb{N}$ 使得 $2-\tilde{N}_++j(2-\gamma)=0$，即如果 $\frac{N_+-2}{2-\gamma}\in\mathbb{N}$，那么通过对在第（$j-1$）步得到的估计进行积分，我们得到

$$u_\gamma'(r)\geq -c_j\,r^{-1}\,,\quad u_\gamma(r)\leq d_j\,(-\ln r)\,.$$

再次积分后，我们最终推得

$$u'_\gamma(r) \geq -c_{j+1}(-\ln r)r^{1-\gamma} \Longrightarrow u_\gamma(r) \leq d_{j+1} = \frac{c_{j+1}}{(2-\gamma)^2}\,.$$

另一方面，如果 $\frac{\tilde{N}_+-2}{2-\gamma}$ 不是整数，通过对 $j = \left[\frac{\tilde{N}_+-2}{2-\gamma}\right]$ 的估计 (3.2) 进行积分，我们得到

$$u'_\gamma(r) \geq -c_{j+1}r^{1-\tilde{N}_++(j+1)(2-\gamma)} \Longrightarrow u_\gamma(r) \leq d_{j+1} = \frac{c_{j+1}}{2-\tilde{N}_++(j+1)(2-\gamma)}\,.$$

这表明，无论如何， u_γ 都是有界的。
最后证明 $u''_\gamma \geq 0$。我们引入函数

$$y_\gamma(r) := (\tilde{N}_+ - 1)u'_\gamma(r) + \bar{\lambda}_{\gamma,var}r^{1-\gamma}u_\gamma(r)\,,$$

该函数验证了 $y_\gamma = -ru''_\gamma$。因此，我们需要证明对于 $r \in (0,1]$， $y_\gamma(r) \leq 0$。简单计算可得

$$y'_\gamma(r) + (\tilde{N}_+ - 1)\frac{y_\gamma(r)}{r} = \bar{\lambda}_{\gamma,var}\left(u'_\gamma(r)r^{1-\gamma} + (1-\gamma)u_\gamma(r)r^{-\gamma}\right) \leq 0\,,$$

从而

$$(y_\gamma(r)r^{\tilde{N}_+-1})' \leq 0\,.$$

由于 $-c_0r^{1-\gamma} \leq u'_\gamma(r) \leq 0$ 且 u_γ 有界，我们推 deduce that $y_\gamma(r)r^{N_+-1} \to 0$ 当 $r \to 0$。因此，$y_\gamma(r) \leq 0$ 对于 $r > 0$。

□

推论 3.3。令 $\gamma \in]1,2[$。那么

$$\bar{\lambda}_\gamma(\mathcal{M}^+) = \Lambda\,\bar{\lambda}_{\gamma,var}\,.$$

证明。容易证明，定义 $\lambda_{\gamma,\ var}$ 的下确界可在 $1 < \gamma < 2$处取得。因此，存在 $v_\gamma \in \mathcal{H}^1_0$，可假设其在 $[0,1)$ 中为正，并且它在 (0, 1) 上满足

$$\Lambda v''_\gamma + \lambda\frac{N-1}{r}v'_\gamma = -\Lambda\,\bar{\lambda}_{\gamma,var}v_\gamma r^{-\gamma}.$$

由命题 3.2 可知， v_γ 有界， $v'_\gamma \leq 0$ 且 $v''_\gamma \geq 0$，因此 v_γ 满足

$$\mathcal{M}^+(D^2v_\gamma) + \Lambda\,\bar{\lambda}_{\gamma,var}v_\gamma r^{-\gamma} = 0 \quad \text{in } B(0,1)\setminus\{0\}\,.$$

根据定义，进而可得 $\bar{\lambda}_\gamma(\mathcal{M}^+) = \bar{\lambda}'_\gamma(\mathcal{M}^+) \geq \Lambda\,\bar{\lambda}_{\gamma,\ var}$。此外，通过分析边界条件并利用正则性，可知 $v_\gamma(1) = 0$ 在经典意义下成立。若反设 $\Lambda\,\bar{\lambda}_{\gamma,\ var} < \bar{\lambda}'_\gamma(\mathcal{M}^+)$，则定理 2.7 将推出 $v_\gamma \leq 0$ 在 $B(0,1)$ 中成立，这与之矛盾。

□

推论 3.4. 有

$$\lim_{\gamma\to 2}\bar{\lambda}_\gamma(\mathcal{M}^+) = \Lambda\left(\frac{\tilde{N}_+-2}{2}\right)^2\,.$$

证明。根据定理 3.1 和推论 3.3，只需证明 $\lambda_{\gamma,\ var} \to \lambda_{2,\ var}$ 当 $\gamma \to 2$ 时。
首先注意到，根据它们各自的定义，$\lambda_{2,\ var} \le \lambda_{\gamma,\ var}$。另一方面，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $v \in \mathcal{H}_0^1$ 使得

$$\int_0^1 |v'|^2 r^{\tilde{N}_+ - 1} dr \le (\bar{\lambda}_{2,var} + \epsilon) \int_0^1 |v|^2 r^{\tilde{N}_+ - 3} dr \,.$$

此外，存在 γ_0 充分接近 2，使得对于 $\gamma \ge \gamma_0$，

$$\int_0^1 |v|^2 r^{\tilde{N}_+ - 1 - \gamma} dr \ge (1 - \epsilon) \int_0^1 |v|^2 r^{\tilde{N}_+ - 3} dr \,.$$

因此，有

$$\int_0^1 |v'|^2 r^{\tilde{N}_+ - 1} dr \le (\bar{\lambda}_{2,var} + \epsilon)(1 - \epsilon)^{-1} \int_0^1 |v|^2 r^{\tilde{N}_+ - 1 - \gamma} dr$$

从而得到

$$\bar{\lambda}_{\gamma,var} \le (\bar{\lambda}_{2,var} + \epsilon)(1 - \epsilon)^{-1} \,.$$

□

现在我们可以证明定理 1.2 的命题 (i)。

定理 3.5。有

$$\bar{\lambda}_2(\mathcal{M}^+) = \Lambda \left(\frac{\tilde{N}_+ - 2}{2} \right)^2$$

且函数 $u(r) = r^{-\frac{N_+ - 2}{2}}(-\ln r)$ 是以下方程的显式解

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+(D^2 u) + \bar{\lambda}_\gamma \frac{u}{r^\gamma} = 0 & in \ \ B(0,1) \setminus \{0\} \\ u = 0 & on \ \ \partial B(0,1) \end{cases}$$

证明。对于任意正常数 c_1 和 c_2，考虑函数

$$u(r) = r^{-\frac{\tilde{N}_+ - 2}{2}}(c_1(-\ln r) + c_2). \tag{3.3}$$

通过类似于定理 3.1 证明中的简单计算，可得

$$\mathcal{M}^+(D^2 u) + \Lambda \left(\frac{\tilde{N}_+ - 2}{2} \right)^2 \frac{u}{r^2} = 0 \quad \text{in } B(0,1) \setminus \{0\} \,.$$

根据定义，这给出

$$\bar{\lambda}_2(\mathcal{M}^+) \ge \Lambda \left(\frac{\tilde{N}_+ - 2}{2} \right)^2 .$$

另一方面，注意到对所有 $\gamma \le 2$，都有 $\lambda_\gamma \ge \lambda_2$，并利用推论 3.4，我们还得到

$$\bar{\lambda}_2(\mathcal{M}^+) \le \lim_{\gamma \to 2} \bar{\lambda}_\gamma(\mathcal{M}^+) = \Lambda \left(\frac{\tilde{N}_+ - 2}{2} \right)^2 .$$

□

由推论 3.4 和定理 3.5 可知，我们立即得到定理 1.2-(ii) 中所述的 $\bar{\lambda}_2(\mathcal{M}^+)$ 的第一个稳定性性质。其余稳定性性质由以下结果给出。

推论 3.6。对于算子 $F = \mathcal{M}^{\pm}$，有

$$\lim_{\delta\to 0} \bar{\lambda}_2(B(0,1) \setminus \overline{B(0,\delta)}) = \bar{\lambda}_2 = \lim_{\epsilon\to 0} \bar{\lambda}_2^{\epsilon}\,.$$

证明。我们注意到

$$\bar{\lambda}_2(B(0,1) \setminus \overline{B(0,\delta)}) \geq \bar{\lambda}_2$$

，并且 $\lambda_2(B(0,1) \setminus \overline{B(0,\delta)})$ 关于 δ 单调递减。因此，

$$\lim_{\delta\to 0} \bar{\lambda}_2(B(0,1) \setminus \overline{B(0,\delta)}) \geq \bar{\lambda}_2.$$

为了证明反向不等式，我们可以将定理 3.5 与推论 3.4 结合使用，并应用推论 2.15。事实上，对于任意 $\eta > 0$，令 $\gamma_0 < 2$ 满足：对所有 $\gamma_0 \leq \gamma < 2$，都有

$$\bar{\lambda}_2 \geq \bar{\lambda}_\gamma - \eta\,.$$

此外，令 $\delta_0 = \delta(\gamma,\eta)$ 满足：对任意 $\delta < \delta_0$，

$$\bar{\lambda}_\gamma(B(0,1) \setminus \overline{B(0,\delta)}) \leq \bar{\lambda}_\gamma + \eta\,.$$

于是可得

$$\bar{\lambda}_2 \geq \bar{\lambda}_\gamma(B(0,1) \setminus \overline{B(0,\delta)}) - 2\eta \geq \bar{\lambda}_2(B(0,1) \setminus \overline{B(0,\delta)}) - 2\eta\,.$$

关于 $\lim \lambda_2^{\xi}$ 的断言可用定理 2.14 以同样的方式证明。

□

为了完成定理 1.2 的证明，只需注意到命题 (iii) 由命题 (i)、$\lambda_2(F)$ 的定义以及椭圆性不等式 (1.8) 立即得出。

4 $\gamma > 2$ 的情形：定理 1.3 的证明

本节专门用于证明定理 1.3。反设，对于 $\gamma > 2$，存在正的径向函数 $u \in C^2(B(0,1) \setminus \{0\})$，满足

$$\mathcal{M}^-(D^2u) \leq -\mu u r^{-\gamma} \quad \text{in } B(0,1)\setminus\{0\}\,,$$

对某个 $\mu > 0$ 成立。

那么，仿照引理 2.1 的证明可知，$u'(r)$ 在零点右侧的某个邻域内符号恒定。若当 r 足够小时，$u'(r) \geq 0$，则由方程可得 $u''(r) \leq 0$，于是有

$$(u' r^{\tilde{N}_+ - 1})' \leq -\frac{\mu u r^{\tilde{N}_+ - 1 - \gamma}}{\Lambda}\,.$$

这意味着，对于 $r \to 0$，$u' r^{N_+ - 1}$ 有一个非负极限；如果该极限严格为正，那么当 $r \to 0$时，u 会变得很大且为负，这就产生了矛盾。因此，该极限为零。接着，由上述不等式可得 $u'(r) r^{N-1} < 0$，再次产生矛盾。因此，当$r > 0$ 充分小时，我们有 $u'(r) \leq 0$。然后我们注意到，无论 u'' 的符号如何，都有

$$u'' + (\tilde{N}_- - 1)\frac{u'}{r} \leq -\frac{\mu}{\Lambda} u\, r^{-\gamma}\,.$$

因此，

$$(u' r^{\tilde{N}_- - 1})' \le -\frac{\mu}{\Lambda} u\, r^{\tilde{N}_- - 1 - \gamma} < 0\,, \tag{4.1}$$

于是 $u'(r) r^{N_- - 1}$ 在 $r \to 0$ 时的极限非正。若该极限严格为负，则在零点的某个邻域内有 $u'(r) r^{N_- - 1} \le -c < 0$。于是我们得到

$$u(r) \ge c_1 r^{2 - \tilde{N}_-}$$

当 r 充分小时，且 c_1 为正时。因此，通过对 (4.1) 在 r 与充分小的 $s > r$ 之间积分，我们可得

$$-u'(s) s^{\tilde{N}_- - 1} + u'(r) r^{\tilde{N}_- - 1} \ge c_2 \int_r^s t^{1-\gamma} dt = c_2 \frac{s^{2-\gamma} - r^{2-\gamma}}{2 - \gamma}$$

并且，由于 $\gamma > 2$，可得当 r 充分小时，$u'(r) > 0$：这就产生了矛盾。
因此，有 $\lim_{r\to 0} u' r^{\tilde{N}_- - 1} = 0$ 并且，由 (4.1) 可得，当 $r > 0$ 时，$u'(r) < 0$。
接下来，通过与命题 3.2 的证明中所用方法类似的归纳论证，我们证明：对于满足 $N_- - 2 + j(2-\gamma) > 0$ 的所有整数 $j \ge 0$，当 r 充分小时，存在某个 $c_j > 0$，使得

$$u(r) \ge c_j r^{j(2-\gamma)}. \tag{4.2}$$

事实上，对于 $j = 0$，(4.2) 成立，因为 $u' < 0$ 和 u 为正。设 (4.2) 对 j 成立，且 $N_- - 2 + (j+1)(2-\gamma) > 0$。那么，由 (4.1) 可得，

$$-u'(r) r^{\tilde{N}_- - 1} \ge \frac{\mu}{\Lambda} c_j \int_0^r s^{\tilde{N}_- - 1 + j(2-\gamma) - \gamma} ds = \frac{\mu}{\Lambda} \frac{c_j}{\tilde{N}_- - 2 + (j+1)(2-\gamma)} r^{\tilde{N}_- - 2 + (j+1)(2-\gamma)}\,,$$

对其积分后，得到 $j+1$ 的 (4.2)。
现在，假设 $\frac{\tilde{N}_- - 2}{\gamma - 2}$ 不是整数。然后，将估计式 (4.2) 与 $j = \left[\frac{\tilde{N}_- - 2}{\gamma - 2}\right]$ 一起使用，并结合 (4.1)，我们可推出对于 $r_0 > r > 0$

$$-u'(r_0) r_0^{\tilde{N}_- - 1} + u'(r) r^{\tilde{N}_- - 1} \ge \frac{\mu\, c_j}{\Lambda \left(\tilde{N}_- - 2 + (j+1)(2-\gamma)\right)} \left(s^{\tilde{N}_- - 2 + (j+1)(2-\gamma)} \Big|_r^{r_0} \right.\,.$$

由于 $N_- - 2 + (j+1)(2-\gamma) < 0$，这便导致矛盾：

$$\lim_{r\to 0} u'(r) r^{\tilde{N}_- - 1} = +\infty\,.$$

另一方面，若 $\frac{N_- - 2}{\gamma - 2} = j + 1$ 是整数，则 $\tilde{N}_- - 2 + j(2-\gamma) = \gamma - 2 > 0$，由 (4.2) 可得

$$u(r) \ge c_j r^{\gamma - \tilde{N}_-}\,,$$

因此

$$u(r) r^{\tilde{N}_- - 1 - \gamma} \ge c_j r^{-1}\,.$$

由（4.1）可得，对于 $0 < r < r_0$,

$$-u'(r_0) r_0^{\tilde{N}_- - 1} + u'(r) r^{\tilde{N}_- - 1} \ge \frac{\mu\, c_j}{\Lambda} (\ln r_0 - \ln r)$$

于是，在这种情况下，我们同样得到了矛盾

$$\lim_{r\to 0} u'(r) r^{\tilde{N}_- - 1} = +\infty\,.$$

参考文献

[1] H. Berestycki, L. Nirenberg, S.R.S. Varadhan, 《一般定义域中二阶椭圆算子的主特征值与最大值原理》, Comm. Pure Appl. Math. 47 (1) (1994), 47–92.[2] I. Birindelli, F. Demengel, 《全非线性齐次算子的特征值、最大值原理与正则性》, Commun. Pure Appl. Anal. 6 (2007), 335–366.[3] I. Birindelli, F. Demengel, 《奇异全非线性算子的第一特征函数的正则性与唯一性》, J. Differential Equations 249 (2010), 1089–1110.[4] I. Birindelli, F. Leoni, F. Pacella, 《全非线性方程粘性解的对称性与谱性质》, J. Math. Pures Appl. 107 (2017), 409–428.[5] L. Boccardo, L. Orsina, 《具有奇异势的次线性椭圆方程》, Advanced Non- linear Studies 12 (2) (2012), 187–198.[6] L. Boccardo, L. Orsina, I. Peral.《关于涉及 Hardy 势的椭圆问题解的存在性与最优可和性的一点说明》, Discrete Contin. Dyn. Syst. 16 (3) (2006), 513–523.[7] J. Busca, M. Esteban, A. Quaas, 《Pucci算子的非线性特征值与分岔问题》, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire 22 (2) (2005), 187–206.[8] X. Cabr´e, L. Caffarelli, 《全非线性椭圆方程》, American Mathematical Society Colloquium Publications vol. 43, 1995.[9] F.C. Cirstea, 《具有反平方势的非线性椭圆方程孤立奇点的完整分类》, Memoirs of AMS, vol. 227 (1068), 2014.[10] F.C. Cirstea, N. Chaudhuri, 《与 Hardy-Sobolev算子相关的正奇异解的三分性》, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (3-4) (2009), 153–158.[11] F.C. Cirstea, Y. Du, 《加权拟线性椭圆方程的孤立奇点》, Journal of Functional Analysis 259 (1) (2010), 174–202.[12] F.C. Cirstea, Y. Du, 《半线性椭圆方程解在孤立奇点附近的渐近行为》, Journal of Functional Analysis 250 (2) (2007), 317–346.[13] M.G. Crandall, H. Ishii, P.L. Lions, 《二阶偏微分方程粘性解指南》, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27 (1) (1992), 1–67.[14] F. Da Lio, B. Sirakov, 《一致椭圆全非线性方程粘性解的对称性结果》, J. Eur. Math. Soc. 9 (2) (2007), 317–330.[15] F. Demengel, 《径向情形下全非线性奇异或退化算子的广义特征值》, Adv. Differential Equations 14 (11-12) (2009), 1127–1154.[16] J.P. Garcia Azorero, I. Peral, 《Hardy不等式及若干临界椭圆与抛物问题》, J. Differential Equations 144 (1998), 441–476.[17] G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, 《不等式》, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1934.[18] H. Ishii, Y. Yoshimura, 《一致椭圆 Isaacs算子的半特征值》, 预印本。

[19] I. Peral、F. Soria，《涉及 Hardy-Leray 势的椭圆与抛物型方程》，柏林、波士顿：De Gruyter，2021年。[20] A. Quaas、B. Sirakov，《全非线性椭圆算子的主特征值与狄利克雷问题》，Adv. Math. 218 (2008年)，105–135。[21] G. Stampachia，《系数不连续的二阶椭圆方程的狄利克雷问题》，Annales Inst. Fourier（格勒诺布尔）15 (1965年)，189–258。[22] L. Wei、Y. Du，《具有 Hardy 势的非线性椭圆方程正解的精确奇异行为》，J. Differential Equations 262 (2017年)，3864–3886。