《离散数学》、算法与应用 © World Scientific PublishingCompany

arXiv:2305.00730v1 [cs.DM] 1 May 2023

# 三重与四重罗马支配的整数线性规划公式。

萨纳特·库马尔·文加尔达斯*Computer Science and Engineering, National Institute of Technology, WarangalTelangana, India vengal_851907@student.nitw.ac.in*阿达什·雷迪·穆蒂亚拉 *Computer Science and Engineering, National Institute of Technology, Warangal Telangana, India muthya_911905@student.nitw.ac.in*巴拉特·柴坦尼亚·孔卡蒂 *Computer Science and Engineering, National Institute of Technology, Warangal Telangana, India konkat_851950@student.nitw.ac.in*P. 文卡塔·苏巴·雷迪 *Computer Science and Engineering, National Institute of Technology, Warangal Telangana, India pvsr@nitw.ac.in*

收稿日期：2023年3月13日

罗马支配是图论中一个研究充分的主题。近年来，为了提供更好的防御策略，人们提出了罗马支配的两种新变体，即三重罗马支配和四重罗马支配问题。然而，三重罗马支配和四重罗马支配问题都是NP难的。本文提出了一种用于求解三重罗马支配和四重罗马支配问题的遗传算法，并提出了这两类问题的整数线性规划（ILP）公式。所提出的模型使用IBM CPLEX 22.1优化求解器实现，并针对使用NetworkX Erd˝os-R´enyi模型生成的随机图获得了结果。

*Keywords*：支配集；罗马支配数；三重罗马支配；四重罗马支配；整数线性规划。

数学主题分类：05C69，68Q25

## 1. 引言

所考虑的图 $G(V, E)$ 是无向、连通且简单的。令 $V(G)$ 表示顶点集， $E(G)$ 表示图 $G$ 的边集。 $N(v)$ 表示开

邻域，即顶点 $v$ 的邻域， $N(v) = \{u \mid (u,v) \in E\}$ 且 $N(v) \cup \{v\}$ 表示顶点 $v$ 的闭邻域 $N[v]$ 。

图 $G$ 上的函数 $f: V \to \{0,1\}$ 若满足以下条件：对于每个顶点 $v \in V$，若 $f(v) = 0$，则 $v$ 有一个邻点 $u$，使得 $f(u) = 1$，则称其为 $G$ 的支配函数。支配数（$\gamma(G)$）是赋予 $G$ 所有顶点的 $f$ 值之和的最小可能值。支配问题的优化版本是NP难问题，而判定版本是NP完全问题 [7]。

基于保卫罗马帝国的防御策略，罗马支配的概念于 2004 [5],[12],[13] 年提出。强大邻国的一个军团可能会击退对任何邻近且未设防城市的突然入侵；如果调动军团会使其原驻城市失去防御能力，则不得调动该军团。若图 $G$ 上的函数 $f: V \to \{0,1,2\}$ 满足：对于每个顶点 $v \in V$，要么 $f(v) \in \{1,2\}$，要么在 $f(v) = 0$ 时，该顶点至少有一个邻点 $u$ ，使得 $f(u) = 2$，则称其为罗马支配函数。罗马支配数（$\gamma_R(G)$）是赋予 $G$ 所有顶点的 $f$ 值之和的最小可能值。罗马支配问题的优化版本是NP难问题 [11]。

双重罗马支配在 [2]中被引入，作为弱罗马支配和罗马支配的强化版本。图$G$上的函数 $f: V \to \{0,1,2,3\}$ 称为双罗马支配函数，若满足以下条件：对于每个顶点 $v \in V$，若 $f(v) = 0$，则顶点 $v$ 必须至少有一个邻点$u$ 满足 $f(u) = 3$，或者在 $f$ 下至少有两个邻点被赋值为 2；若 $f(v) = 1$，则 $v$必须至少有一个邻点 $w$ 满足 $f(w) \geq 2$。双重罗马支配数 $\gamma_{dR}(G)$ 是图 $G$ 所有顶点的 $f$ 值之和的最小可能值。

在 [1], 中引入了三重罗马支配问题，因为正如 [2]中所述，双重罗马支配问题在某些情况下效率不高。图 $G = (V, E)$上的函数$f: V \to \{0,1,2,3,4\}$ 称为三重罗马支配函数（$3RDF$），若满足以下条件：对于每个顶点 $v \in V$，若$f(v) = 0$ ，则 $v$ 必须在 $f$ 下至少有三个邻点被赋值为 2，或者有两个邻点 $u$、$w$分别满足 $f(u) \geq 2$和 $f(w) = 3$，或者有一个邻点 $z$满足 $f(z) = 4$；若 $f(v) = 1$ ，则顶点 $v$ 必须在 $f$ 下至少有两个邻点被赋值为 2，或者至少有一个邻点 $w$ 满足 $f(w) \geq 3$ ；若 $f(v) = 2$，则顶点 $v$ 必须至少有一个邻点 $w$ 满足 $f(w) \geq 2$。三重罗马支配函数的权重是函数 $f$ 在所有顶点上的取值之和。图 $G$ 的三重罗马支配数$\gamma_{3R}(G)$是所有可能的三重罗马支配函数中的最小权重。确定图 $G$ 的 $\gamma_{3R}(G)$称为三重罗马支配问题（M3RDP）。对于二分图和弦图，三重罗马支配问题M3RDP是NP难的 [1]。

如果函数 $f: V \to \{0,1,2,3,4,5\}$ 定义在图 $G = (V, E)$ 上，并满足以下条件，则称其为四重罗马支配函数（4RDF）：对每个顶点 $v \in V$，若 $f(v) = 0$，则 $v$必须至少有一个邻接顶点 $u$满足 $f(u) = 5$，或有两个顶点 $u, w$满足 $f(u) = 4$且 $f(w) \geq 2$，或至少有两个顶点满足 $f(u) \geq 3$，或至少有四个顶点满足 $f(u) = 2$，或有两个顶点

满足 $f(u) = 2$，且有一个顶点满足 $f(u) = 3$；若 $f(v) = 1$，则顶点 $v$必须至少有一个邻点 $u$满足 $f(u) \geq 4$，或至少有两个顶点 $u, w$满足$f(u) = 3$且 $f(w) \geq 2$，或至少有三个顶点满足 $f(u) = 2$；若 $f(v) = 2$，则顶点 $v$必须至少有一个邻点 $u$满足 $f(u) \geq 3$，或至少有两个顶点满足$f(u) = 2$；若 $f(v) = 3$，则它必须至少有一个邻点 $u$满足 $f(u) \geq 2$。4RDF 的权重是函数 $f$ 在所有顶点上的取值之和。图 $G$ ($\gamma_{4R}(G)$) 的四重罗马支配数是所有可能的 4RDF 中的最小权重。对于图 $G$，确定 $\gamma_{4R}(G)$ 称为四重罗马支配问题（M4RDP）。在全文中，$\gamma_{3R}$-函数指图 $G$ 上权重为 $\gamma_{3R}(G)$ 的任意三重罗马支配函数。同理定义 $\gamma_{4R}$-函数。

一般而言，图 $G$ 的 $[k]$-罗马支配函数（$k$RDF）也在 [1] 中讨论，它是一个映射 $f$: $V \to \{0, 1, 2, 3, \ldots, k+1\}$，满足每个顶点$u \in V$ $for$ $which$ $f(u) \leq k$都应满足以下条件。

$$h(AN[u]) \geq |AN(u)| + k$$

这里，$AN(u) = \{z: z \in N(u)$，且 $f(v) \neq 0\}$、$AN[u] = AN(u) \cap \{u\}$和 $|AN(u)|$表示 $AN(u)$的基数。 $k$RDF的权重为 $\sum_{u \in V} f(u)$。该图 $G$的$[k]$-罗马支配数$\gamma_{[kR]}(G)$是所有 $k$RDF中的最小权重。

受本文中针对不同支配问题 [4] [8] [9] [10], 提出的整数线性规划（ILP）公式的启发，我们为M3RDP和M4RDP问题提出了不同的ILP公式。所提出的模型使用IBM CPLEX 22.1优化求解器实现，并获得了使用NetworkX Erd˝os-R´enyi模型生成的随机图的结果；该模型是广泛使用的随机图生成模型 [3] [6]。

## 2. 三重罗马支配问题的整数线性规划公式

本节讨论针对 M3RDP 提出的整数线性规划公式。

### 2.1. M3RDP-1

这是 M3RDP 的一个非常基础的整数线性规划公式，我们为每个顶点 $v$ 指定了四个决策变量（$p_v$、$q_v$、$r_v$、$s_v$），其定义如下

$$p_v = \begin{cases} 1, f(v) = 1. \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases} \quad q_v = \begin{cases} 1, f(v) = 2. \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases} \quad r_v = \begin{cases} 1, f(v) = 3. \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$s_v = \begin{cases} 1, f(v) = 4. \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases} \quad t_v = \begin{cases} 1, \sum\limits_{u \in N(v)} q_u \geq 1 \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases} \quad x_v = \begin{cases} 1, \sum\limits_{u \in N(v)} r_u \geq 1 \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases}$$

下面给出了 M3RDP 的整数线性规划公式:

$$Minimize \qquad \sum_{v \in V} p_v + \sum_{v \in V} 2q_v + \sum_{v \in V} 3r_v + \sum_{v \in V} 4s_v \tag{2.1a}$$

满足以下条件

$$p_v + q_v + r_v + s_v + \sum_{u \in N(v)} s_u + \frac{1}{3} \sum_{u \in N(v)} q_u + \frac{1}{2}(t_v + x_v) \geq 1 \tag{2.1b}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{u \in N(v)} q_u + \sum_{u \in N(v)} (s_u + r_u) \geq p_v \tag{2.1c}$$

$$\sum_{u \in N(v)} (q_u + r_u + s_u) \geq q_v \tag{2.1d}$$

$$p_v + q_v + r_v + s_v \leq 1 \tag{2.1e}$$

$$p_v, q_v, r_v, s_v, t_v, x_v \in \{0, 1\} \tag{2.1f}$$

如我们所见，决策变量的数量为 $4|V|$ ($p_v, q_v, r_v, s_v$)，约束的数量为 $5|V|$。

约束 (1a) 给出了目标函数值，该值也是三重罗马支配数 $\gamma_{3R}(G)$。约束 (1b) 用于确保每个满足 $f(v) = 0$ 的顶点至少有一个满足 $f(v) = 4$ 的邻点，或至少有三个满足 $f(v) = 2$ 的邻点，或至少有两个顶点 $v$,$w$，使得 $f(v)$=2 且 $f(w) = 3$。约束 (1c) 用于确保对于每个满足 $f(v) = 1$ 的顶点 $v$，至少有两个满足 $f(v) = 2$ 的邻点，或至少有一个满足 $f(v) \geq 3$ 的邻点。约束 (1d) 确保对于每个满足 $f(v) = 2$ 的顶点 $v$，至少有一个满足 $f(v) \geq 2$ 的邻点。约束 (1e) 用于确保每个顶点仅从集合 $\{0,1,2,3,4\}$ 中获得一个标签。约束 (1f) 确保变量$p_v, q_v, r_v, s_v$ 只能取 0 或 1，不得取其他整数值，从而将其限制为决策变量。

## 2.2. M3RDP-2

本节提出一种仅包含三个二元变量的 M3RDP 整数线性规划公式。将 $p_v = 0$ 代入 M3RDP-1，可得到新的模型 M3RDP-2。消去一个变量后，该公式将变为

$$Minimize \qquad \sum_{v \in V} 2q_v + \sum_{v \in V} 3r_v + \sum_{v \in V} 4s_v \tag{2.2a}$$

满足以下条件:

$$q_v + r_v + s_v + \sum_{u \in N(v)} s_u + \frac{1}{3} \sum_{u \in N(v)} q_u + \frac{1}{2}(t_v + x_v) \geq 1 \tag{2.2b}$$

$$\sum_{u \in N(v)} (q_u + r_u + s_u) \geq q_v \tag{2.2c}$$

$$q_v + r_v + s_v \leq 1 \tag{2.2d}$$

$$q_v, r_v, s_v, t_v, x_v \in \{0, 1\} \tag{2.2e}$$

这里，决策变量的总数为 $3|V|$ ($q_v, r_v, s_v$)，约束的数量为 $4|V|$。设 $\gamma'_{3R}(G)$ 为我们从 M3RDP-2 得到的三重罗马支配函数的权重。

接下来，我们证明整数线性规划公式 M3RDP-1 和 M3RDP-2 等价，二者仅在变量和约束的数量上有所不同。

引理 2.1. 设 $h$ 是 $G$ 的一个 $\gamma_{3R}$-函数。那么，不存在两个相邻顶点 $v$、$u$，其标签分别为 $h(v) = 1$ 和 $h(u) = 4$。

证明。反证法，设 $s$ 和 $t$ 是 $G$ 的两个相邻顶点，在 $h$ 下的标签分别为 1 和 4。现在，我们按照如下方式由 $h$ 得到 $G$ 的一个标记 $h'$。

$$h'(v) = \begin{cases} 0, & if \ \ v = s \\ 4, & if \ \ v = t \\ h(v), & otherwise \end{cases} \tag{2.3}$$ □

显然，$h'$ 是 $G$ 的一个三重罗马支配函数，因为没有其他标签依赖于标签为 1 的顶点。因此，$w(h') < w(h)$，矛盾。

定理 2.2. M3RDP-1 与 M3RDP-2 等价。

证明。显然，对于给定的图 $G$，$\gamma_{3R}(G)$ 是 M3RDP-1 的最优值。令$\gamma'_{3R}(G)$ 为 M3RDP-2 的最优值。接下来，我们证明 $\gamma_{3R}(G) = \gamma'_{3R}(G)$。在 M3RDP-2 中，我们移除了变量 $p_v$，该变量表示满足$f(v) = 1$的顶点。事实上，我们不需要 $p_v$，也就是说，我们总是可以重新安排闭邻域中顶点的标签，使闭邻域的权重保持不变。下面看看如何重新安排。

假设顶点 $v$ 满足 $f(v) = 1$，那么条件要求它至少有 2 个相邻顶点满足 $f(u) = 2$，或者至少有 1 个相邻顶点满足$f(u) \geq 3$。现在考虑顶点 $v$ 的邻域可能出现的情形。

1) 顶点 $v$ 有两个这样的相邻顶点 $u, w$，其中 $f(u) = 2$ 且 $f(w) = 2$。现在我们将 $v, u, w$ 的标签重新排列如下

$$f(v) = 0, f(u) = 3, f(w) = 2$$

我们可以构造一个三重罗马支配函数 $g$，定义如下：对于所有 $x \notin \{v, u\}$，$g(x) = f(x)$，且$g(v) = 0, g(u) = 3$。$g$ 是一个权重与 $f$相同的三重罗马支配函数。

2）第二种情况是，顶点 $v$ 至少有一个相邻顶点 $u$，使得 $f(u) = 3$，那么我们可以按如下方式重新安排 $v$ 和 $u$ 的标签

$$f(v) = 0, f(u) = 4$$

修改后的 $f$ 也是一个三重罗马支配函数。

3) 如引理1所述，相邻顶点$v$、$u$ 不会分别标记为 $f(v) = 1$ 和 $f(u) = 4$，形成最优标记。 □

### 2.3. M3RDP-3

进一步优化上述 M3RDP-2 整数线性规划公式后，我们可以删除约束(2d)。因此，新的优化公式为

$$Minimize \qquad \sum_{v\in V} 2q_v + \sum_{v\in V} 3r_v + \sum_{v\in V} 4s_v \tag{2.4a}$$

使得

$$q_v + r_v + s_v + \sum_{u\in N(v)} s_u + \frac{1}{3}\sum_{u\in N(v)} q_u + \frac{1}{2}(t_v + x_v) \geq 1 \tag{2.4b}$$

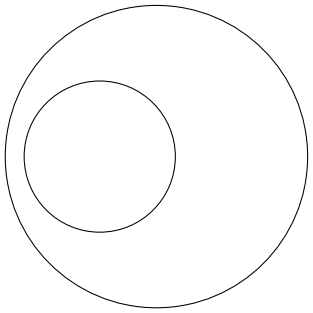
$$\sum_{u\in N(v)} (q_u + r_u + s_u) \leq q_v \tag{2.4c}$$

$$q_v, r_v, s_v, t_v, x_v \in \{0, 1\} \tag{2.4d}$$

这里，决策变量的数量为 $3|V|$ ($q_v$, $r_v$, $s_v$)，约束的数量为 $3|V|$。

定理2.3. 令$\gamma_{3R}^{'}(G)$和$\gamma_{3R}^{''}(G)$分别表示使用M3RDP-2和M3RDP-3得到的三重罗马支配函数的最优权重。则$\gamma_{3R}^{'}(G) = \gamma_{3R}^{''}(G)$

证明。由于 M3RDP-3 中缺少约束 (2d)， $p_v$、 $q_v$、 $r_v$、 $s_v$ 可以同时取值为 1；也就是说，例如， $r_v$ 和 $s_v$ 都可以取值为 1。利用这些决策变量计算顶点 $v$ 的三重罗马支配数时，这种情况并无实际意义。若 $S_2$ 是使用 M3RDP-2 公式得到的所有可能三重罗马支配函数的集合，同理， $S_3$ 是 M3RDP-3 的所有可能三重罗马支配函数的集合，那么显然，$S_2 \subseteq S_3$ ，如图1所示。



$S_2$ $S_3$

从上面的维恩图可以看出，M3RDP-3 给出的任一三重罗马支配函数，要么来自区域 $S_2$，要么来自区域 $S_{32}$（$= S_3 - S_2$）。如果从 $S_2$ 中选择，就不可能得到比 M3RDP-2 公式更小的最优值，因此我们需要检查集合 $S_{32}$。在 $S_{32}$ 中，$q_v$、$r_v$、$s_v$ 中至少有两个变量等于 1。假设 $H(v) = 2q_v + 3r_v + 4s_v$。对于顶点 $v \in V$ 和 $f \in S_{32}$，在 M3RDP-3 公式下，$H(v)$ 的最大值为 2+3+4=9，最小值为 5；而如果 $f \in S_2$，那么 $H(v)$ 的最大值和最小值分别为 4 和 2。可以看出，当 $f \in S_2$ 时，$H(v)$ 的最大值小于 $f \in S_{32}$ 时 $H(v)$ 的最小值。因此，使用来自集合 $S_{32}$ 的函数所得最优值，必然严格大于使用 M3RDP-3 公式时来自集合 $S_2$ 的函数所得最优值；所以，即使没有约束 (2d)，我们也会选择来自集合 $S_2$ 的函数。根据定理 1，我们知道 M3RDP-2 给出了最优解。因此，鉴于 M3RDP-3 从集合 $S_2$ 中选择函数，可以得出两个模型给出的结果相同。

□

## 3. 四重罗马支配问题的整数线性规划公式

与构建 M3RDP 整数线性规划模型的方法类似，我们也为 M4RDP 提供了整数线性规划模型。

### 3.1. M4RDP-1

$$p_v = \begin{cases} 1, f(v) = 1. \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases} \quad q_v = \begin{cases} 1, f(v) = 2. \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases} \quad r_v = \begin{cases} 1, f(v) = 3. \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$s_v = \begin{cases} 1, f(v) = 4. \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases} \quad t_v = \begin{cases} 1, f(v) = 5. \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases} \quad x_v = \begin{cases} 1, \sum\limits_{u \in N(v)} q_u \geq 1. \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$y_v = \begin{cases} 1, \sum\limits_{u \in N(v)} r_u \geq 1. \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases} \quad z_v = \begin{cases} 1, \sum\limits_{u \in N(v)} s_u \geq 1. \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases} \quad a_v = \begin{cases} 1, \sum\limits_{u \in N(v)} q_u \geq 2. \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$Minimize \qquad \sum_{v \in V} p_v + 2\sum_{v \in V} q_v + 3\sum_{v \in V} r_v + 4\sum_{v \in V} s_v + 5\sum_{v \in V} t_v \tag{3.1a}$$

满足以下条件

$$p_v + q_v + r_v + s_v + t_v + \sum_{u \in N(V)} t_u + \frac{1}{2}(x_v + z_v) + \frac{1}{2}(z_v + y_v) + \frac{1}{2}(a_v + y_v) + \frac{1}{2}\sum_{u \in N(v)} s_u + \frac{1}{2}\sum_{u \in N(v)} r_u + \frac{1}{4}\sum_{u \in N(v)} q_u \geq 1 \tag{3.1b}$$

$$\sum_{u \in N(v)} t_u + \sum_{u \in N(v)} s_u + \frac{1}{2}(y_v + x_v) + \frac{1}{2}\sum_{u \in N(v)} r_u + \frac{1}{3}\sum_{u \in N(v)} q_u \geq p_v \tag{3.1c}$$

$$\sum_{u\in N(v)}(t_u+s_u+r_u)+\frac{1}{2}\sum_{u\in N(v)}q_u\geq q_v \tag{3.1d}$$

$$\sum_{u\in N(v)}(t_u+s_u+q_u+r_u)\geq r_v \tag{3.1e}$$

$$p_v+q_v+r_v+s_v+t_v\leq 1 \tag{3.1f}$$

$$p_v,q_v,r_v,s_v,t_v,x_v\in\{0,1\} \tag{3.1g}$$

可以看出，决策变量的数量为 $5|V|$ （$p_v, q_v, r_v, s_v, t_v$），约束的数量为 $6|V|$。

约束 (4a) 给出了目标函数值，即四重罗马支配数 $\gamma_{4R}(G)$。约束 (4b) 确保每个满足 $f(v)=0$ 的顶点，至少有 1 个满足 $f(v)=5$ 的邻点，或者至少有 2 个顶点 $v$,$w$ 满足 $f(v)=4$ 和 $f(w)\geq 2$，或者至少有 2 个顶点 $v$,$w$ 满足 $f(v)=3$ 和 $f(w)\geq 3$，或者至少有 4 个顶点满足 $f(v)=2$。约束 (4c) 确保对于每个满足 $f(v)=1$ 的顶点 $v$，至少有 1 个顶点满足 $f(v)\geq 4$，或者至少有 2 个顶点 $v$,$w$ 满足 $f(v)=3$ 和 $f(w)\geq 2$。约束 (4d) 确保对于每个满足 $f(v)=2$ 的顶点 $v$，至少有 1 个满足 $f(v)\geq 3$ 的邻点，或者至少有 2 个顶点满足 $f(v)\geq 2$。约束 (4e) 确保对于每个满足 $f(v)=3$ 的顶点 $v$，至少有 1 个满足 $f(v)\geq 2$ 的邻点。约束 (4f) 确保每个顶点从集合 {0,1,2,3,4,5} 中只获得一个标签。约束 (4g) 确保变量 $p_v$, $q_v, r_v, s_v, t_v, x_v$ 只能取 0 或 1，不得取其他整数值，从而将它们限制为决策变量。

### 3.2. M4RDP-2

在本节中，我们提出了一个仅包含 4 个决策变量的 M4RDP 整数线性规划公式。将 $p_v=0$ 代入 M4RDP-1 后，我们得到一个新模型 M4RDP-2。减少一个变量后，该公式将变为

$$Minimize \quad 2\sum_{v\in V}q_v+3\sum_{v\in V}r_v+4\sum_{v\in V}s_v+5\sum_{v\in V}t_v \tag{3.2a}$$

使得

$$\begin{aligned}q_v+r_v+s_v+t_v+\sum_{u\in N(v)}t_u+\frac{1}{2}(x_v+z_v)+\frac{1}{2}(z_v+y_v)+\frac{1}{2}(a_v+y_v)\\ +\frac{1}{2}\sum_{u\in N(v)}s_u+\frac{1}{2}\sum_{u\in N(v)}r_u+\frac{1}{4}\sum_{u\in N(v)}q_u\geq 1\end{aligned} \tag{3.2b}$$

$$\sum_{u\in N(v)}(t_u+s_u+r_u)+\frac{1}{2}\sum_{u\in N(v)}q_u\geq q_v \tag{3.2c}$$

$$\sum_{u\in N(v)}(t_u+s_u+q_u+r_u)\geq r_v \tag{3.2d}$$

$$q_v+r_v+s_v+t_v\leq 1 \tag{3.2e}$$

$$q_v,r_v,s_v,t_v,x_v\in\{0,1\} \tag{3.2f}$$

引理 3.1. 对于四重罗马支配函数的顶点最优标记，不存在这样一种标记：两个相邻顶点 $v$、$u$ 分别标记为 $f(v)=1$ 和 $f(u)=5$。

证明。与引理1类似，不会出现这样的最优组合，因为我们可以将顶点 $v$ 的标签改为 0，因为没有其他标签依赖于标签为 1 的顶点。将顶点 $v$ 的标签从 1 改为 0，会降低函数 $f$ 的权重，从而得到更优的值。

□

定理 3.2. M4RDP-1 等价于 M4RDP-2。

证明。与定理 1 类似，在 M4RDP-2 中，我们删除了表示具有 $f(v)=1$ 的顶点的变量 $p_v$。标签可按如下方式重新排列。

假设顶点 $v$ 具有 $f(v)=1$，那么条件是：它至少应有一个相邻顶点 $u$，该顶点的 $f(u)=5$；或者至少有一个相邻顶点 $u$，该顶点的$f(u)=4$；或者至少有一个相邻顶点 $u$具有 $f(u)=3$，并且至少有一个相邻顶点 $w$具有 $f(w)=2$；或者至少有 3 个相邻顶点带有标签 $f(u)\geq 3$。现在让我们考察顶点 $v$的邻域可能出现的情形。

1) 根据引理 2，相邻顶点 $v,u$ with$f(v)=1$ and $f(u)=5$ 不可能具有最优标记。

2) 顶点 $v$ 至少有一个相邻顶点 $u$ where $f(u)=4$。现在我们将 $v,u,w$ 的标签重新排列如下

$$f(v)=0,f(u)=5$$

我们可以构造如下定义的三重罗马支配函数 $g$：对所有 $x\notin\{v,u\}$，$g(x)=f(x)$，且 $g(v)=0$, $g(u)=5$。$g$ 是一个与 $f$ 权重相同的 4RDF。3) 顶点 $v$ 至少有一个相邻顶点 $u$，使得 $f(u)=3$，并且至少有一个相邻顶点 $w$，使得 $f(w)=2$；那么我们可以将 $v$,$u$ 和 $w$ 的标签重新排列如下

$$f(v)=0,f(u)=3,f(w)=3$$

修改后的 $f$ 也是 $G$ 的 4RDF。

4) 顶点 $v$ 至少有 3 个相邻顶点 $u$、$w$、$y$，使得 $f(u)=2$，那么我们可以按如下方式重新排列 $v$、$u$、$w$ 和 $y$ 的标签

$$f(v)=0,f(u)=2,f(w)=2,f(y)=3$$

□

这里，决策变量的数量为 $4|V|$ $(q_v, r_v, s_v, t_v)$，约束的数量为 $5|V|$。

### 3.3. M4RDP-3

进一步优化上述整数线性规划公式 M4RDP-2 后，我们可以去掉约束 (5e)。因此，新的优化公式为

$$Minimize \quad 2\sum_{v\in V} q_v + 3\sum_{v\in V} r_v + 4\sum_{v\in V} s_v + 5\sum_{v\in V} t_v \tag{3.3a}$$

使得

$$\begin{aligned} q_v + r_v + s_v + t_v + \sum_{u\in N(v)} t_u + \frac{1}{2}(x_v + z_v) + \frac{1}{2}(z_v + y_v) + \frac{1}{2}(a_v + y_v) \\ + \frac{1}{2}\sum_{u\in N(v)} s_u + \frac{1}{2}\sum_{u\in N(v)} r_u + \frac{1}{4}\sum_{u\in N(v)} q_u \geq 1 \end{aligned} \tag{3.3b}$$

$$\sum_{u\in N(v)} (t_u + s_u + r_u) + \frac{1}{2}\sum_{u\in N(v)} q_u \geq q_v \tag{3.3c}$$

$$\sum_{u\in N(v)} (t_u + s_u + q_u + r_u) \geq r_v \tag{3.3d}$$

$$q_v, r_v, s_v, t_v, x_v \in \{0, 1\} \tag{3.3e}$$

此处决策变量的数量为 $4|V|$ $(q_v, r_v, s_v, t_v)$，约束的数量为 $4\ |V|$。设 $\gamma''_{4R}(G)$ 为我们通过 M4RDP-3 得到的四重罗马支配数的最优值。与定理2类似，我们也可以证明 $\gamma''_{4R}(G)$ 与 $\gamma_{4R}(G)$ 相同

## 4. 计算结果

本节展示了第3节中介绍的所有模型的结果。所有模型均使用 IBM CPLEX 22.1 优化求解器求解。我们使用 Python 软件包 NetworkX 生成随机图。所有计算均在 MacOS Monterey 12.6 版本、2020款M1芯片、8GB RAM 的环境下完成。随机图使用 NetworkX 的 Erd˝os–R´enyi 模型生成。我们有两张表，用于表示模型在随机图上的运行时间。表1包含4列：实例表示图的属性，$|V|$ 表示顶点数，$|E|$ 表示边数，$p$ 表示在生成随机图时每条边被纳入图中的概率。第二列表示第2节中的第一个模型，其中包含结果和时间两个子列；结果为 $\gamma_{3R}(G)$，而

时间是使用 M3RDP-1 获取解所需的时间。类似地，后续各列表示其余模型的性能。可以看到，对于同一个图，所有模型均得到相同的结果，这表明我们的模型是正确的。类似地，表-2表示我们的整数线性规划模型在最小四重罗马支配问题上的性能。我们使用“–”符号表示对于特定模型，在1800秒内未找到最优解。可以看到，在三重罗马支配问题的大多数情况下，M3RDP-3模型的表现优于另外两个模型。对于四重罗马支配问题，M4RDP-3的表现优于其余两个模型。

表1. 三重罗马支配问题的整数线性规划模型性能

| 实例 | | | M3RDP-1 | | M3RDP-2 | | M3RDP-3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mid V \mid$ | $\mid E \mid$ | p | 结果 | time | 结果 | time | 结果 | time |
| 25 | 50 | 0.2 | 26 | 0.44 | 26 | 0.38 | 26 | 0.39 |
| | 141 | 0.5 | 11 | 0.45 | 11 | 0.43 | 11 | 0.81 |
| | 248 | 0.8 | 7 | 0.37 | 7 | 0.43 | 7 | 0.35 |
| 50 | 250 | 0.2 | 24 | 14.05 | 24 | 5.82 | 24 | 3.95 |
| | 631 | 0.5 | 12 | 174.49 | 12 | 330.18 | 12 | 89.37 |
| | 985 | 0.8 | 8 | 3.51 | 8 | 2.04 | 8 | 2.42 |
| 75 | 556 | 0.2 | - | - | - | - | - | - |
| | 1275 | 0.5 | - | - | 12 | 51.85 | 12 | 156.68 |
| | 2238 | 0.8 | 8 | 23.79 | 8 | 6.16 | 8 | 11.75 |
| 100 | 1015 | 0.2 | - | - | - | - | - | - |
| | 2502 | 0.5 | - | - | - | - | - | - |
| | 3961 | 0.8 | 8 | 17.02 | 8 | 16.72 | 8 | 19.36 |
| 150 | 2257 | 0.2 | - | - | - | - | - | - |
| | 5530 | 0.5 | - | - | - | - | - | - |
| | 8973 | 0.8 | 8 | 16.52 | 8 | 14.22 | 8 | 15.45 |

表2. 四重罗马支配问题整数线性规划模型的性能

| 实例 | | | M4RDP-1 | | M4RDP-2 | | M4RDP-3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mid V \mid$ | $\mid E \mid$ | p | 结果 | time | 结果 | time | 结果 | time |
| 10 | 10 | 0.2 | 18 | 1.15 | 18 | 1.42 | 18 | 0.91 |
| | 26 | 0.5 | 11 | 4.38 | 11 | 1.29 | 11 | 0.94 |
| | 31 | 0.8 | 9 | 3.09 | 9 | 0.89 | 9 | 0.81 |
| 25 | 56 | 0.2 | - | - | 25 | 760.52 | 25 | 642.75 |
| | 145 | 0.5 | - | - | 14 | 1247.1 | - | - |
| | 244 | 0.8 | - | - | 9 | 76.41 | 9 | 61.31 |
| 50 | 242 | 0.2 | - | - | - | - | - | - |
| | 601 | 0.5 | - | - | - | - | - | - |
| | 999 | 0.8 | - | - | 9 | 1416 | - | - |

## 5. 结论

从两张表中都可以明显看出，在大多数情况下，M3RDP-3模型在M3RDP中表现更优，而M4RDP-3模型在M4RDP中表现更优。如表1所示，对于M3RDP，当顶点数达到100个时，模型开始变得不可行；而在表2中，当顶点数达到50个时，模型开始变得不可行。通过两张表可以得出结论：随着顶点数增加，模型将在时间限制内变得不可行。因此，为M3RDP和M4RDP提供约束数量更少的整数线性规划公式，使CPLEX求解器能够成功求解规模更大的图实例，是未来研究的一个有趣方向。

## 参考文献

[1] H. Abdollahzadeh Ahangar、M.P. ´Alvarez、M. Chellali、S.M. Sheikholeslami 和 J.C. Valenzuela- Tripodoro。图中的三重罗马支配。《应用数学与计算》，391:125444，2021。[2] Robert A. Beeler、Teresa W. Haynes 和 Stephen T. Hedetniemi。双重罗马支配。《离散应用数学》，211:23–29，2016。[3] Anthony Bonato 和 Changping Wang。关于随机图中支配参数的一则注记。《讨论数学：图论》，28:335–343，2008年1月。[4] Qingqiong Cai、Neng Fan、Yongtang Shi 和 Shunyu Yao。双重罗马支配问题的整数线性规划公式。《优化方法与软件》，37(1):1–22，2022。[5] Ernie J Cockayne、Paul A Dreyer、Sandra M Hedetniemi 和 Stephen T Hedetniemi。图中的罗马支配。《离散数学》，278(1):11–22，2004。[6] Roman Glebov、Anita Liebenau 和 Tibor Szab´o。关于随机图支配数的集中性，2012。[7] Teresa W Haynes、StephenHedetniemi 和 Peter Slater。《图支配基础》。CRC出版社，2013。[8] Marija Ivanovic。受限罗马支配问题的混合整数线性规划公式。

问题。《数学与计算机科学理论及应用》（TAMCS），第5卷，2015年11月。[9] Marija Ivanovic。罗马支配问题的改进混合整数线性规划公式。《数学研究所出版物》，99:51–58，2016年1月。[10] Marija Ivanovi´c。弱罗马支配问题的改进整数线性规划公式。《软计算》，22(19):6583–6593，2018年10月。[11] Mathieu Liedloff、Ton Kloks、J. Q. Liu 和 Sheng-Hueng Peng。若干特殊图类中的罗马支配，2008。[12] Charles S ReVelle 和 Kenneth E Rosing。捍卫罗马帝国：一个经典军事战略问题。《美国数学月刊》，107 594，2000 7 585( ): – 。[13] Ian Stewart。保卫罗马帝国！《科学美国人》，281(6):136–138，1999。10