arXiv:2305.00731v1 [math.AP] 1 May 2023

关于受迫波动方程的加权惯性能量方法

EDOARDO MAININI 和 DANILO PERCIVALE

摘要。我们证明，对于一类非线性波动方程，相关加权惯性能量泛函的极小化子收敛到初值问题的解。该结果适用于非齐次情形，并假设强迫项满足自然增长条件。

AMS 分类编号（2010）： 49J45,70H30
关键词： 变分法、非线性波动方程、加权变分积分

1. 引言

De Giorgi 针对二阶初值问题提出的变分方法，基于对加权惯性能量 （WIE）泛函的极小化。我们考虑以下散焦型非线性非齐次波动方程

$$w'' - \Delta w = -|w|^{r-2}w + f(t,x) \quad \text{in } (0,+\infty)\times\mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

其中 $r>1$，以及初始条件 $w(0,x) = w_0(x)$ 和 $w'(0,x) = w_1(x)$，满足于 $\mathbb{R}^N$。我们引入相应的 WIE 泛函

$$\mathcal{I}_\varepsilon(w) := \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon}\left\{\frac{\varepsilon^2}{2}|w''|^2 + \frac{1}{2}|\nabla w|^2 + \frac{1}{r}|w|^r - fw\right\}dx\,dt, \qquad \varepsilon>0, \tag{1.2}$$

该泛函将在一类适当的竞争函数 $w:\ [0,+\infty)\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$中进行极小化，这些函数满足相同的给定初始条件 $w(0,x) = w_0(x)$，$w'(0,x) = w_1(x)$。这里，撇号 $'$ 表示时间导数，∇，Δ 分别表示空间变量中的梯度和拉普拉斯算子，而 f 是一个依赖于时空的给定强迫项。

De Giorgi 在 [3], 中提出了如下猜想（另见 [4], ）：若 $r=2k$ 对某个正整数 k 成立，若 $f\equiv 0$ 且 w_ε 是满足初始条件 $w(0,x) = w_0(x)$，$w'(0,x) = w_1(x)$（其中 $\mathbb{R}^N$，且 $w_0\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$，$w_1\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$）的 $\mathcal{I}_\varepsilon$ 极小化器，则对几乎处处的 $(t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，有 $w_\varepsilon(t,x)\to w(t,x)$，并且 w 是该初值问题的解

$$\begin{cases} w'' - \Delta w = -|w|^{r-2}w \quad \text{in } (0,+\infty)\times\mathbb{R}^N, \\ \\ w(0,x) = w_0(x), \quad w'(0,x) = w_1(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.3}$$

这一猜想已由 Serra 和 Tilli 以如下形式证明，见 [10, 定理 1。1]：若$r>1$，$f\equiv 0$，$(\varepsilon_n)\subset(0,1)$ 是一个趋零序列，且 w_n 是满足初始条件 $w(0,x) = w_0(x)\in H^1(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N)$，$w'(0,x) = w_1(x)\in H^1(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N)$ 的 $\mathcal{I}_{\varepsilon_n}$ 的极小化器，那么沿着一个适当的子序列，w_n 在时空中几乎处处收敛到初值问题 (1.3) 的一个解。所构造的解是满足自然能量

不等式的弱解，因此 Serra 和 Tilli 的结果 [10] 在 $r = 2k$ 时便恢复了德乔治猜想，只要已知这类解具有唯一性，例如在次临界情形$1 < k < \frac{N}{N-2}$，参见 [12, 14, 15, 16], ；也就是说，对每个 $k > 1$，若 $N = 2$，且对 $k = 2$，若 $N = 3$。另一方面，若 $N \geq 3$，对于超临界 k，弱解的整体唯一性通常尚未可知，这使得 [10] 的收敛结果只能得到子序列形式，如$\varepsilon \to 0$。因此，变分解（即作为 WIE 泛函极小化器的极限得到的解）的唯一性在超临界情形仍是一个开放问题，即便初始数据是光滑紧支撑的也是如此。这个问题之所以困难，是因为超临界散焦波动方程存在适定性问题（例如参见 [6, 17]）。

还可以考虑如下形式的 WIE 泛函

$$\mathcal{G}_\varepsilon(w) := \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon^2}{2} |w''|^2 - f\, w \right\} dx\, dt + \int_0^{+\infty} e^{-t/\varepsilon} W(w(t,\cdot))\, dt, \qquad \varepsilon > 0,$$

其中

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla w(t,x)|^2 + \frac{1}{r} |w(t,x)|^r \right) dx \tag{1.4}$$

泛函 (1.2) 中的项已被变分法中的一个更一般的泛函$W(w(t,\cdot))$所取代，以便得到一种用于具有以下形式结构的双曲型偏微分方程的变分逼近格式

$$\begin{cases} w'' - DW(w(t,\cdot)) = f(t,x) & \text{in } (0,+\infty) \times \mathbb{R}^N, \\ \\ w(0,x) = w_0(x),\ w'(0,x) = w_1(x) & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 DW 是 W的盖托微分。文献 [11], 在这一广义框架下实现了这一点，将 [10] 的结果推广到了该框架中，但仍限于齐次情形$f \equiv 0$。文献 [18]研究了非齐次方程。更确切地说，在文献 [18] 中证明：令$f \in L^2((0,T);\, L^2(\mathbb{R}^N))$ 对每个 $T > 0$成立，则存在一个函数逼近族 $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，它在 $L^2((0,T);\, L^2(\mathbb{R}^N))$中对每个 $T > 0$收敛于 f，并且令 w_ε 使 WIE 泛函

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon^2}{2} |w''|^2 - f_\varepsilon\, w \right\} dx\, dt + \int_0^{+\infty} e^{-t/\varepsilon} W(w(t,\cdot))\, dt, \qquad \varepsilon > 0,$$

满足适当的初始条件 $w(0,x) = w_0(x)$、 $w'(0,x) = w_1(x)$，则存在子列使得 $w_\varepsilon \to w$ 在时空中几乎处处成立，并且 w 是问题 (1.5) 的一个解，具有相同的初始数据。

文献 [18] 中的结果采用了逼近序列 $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$的一种特定构造，其中 f_ε 在 t较小时和较大时均恒等于零，因此无法选择 $f_\varepsilon \equiv f$。另一方面，我们的目标是证明原泛函 $\mathcal{G}_\varepsilon$ 的极小化子（其中包含给定的强迫项 f）收敛到相应初值问题 (1.5) 的解，至少需要对 f 相对于 t 满足一些不可避免的增长假设（另见下文命题 4.6）。我们将通过考察模型情形来获得这一结果：此时 W 具有形式 (1.4)，因而泛函 $\mathcal{G}_\varepsilon$ 可化为 $\mathcal{I}_\varepsilon$；同时对 f施加尖锐的增长假设，即映射 $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |f(t,x)|^2\, dx$具有拉普拉斯可变换性（若对该映射施加整体有界性等更强条件，结果将更容易得到，

正如我们在近期关于常微分方程情形的短文 [9] 中所作的假设）。事实上，我们将考虑更一般的 WIE 泛函

$$\mathcal{F}_\varepsilon(w) := \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon^2}{2}|w''|^2 + \frac{1}{2}|\nabla w|^2 + \frac{1}{r}\,|w|^r - F(t,x,w) \right\} dx\,dt, \quad \varepsilon > 0, \tag{1.6}$$

其中，$r > 1$ 和 $((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}) \ni (t,x,v) \mapsto F(t,x,v)$ 关于变量 v 是全局利普希茨连续的（关于 F 的详细假设将在下一节中介绍）。令 $G := \partial F/\partial v$，相应的方程为

$$w'' - \Delta w = -|w|^{r-2}w + G(t,x,w) \quad \text{in } (0,+\infty)\times\mathbb{R}^N. \tag{1.7}$$

因此，在下文定理 2.1 中陈述的主要结果里，我们将证明：如果 w_ε 在满足初始条件 $w(0,x) = w_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)$、$w'(0,x) = w_1(x) \in H^1(\mathbb{R}^N)\cap L^r(\mathbb{R}^N)$ 的条件下使 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 取得最小值，那么沿着一个趋零序列 w_ε，它们几乎处处在时空中收敛于方程 (1.7) 的初值问题的一个解，该解具有相同的初始数据 w_0, w_1。

关于文献中加权惯性能量法应用于二阶初值问题的更多结果，我们提及[13]中对德乔治猜想一个较弱版本的证明。 [8, 11], 研究了一般的半线性方程，包括耗散方程；关于非齐次情形，另见 [19] 。此外，加权惯性能量法也适用于常微分方程；我们可参阅 [7], 中关于拉格朗日力学的研究，作者在那里处理了具有某个给定势函数 U的系统 $\mathsf{y}'' - \nabla U(\mathsf{y}) = 0$。常微分方程组 $\mathsf{y}'' = \mathsf{f}(t)$ 在我们最近的短文 [9], 中得到了分析；事实上，这正是本文所介绍技巧的一项基础应用。我们将要给出的证明结合了 [10, 11, 18] 中关于双曲方程的估计与 [9]中的方法。

本文结构。 第 2 节介绍本文的记号和理论假设，然后陈述主要结果。第 3 节给出若干预备估计。第 4 节证明极小元的存在性，并推导泛函 (1.6)（经时间重标度后的版本）的欧拉–拉格朗日方程。我们还讨论增长假设的锐性。第 5 节证明主要结果。附录中还包含若干技术引理。

2. Main result

本节介绍对出现在 (1.6) 中的函数 F 所作的假设，并为主要结果提供泛函分析框架。

2.1. 假设。 设 $(t,x,v) \mapsto F(t,x,v)$ 是一个 $L^1_{loc}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R})$ 函数。我们假设

$$\text{对几乎处处的 } (t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}^N, \text{ 映射 } v \mapsto F(t,x,v) \text{ 属于 } C^1(\mathbb{R}), \tag{2.1}$$

我们定义

$$G(t,x,v) := \frac{\partial F}{\partial v}(t,x,v) \quad \text{and} \quad f(t,x) := \sup_{v\in\mathbb{R}} |G(t,x,v)| \tag{2.2}$$

并假设

$$f \in L^\infty((0,T); L^2(\mathbb{R}^N)) \quad \forall\, T > 0. \tag{2.3}$$

此外，我们假设存在 $\varepsilon_F \in (0,1/2)$，使得

$$C_F := \sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_F)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon} |F(t,x,0)|\,dx\,dt < +\infty \tag{2.4}$$

and

$$K_F := \frac{1}{\varepsilon_F}\int_0^{+\infty} e^{-t/(2\varepsilon_F)}\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt < +\infty. \tag{2.5}$$

有必要对上述假设作几点说明。值得注意的是，根据 (2.1)，对于每个 $v \in \mathbb{R}$，函数 $(t,x) \to G(t,x,v)$ 都是勒贝格可测的，并且函数$v \to G(t,x,v)$ 对几乎处处的 $(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^N$ 都是连续的。因此，对于每个可测的$u : (0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$，函数 $(t,x) \to G(t,x,u(t,x))$ 都是可测的，而 (2.2) 意味着

$$|G(t,x,u(t,x))| \le f(t,x) \quad \text{for a.e. } (t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$$

由此，根据 (2.3)，对于任意 $T > 0$，函数 $(t,x) \to G(t,x,u(t,x))$ 属于 $L^\infty((0,T); L^2(\mathbb{R}^N))$。特别地，(2.3) 意味着，对于几乎处处的 $(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^N$，有 $\sup_{v\in\mathbb{R}} |G(t,x,v)| < +\infty$，因此映射 $v \mapsto F(t,x,v)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是全局利普希茨的，即

$$|F(t,x,v_1) - F(t,x,v_2)| \le f(t,x)|v_1 - v_2| \qquad \text{for every } v_1 \in \mathbb{R} \text{ and every } v_2 \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

随后，G 与 F 关于其第三个变量的分布意义下的偏导数重合。我们注意到，主要假设 (2.5) 蕴含函数 $(0,+\infty) \ni t \mapsto \|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ 的拉普拉斯变换存在于半空间 $\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}ez > \frac{1}{2\varepsilon_F}\}$ 中。正如我们稍后在命题 4.6 中讨论的那样，这类假设对于该理论是必要的。另一方面，(2.4) 要求函数 $(0,+\infty) \ni t \mapsto \|F(t,\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ 的拉普拉斯变换存在，并且其在 t 较小时的行为受到一定控制。

一个相关情形是 $F(t,x,v) = b(t,x)\,v$，此时上述假设可简化为 $b \in L^\infty((0,T); L^2(\mathbb{R}^N))$，对每个 $T > 0$均成立，并要求 $t \mapsto \|b(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ 可进行拉普拉斯变换。采用这一选择的 F 后，与泛函 (1.6) 相关的方程，即方程 (1.7)，可化为形式 (1.1)。更一般地，我们可以令 $F(t,x,v) = b(t,x)\psi(v)$，其中 b 如上，并附加假设：ψ 是一个 C^1 函数，使得 ψ' 在 $\mathbb{R}$ 上有界，且 $\psi(0) = 0$。例如，这包括经典正弦-戈登方程和变质量正弦-戈登方程 [5], ，其中 $\psi(v) = \cos v - 1$。

2.2. **重标度能量泛函**。设 $r > 1$，引入巴拿赫空间

$$H := H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N),$$

其对偶空间记为 H'，并且对每个 $v \in H$，令

$$W(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{r}\|v\|^r_{L^r(\mathbb{R}^N)}.$$

我们用 DW 表示 W 的盖托导数，并令

$$(DW(v), u) := \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \cdot \nabla u + |v|^{r-2}vu, \qquad v \in H,\ u \in H.$$

现在我们定义

$$H^2_{loc}([0,+\infty); L^2(\mathbb{R}^N)) := \bigcap_{T>0} H^2((0,T); L^2(\mathbb{R}^N))$$

并且对每个 w_0、$w_1 \in H$，令

$$\mathcal{U}^0_\varepsilon := \{u \in \mathcal{U} : u(0,\cdot) = w_0(\cdot),\ u'(0,\cdot) = \varepsilon w_1(\cdot)\}, \quad \varepsilon > 0, \tag{2.7}$$

其中

$$\mathcal{U} := \left\{u \in H^2_{loc}([0,+\infty); L^2(\mathbb{R}^N)) : \int_0^{+\infty} e^{-t}\|u''(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt < +\infty\right\}. \tag{2.8}$$

We 回顾 [11, 18] 中的以下基本估计。对于每个 $u \in \mathcal{U}$，我们有

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt \le 2\|u(0,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 4\int_0^{+\infty} e^{-t}\|u'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt \tag{2.9}$$

并且将 u 替换为 u' 时也同样成立。因此，若 $\varepsilon < 1$，则对每个 $u \in \mathcal{U}^0_\varepsilon$，存在 d

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\|u'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt \le 2\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 4\int_0^{+\infty} e^{-t}\|u''(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-t}\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt &\le 2\|w_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\quad + 8\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 16\int_0^{+\infty} e^{-t}\|u''(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt.\end{aligned} \tag{2.11}$$

在第 2.1 小节的假设成立时，我们现在对每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_F)$ 定义，其中 $\varepsilon_F \in (0, 1/2)$ 是 (2.4) 和 (2.5) 中出现的数，并且对每个 $u \in \mathcal{U}^0_\varepsilon$

$$\Phi_\varepsilon(u) := \int_0^{+\infty} e^{-t}\int_{\mathbb{R}^N} F(\varepsilon t, x, u(t,x))\,dx\,dt. \tag{2.12}$$

由 (2.4) 和柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}|\Phi_\varepsilon(u)| &\le C_F + \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}|F(\varepsilon t, x, u(t,x)) - F(\varepsilon t, x, 0)|\,dx\,dt \\ &\le C_F + \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t} f(\varepsilon t, x)u(t,x)\,dx\,dt \\ &\le C_F + \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

因此，由 (2.11)、杨氏不等式，以及一个由 (2.3) 和 (2.5) 推得的简单估计（其证明将在下文引理 3.1 中给出），可知存在一个常数 K^*_F，仅依赖于 f 和 ε_F，使得对每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_F)$

$$\begin{aligned}|\Phi_\varepsilon(u)| &\le C_F + \sqrt{K^*_F}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C_F + 16K^*_F + \frac{1}{32}\|w_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{8}\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-t}\|u''(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt.\end{aligned} \tag{2.13}$$

因此我们可以定义

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u) := \int_0^{+\infty} e^{-t}\left\{\frac{1}{2\varepsilon^2}\|u''(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + W(u(t,\cdot))\right\}dt - \Phi_\varepsilon(u) \tag{2.14}$$

并且我们看到当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_F)$ 时，对于每个 $u \in \mathcal{U}^0_\varepsilon$，泛函 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 都有良好定义且取有限值。

2.3. 主要结果。现在我们可以陈述主要结果了。

定理 2.1. 假设第 2.1 小节 中的假设成立，并令 $w_0,\ w_1 \in H$。那么，对于每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_F)$，都存在问题的一个解 u_ε

$$\min\{\mathcal{J}_\varepsilon(u) : u \in \mathcal{U}^0_\varepsilon\}.$$

令 $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \varepsilon_F)$ 为一个趋零序列，令 u_{ε_n} 使 $\mathcal{J}_{\varepsilon_n}$ 在 $\mathcal{U}^0_{\varepsilon_n}$ 上达到最小值，并令 $w_{\varepsilon_n}(t,x) := u_{\varepsilon_n}\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, x\right)$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。那么，存在一个子序列 $(\varepsilon_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 和一个函数 $w \in H^1_{loc}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$，使得当 $k \to +\infty$ 时，$w_{\varepsilon_{n_k}} \to w$ 在 $H^1_{loc}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$ 中弱收敛，并且 w 满足

$$w \in W^{2,\infty}((0,T);\, H') \cap H^1((0,T);\, L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^2((0,T);\, H^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^r((0,T)\times\mathbb{R}^N) \quad \forall T > 0,$$

$$w'' - \Delta w = -|w|^{r-2}w + G(t,x,w) \quad \text{in } \mathcal{D}'((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N),$$

$$w(0,x) = w_0(x) \text{ for a.e. } x \in \mathbb{R}^N, \quad w'(0,x) = w_1(x) \text{ for a.e. } x \in \mathbb{R}^N,$$

以及以下能量不等式

$$\sqrt{\mathcal{E}(t)} \le \sqrt{\mathcal{E}(0)} + \sqrt{\frac{t}{2}\int_0^t \|f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,ds} \qquad \text{for a.e. } t > 0, \tag{2.15}$$

其中 $\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\|w'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + W(w(t,\cdot))$ 且 f 由(2.2)定义。

注 2.2。值得注意的是，泛函 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 是原泛函 $\mathcal{F}_\varepsilon$（见 (1.6)）的重标度；若 $u_\varepsilon \in \operatorname{argmin}_{\mathcal{U}^0_\varepsilon} \mathcal{J}_\varepsilon$，则 w_ε 确实使 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{V}^0_\varepsilon$ 上达到极小值：$= \{w \in \mathcal{V}_\varepsilon : w(0,\cdot) = w_0(\cdot)\ \ w'(0,\cdot) = w_1(\cdot)\}$，其中

$$\mathcal{V}_\varepsilon := \left\{ w \in H^2_{loc}([0,+\infty); L^2(\mathbb{R}^N)) : \int_0^{+\infty} e^{-t/\varepsilon}\|w''(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt < +\infty \right\}.$$

注 2.3。如果我们修改 H 和 W 的定义，令 $H = H^1(\mathbb{R}^N)$ 且 $W(u) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$，并相应地重新定义泛函 (2.14)，则用相同的证明可得到类似的收敛结果：泛函 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 的重标度极小化子收敛到方程 $w'' - \Delta w = G(t,x,w)$ 的初值问题的一个解。我们还预期，我们的结果可以推广到 W 为更一般泛函的情形，如 [11, 18] 中所述，从而涵盖形如 $w'' - DW(w) = G(t,x,w)$ 的方程。

3. 一些预备估计

在本节中，假定第 2.1 小节的假设均成立。特别地，以下两个引理给出了假设 (2.3) 和 (2.5) 的一些有用推论。

引理 3.1. 对于每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_F)$，均有

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt \le K^*_F$$

更一般地，对于每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_F)$ 以及每个 $\alpha \ge 0$，均有

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt \le K^*_F(\alpha),$$

其中

$$K^*_F(\alpha) := \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-t/\varepsilon_F}}{\varepsilon_F^{\alpha+1}}\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt + \Gamma(\alpha+1)\,\|f\|^2_{L^\infty((0,\alpha+1);L^2(\mathbb{R}^N))}$$

且 $K_F^* := K_F(0)$。这里， Γ 表示欧拉伽马函数。

证明。 通过变量替换，由于 $\varepsilon_F < 1$ 且映射 $(0,t) \ni \varepsilon \mapsto \varepsilon^{-1}e^{-t/\varepsilon}$ 对每个 $t>0$都是递增的，我们推得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-t}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt &\le \int_0^1 \varepsilon^{-1}e^{-t/\varepsilon}\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt + \int_1^{+\infty} \varepsilon^{-1}e^{-t/\varepsilon}\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt\\ &\le (1-e^{-1/\varepsilon})\,\|f\|^2_{L^\infty((0,1);L^2(\mathbb{R}^N))} + \int_0^{+\infty} \varepsilon_F^{-1}e^{-t/\varepsilon_F}\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt\end{aligned}$$

这就是所需的估计；由于 (2.3) 和 (2.5)，右端有限。采用相同的论证可得更一般的估计，同时考虑到 $\varepsilon_F<1$，映射 $(0,t/(\alpha+1)) \ni \varepsilon \mapsto \varepsilon^{-1-\alpha}t^\alpha e^{-t/\varepsilon}$ 对每个 $t>0$ 都是递增的，并且根据伽马函数的定义， $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t/\varepsilon}\,dt = \varepsilon^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)$。我们注意到，由于 (2.3) 和 (2.5)，对每个 $\alpha\ge 0$ ， $K_F^*(\alpha)$ 都是有限的。 ■

引理 3.2。 对每个 $s>0$ 以及每个 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_F)$，令

$$Q_\varepsilon(s) := \int_0^{+\infty} \varepsilon^{-2}te^{-t/\varepsilon}\|f(t+s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt. \tag{3.1}$$

那么，对于每个 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_F)$，对于每个 $Q_\varepsilon\in L^\infty(0,T)$，我们都有；特别地，

$$\|Q_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T)} \le M_F(T) := \|f\|^2_{L^\infty((0,2T+1);L^2(\mathbb{R}^N))} + \varepsilon_F^{-2}\,e^{T/\varepsilon_F}\int_0^{+\infty} te^{-t/\varepsilon_F}\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt.$$

证明。 我们采用记号 $N_\varepsilon(t) := \varepsilon^{-2}te^{-t/\varepsilon}$ 和 $b_f(t) := \|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$。注意到 $\int_0^{+\infty} N_\varepsilon(t)\,dt = 1$。对于每个 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_F)$、每个 $s>0$ 和每个 $T>0$，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} N_\varepsilon(t)b_f(t+s)\,dt &= \int_0^{T+1} N_\varepsilon(t)b_f(t+s)\,dt + \int_{T+1}^{+\infty} N_\varepsilon(t)b_f(t+s)\,dt\\ &\le \|b_f(\cdot+s)\|_{L^\infty(0,T+1)} + \int_{T+1}^{+\infty} N_{\varepsilon_F}(t)b_f(t+s)\,dt,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式是因为对于每个 $t>0$，$(0,t/2)\ni\varepsilon\mapsto N_\varepsilon(t)$ 是一个递增函数；这里我们有 $\varepsilon_F<1/2<(T+1)/2$。因此，对于每个 $s>0$ 和每个$T>0$

$$\begin{aligned}Q_\varepsilon(s) &\le \|b_f\|_{L^\infty(0,T+1+s)} + \int_{T+s+1}^{+\infty} N_{\varepsilon_F}(t-s)b_f(t)\,dt\\ &\le \|b_f\|_{L^\infty(0,T+1+s)} + \varepsilon_F^{-2}\,e^{s/\varepsilon_F}\int_0^{+\infty} te^{-t/\varepsilon_F}b_f(t)\,dt\end{aligned}$$

并且由于关于 f 的假设，右端有限。这表明，对于每个 $s>0$， $Q_\varepsilon(s)$ 都有定义；此外我们还可推得，对于每个 $T>0$

$$\|Q_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T)} \le \|b_f\|_{L^\infty(0,2T+1)} + \varepsilon_F^{-2}\,e^{T/\varepsilon_F}\int_0^{+\infty} te^{-t/\varepsilon_F}b_f(t)\,dt$$

从而证明了该结果。 ■

引理 3.2 中的函数 Q_ε 定义为一个卷积，因此我们可以推导出它在 $\varepsilon \to 0$ 时的行为。事实上，若 $T > 0$，则有 $Q_\varepsilon \to b_f$ 属于 $L^1(0,T)$，其中 $b_f(t) := \|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$。这是以下逼近引理的推论。

引理 3.3. 设 $N_\varepsilon(t) := \varepsilon^{-2} t e^{-t/\varepsilon}$, $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$. 设 $b \in L^1_{loc}(0,+\infty)$ 和 $\delta > 0$ 满足 $\int_0^{+\infty} e^{-t/\delta}|b(t)|\,dt < +\infty$，并假设对每个 $T > 0$, $b \in L^1(0,T)$。那么，对每个 $s > 0$ 和每个 $\varepsilon \in (0,\delta)$，有 $N_\varepsilon(\cdot) b(\cdot + s) \in L^1(0,+\infty)$。此外，令 $b_\varepsilon(s) := \int_0^{+\infty} N_\varepsilon(t) b(t+s)\,dt$，则对每个 $T > 0$，有 $b_\varepsilon \in L^1(0,T)$，且 $b_\varepsilon \to b$ 属于 $L^1(0,T)$，当 $\varepsilon \to 0$。

证明。对每个 $s > 0$ 和每个 $\varepsilon \in (0,\delta)$，我们有

$$\int_0^{+\infty} N_\varepsilon(t)|b(s+t)|\,dt = \varepsilon^{-2}\int_s^{+\infty}(t-s)e^{-(t-s)/\varepsilon}|b(t)|\,dt \leq \varepsilon^{-2}e^{s/\varepsilon}\int_0^{+\infty} te^{-t/\varepsilon}|b(t)|\,dt < +\infty,$$

并且，如果 $T > 0$，以类似的方式进行估计，我们得到

$$\int_0^T |b_\varepsilon(s)|\,ds = \int_0^T \frac{e^{s/\varepsilon}}{\varepsilon^2}\int_s^{+\infty}(t-s)e^{-t/\varepsilon}|b(t)|\,dt\,ds \leq \frac{Te^{T/\varepsilon}}{\varepsilon^2}\int_0^{+\infty} te^{-t/\varepsilon}|b(t)|\,dt < +\infty$$

从而确实有 $N_\varepsilon(\cdot) b(\cdot + s) \in L^1(0,+\infty)$ 和 $b_\varepsilon \in L^1(0,T)$。对于每个 $\varepsilon \in (0,\delta)$，令 $z \in \mathbb{R}$

$$\tilde{N}_\varepsilon(z) := \delta^{-2}(\delta-\varepsilon)^2 e^{-z/\delta} N_\varepsilon(-z)_{\mathbb{I}_{(-\infty,0]}}(z), \qquad \tilde{b}_\varepsilon(z) := \delta^2(\delta-\varepsilon)^{-2}e^{-z/\delta}b(z)_{\mathbb{I}_{(0,+\infty)}}(z).$$

容易看出，族 $(N_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\delta)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上构成一个逼近单位（见 [1, 2]），并且当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\tilde{b}_\varepsilon \to \tilde{b}$ 在 $L^1(\mathbb{R})$ 中收敛于 $\tilde{b}(z) := e^{-z/\delta}b(z)\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(z)$。因此，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\tilde{N}_\varepsilon * \tilde{b} \to \tilde{b}$ 属于 $L^1(\mathbb{R})$，于是由杨氏卷积不等式可得 $\tilde{N}_\varepsilon * \tilde{b}_\varepsilon \to \tilde{b}$ 属于 $L^1(\mathbb{R})$。但是，对于每个 $s > 0$，我们有

$$(\tilde{N}_\varepsilon * \tilde{b}_\varepsilon)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{N}_\varepsilon(s-z)\tilde{b}_\varepsilon(z)\,dz = e^{-s/\delta}\int_0^{+\infty} N_\varepsilon(t)b(s+t)\,dt = e^{-s/\delta}b_\varepsilon(s) =: b^*_\varepsilon(s),$$

因此 $b^*_\varepsilon \to \tilde{b}$ in $L^1(0,+\infty)$ as $\varepsilon \to 0$，这意味着对于每个 $T > 0$, $b_\varepsilon \to b$ in $L^1(0,T)$，如所声称。 ■

4. 极小元的存在性与欧拉–拉格朗日方程

本节同样假定第 2.1 小节中的假设成立。证明主定理的第一步，是在来自 (2.7)-(2.8) 的类 $\mathcal{U}_\varepsilon$ 中，对来自 (2.14) 的泛函 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 进行最小化。

引理 4.1。令 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_F)$。最小化问题存在一个解

$$\min\left\{\mathcal{J}_\varepsilon(u) : u \in \mathcal{U}^0_\varepsilon\right\}. \tag{4.1}$$

此外，存在一个显式常数 C（仅依赖于 F、w_0 和 w_1），使得若u_ε 是(4.1)的解，则有。

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\left\{\frac{1}{2\varepsilon^2}\|u''_\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + W(u_\varepsilon(t))\right\}dt \leq \bar{C}, \tag{4.2}$$

证明。由于 $\varepsilon<\varepsilon_F<1$，估计式 (2.13) 表明， $\mathcal{J}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{U}_\varepsilon^0$ 上有一个下界，该下界仅依赖于 F、w_0、w_1。

我们注意到，函数 $w_0(x)+t\varepsilon w_1(x)$ 属于 $\mathcal{U}_\varepsilon^0$。此外，由于 $\varepsilon<\varepsilon_F<1/2$，根据柯西-施瓦茨不等式、(2.4) 和引理 3.1，仿照估计 (2.13) 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\varepsilon(w_0+\varepsilon t w_1)&=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-t}\left\{\frac{1}{2}|\nabla w_0+t\varepsilon\nabla w_1|^2+\frac{1}{r}|w_0+\varepsilon t w_1|^r-F(\varepsilon t,x,w_0+\varepsilon t w_1)\right\}\\&\le(\|\nabla w_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\|\nabla w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})+2^{r-1}\Gamma(r+1)(\|w_0\|^r_{L^r(\mathbb{R}^N)}+\|w_1\|^r_{L^r(\mathbb{R}^N)})\\&\quad+C_F+\sqrt{K_F^*}\,(2\|w_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})^{1/2},\end{aligned}$$

特别是， $J_\varepsilon(w_0+t\varepsilon w_1)<+\infty$，因此确有 $\inf\left\{\mathcal{J}_\varepsilon(u):\,u\in\mathcal{U}_\varepsilon^0\right\}\in\mathbb{R}$ 这表明 .

设 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{U}_\varepsilon^0$ 是 (4.1) 的一个极小化序列。不妨假设该极小化序列满足：对每个 n，均有 $\mathcal{J}_\varepsilon(u_n)\le 1+\mathcal{J}_\varepsilon(w_0+t\varepsilon w_1)$。结合对 $J_\varepsilon(w_0+t\varepsilon w_1)$ 的前述估计及 (2.13)，这意味着存在一个显式常数 C，它仅依赖于 F、w_0、w_1，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-t}\left\{\frac{1}{2\varepsilon^2}|u_n''(t,x)|^2+\frac{1}{2}|\nabla u_n(t,x)|^2+\frac{1}{r}|u_n(t,x)|^r\right\}dt\,dx\\&\qquad\le\frac{1}{2}\bar{C}+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-t}|u_n''(t,x)|^2\,dx\,dt,\end{aligned}$$

并且由于 $\varepsilon<\varepsilon_F<1$，我们得出

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-t}\left\{\frac{1}{2\varepsilon^2}|u_n''(t,x)|^2+\frac{1}{2}|\nabla u_n(t,x)|^2+\frac{1}{r}|u_n(t,x)|^r\right\}dt\,dx\le\bar{C}.\tag{4.3}$$

因此，同时考虑 (2.10)-(2.11)，序列 $(e^{-t/2}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $H^2((0,+\infty);\,L^2(\mathbb{R}^N))$ 中一致有界，特别是，经过抽取一个子序列后，它弱收敛于 $L^2((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$ 中某个适当的 v。此外，若 $Q_{T_R}:=(0,T)\times B_R$，其中B_R 是 $\mathbb{R}^N$ 中半径为 R 的球，则可知 u_n u_n' 和 ∇u_n 在$L^2(Q_{T,\,R})$ 中一致有界。因此，经过进一步抽取子序列后，由 Rellich定理， u_n 在 $L^2(Q_{T,\,R})$ 中强收敛于某个适当的 u （从而逐点收敛）。逐点收敛使我们能够识别极限，即 $v=e^{-t/2}u$。根据 (4.3) 以及 L^p 范数的弱下半连续性， u 满足 (4.2)。

我们进一步注意到，由 (2.6) 和引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-t}|F(\varepsilon t,x,u_n(t,x))-F(\varepsilon t,x,u(t,x))|\,dx\,dt\\&\le\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-t}f(\varepsilon t,x)|u_n(x,t)-u(x,t)|\,dx\,dt\\&=\iint_{Q_{R,T}}e^{-t}f(\varepsilon t,x)|u_n(x,t)-u(x,t)|\,dx\,dt+\iint_{Q_{R,T}^c}e^{-t}f(\varepsilon t,x)|u_n(x,t)-u(x,t)|\,dx\,dt\\&\le\sqrt{K_F^*}\left(\iint_{Q_{R,T}}|u_n(t,x)-u(t,x)|^2\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}+\iint_{Q_{R,T}^c}e^{-t}f(\varepsilon t,x)|u_n(x,t)-u(x,t)|\,dx\,dt\end{aligned}$$

对每个 $T>0$、 $R>0$、 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。我们将最后一个积分拆分为在 $(T,+\infty)$ 上的积分 $\times\mathbb{R}^N$加上在 $(0,T)$ 上的积分$\times B_R^c$，并估计如下：

$$\int_T^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}f(\varepsilon t,x)|u_n(x,t)-u(x,t)|\,dx\,dt \le \sqrt{K_F^*}\int_T^{+\infty} e^{-t}\|u_n(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt$$

$$\le \sqrt{K_F^*}\,e^{-T/2}\left(\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}|u_n(t,x)-u(t,x)|^2\,dx\,dt\right)^{\frac12} \le \sqrt{C_*\,K_F^*\,e^{-T}},$$

其中，后一个不等式由（2.11）得出，因为 u_n 满足（4.3），而 u 满足（4.2），令 $C_*=8\|w_0\|^2_{L^2\ (\mathbb{R}^N)}+32\|w_1\|^2_{L^2\ (\mathbb{R}^N)}+128\bar{C}$即可。此外，

$$\int_0^T\int_{B_R^c} e^{-t}f(\varepsilon t,x)|u_n(x,t)-u(x,t)|\,dx\,dt \le \sqrt{C_*}\left(\int_0^T\int_{B_R^c} e^{-t}f(\varepsilon t,x)^2\,dx\,dt\right)^{\frac12}$$

并且，当 $R\to+\infty$时，右端趋于零，因为引理 3.1 表明 $e^{-t}f(\varepsilon t,x)^2$属于 $L^1((0,T)\times\mathbb{R}^N)$。因此，由于 u_n在 $L^2(Q_{R,T})$ 中强收敛到 u，我们得到

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}|F(\varepsilon t,x,u_n(t,x))-F(\varepsilon t,x,u(t,x))|\,dx\,dt$$

$$\le \sqrt{C_*}\left(\int_0^T\int_{B_R^c} e^{-t}f(\varepsilon t,x)^2\,dx\,dt\right)^{\frac12}+\sqrt{C_*\,K_F^*\,e^{-T}},$$

先令 $R\to+\infty$ 趋于极限，再令 $T\to+\infty$ 趋于极限，可得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}F(\varepsilon t,x,u_n(t,x))\,dx\,dt=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}F(\varepsilon t,x,u(t,x))\,dx\,dt.$$

后一个收敛性，加上 L^p 范数的半连续性，使我们能够得出

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u)\le\liminf_{n\to+\infty}\mathcal{J}_\varepsilon(u_n),$$

因此， u是问题（4.1）的解。

最后，假设 u_ε 是问题（4.1）的解。由于 $\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon)\le\mathcal{J}_\varepsilon(w_0+t\varepsilon w_1)$，且我们可以对 $\bar{u}=u_\varepsilon$应用（2.13），重复证明前半部分的论证可得， u_ε 本身满足（4.2）。 ■

在 $\varepsilon\to0$ 的极限下，我们还有关于极小化子的以下估计。

L引理 4.2. 对于每个 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_F)$，设 u_ε 是问题 (4.1) 的一个解。那么

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\int_0^{+\infty} e^{-t}\left\{\frac{1}{2\varepsilon^2}\|u_\varepsilon''(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+W(u_\varepsilon(t))\right\}dt\le W(w_0).$$

证明。 估计 $\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon)\le\mathcal{J}_\varepsilon(w_0+t\varepsilon w_1)$ 可推出

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\left\{\frac{1}{2\varepsilon^2}\|u_\varepsilon''(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+W(u_\varepsilon(t))\right\}dt\le\int_0^{+\infty} e^{-t}W(w_0+\varepsilon tw_1)\,dt+\mathcal{R}_\varepsilon, \tag{4.4}$$

其中 $\mathcal{R}_\varepsilon:=|\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon)-\Phi_\varepsilon(w_0+\varepsilon tw_1)|$，且 Φ_ε 由 (2.12) 定义。我们断言，当 $\varepsilon\to0$时， $\mathcal{R}_\varepsilon$趋于 0。事实上，由 (2.6) 和柯西-施瓦茨不等式可得

$$\mathcal{R}_\varepsilon\le\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt\right)^{\frac12}\left(\int_0^{+\infty}2e^{-t}\|u_\varepsilon(t,\cdot)-w_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt+4\varepsilon^2\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac12}$$

再将 (2.9) 应用两次，并结合 (4.2)，可得

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\|u_\varepsilon(t,\cdot)-w_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt \le 8\varepsilon^2\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 16\int_0^{+\infty} e^{-t}\|u_\varepsilon''(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt$$
$$\le 8\varepsilon^2\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 32\varepsilon^2\bar{C}.$$

由后两个估计以及引理 3.1，可得所述结论。由于显然有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{+\infty} e^{-t}W(w_0+\varepsilon t w_1)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}W(w_0)\,dt = W(w_0),$$

由 (4.4) 可得所需结果。 ■

主定理证明所需的极小化子的一个关键性质将在下一个引理中给出。该引理基于 [10, 11, 18]，的结果，并利用了其中引入的近似能量 估计。证明需要一些技术性预备，因此推迟到附录中。

引理 4.3. 对于每个 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_F)$，令 u_ε 为问题(4.1)的一个解。存在一个常数 Q，它不依赖于 ε，而仅依赖于 w_0, w_1 和 F，使得对每个 $t \ge 0$

$$\int_t^{+\infty}(s-t)e^{-(s-t)}W(u_\varepsilon(s,\cdot))\,ds \le E_\varepsilon(t) \le Q + (28+4\varepsilon t)\int_0^{\varepsilon t} Q_\varepsilon(s)\,ds \tag{4.5}$$

其中，近似能量 E_ε 定义为

$$E_\varepsilon(t) := \frac{1}{2\varepsilon^2}\|u_\varepsilon'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_t^{+\infty}(s-t)e^{-(s-t)}W(u_\varepsilon(s,\cdot))\,ds, \tag{4.6}$$

and 其中， Q_ε 是(3.1)中定义的函数。此外，对每个 $t \ge 0$，都有 s

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\sqrt{E_\varepsilon(t/\varepsilon)} \le \left(\frac{1}{2}\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + W(w_0)\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{t/2}\left(\int_0^t \|f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.7}$$

利用引理 4.3，我们还可以得到以下结果

引理 4.4. 设 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_F)$，并设 u_ε 是问题 (4.1)的一个解。设 $\varphi \in C_c^\infty((0,+\infty))$。¯那么，存在一个常数 Q （仅依赖于 w_0, w_1 和 F），使得以下三个估计成立

$$\int_0^{+\infty}|\xi(t)|e^{-t}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\varepsilon(t,x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}dt \le 2\int_0^{\infty}\left(\bar{Q}+(28+4\varepsilon t)\int_0^{\varepsilon t}Q_\varepsilon(s)\,ds\right)|\varphi(t)|\,dt,$$

$$\int_0^{+\infty}|\xi(t)|e^{-t}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_\varepsilon(t,x)|^r\,dx\right)^{\frac{r-1}{r}}dt \le r\int_0^{\infty}\left(\bar{Q}+(28+4\varepsilon t)\int_0^{\varepsilon t}Q_\varepsilon(s)\,ds\right)|\varphi(t)|\,dt,$$

$$\int_0^{+\infty}|\xi(t)|e^{-t}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt \le \int_0^{\infty}|\varphi(t)|\sqrt{Q_\varepsilon(\varepsilon t)}\,dt,$$

所有积分均为有限值，其中 Q_ε 是由 (3.1) 定义的函数，而 $\xi\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\xi(t) := \int_0^t (t-s)e^s\varphi(s)\,ds. \tag{4.8}$$

证明。 由于 $\varphi \in C_c^\infty((0,+\infty))$，并且根据引理 3.2，三个估计式右侧均为有限值。

我们来证明第二个估计。由于对每个 $r>1$ 和每个 $x\geq 0$，$(rx)^{(r-1)/r}\leq r(1+x)$，结合式 (4.8) 并利用富比尼定理，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty |\xi(t)|e^{-t}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_\varepsilon(t,x)|^r\,dx\right)^{\frac{r-1}{r}}\,dt \leq \int_0^\infty |\xi(t)|e^{-t}\left(rW(u_\varepsilon(t,\cdot))\right)^{\frac{r-1}{r}}\,dt\\
&\leq r\int_0^\infty |\xi(t)|e^{-t}(1+W(u_\varepsilon(t,\cdot)))\,dt = r\int_0^\infty \left|\int_0^t (t-s)e^s\varphi(s)\,ds\right| e^{-t}(1+W(u_\varepsilon(t,\cdot)))\,dt\\
&\leq r\int_0^\infty\int_0^t (t-s)|\varphi(s)|e^{-t+s}(1+W(u_\varepsilon(t,\cdot)))\,ds\,dt\\
&= r\int_0^\infty |\varphi(s)|\,ds\int_s^\infty (t-s)e^{-(t-s)}(1+W(u_\varepsilon(t,\cdot)))\,dt
\end{aligned}$$

于是，令 $Q:=Q+1$，其中 Q 是其中的常数，由引理 4.3 中的式 (4.5) 可得陈述中的第二个估计。第一个估计的证明方法相同。为验证第三个估计，我们注意到，根据詹森不等式

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}|\xi(t)|e^{-t}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt &\leq \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t (t-s)e^s|\varphi(s)|\,ds\right)e^{-t}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt\\
&= \int_0^{+\infty}|\varphi(s)|\left(\int_s^{+\infty}(t-s)e^{-(t-s)}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt\right)ds\\
&\leq \int_0^{+\infty}|\varphi(s)|\left(\int_s^{+\infty}(t-s)e^{-(t-s)}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt\right)^{\frac12}ds
\end{aligned}$$

这就是所需的结果，因为

$$Q_\varepsilon(\varepsilon s)=\int_0^{+\infty}\varepsilon^{-2}te^{-t/\varepsilon}\|f(t+\varepsilon s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,ds=\int_s^{+\infty}(t-s)e^{-(t-s)}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt$$

由变量代换可得。 ∎

我们给出问题 (4.1) 的一个解所满足的一阶极小性条件。需要强调的是，该条件的推导利用了引理 4.3 和引理 4.4；这两个引理运用了附录中的结果，而这些结果同样基于一阶变分论证，只是采用了对极小化器的另一种扰动。

引理 4.5。 设 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_F)$，且 u_ε 是问题 (4.1) 的一个解。设 $\varphi\in C_c^\infty((0,+\infty))$，并令 ξ 由 (4.8) 定义。设 $h\in H$。则有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-t}u_\varepsilon''(t,x)\xi''(t)h(x)\,dx\,dt+\int_0^{+\infty}e^{-t}\xi(t)\left(DW(u_\varepsilon(t,\cdot)),h\right)dx\,dt\\
&\qquad-\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-t}\,G(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))\,\xi(t)h(x)\,dx\,dt=0.
\end{aligned}\tag{4.9}$$

证明。 我们首先考虑映射

$$(-1,1)\ni\delta\mapsto\frac1r\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-t}|u_\varepsilon(t,x)+\delta\xi(t)h(x)|^r\,dx\,dt.$$

这里，对于每个 $\delta \in (-1,1)$，积分都是有限的，因为 $e^{-t}|u_\varepsilon(t,x)|^r$ 和 $e^{-t}|\xi(t)h(x)|^r$都属于 $L^1((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$，这是由于 u_ε 满足 (4.2)，并且对每个 $t>0$，都有 $|\xi(t)|\le C_\varphi^* t$，其中 $C_\varphi^* := \int_0^{+\infty} e^s|\varphi(s)|\,ds$。我们声称，这样的映射在$\delta=0$ 处可微，更准确地说，

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta r}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}\left(|u_\varepsilon(t,x)+\delta\xi(t)h(x)|^r-|u_\varepsilon(t,x)|^r\right)\,dx\,dt$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}\xi(t)h(x)|u_\varepsilon(t,x)|^{r-2}u_\varepsilon(t,x)\,dx\,dt$$

事实上，虽然被积函数几乎处处逐点收敛是显然的（因为 $r>1$），但由拉格朗日定理可知，对每个 $0<|\delta|<1$

$$e^{-t}\left|\frac{|u_\varepsilon(t,x)+\delta\xi(t)h(x)|^r-|u_\varepsilon(t,x)|^r}{\delta r}\right|\le e^{-t}(|u_\varepsilon(t,x)|+|\xi(t)h(x)|)^{r-1}|\xi(t)h(x)|$$
$$\le e^{-t}(1\vee 2^{r-2})\left(|u_\varepsilon(t,x)|^{r-1}+|\xi(t)h(x)|^{r-1}\right)\,|\xi(t)h(x)|,$$

其中右端可积，因为 $e^{-t}|\xi(t)h(x)|^r\in L^1((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$，正如前面所观察到的，并且

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}|u_\varepsilon(t,x)|^{r-1}|\xi(t)h(x)|\,dx\,dt\le\|h\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\int_0^{+\infty} e^{-t}|\xi(t)|\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}^{r-1}$$

$dt<+\infty$，这要归功于引理 4.4。因此，由控制收敛定理可得所述结论。同样的论证表明

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}\left(|\nabla u_\varepsilon(t,x)+\delta\xi(t)\nabla h(x)|^2-|\nabla u_\varepsilon(t,x)|^2\right)\,dx\,dt$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}\xi(t)\nabla h(x)\cdot\nabla u_\varepsilon(t,x)\,dx\,dt.$$

另一方面，我们有

$$\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}|u_\varepsilon''(t,x)+\delta\xi''(t)h(x)|^2\,dx\,dt=\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}|u_\varepsilon''(t,x))|^2\,dx\,dt$$
$$+\frac{\delta}{\varepsilon^2}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}u_\varepsilon''(t,x)\xi''(t)h(x)\,dx\,dt+\frac{\delta^2}{2\varepsilon^2}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}|\xi''(t)h(x)|^2\,dx\,dt,$$

其中所有积分均为有限值，这要归功于柯西-施瓦茨不等式、式 (4.2)，以及 $\xi''(t)=e^t\varphi(t)$ 这一事实，因此 $\xi''\in C_c^\infty((0,+\infty))$。于是

$$\left.\frac{d}{d\delta}\right|_{\delta=0}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}|u_\varepsilon''(t,x)+\delta\xi''(t)h(x)|^2\,dx\,dt=2\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}\xi''(t)h(x)u_\varepsilon''(t,x)\,dx\,dt.$$

此外，映射 $\delta\mapsto\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x)+\delta\xi(t)h(x))\,dx\,dt$ 在$\delta=0$ 处可微，其导数等于

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}G(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))\,\xi(t)h(x)\,dx\,dt.$$

这个 c 也可以通过控制收敛定理看出这一点。事实上，(2.1) 和 (2.2) 意味着 taanna. t

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x)+\delta\xi(t)h(x))-F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))}{\delta}=G(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))\,\xi(t)h(x)$$

对于几乎处处的 $(t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$，为了找到一个支配函数，我们注意到 (2.6) 蕴含着

$$e^{-t}\,\frac{|F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x)+\delta\xi(t)h(x))-F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))|}{|\delta|}\le e^{-t}f(\varepsilon t,x)|\xi(t)||h(x)|$$

其中右端在 $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$ 上可积，因为由 (2.5)，对每个 $t>0$ 都有 $|\xi(t)|\le C^*_\varphi t$，从而得到

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}f(\varepsilon t,x)|\xi(t)|h(x)|\,dx\,dt \le \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}|\xi(t)|^2\|f(\varepsilon t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac12}<+\infty.$$

我们得出，映射 $(-1,1)\ni\delta\mapsto\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon+\delta\xi h)$ 在 $\delta=0$ 处可微。由于$\xi(0)=\xi'(0)=0$，对每个 $\delta\in(-1,1)$ 都有 $u_\varepsilon+\delta\xi h\in\mathcal{U}^0_\varepsilon$；又由于 u_ε 是 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{U}^0_\varepsilon$ 上的极小化器，我们推得 (4.9) 成立。

■

最后，我们说明，如果没有类似 (2.5) 的增长假设，我们的主要结果便无法实现，因为能量泛函 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{U}^0_\varepsilon$ 上很容易无下界。为简单起见，我们考虑 $F(t,x,v)=b(t,x)\,v$ 的情形，此时第 2.1 小节中关于F的假设可简化为：对每个 $T>0$，都有 $b\in L^\infty((0,T);L^2(\mathbb{R}^N))$，且映射 $t\mapsto\|b(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ 可进行拉普拉斯变换。

命题 *4.6.* 设 $\varepsilon>0$。假设 $F(t,x,v)=\eta(t)\varphi(x)\,v$，其中 $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^N)$ 非负，且 $\eta\in L^1_{loc}(0,+\infty)$ 非负，并且对每个 $T>0$ 都有 $\eta\in L^\infty(0,T)$。设 $w_1\in H$ 非负，令 $w_0\in H$，并假设 $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)w_0(x)\,dx>0$。假设 η 不可进行拉普拉斯变换，即对每个 $\delta>0$ 都有 $\int_0^{+\infty}e^{-t/\delta}\eta(t)\,dt=+\infty$。则 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{U}^0_\varepsilon$ 上无下界。

证明。等价地，我们证明泛函 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{V}^0_\varepsilon$ 上无下界（见注 2.2）。按照对 F 的给定选择，式 (2.2) 中的函数 f 为 $f(t,x)=\eta(t)\varphi(x)$，且假设 (2.1)、(2.3) 和 (2.4) 显然成立。另一方面，由詹森不等式，映射 $t\mapsto\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ 不可进行拉普拉斯变换，因此 (2.5) 不成立。对每个 $n\in\mathbb{N}$，令 $w_n(t,x):=w_0(x)\zeta_n(t)+tw_1(x)\zeta_n(t)$，其中 $\zeta_n(t):=\zeta(2^{-n}t)$ 且 $\zeta\colon[0,+\infty)\to[0,1]$ 光滑、递减、具有紧支集，并满足以下性质：对每个 $t\in[0,1]$ 都有 $\zeta(t)=1$，且对每个 $t\in[0,+\infty$ 都有 $|\zeta'(t)|+|\zeta''(t)|\le 1$)。因此，当 $n\to+\infty$ 时，序列 $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上逐点单调收敛到 1，并且序列 $(\zeta_n')_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(\zeta_n'')_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上逐点收敛到 0。显然，对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $w_n\in\mathcal{V}^0_\varepsilon$。由于

$$w_n''(t,x)=w_0(x)\zeta_n''(t)+2w_1(x)\zeta_n'(t)+t\zeta_n''(t)w_1(x),$$

由控制收敛可知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-t/\varepsilon}|w_n''(t,x)|^2\,dx\,dt=0,$$

类似地

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-t/\varepsilon}W(w_n(t,\cdot))\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-t/\varepsilon}W(w_0+tw_1)\,dt.$$

另一方面，令 $C_0 := \int_{\mathbb{R}^N} w_0(x)\varphi(x)\,dx > 0$，则有

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon}F(\varepsilon t,x,w_n(t,x))\,dx\,dt\\&\quad=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon}\eta(\varepsilon t)\varphi(x)(w_0(x)\zeta_n(t)+tw_1(x)\zeta_n(t))\,dx\,dt \ge C_0\int_0^{+\infty} e^{-t/\varepsilon}\eta(\varepsilon t)\zeta_n(t)\,dt\end{aligned}$$

其中，右端通过单调收敛趋于 $+\infty$，当 $n\to+\infty$ 时。由此我们得出 $\lim_{n\to+\infty}\mathcal{F}_\varepsilon(w_n) = -\infty$. ■

5. 主要结果的证明

我们现在给出定理 2.1 的证明。通过运用我们在 [9]中介绍的一些论证，可以得到问题（4.1）的解在 $W^{2,\infty}((0,T);\,H')$ 中的关键估计。

定理 2.1 的证明。设 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_F)$，并设 u_ε 是问题（4.1）的一个解。令 $w_\varepsilon(t,x) := u_\varepsilon(t/\varepsilon,x)$，使得 w_ε 在 $\mathcal{V}_\varepsilon^0$ 上使泛函 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 取得最小值（见注 2.2）。设 $\varphi\in C_c^\infty((0,+\infty))$，并令 ξ 由（4.8）定义。设 $h\in H$。对于每个 $\delta\in\mathbb{R}$，函数 $u_\varepsilon(t,x)+\delta\xi(t)h(x)$ 属于 $\mathcal{U}_\varepsilon^0$，并且根据引理 4.5，（4.9）成立。

步骤 1。 $W^{2,\infty}((0,T);\,H')$ 界。由 Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{+\infty}\xi(t)e^{-t}(DW(u_\varepsilon(t,\cdot)),h)\,dt\right|\\&\quad\le\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}|\xi(t)|(|\nabla u_\varepsilon(t,x)||\nabla h(x)|+|u_\varepsilon(t,x)|^{r-1}|h(x)|)\,dx\,dt\\&\quad\le\|\nabla h\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\int_0^{+\infty}e^{-t}|\xi(t)|\,\|\nabla u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt\\&\qquad+\|h\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\int_0^{+\infty}e^{-t}|\xi(t)|\,\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}^{r-1}\,dt,\end{aligned}$$

由 (4.9) 可知，由于 $\xi''(t)e^{-t}=\varphi(t)$，并且利用 (2.5)，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\infty}\varphi(t)\int_{\mathbb{R}^N}u_\varepsilon''(t,x)h(x)\,dx\,dt\right| &\le \varepsilon^2\|\nabla h\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\int_0^{+\infty}e^{-t}|\xi(t)|\,\|\nabla u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt\\&\quad+\varepsilon^2\|h\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\int_0^{+\infty}e^{-t}|\xi(t)|\,\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}^{r-1}\,dt\\&\quad+\varepsilon^2\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\int_0^{+\infty}|\xi(t)|e^{-t}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt.\end{aligned}$$

因此，由引理 4.4 可得

$$\left|\int_0^{\infty}\varphi(t)\int_{\mathbb{R}^N}u_\varepsilon''(t,x)h(x)\,dx\,dt\right|\le\varepsilon^2\|h\|_H\int_0^{\infty}\Theta_\varepsilon(\varepsilon t)|\varphi(t)|\,dt, \tag{5.1}$$

其中

$$\Theta_\varepsilon(\tau) := (2+r)\left(\bar{Q}+(28+4\tau)\int_0^\tau Q_\varepsilon(s)\,ds\right)+\sqrt{Q_\varepsilon(\tau)},$$

并且我们注意到，利用引理 3.2 可得

$$\|\Theta_\varepsilon\|_{L^\infty(0,\tau)}\le\sqrt{M_F(\tau)}+(2+r)(\bar{Q}+\tau(28+4\tau)M_F(\tau)) =: \bar{M}_F(\tau) \tag{5.2}$$

¯对每个 $\tau > 0$均成立。我们强调， $M_F(\tau)$ 仅依赖于 τ, w_0, w_1 和 F，而不依赖于 ε。若 $T > 0$ 且 $\tilde{\varphi} \in C_c^\infty((0,T))$，则可将测试函数 $\varphi \in C_c^\infty((0,+\infty))$（定义为 $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(\varepsilon t)$）代入 (5.1)。这样，通过变量替换可得

$$\begin{aligned}\varepsilon \left| \int_0^{+\infty} \tilde{\varphi}(t) \int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon''(t,x) h(x)\, dx\, dt \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \varphi(t) u_\varepsilon''(t,x)\, dx\, dt \right| \\ &\le \varepsilon^2 \|h\|_H \int_0^{+\infty} \Theta_\varepsilon(\varepsilon t) |\tilde{\varphi}(\varepsilon t)|\, dt = \varepsilon \|h\|_H \int_0^T \Theta_\varepsilon(t) |\tilde{\varphi}(t)|\, dt\end{aligned}$$

因此，由于 $\tilde{\varphi}$ 的支集包含于 $(0,T)$，由 (5.2) 可得

$$\left| \int_0^T \tilde{\varphi}(t) \int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon''(t,x) h(x)\, dx\, dt \right| \le \|h\|_H\, \bar{M}_F(T) \int_0^T |\tilde{\varphi}(t)|\, dt.$$

对所有满足 $\int_0^T |\tilde{\varphi}(t)|\, dt \le 1$的测试函数 $\tilde{\varphi} \in C_c^\infty((0,T))$ 取上确界，可得

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon''(t,x) h(x)\, dx \right\|_{L^\infty(0,T)} \le \bar{M}_F(T)\, \|h\|_H. \tag{5.3}$$

由于 $w_\varepsilon \in H^2_{loc}([0,+\infty);\, L^2(\mathbb{R}^N))$ 且 $w_\varepsilon'(0,\cdot) = w_1(\cdot)$，对每个 $t \ge 0$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon'(t,x) h(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} w_1(x) h(x)\, dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon''(\tau,x) h(x)\, dx\, d\tau \tag{5.4}$$

因此我们得到

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon'(\cdot,x) h(x)\, dx \right\|_{L^\infty(0,T)} \le \left(\|w_1\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + T \bar{M}_F(T) \right) \|h\|_H, \tag{5.5}$$

类似地

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon(\cdot,x) h(x)\, dx \right\|_{L^\infty(0,T)} \le \left(\|w_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + T\|w_1\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + T^2 \bar{M}_F(T) \right) \|h\|_H. \tag{5.6}$$

估计式 (5.3)-(5.5)-(5.6) 对每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_F)$ 都成立，因此族 $(w_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_F)}$在 $W^{2,\infty}((0,T);\, H')$ 中一致有界。于是，沿着一个适当的趋零序列 $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \varepsilon_F)$，它在 $H^2((0,T);\, H')$ 中弱收敛到某个 $w \in W^{2,\infty}((0,T);\, H')$，因此该收敛在 $(0,T) \times \mathbb{R}^N$ 上按分布意义成立。此外，由于族 $(\int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon'(\cdot,x) h(x)\, dx)_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_F)}$ 在 $H^1((0,T))$ 中有界，沿着一个进一步的子序列，它在 $[0,T]$ 上一致收敛，因此我们可以在 (5.4) 中取极限，得到

$$\langle w'(t,\cdot), h(\cdot) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} w_1(x) h(x)\, dx + \int_0^t \langle w''(\tau,\cdot), h(\cdot) \rangle\, d\tau \qquad \text{for every } t \in [0,T],$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 H' 与 H之间的对偶配对。通过在 $t = 0$ 处取值，我们将 $w'(0,\cdot)$ 识别为 H'中的 w_1，因为 $h \in H$ 是任意的。因此， $w'(0,x) = w_1(x)$ 在 $\mathbb{R}^N$中几乎处处成立。类似地，我们得到 $w(0,x) = w_0(x)$ 在 $\mathbb{R}^N$中几乎处处成立。

步骤 2. 进一步的先验估计。由于 $w_\varepsilon(t,x) := u_\varepsilon(t/\varepsilon, x)$，由引理 4.3 可推出，对每个 $t > 0$

$$\frac{1}{2} \|w_\varepsilon'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le Q + (28t + 4t^2)\, \|Q_\varepsilon\|_{L^\infty(0,t)} \le Q + (28t + 4t^2)\, M_F(t) \tag{5.7}$$

其中 Q 是其中的常数；这里也用到了引理 3.2，因此 (5.7) 的右端仅依赖于 F、w_0、w_1 和 t，而不依赖于 ε。对每个 $T>0$，我们可以写出

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|w_\varepsilon(t,x)|^2\,dx\,dt &\le 2T\|w_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|w_\varepsilon(t,x)-w_0(x)|^2\,dx\,dt\\ &= 2T\|w_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_0^t w_\varepsilon'(s,x)\,ds\right|^2 dx\,dt.\end{aligned}$$

通过应用 (5.7) 和詹森不等式，我们推得存在常数 C_T（仅依赖于 w_0、w_1、F 和 T），使得

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|w_\varepsilon(t,x)|^2\,dx\,dt\le C_T. \tag{5.8}$$

由 (5.7) 和 (5.8)，族 $(w_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_F)}$ 在 $H^1((0,T);L^2(\mathbb{R}^N))$ 中一致有界。此外，按照公式 (2.9) 的证明中的论证，对每个 $s\in[0,1]$，我们得到（考虑引理 4.1 中的估计 (4.2)）

$$\begin{aligned}\int_s^{s+1}W(u_\varepsilon(t,\cdot))\,dt &\le e^2\int_0^\infty e^{-t}W(w_\varepsilon(t,\cdot))\,dt\\ &\le \int_0^{+\infty}e^{-t}\left\{\frac{1}{2\varepsilon^2}\|u_\varepsilon''(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+W(u_\varepsilon(t))\right\}dt\le \bar C\end{aligned} \tag{5.9}$$

再回顾引理 4.3 和引理 3.2，由于 $\min_{x\in[1,2]}xe^{-x}=2e^{-2}$，对每个 $s>1$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_s^{s+1}W(u_\varepsilon(t,\cdot))\,dt &\le \frac{e^2}{2}\int_s^{s+1}(t-s+1)e^{-(t-s+1)}W(w_\varepsilon(t,\cdot))\,dt\\ &\le \frac{e^2}{2}\int_{s-1}^{+\infty}(t-s+1)e^{-(t-s+1)}W(w_\varepsilon(t,\cdot))\,dt\\ &\le \frac{Qe^2}{2}+\frac{e^2}{2}(28+4\varepsilon s)\int_0^{\varepsilon s}Q_\varepsilon(\tau)\,d\tau\le \frac{Qe^2}{2}+\frac{e^2}{2}(28+4\varepsilon s)\,M_F(\varepsilon s)\,\varepsilon s,\end{aligned}$$

因此，对每个 $s\ge0$，我们得到估计

$$\int_s^{s+1}W(u_\varepsilon(t,\cdot))\,dt\le\max\left\{\bar C,\ \frac{Qe^2}{2}+\frac{e^2}{2}(28+4\varepsilon s)\,M_F(\varepsilon s)\,\varepsilon s\right\}.$$

由于 $u_\varepsilon(t,\cdot)=w_\varepsilon(\varepsilon t,\cdot)$，通过变量替换，对每个 $\tau\ge0$，我们得到

$$\int_\tau^{\tau+\varepsilon}W(w_\varepsilon(t,\cdot))\,dt\le\varepsilon\,\max\left\{\bar C,\ \frac{Qe^2}{2}+\frac{e^2}{2}(28+4\tau)\,\tau\,M_F(\tau)\right\}. \tag{5.10}$$

因此，若 $T\ge\varepsilon$，将 $[0,T]$ 划分为长度为 ε 的连续区间，并在每个区间内使用 (5.10)，可得

$$\int_0^T W(w_\varepsilon(t,\cdot))\,dt\le\tilde C_T,$$

˜其中 C_T 是仅依赖于 w_0、w_1、F 和 T 的常数。特别地，再结合 (5.8)，族 $(w_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_F)}$ 在 $L^r((0,T)\times\mathbb{R}^N)$ 和 $L^2((0,T);H^1(\mathbb{R}^N))$ 中一致有界。

步骤 3. 收敛到非线性波动方程。综上可知，存在一个趋零序列 $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset(0,\varepsilon_F)$，使得 w_{ε_n} 在 $H^1((0,T)\times B_R)$ 中弱收敛

并且对于每个 $T>0$、每个 $R>0$ 和每个 $q\in[2,r)$ $(q=2 \text{ if } r\le 2)$，在 $L^q((0,T)\times B_R)$ 中强收敛，在 $L^2((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$ 中弱收敛，并且在 $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$ 上几乎处处逐点收敛于某个 w，该 w 属于 $\in H^1((0,T);\, L^2(\mathbb{R}^N))\cap H^2((0,T);\, H')$，对每个 $T>0$ 均成立。现在令 $\eta\in C_c^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)$。那么，通过设定 $\psi_\varepsilon(t,x):=\eta(t,x)e^{t/\varepsilon}$，并考虑到泛函 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 的极小化器 w_ε 所满足的一阶极小性条件（其类似于（4.9））， 我们有

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon'(t,x)\left(\varepsilon^2\eta'''(t,x)+2\varepsilon\eta''(t,x)+\eta'(t,x)\right)dx\,dt\\
&\quad=-\varepsilon^2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon'(t,x)\left(\psi_\varepsilon''(t,x)\,e^{-t/\varepsilon}\right)'dx\,dt\\
&\quad=\varepsilon^2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon''(t,x)\psi_\varepsilon''(t)\,e^{-t/\varepsilon}\,dx\,dt=\varepsilon^2\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon''(t,x)\psi_\varepsilon''(t,x)\,e^{-t/\varepsilon}\,dt\\
&\quad=-\int_0^{+\infty}(DW(w_\varepsilon(t,\cdot)),\psi_\varepsilon(t,\cdot))\,e^{-t/\varepsilon}\,dt+\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\psi_\varepsilon(t,x)\,G(t,x,w_\varepsilon(t,x))\,e^{-t/\varepsilon}\,dx\,dt\\
&\quad=-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\nabla w_\varepsilon(t,x)\cdot\nabla\eta(t,x)\,dx\,dt-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|w_\varepsilon(t,x)|^{r-2}\,w_\varepsilon(t,x)\eta(t,x)\,dx\,dt\\
&\qquad+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}G(t,x,w_\varepsilon(t,x))\,\eta(t,x)\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

由于 $w_{\varepsilon_n}\to w$ 在分布意义下且在 $(0,T)\times\mathbb{R}^N$ 上几乎处处逐点成立，我们令 $n\to+\infty$ 趋于极限，得到对每个 $\eta\in C_c^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{R^N}(-w'(t,x)\eta'(t,x)+\nabla w(t,x)\cdot\nabla\eta(t,x)+|w(t,x)|^{r-2}w(t,x)\eta(t,x))\,dx\,dt\\
&\qquad=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}G(t,x,w(t,x))\eta(t,x)\,dx\,dt,
\end{aligned}
$$

即，

$$
w''=\Delta w-|w|^{r-2}w+G(t,x,w)\quad\text{in }\mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^N),
$$

而 T 的任意性使我们可以得出结论。为了取极限，对于涉及 G 的项，我们利用 (2.1)-(2.2)-(2.3) 并应用控制收敛定理。另一方面，对于涉及 $|w_{\varepsilon_n}|^{r-2}\,w_{\varepsilon_n}$ 的项，我们利用了 w_{ε_n} 在 $L^q((0,T)\times B_R)$ 中的强收敛，其中对每个 $1<q<r$ $(q=2$ 若 $r\le 2)$ 均成立。

步骤 4. 能量不等式。这里的证明与 [18]完全相同。由 (4.6) 和 [11,引理 6.1]，我们得到对每个 $a>0$、每个 $\delta\in(0,1)$ 以及每个 $T\ge 0$

$$
\int_0^{a\delta}se^{-s}\,ds\int_{T+\delta a}^{T+a}W(u_\varepsilon(s,\cdot))\,ds\le\int_T^{T+a}\left(E_\varepsilon(s)-\frac{1}{2\varepsilon^2}\|u_\varepsilon'(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)ds,
$$

经过缩放和变量替换，并回忆起 $u_\varepsilon(t,x)=w_\varepsilon(\varepsilon t,x)$，可得

$$
\int_0^{a\delta/\varepsilon}te^{-t}\,dt\int_{T+\delta a}^{T+a}W(w_\varepsilon(t,\cdot))\,dt+\frac{1}{2}\int_T^{T+a}\|w_\varepsilon'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt\le\int_T^{T+a}E_\varepsilon(t/\varepsilon)\,dt.
$$

我们令 $\varepsilon\to 0$ 取极限：在前面的步骤中，我们已经证明，沿着一个适当的趋零序列，w_ε 在 $L^2((0,T_0);\, H^1(\mathbb{R}^N))$ 中弱收敛到 w，且在

$H^1((0,T_0);\, L^2(\mathbb{R}^N))$ 和 $L^r((0,T_0)\times\mathbb{R}^N)$ 中，对每个 $T_0>0$ 都成立。因此，由 L^p 范数的弱下半连续性，我们推得

$$\int_{T+\delta a}^{T+a} W(w(t,\cdot))\,dt+\frac{1}{2}\int_{T}^{T+a}\|w'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt\le\int_{T}^{T+a}\limsup_{\varepsilon\to 0}E_\varepsilon(t/\varepsilon)\,dt$$

其中，右侧使用了 Fatou 引理。令 $\delta\to 0$ 趋于极限，并考虑 (4.7)，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a}\int_{T}^{T+a} W(w(t,\cdot))\,dt+\frac{1}{2a}\int_{T}^{T+a}\|w'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt\\&\quad\le\frac{1}{a}\int_{T}^{T+a}\left(\left(\frac{1}{2}\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+W(w_0)\right)^{\frac12}+\sqrt{t/2}\left(\int_0^t\|f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,ds\right)^{\frac12}\right)^2 dt\end{aligned}$$

对于每个 $T\ge 0$ 和每个 $a>0$。令 $a\to 0$，即可得到 (2.15)。 ■

6. 附录

本附录的主要目的是证明以下技术引理，该引理是将一些关键估计从 [18] 调整到我们的框架中所必需的；随后证明引理 4.3

引理 *6.1.* 设 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_F)$，且 $u_\varepsilon\in\mathcal{U}^0_\varepsilon$。设 $g\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个 C^1 函数。假设存在 $c_0>0$，使得 $|g(t)|\le c_0 t$ 对每个 $t\ge 0$ 都成立，并且 $|g'(t)|\le c_0$ 对每个$t\ge 0$ 都成立。设 $0<\delta_0<\frac{\varepsilon_F-\varepsilon}{c_0\varepsilon_F}$。对于每个 $\delta\in(-\delta_0,\delta_0)$，令 $g_\delta\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 由$g_\delta(t)=t-\delta g(t)$ 定义。那么，映射

$$(-\delta_0,\delta_0)\ni\delta\mapsto\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-t}F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(g_\delta(t),x))\,dx\,dt \tag{6.1}$$

在 $\delta=0$ 处可微，其导数为

$$-\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} g(t)\,e^{-t}\,\frac{\partial F}{\partial v}(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))\,u'_\varepsilon(t,x)\,dx\,dt, \tag{6.2}$$

且映射

$$(-\delta_0,\delta_0)\ni\delta\mapsto\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-t}F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(g_\delta(t),x)+t\delta\varepsilon g'(0)w_1(x))\,dx\,dt$$

在 $\delta=0$ 处可微，其导数为

$$-\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}\,\frac{\partial F}{\partial v}(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))\,(g(t)\,u'_\varepsilon(t,x)-t\varepsilon g'(0)\,w_1)\,dx\,dt. \tag{6.3}$$

证明。注意到，$e^{-t}F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))\in L^1((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$ 可由 $u_\varepsilon\in\mathcal{U}^0_\varepsilon$ 推出，正如引理 4.1 的证明中所示，参见 (2.13)。我们先检查，对于每个 $\delta\in(-\delta_0,\delta_0)$，$e^{-t}F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(g_\delta(t)\ x))\in L^1((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$ 也成立，从而映射 (6.1) 定义良好。为得到这一性质，首先需要指出：

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-t}F(\varepsilon t,x,w_0(x))\,dx\,dt\le C_F+K_F^*\|w_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

作为关于 F 的假设的直接推论，利用 (2.6)、詹森不等式和引理 3.1。我们注意到，对每个 $\delta\in(-\delta_0,\delta_0)$，$g_\delta$ 是一个严格递增的双射，且 C^1

其逆映射。此外，由于对每个 $T>0$， $u_\varepsilon \in H^2((0,T);\, L^2(\mathbb{R}^N))$，我们有 $s \mapsto u_\varepsilon(s,x)$ 在 $[0,T]$ 上几乎处处关于 $x \in \mathbb{R}^N$ 绝对连续。因此，再利用 (2.6)，可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}|F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(g_\delta(t),x))|\,dx\,dt\\
&\quad=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}|F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(g_\delta(t),x))-F(\varepsilon t,x,w_0(x))+F(\varepsilon t,x,w_0(x))|\,dx\,dt\\
&\quad\le C_F+K_F^*\|w_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}f(\varepsilon t,x)|u_\varepsilon(g_\delta(t),x)-u_\varepsilon(0,x)|\,dx\,dt\\
&\quad\le C_F+K_F^*\|w_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}f(\varepsilon t,x)\int_0^{g_\delta(t)}|u_\varepsilon'(s,x)|\,ds\,dx\,dt
\end{aligned}$$

并且我们需要检查最后一个积分是否有限：通过两次应用柯西-施瓦茨不等式，可将其上界估计为

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t+g_\delta(t)/2}f(\varepsilon t,x)\int_0^{g_\delta(t)} e^{-s/2}|u_\varepsilon'(s,x)|\,ds\,dx\,dt\\
&\quad\le\int_0^{+\infty} e^{-t+g_\delta(t)/2}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_0^{g_\delta(t)} e^{-s/2}|u_\varepsilon'(s,x)|\,ds\right)^2 dx\right)^{\frac12} dt\\
&\quad\le\int_0^{+\infty} e^{-t+g_\delta(t)/2}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\sqrt{g_\delta(t)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{+\infty} e^{-s}|u_\varepsilon'(s,x)|^2\,ds\,dx\right)^{\frac12} dt,
\end{aligned}\tag{6.4}$$

其中，在 $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$ 上的内部积分有限，这是由 (2.10) 得出的，因为 $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon^0$；并且注意到，对于每个 $t\ge 0$， $g_\delta(t)=t-\delta g(t)\le(1+\delta_0 c_0)t\le 2t$，因此

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} e^{-t+g_\delta(t)/2}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\sqrt{g_\delta(t)}\,dt\\
&\qquad\le\varepsilon^{-3/2}\int_0^{+\infty}\sqrt{2t}\,e^{-\frac{1-\delta_0 c_0}{2\varepsilon}t}\,\|f(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt<+\infty
\end{aligned}\tag{6.5}$$

这是由条件 (2.5) 得出的，因为限制 $\delta_0<\frac{\varepsilon_F-\varepsilon}{c_0\varepsilon_F}$ 导致 $\frac{1-\delta_0 c_0}{2\varepsilon}>\frac{1}{2\varepsilon_F}$。类似地，我们可以证明 $e^{-t}F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(g_\delta(t)\ x)+t\delta\varepsilon g'(0)w_1(x))\in L^1((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$。事实上，由 (2.6) 可知，对于几乎处处的 $(t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$

$$|F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(g_\delta(t),x)+t\delta\varepsilon g'(0)w_1(x))-F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(g_\delta(t),x))|\le|t\delta\varepsilon g'(0)w_1(x)|f(\varepsilon t,x)$$

因此，我们只需证明 $te^{-t}f(\varepsilon t,x)w_1(x)$ 属于 $L^1((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$；这可由引理 3.1 和 $w_1\in L^2(\mathbb{R}^N)$ 立即推出，因为根据杨氏不等式

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} te^{-t}f(\varepsilon t,x)|w_1(x)|\,dx\,dt&\le\frac12\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} te^{-t}(f(\varepsilon t,x)^2+|w_1(x)|^2)\,dx\,dt\\
&\le\frac12 K_F^*(1)+\frac12\|w_1\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2.
\end{aligned}\tag{6.6}$$

我们也不　注意到 (6.2) 中的被积函数确实属于 $L^1((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$，因为由 (2.5) 可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |g(t)|\, e^{-t} \left|\frac{\partial F}{\partial v}(\varepsilon t, x, u_\varepsilon(t,x))\right| |u'_\varepsilon(t,x)|\, dx\, dt \\
&\quad\le \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |g(t)|\, e^{-t}\, f(\varepsilon t, x)\, u'_\varepsilon(t,x)\, dx\, dt \\
&\quad\le \left(\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}|g(t)|^2 f(\varepsilon t,x)^2\, dx\, dt\right)^{\frac12} \left(\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}|u'_\varepsilon(t,x)|^2\, dx\, dt\right)^{\frac12} \\
&\quad\le c_0\sqrt{K_F^*(2)}\, \left(\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}|u'_\varepsilon(t,x)|^2\, dx\, dt\right)^{\frac12}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

其中我们用到了引理 3.1，且右端的积分有限，这归功于 $u_\varepsilon\in\mathcal{U}_\varepsilon^0$（回忆一下前面所用的 (2.10)）。此外，由于 (6.6)，被积函数中的第二项属于 $L^1((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$。

我们来证明映射 (6.1) 在 $\delta=0$ 处可微。由于对于 u_ε，经典时间导数 $u'_\varepsilon(t,x)$ 在几乎处处的 $(t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$ 处存在，因此我们有

$$\lim_{\delta\to0}\frac{u_\varepsilon(g_\delta(t),x)-u_\varepsilon(t,x)}{\delta} = -g(t)u'_\varepsilon(t,x) \qquad \text{for a.e. } (t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^N.$$

因此，鉴于对于几乎处处的 $(t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$，映射 $v\mapsto F(t,x,v)$ 被假设为 $C^1(\mathbb{R})$，见 (2.1)，我们推得

$$\lim_{\delta\to0}\frac{F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(g_\delta(t),x))-F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))}{\delta} = -g(t)\,\frac{\partial F}{\partial v}(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))\,u'_\varepsilon(t,x) \tag{6.8}$$

根据经典链式法则，这对几乎处处的 $(t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$ 成立。接下来我们证明，对于几乎处处的 $t\in(0,+\infty)$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to0}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}\frac{F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(g_\delta(t),x))-F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))}{\delta}\,dx \\
&\qquad = -\int_{\mathbb{R}^N} g(t)e^{-t}\,\frac{\partial F}{\partial v}(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))\,u'_\varepsilon(t,x)\,dx,
\end{aligned} \tag{6.9}$$

事实上，固定 t（除去一个零测度时间集）后，被积函数几乎处处逐点收敛可由 (6.8) 得出；另一方面，对同一个固定的 t，利用 $H^2((0,T);\,L^2(\mathbb{R}^N))$ 连续嵌入 $W^{1,\infty}((0,T);\,L^2(\mathbb{R}^N))$（对每个 $T>0$ 均成立），可得到一个控制函数，因此取足够大的 T，我们有

$$|u_\varepsilon(g_\delta(t),x)-u_\varepsilon(t,x)| \le \ell_T(x)|g_\delta(t)-t| = |\delta g(t)|\ell_T(x) \qquad \text{for a.e. } x\in\mathbb{R}^N$$

对于某个适当的非负 $\ell_T\in L^2(\mathbb{R}^N)$，因此由 (2.6)，对每个 $\delta\in(-\delta_0,0)\cup(0,\delta_0)$，我们得到估计

$$\frac{|F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(g_\delta(t),x))-F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))|}{|\delta|}e^{-t} \le e^{-t}|g(t)||f(\varepsilon t,x)|\ell_T(x) \qquad \text{对几乎处处的 } x\in\mathbb{R}^N,$$

其中右端在 $\mathbb{R}^N$ 中可积，因为由 (2.5) 可知 $\ell_T\in L^2(\mathbb{R}^N)$ 和 $f(\varepsilon t,\cdot)\in L^2(\mathbb{R}^N)$。既然已证明 $t\in(0,+\infty)$ 在逐点几乎处处意义下收敛于 (6.9)，我们接下来需要找到一个控制函数，以便通过时间积分取极限。我们利用这样一个事实：$e^{-t/2}u_\varepsilon\in H^2((0,+\infty);\,L^2(\mathbb{R}^N))\hookrightarrow W^{1,\infty}((0,+\infty);\,L^2(\mathbb{R}^N))$，因此二者均 $e^{-t/2}u_\varepsilon$

且 $e^{-t/2}u_\varepsilon'$ 属于 $L^\infty((0,+\infty);\, L^2(\mathbb{R}^N))$。令 $A_\varepsilon := \operatorname{esssup}_{t>0}\|e^{-t/2}u_\varepsilon'(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$，利用 (2.6) 以及与 (6.4) 中类似的论证，可得估计式

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}\frac{F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(g_\delta(t),x))-F(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))}{\delta}\,dx\right| &\le \int_{\mathbb{R}^N}\frac{e^{-t}}{|\delta|}f(\varepsilon t,x)\left|\int_t^{g_\delta(t)} u_\varepsilon'(s,x)\,ds\right|dx\\
&\le \frac{e^{-t}e^{(t\vee g_\delta(t))/2}}{|\delta|}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon t,x)\int_{t\wedge g_\delta(t)}^{t\vee g_\delta(t)} e^{-s/2}|u_\varepsilon'(s,x)|\,ds\,dx\\
&\le \frac{1}{|\delta|}e^{(-1+|\delta|c_0)t/2}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon t,x)|t-g_\delta(t)|^{\frac12}\left(\int_{t\wedge g_\delta(t)}^{t\vee g_\delta(t)}|e^{-s/2}u_\varepsilon'(s,x)|^2\,ds\right)^{\frac12}dx\\
&\le \frac{1}{|\delta|}e^{(-1+|\delta|c_0)t/2}|t-g_\delta(t)|^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(\varepsilon t,x)|^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{t\wedge g_\delta(t)}^{t\vee g_{\delta(t)}}|e^{-s/2}u_\varepsilon'(s,x)|^2\,ds\right)^{\frac12}\\
&\le \frac{A_\varepsilon}{|\delta|}e^{(-1+|\delta|c_0)t/2}|t-g_\delta(t)|\,\|f(\varepsilon t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le A_\varepsilon c_0\,te^{(-1+\delta_0c_0)t/2}\|f(\varepsilon t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

对每个 $\delta\in(-\delta_0,0)\cup(0,\delta_0)$ 都成立，其中右端根据证明 (6.5) 时所用的相同论证，在 $(0,+\infty)$ 上可积。由控制收敛定理可知，映射 (6.1) 在 $\delta=0$ 处可微，且其导数由 (6.2) 给出。

通过非常类似的论证，可以得到最后一个结论。 ∎

下面两个引理对 [11, 18] 中的结果作了略微推广，其表述借鉴了其中的一些记号。

引理 6.2. 设 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_F)$，并设 u_ε 是问题 (4.1) 的一个解。设

$$K_\varepsilon(t):=\frac{1}{2\varepsilon^2}\|u_\varepsilon'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},\quad D_\varepsilon(t):=\frac{1}{2\varepsilon^2}\|u_\varepsilon''(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},\quad L_\varepsilon(t):=D_\varepsilon(t)+W(u_\varepsilon(t,\cdot)).$$

设 $g:\,[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个 $C^{1,1}$ 非负函数，满足 $g(0)=0$，且当 t 足够大时，$g(t)$ 为仿射函数。则有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} e^{-t}\left[(g'(t)-g(t))L_\varepsilon(t)-4g'(t)D_\varepsilon(t)-g''(t)K_\varepsilon'(t)+\varepsilon tg'(0)(DW(u_\varepsilon(t,\cdot)),w_1)\right]dt\\
&\qquad=-\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t}\,\frac{\partial F}{\partial v}(\varepsilon t,x,u_\varepsilon(t,x))\,(g(t)\,u_\varepsilon'(t,x)-t\varepsilon g'(0)\,w_1(x))\,dx\,dt.
\end{aligned}\tag{6.10}$$

证明。关于 $F\equiv0$ 的证明见 [11, 命题 4.4、推论 4.5]。其方法是考虑 u_ε 的扰动 $u_{\delta,\varepsilon}$，如引理 6.1 中那样定义为 $u_{\varepsilon,\delta}(t,x):=u_\varepsilon(g_\delta(t)\;x)+t\delta\varepsilon g'(0)w_1$，其中 $\delta\in(-\delta_0,\delta_0)$，且 δ_0 充分小。事实上，[11] 中证明了，在 $F\equiv0$ 的情形下，$\delta\mapsto J(u_{\varepsilon,\delta})$ 在 $\delta=0$ 处的导数由 (6.10) 左端给出，其中各项积分确实都在 $(0,+\infty)$ 上可积，因此，由于 u_ε 的极小性，(6.10) 即得成立；显然，$u_{\varepsilon,\delta}$ 是一个可容许的竞争函数。因此，通过应用引理 6.1，可推出包含非零 F 的更一般结果。

∎

引理 6.3. 对于每个 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_F)$，设 u_ε 是问题 (4.1) 的一个解。存在一个常数 B，它与 ε 无关，只依赖于 w_0，w_1 和 F，使得

$$\int_0^{+\infty} se^{-s}\,W(u_\varepsilon(s,\cdot))\,ds\le\bar B.\tag{6.11}$$

在 $\varepsilon \to 0$ 的极限情形下，我们还有如下估计

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^{+\infty} s e^{-s}\, W(u_\varepsilon(s,\cdot))\, ds \le W(w_0). \tag{6.12}$$

此外，采用引理 6.2中的相同记号，对几乎处处的 $\tau > 0$ ，有 s

$$\begin{aligned} &\int_\tau^{+\infty} e^{-(t-\tau)} L_\varepsilon(t)\, dt - \int_\tau^{+\infty} (t-\tau) e^{-(t-\tau)} L_\varepsilon(t)\, dt - 4\int_\tau^{+\infty} e^{-(t-\tau)} D_\varepsilon(t)\, dt \\ &\qquad = K_\varepsilon'(\tau) - \int_\tau^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (t-\tau) e^{-(t-\tau)}\, \frac{\partial F}{\partial v}(\varepsilon t, x, u_\varepsilon(t,x))\, u_\varepsilon'(t,x)\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{6.13}$$

证明。 在引理 6.1 中取 $g(t) = t$ ，得到

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} t e^{-t} L_\varepsilon(t)\, dt - \int_0^{+\infty} e^{-t} L_\varepsilon(t)\, dt + 4\int_0^{+\infty} e^{-t} D_\varepsilon(t)\, dt \\ &\quad = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} s e^{-s} \frac{\partial F}{\partial v}(\varepsilon s, x, u_\varepsilon(s,x))\, u_\varepsilon'(s,x)\, dx\, ds + \varepsilon \int_0^{+\infty} s e^{-s} (DW(u_\varepsilon(s,\cdot)), w_1)\, ds \\ &\qquad - \varepsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} s e^{-s} \frac{\partial F}{\partial v}(\varepsilon s, x, u_\varepsilon(s,x)) w_1(x)\, dx\, ds, \end{aligned}$$

因此，由于 $\int_0^{+\infty} s e^{-s} W(u_\varepsilon(s,\cdot))\ ds \le \int_0^{+\infty} s e^{-s} L_\varepsilon(s)\ ds$，由 (2.5) 可得 (6.14

)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} s e^{-s} W(u_\varepsilon(s,\cdot))\, ds &\le \int_0^{+\infty} e^{-s} L_\varepsilon(s)\, ds + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} s e^{-s} f(\varepsilon s, x)\, |u_\varepsilon'(s,x)|\, dx\, ds \\ &\quad + \varepsilon \int_0^{+\infty} s e^{-s} |(DW(u_\varepsilon(s,\cdot)), w_1)|\, dt + \varepsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} s e^{-s} f(\varepsilon s, x)\, |w_1(x)|\, dx\, ds, \end{aligned}$$

并且我们可以对右端各项关于 ε 作一致估计。事实上， $\int_0^{+\infty} e^{-s} L_\varepsilon(s)\, ds^-$ 是 (4.2) 的左端，因此可按其中的方法用 C 进行估计。我们利用 (6.7) 和 $g(t) = t$ 来处理 $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} s e^{-s} f(\varepsilon s,$ $x)\ |u_\varepsilon'(s,x)|\, dx\, ds$ ，而 (6.7) 右端的积分可借助 (2.10) 和 (4.2) 估计为一个仅依赖于 w_0、 w_1 和 F 的常数。同理，我们利用 (6.6) 估计 $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} s e^{-s} f(\varepsilon s, x) |w_1(x)|\, dx\, ds$。此外，根据杨氏不等式

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} s e^{-s} |(DW(u_\varepsilon(s,\cdot)), w_1)|\, ds \\ &\le \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} s e^{-2} [|\nabla u_\varepsilon(s,x)||\nabla w_1(x)| + |u_\varepsilon(s,x)|^{r-1} |w_1|]\, dx\, ds \\ &\le \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-s} \left(\frac{s^2}{2} |\nabla w_1(x)|^2 + \frac{s^r}{r} |w_1(x)|^r + \frac{1}{2} |\nabla u_\varepsilon(s,x)|^2 + \frac{r-1}{r} |u_\varepsilon(s,x)|^r \right) dx\, ds \\ &\le \|\nabla w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{\Gamma(r+1)}{r} \|w_1\|^r_{L^r(\mathbb{R}^N)} + r \int_0^{+\infty} e^{-s} W(u_\varepsilon(s,\cdot))\, ds \end{aligned}$$

并通过利用 (4.2) 估计右端，得到 (6.11)，由此完成证明。根据上述估计和引理 3.1，也显然可知 (6.14) 的最后两项在 $\varepsilon \to 0$ 时趋于零。(6.14) 右端的第二项在 $\varepsilon \to 0$ 时也趋于零，

因为结合 (2.9)、(4.2) 和引理 3.1 应用柯西-施瓦茨不等式后，我们可得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} se^{-s}f(\varepsilon s,x)\,|u_\varepsilon'(s,x)|\,dx\,ds &\le \sqrt{K_F^*(2)}\left(\int_0^{+\infty} e^{-s}\|u_\varepsilon'(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac12}\\ &\le \sqrt{K_F^*(2)}\left(2\varepsilon^2\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+4\int_0^{+\infty} e^{-s}\|u_\varepsilon''(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac12}\\ &\le \sqrt{K_F^*(2)}\left(2\varepsilon^2\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+8\varepsilon^2\bar{C}\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

因此，通过令 $\varepsilon\to 0$ 在 (6.14) 中取极限，回顾 L_ε 在引理 6.2 中的定义，并应用引理 4.2，我们推得 (6.12)。

最后，借助 [11, 推论 4.7], 中的论证可由 (6.10) 得到 (6.13)，该推论在 $F\equiv 0$ 的情形下证明了这一公式。事实上，在引理 6.1 中取 $g=g_n$，其中 g_n 是由 [11, 推论 4.7], 中的 C^1, $_1$函数构成的序列, 并逐点收敛到 $g(t)=(t-\tau)_+$，当 $n\to+\infty$ 时，在 $F\equiv 0$ 的情形下便可如其中所示得到 (6.13)。若 F 非零，则 (6.10) 中涉及 F 的项根据控制收敛定理在 $n\to+\infty$ 时收敛至其极限。 ■

现在我们可以给出引理 4.3 的证明。证明基于 [18, 命题 5.4], 中的论证以及引理 3.3。

引理 L 的证明 emma 4.3。我们按引理 6.2 中的方式定义 K_ε 和 D_ε。计算可得 t hat

$$E_\varepsilon'(t)=K_\varepsilon'(t)+\int_t^{+\infty}(s-t)e^{-(s-t)}W(u_\varepsilon(s,\cdot))\,ds-\int_t^{+\infty}e^{-(s-t)}W(u_\varepsilon(s,\cdot))\,ds$$

对几乎处处的 $t>0$成立，结合 (6.13) 和 (2.5)，可得

$$\begin{aligned}E_\varepsilon'(t) &= -3\int_t^{+\infty}e^{-(s-t)}D_\varepsilon(s)\,ds-\int_t^{+\infty}(s-t)e^{-(s-t)}D_\varepsilon(s)\,ds\\ &\quad+\int_t^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-(s-t)}(s-t)\,\frac{\partial F}{\partial v}(\varepsilon s,x,u_\varepsilon(s,x))\,u_\varepsilon'(s,x)\,dx\,ds,\\ &\le -3\int_t^{+\infty}e^{-(s-t)}D_\varepsilon(s)\,ds-\int_t^{+\infty}(s-t)e^{-(s-t)}D_\varepsilon(s)\,ds\\ &\quad+\int_t^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-(s-t)}(s-t)\,f(\varepsilon s,x)\,|u_\varepsilon'(s,x)|\,dx\,ds,\end{aligned}$$

因此，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}E_\varepsilon'(t) &\le -3\int_t^{+\infty}e^{-(s-t)}D_\varepsilon(s)\,ds-\int_t^{+\infty}(s-t)e^{-(s-t)}D_\varepsilon(s)\,ds\\ &\quad+\left(\int_t^{+\infty}(s-t)e^{-(s-t)}\|f(\varepsilon s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,ds\right)^{\frac12}\left(\int_t^{+\infty}(s-t)e^{-(s-t)}\|u_\varepsilon'(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,ds\right)^{\frac12}\end{aligned}$$

对几乎处处的 $t>0$。通过采用适当形式的格朗沃尔引理，在 [18, 命题 5.4] 的证明中可证明，后一估计意味着，对于每个 $t\ge 0$ 和每个 $\beta>1$

$$\sqrt{E_\varepsilon(t)}\le\sqrt{E_\varepsilon(0)}+\sqrt{\varepsilon}(\tilde{C}_\beta+\sqrt{t\beta/2})\left(\varepsilon\int_0^t\left(\int_s^{+\infty}(\tau-s)e^{-(\tau-s)}\|f(\varepsilon\tau,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,d\tau\right)\,ds\right)^{\frac12},$$

其中 $\tilde{C}_\beta$ 是一个适当的正常数，仅依赖于 β，使得 $\tilde{C}_2 = \sqrt{2\sqrt{2}/(\sqrt{2}-1)}$。回顾 (3.1) 中 Q_ε 的定义，后一估计可写为

$$\sqrt{E_\varepsilon(t)} \le \sqrt{E_\varepsilon(0)} + \sqrt{\varepsilon}(\tilde{C}_\beta + \sqrt{t\beta/2}) \left(\varepsilon \int_0^t Q_\varepsilon(\varepsilon s)\, ds \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.15}$$

由于 $E_\varepsilon(0) = K_\varepsilon(0) + \int_0^{+\infty} s e^{-s} W(u_\varepsilon(s,\cdot))\, ds$，又由于 $K_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon^2}\|u_\varepsilon'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ 且 $u_\varepsilon'(0,\cdot) = \varepsilon w_1$，我们看到 $K_\varepsilon(0) = \frac{1}{2}\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$，并得到 $E_\varepsilon(0) \le \frac{1}{2}\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \bar{B} =: Q$ 其中 B 是 (6.11) 中出现的常数。因此，由 (6.15) 并取 $\beta = 2$，我们得到 (4.5)，因为 $\varepsilon < \varepsilon_F < 1$。此外，同样由 (6.15) 可得

$$\sqrt{E_\varepsilon(t/\varepsilon)} \le \sqrt{\frac{1}{2}\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_0^{+\infty} s e^{-s} W(u_\varepsilon(s,\cdot))\, ds} + \left(\sqrt{\varepsilon}\tilde{C}_\beta + \sqrt{t\beta/2} \right) \left(\int_0^t Q_\varepsilon(s)\, ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

对每个 $t \ge 0$ 以及每个 $\beta > 1$ 都成立，并且我们回顾一下，根据引理 3.3，有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t Q_\varepsilon(s)\, ds = \int_0^t \|f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\, ds,$$

因此，利用（6.12）可得

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \sqrt{E_\varepsilon(t/\varepsilon)} \le \left(\frac{1}{2}\|w_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + W(w_0) \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{t\beta/2} \left(\int_0^t \|f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\, ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

令 $\beta \to 1$ 趋于极限，可得（4.7）。 ■

致谢。作者感谢 MIUR-PRIN 项目（编号：2017TEXA3H）提供的支持。EM 获意大利国家高等数学研究所（INDAM）项目资助，CUP_E55F22000270001。

参考文献

[1] P. Avramidou，由逼近单位诱导的卷积算子及在$L^p(\mathbb{R})$ 空间中的逐点收敛。《美国数学会会刊》133 (2004)，第 1 期，175–184。[2] H.S. Bear，逼近单位与逐点收敛。《太平洋数学杂志》81 (1979)，17–27。[3] E. De Giorgi，关于若干演化问题的猜想。庆祝 *John F. Nash, jr*。《杜克数学杂志》81 (1996)，61-100。[4] E. De Giorgi，《精选论文集》。施普林格出版社，纽约，2006，（由 L. Ambrosio、G. Dal Maso、M. Forti、M. Miranda 和 S. Spagnolo 编）。[5] A. Kundu，可积变质量正弦-戈登模型中的形状变化与加速孤子，《物理评论快报》99，154101 (2007)。[6] G. Lebeau，超临界波动方程的正则性损失，《法国数学会通报》133 (2005)，第 1 期，145–157。[7] M. Liero，U. Stefanelli，拉格朗日力学的一个新最小值原理，《非线性科学杂志》23 (2) (2013)，179–204。[8] M. Liero，U. Stefanelli，半线性方程的加权惯性-耗散-能量泛函，《意大利数学联合会通报》（第 9 系列）6 (2013)，第 1 期，1–27。[9] E. Mainini，D. Percivale，作为变分问题极限的牛顿第二定律，《连续与离散模型进展》2023，20 (2023)。[10] E. Serra，P. Tilli，作为凸极小化问题极限的非线性波动方程：*De Giorgi*猜想的证明，《数学年刊》175 (2012)，1551–1574。[11] E. Serra，P. Tilli，求解双曲型柯西问题的极小化方法。《欧洲数学会杂志》18 (2016)，第 9 期，2019–2044。

[12] S. Ibrahim，M. Majdoub，N. Masmoudi，能量超临界波的适定性与非适定性问题，《分析与偏微分方程》4 (2011)，第 2 期，341–367。[13] U. Stefanelli，关于椭圆正则化的德乔治猜想，《数学模型与方法应用科学》21 (2011)，1377–1394。[14] J. Shatah 和 M. Struwe，《几何波动方程》，《库朗数学讲义》第 2 卷，纽约大学库朗数学科学研究所，纽约，1998。[15] M. Struwe，半线性波动方程，《美国数学会通报》26 (1992)，第 1 期，53–85。[16] M. Struwe，超临界非线性波动方程与薛定谔方程的唯一性与稳定性，《国际数学研究通知》2006 2006 76737 ( )，T. Tao，超临界散焦非线性波动系统的有限时爆破，《分析与偏微分方程》9 (2016)，第 8 期，1999–2030。[18] L. Tentarelli，P. Tilli，德乔治方法与双曲型柯西问题：非齐次方程的情形，《偏微分方程通讯》43 (4) (2018)，677–698。[19] L. Tentarelli，P. Tilli，通过极小化方法求解耗散型非齐次双曲方程的一个存在性结果，《微分方程杂志》266 (2019)，5185–5208。
[17]

热那亚大学，机械、能源、管理与运输工程系（DIME），Via all’Opera Pia, 15 - 16145 热那亚，意大利。电子邮箱地址：edoardo.mainini@unige.it；percivale@dime.unige.it